NGUYÊN HÀM

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.
- Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x)=F(x)+C$.
- **Chú ý:** Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất

- Nếu f,g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ (với $k\neq 0$) $\Rightarrow\int[k.f(x)+l.g(x)]\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+l\int g(x)\mathrm{d}x$
- $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)+C$

3. Công thức đổi biến số: $\boxed{\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=F[u(x)]+C}$

4. Công thức nguyên hàm từng phần: $\boxed{\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u}$

5. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u=u(x)$	Thường gặp
$\int\mathrm{d}x=x+C$	$\int\mathrm{d}u=u+C$	Vi phân $\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)=\mathrm{d}x$
$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	$\int(ax+b)^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$
$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\lvert x\rvert+C\ (x\neq0)$	$\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\lvert u\rvert+C\ (u(x)\neq0)$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C\ (a\neq0)$
$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$	$\int\cos u\mathrm{d}u=\sin u+C$	$\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$	$\int\sin u\mathrm{d}u=-\cos u+C$	$\int\sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2u}\mathrm{d}u=\tan u+C$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$ Với $x\neq k\pi$	$\int\frac{1}{\sin^2u}\mathrm{d}u=-\cot u+C$ Với $u(x)\neq k\pi$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)}=\frac{-1}{a}\cot(ax+b)+C$
$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$	$\int e^u\mathrm{d}u=e^u+C$	$\int e^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$	$\int a^u\mathrm{d}u=\frac{a^u}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$	$\int a^{px+q}\mathrm{d}x=\frac{1}{p.\ln a}a^{px+q}+C\ (0<a\neq1)$

❖ **Một số nguyên tắc tính nguyên hàm cơ bản**

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của $\sin$ hoặc $cos \xrightarrow{PP}$ hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2a$; $cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

❖ **Phương pháp đổi biến số**

- Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f\left[u(x)\right].u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C$
- Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích hàm số đã cho $f(x) = g\left[u(x)\right].u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó, ta thấy $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G\left[u(x)\right] + C$.
- **Chú ý:** Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

❖ **Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ** $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) \leq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

❖ **Nguyên hàm từng phần**

- Cho hai hàm số u và v liên tục trên $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó ta có được $\int udv = uv - \int vdu \quad (*)$
- Để tính nguyên hàm $\int udv = uv - \int vdu$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:
- **Bước 1:** Chọn u, v sao cho $f(x)dx = udv$ (Chú ý: $dv = v'(x)dx$ và)
    - Tính $v = \int dv$ và $du = u'dx$.
- **Bước 2:** Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.
    - Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$.

➢ Mẹo nhớ: "**Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**"

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^x$ là

A. $3\cos 3x-\sin 3x+C$. **B.** $-3\cos 3x-\cos 3x+C$.

C. $3\sin 3x-\cos 3x+C$. **D.** $3\cos 3x-\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$ suy ra $f(x).e^x=(\sin 3x)'=3\cos 3x$.

Xét $I=\int f'(x).e^x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó ta có $I=\int f'(x).e^x\mathrm{d}x=f(x).e^x-\int f(x).e^x\mathrm{d}x=3\cos 3x-\sin 3x+C$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết x^2-3x+1 là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$ là

A. $\frac{4x-11e^{2x}}{2}+C$. **B.** $2x-2e^{2x}+C$. **C.** $\frac{4x-5e^x}{2}+C$. **D.** $\frac{4x-5e^{2x}}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có x^2-3x+1 là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ suy ra $\frac{f(x)}{x}=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

Suy ra $f(x)=2x^2-3x$ suy ra $f'(x)=4x-3$. Xét $I=\int(4x-3).e^{2x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=4x-3\\ \mathrm{d}v=e^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$.

Khi đó ta có:

$$I=\int(4x-3).e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{(4x-3).e^{2x}}{2}-2\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{(4x-3).e^{2x}}{2}-e^{2x}+C=\frac{4x-5e^{2x}}{2}+C.$$

VÍ DỤ 3. Tìm $\int\sin 5x.\cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{5}\cos 5x+\mathrm{C}$. **B.** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+C$.

C. $-\frac{1}{5}\cos 5x+C$. **D.** $\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{12}\cos 6x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\int\sin 5x.\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin 6x+\sin 4x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 6x}{6}-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C=-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 4x+C.$$

VÍ DỤ 4. Cho $\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}.\frac{(x-1)^{b}}{(x+1)^{c}}+C$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 4.2018. **B.** 2.2018. **C.** 3.2018. **D.** 5.2018.

Lời giải

Chọn A

$I=\int\frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017}.\frac{1}{(x+1)^{2}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2}{(x+1)^{2}}\mathrm{d}x$.

Khi đó $I=\int t^{2017}\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}.\frac{t^{2018}}{2018}+C=\frac{1}{2.2018}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C$

$=\frac{1}{2.2018}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018}+C=\frac{1}{2.2018}.\frac{(x-1)^{2018}}{(x+1)^{2018}}+C$.

Suy ra $a=2.2018$, $b=2018$, $c=2018$ nên $a+b+c=4.2018$.

VÍ DỤ 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-2}$, thỏa mãn $F(3)=1$ và $F(1)=2$, giá trị của $F(0)+F(4)$ bằng

A. $2\ln 2+3$. **B.** $2\ln 2+2$. **C.** $2\ln 2+4$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln(x-2)+C_1 & \text{khi } x>2\\ \ln(2-x)+C_2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Do $\begin{cases}F(3)=1\\F(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$. Khi đó $F(x)=\begin{cases}\ln(x-2)+1 & \text{khi } x>2\\ \ln(2-x)+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Vậy $F(0)+F(4)=(\ln 2+2)+(\ln 2+1)=2\ln 2+3$.

VÍ DỤ 6. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^{x}+1}$ và $F(0)=-\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x)+\ln(e^{x}+1)=2$ là:

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2;3\}$. **C.** $S=\{-2;3\}$. **D.** $S=\{-3;3\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{e^{x}+1}dx=\int\frac{e^{x}}{e^{x}(e^{x}+1)}dx$.

Đặt $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$. $I=\int \frac{dt}{t(t+1)}=\int (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\ln t-\ln(t+1)+C=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C.$

Khi đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C,\ F(0)=-\ln 2e \Leftrightarrow -\ln 2+C=-\ln 2-1 \Leftrightarrow C=-1$

Do đó: $F(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)-1.$

$F\left(x\right)+\ln\left(e^x+1\right)=2 \Leftrightarrow \ln e^x-\ln(e^x+1)-1+\ln\left(e^x+1\right)=2 \Leftrightarrow \ln e^x=3 \Leftrightarrow x=3.$

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)=2xe^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f\left(x\right)e^{x^2}$ là

A. $\left(x^2+1\right)^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2e^{-x^2}+C$. **C.** $\left(x^2+1\right)^2e^{-x^2}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)=2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}\left(f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)\right)=e^{x^2}.2xe^{-x^2} \Leftrightarrow \left(e^{x^2}f\left(x\right)\right)'=2x$

$\Rightarrow e^{x^2}f\left(x\right)=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Vì $f(0)=1 \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow f\left(x\right)=\left(x^2+1\right)e^{-x^2}$.

Vậy $\int xf\left(x\right)e^{x^2}\mathrm{d}x=\int x\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2+C$.

VÍ DỤ 8. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f\left(x\right)=x^2\mathrm{e}^{ax}\left(a\neq 0\right)$, sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right)=F\left(0\right)+1.$ Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0<a\leq 1$. **B.** $a<-2$. **C.** $a\geq 3$. **D.** $1<a<2$.

Lời giải

Chọn A

$F\left(x\right)=\int x^2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\end{cases}$.

$\Rightarrow F\left(x\right)=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a}\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}.A\ (1)$

Xét $A=\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^{ax}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}\mathrm{d}x\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $F\left(x\right)=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a^2}xe^{ax}+\frac{2}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^2\mathrm{e}^{ax}-\frac{2}{a^2}x\mathrm{e}^{ax}+\frac{2}{a^3}\mathrm{e}^{ax}+C$.

Mà $F\left(\frac{1}{a}\right)=F(0)+1 \Rightarrow \frac{1}{a^3}\mathrm{e}-\frac{2}{a^3}\mathrm{e}+\frac{2}{a^3}\mathrm{e}+C=\frac{2}{a^3}+1+C$

$\Rightarrow a^3=\mathrm{e}-2 \Rightarrow a=\sqrt[3]{\mathrm{e}-2} \Rightarrow 0<a\le 1.$

VÍ DỤ 9. Cho $I=\int_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\frac{a}{b}\ln 2-\frac{1}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\frac{a+b}{c}$.

A. $S=\frac{5}{6}$. **B.** $S=\frac{1}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_1^2 \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx+\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Xét $I_1=\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx$. Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$.

$I_1=\int_2^3 \frac{t-1}{t^2}dt=\int_2^3 \frac{1}{t}dt-\int_2^3 \frac{1}{t^2}dt=\ln|t|\Big|_2^3+\frac{1}{t}\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$.

Xét $I_2=\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{3}\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

$I_2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2=-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}$. Do đó $I=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 2+\ln\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}$.

$\Rightarrow S=\frac{a+b}{c}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$.

TÍCH PHÂN

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$. *Chú ý:* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = ...$

2. Tính chất

⊕ $\int_a^a f(x)dx = 0$

⊕ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

⊕ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \ (a<b<c)$

⊕ $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \ (k\in\mathbb{R})$

⊕ $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u=u(x)$	Thường gặp
$\int dx = x+C$	$\int du = u+C$	Vi phân $\frac{1}{a}d(ax+b) = dx$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \ (x\neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C \ (u(x)\neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C \ (a\neq 0)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ Với $x\neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$ Với $u(x)\neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b)+C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \ (0<a\neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C \ (0<a\neq 1)$	$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q}+C \ (0<a\neq 1)$

4. Phương pháp đổi biến số

- **Dạng 1:** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha\le u(x)\le\beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có :

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.}$$

- **Dạng 2:** Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x=\varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ và $a\le\varphi(t)\le b$ với mọi $t\in[\alpha;\beta]$. Khi đó:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

⊕ $\sqrt{a^2-x^2}$: đặt $x=|a|\sin t;\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

⊕ $\sqrt{x^2-a^2}$: đặt $x=\frac{|a|}{\sin t};\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

⊕ $\sqrt{x^2+a^2}$: $x=|a|\tan t;\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

⊕ $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x=a.\cos 2t$

5. Phương pháp từng phần

- Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì :

$$\boxed{\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu}$$

- **Các dạng cơ bản:** Giả sử cần tính $I=\int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\sin kx$ hoặc $\cos kx$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là e^{kx}	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\ln(ax+b)$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\frac{1}{\sin^2 x}$
Cách đặt	$u=P(x)$ dv là phần còn lại	$u=P(x)$ dv là phần còn lại	$u=\ln(ax+b)$ $dv=P(x)dx$	$u=P(x)$ dv là phần còn lại

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$

Ta có: $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$

Từ hệ thức đề ra: $\int_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Rightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có:

$\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\mathrm{e}^x+m\right)=m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$ và $f(0)=m+1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ hay $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}\left(3+x^2\right)+\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^0+\left(\mathrm{e}^x-x\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}+2\sqrt{3}-\frac{22}{3}$.

Suy ra $a=1$, $b=2$, $c=-\frac{22}{3}$.

Vậy tổng $a+b+3c=-19$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 16$. **B.** $I = 18$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 20$.

Lời giải

Chọn D

$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$, $B = \int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x = 6$ đặt $t = 3x+1 \Rightarrow dt = 3dx$.

Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = 7 \end{cases}$

Ta có: $B = \frac{1}{3}\int_1^7 f(t)\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int_1^7 f(t)\mathrm{d}t = 18 \Rightarrow \int_1^7 f(x)\mathrm{d}x = 18$.

Vậy $I = \int_0^7 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^7 f(x)\mathrm{d}x = 20$.

VÍ DỤ 4: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx = \frac{-11}{3}\ln 2 + b\ln 3 + c\,(b, c \in Q)$. Tính $\frac{b}{c}$?

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{22\pi}{3}$. **C.** $\frac{22}{3\pi}$. **D.** $\frac{22\pi}{13}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x} = \frac{m(2\sin x + 3\cos x) + n(2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x}$

$= \frac{(2m - 3n)\sin x + (3m + 2n)\cos x}{2\sin x + 3\cos x}$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases} 2m - 3n = 3 \\ 3m + 2n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{13} \\ n = -\frac{11}{13} \end{cases}$.

Nên: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{13}(2\sin x + 3\cos x) - \frac{11}{13}(2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{13} - \frac{11}{13}.\frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x}\right]dx = \frac{3}{13}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{11}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x}dx$

$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(2\sin x + 3\cos x\right)}{2\sin x + 3\cos x}dx = \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13}\ln\left|2\sin x + 3\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13}\ln 2 + \frac{11}{13}\ln 3$. Do đó: $\begin{cases} b = \frac{11}{13} \\ c = \frac{3\pi}{26} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{13}.\frac{26}{3\pi} = \frac{22}{3\pi}$.

VÍ DỤ 5: Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\mathrm{d}x = \frac{3\mathrm{e}^a + 1}{b}$?

A. $a.b = 64$. **B.** $a.b = 46$. **C.** $a - b = 12$. **D.** $a - b = 4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{cases}$. Áp dụng tích phân từng phần ta tính được:

$\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{4}x^3\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{3\mathrm{e}^4 + 1}{16} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases} \Rightarrow a.b = 64$.

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và thoả mãn $f\left(2\right) = 16, \int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4$

Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = 13$. **D.** $I = 20$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Vậy $I = \frac{1}{4}\int_0^2 tf'\left(t\right)\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'\left(t\right)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f\left(t\right) \end{cases}$, khi đó $4I = \left[tf\left(t\right)\right]\Big|_0^2 - \int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t$

$= 2f\left(2\right) - \int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 32 - 4 = 28 \Rightarrow I = 7$.

VÍ DỤ 7: Tính tích phân $I = \int_0^{e-1} x\ln\left(x+1\right)dx$ ta được kết quả có dạng $\frac{ae^2 + b}{c}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a^2 + 2b - 3c$.

A. 17. **B.** 10. **C.** -17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=xdx\end{cases}$, khi đó ta chọn được $\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=\dfrac{x^2-1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $I=\int_0^{e-1} x\ln(x+1)dx=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\dfrac{x-1}{2}dx=\dfrac{e^2-2e}{2}-\dfrac{x^2-2x}{4}\Big|_0^{e-1}$

$=\dfrac{e^2-2e}{2}-\dfrac{e^2-4e+3}{4}=\dfrac{e^2-3}{4}$.

Do đó $a=1,\ b=-3,\ c=4$. Vậy ta có $T=a^2+2b-3c=1^2+2(-3)-3.4=-17$.

VÍ DỤ 8: Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{dx}=\dfrac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b$?

A. $T=9$. **B.** $T=13$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Lờigiải

Chọn D

Ta giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\cos^2 x}\mathrm{dx}$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$.

Suy ra: $I=x\tan x\big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{dx}=x\tan x\big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{d}\ \cos x}{\cos x}=\ x\tan x+\ln|\cos x|\ \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\dfrac{\pi}{3}.\tan\dfrac{\pi}{3}+\ln\left|\cos\dfrac{\pi}{3}\right|\right)-\ 0.\tan 0+\ln|\cos 0|\ =\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2=\dfrac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$

$\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a^2+b=11$

VÍ DỤ 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $A=\int_0^2(x-1)f'(x)\mathrm{dx}=9$ và $f(2)+f(0)=3$.

Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{dx}$

A. $I=12$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=-6$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Ta có: $A = \int_0^2 (x-1) f'(x)\mathrm{d}x = (x-1) f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = f(2) + f(0) - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Với $A = 9$ và $f(2) + f(0) = 3$ nên $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -6$.

VÍ DỤ 10: Nghiệm dương a của phương trình $\int_1^a (2x-1)\ln x\mathrm{d}x = (a^2 - a)\ln a - 9$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;10)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = (2x-1)\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $v = x^2 - x$.

Khi đó, đặt $I = \int_1^a (2x-1)\ln x\mathrm{d}x = (x^2 - x)\ln x\Big|_1^a - \int_1^a (x^2 - x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$= (a^2 - a)\ln a - \int_1^a (x-1)\mathrm{d}x = (a^2 - a)\ln a - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^a$

$= (a^2 - a)\ln a - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - a + 1\right) = (a^2 - a)\ln a - \left(\frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2}\right)$.

Theo giả thiết: $I = (a^2 - a)\ln a - 9 \Rightarrow \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = 9 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 - 3\sqrt{2} \\ a = 1 + 3\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Do $a > 0$ nên $a = 1 + 3\sqrt{2}$.

DẠNG 1 Các phương pháp tính nguyên hàm cơ bản

Câu 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$.

A. $F(x)=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}+C$.

B. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{2}{x+1}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{2}{x+1}+C$.

D. $F(x)=1-\dfrac{2}{(x+1)^2}+C$.

Câu 2: Tính $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$. **B.** $-\cos 3x+C$. **C.** $\cos 3x+C$. **D.** $\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)=2x+1$. Giá trị $f(2)-f(1)$ bằng

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{3x+2}$ là

A. $\dfrac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.

B. $\dfrac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.

C. $\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.

D. $\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}+C$.

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln|x|+\cos x+C$. **B.** $\ln|x|-\cos x+C$. **C.** $\ln x-\cos x+C$. **D.** $\dfrac{1}{x^2}-\cos x+C$.

Câu 6: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}(x\neq 0)$, biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$.

A. $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{3}{4x}-\dfrac{7}{4}$. **B.** $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{7}{4}$.

C. $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4}$. **D.** $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=2019^x(4-x^2)(x^2-3x+2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+3+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

Câu 9: Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x+1$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(3x+1)^2+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=(3x+1)^2+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(3x+1)^2+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(3x+1)^2+C.$

Câu 10: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1)+2$. **B.** $\ln(x-1)+3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1)-3$.

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(e+1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1)+2$. **B.** $\ln(x-1)+3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1)-3$.

Câu 12: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1)=2$. Giá trị của $F(2)$ là

A. $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3-2$. **B.** $F(2)=\ln 3+2$. **C.** $F(2)=2\ln 3-2$. **D.** $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3+2$.

Câu 13: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 14: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{x}{2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 15: Nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ là

A. $\frac{-\sqrt{x}}{2}+C$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **C.** $\frac{-2}{\sqrt{x}}+C$. **D.** $\frac{\sqrt{x}}{2}+C$.

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x.\cos 2x$ là

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x+C$. **B.** $\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x+C$.

C. $\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x+C$. **D.** $-\cos 3x+\cos x+C$.

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+\sin 2x$ là:

A. $x^2-\frac{1}{2}c\cos 2x+c$. **B.** $x^2+\frac{1}{2}c\cos 2x+c$. **C.** $x^2-2c\cos 2x+c$. **D.** $x^2-2c\cos 2x+c$.

Câu 18: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+1,\ \forall x, f(0)=2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y=2e^x+2x$. **B.** $y=2e^x+2$. **C.** $y=e^{2x}+x+2$. **D.** $y=e^{2x}+x+1$.

Câu 19: Hàm số nào dưới đây là họ nguyên hàm của hàm số $y=\cos 2x$?

A. $y=\sin 2x+C$. **B.** $y=\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

C. $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2+C$. **D.** $y=2\sin 2x+C$.

Câu 20: Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2-4x+C$. Tìm $\int f(e^x)\mathrm{d}x$

A. $\int f(e^x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}e^{2x}-4e^x+C$. **B.** $\int f(e^x)\mathrm{d}x=3e^{2x}-4e^x+C$.

C. $\int f(e^x)\mathrm{d}x=6e^x+4x+C$. **D.** $\int f(e^x)\mathrm{d}x=6e^x-4x+C$.

Câu 21: Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}-6x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+C$. **B.** $F(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+C$.

C. $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$. **D.** $F(x)=x^3+6x^2+11x^2+6x+C$.

Câu 22: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x.\cos x+\frac{1}{x+1}$ là

A. $F(x)=\frac{1}{4}\cos 2x+\ln|x+1|+C$. **B.** $F(x)=-4\cos 2x+\ln|x+1|+C$.

C. $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x+\ln(x+1)+C$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x+\ln|x+1|+C$.

Câu 23: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin 2x$ là

A. $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 24: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{2018}{x^4}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{2018}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{504,5}{x^4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{504,5}{x^4}+C$.

Câu 25: Hàm số $F(x)=x^3+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=3x^2-\cos x.$ **B.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x.$

C. $f(x)=3x^2+\cos x.$ **D.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x.$

Câu 26: Hàm số $F(x)=x^3+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x)=3x^2-\cos x.$ **B.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x.$

C. $f(x)=3x^2+\cos x.$ **D.** $f(x)=\frac{x^4}{4}-\cos x.$

Câu 27: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+1$ là

A. $\cos x+C$. **B.** $\cos x+x+C$. **C.** $-\cos x+C$. **D.** $-\cos x+x+C$.

Câu 28: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f\left(x\right)+1}{\mathrm{e}^{x}}$

A. $\int\dfrac{f\left(x\right)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

B. $\int\dfrac{f\left(x\right)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

C. $\int\dfrac{f\left(x\right)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+C$.

D. $\int\dfrac{f\left(x\right)+1}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+C$.

Câu 29: Hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ trên $\left(-\infty;0\right)$ thỏa mãn $F\left(-2\right)=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F\left(x\right)=\ln\left(\dfrac{-x}{2}\right)\ \forall x\in\left(-\infty;0\right)$

B. $F\left(x\right)=\ln\left|x\right|+C\ \ \forall x\in\left(-\infty;0\right)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F\left(x\right)=\ln\left|x\right|+\ln 2\ \forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

D. $F\left(x\right)=\ln\left(-x\right)+C\ \ \forall x\in\left(-\infty;0\right)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 30: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x^{2}e^{x^{3}+2}+2xe^{2x}$, ta có $\int f\left(x\right)dx=me^{x^{3}+2}+nxe^{2x}-pe^{2x}+C$. Giá trị của biểu thức $m+n+p$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{13}{6}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Câu 31: Cho biết $\int\dfrac{2x-13}{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}\mathrm{d}x=a\ln\left|x+1\right|+b\ln\left|x-2\right|+C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Câu 32: Tìm nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^{2}}$.

A. $F\left(x\right)=-\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$.

B. $F\left(x\right)=\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.

C. $F\left(x\right)=\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$.

D. $F\left(x\right)=-\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 33: Biết hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=3x^{2}+2x+m$, $f\left(2\right)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5. Hàm số $f\left(x\right)$ là:

A. $x^{3}+2x^{2}-5x-5$. **B.** $2x^{3}+x^{2}-7x-5$. **C.** $x^{3}+x^{2}-3x-5$. **D.** $x^{3}+x^{2}+4x-5$.

Câu 34: Cho biết $\int\dfrac{4x+11}{x^{2}+5x+6}\mathrm{d}x=a\ln\left|x+2\right|+b\ln\left|x+3\right|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^{2}+ab+b^{2}$.

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 35: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}$ là

A. $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}+1}+C$. **B.** $\dfrac{-2}{\mathrm{e}^{x}+1}+C$. **C.** $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x}+1}+C$. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}+C$.

Câu 36: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$. **B.** $F(x)=e^x+x^2-\frac{1}{2}$.

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$. **D.** $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 37: Hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+2x-5$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $y=-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x^2-5x+1$. **B.** $y=\mathrm{e}^{-x}+x^2-5x$.

C. $y=-\mathrm{e}^{-x}+2$. **D.** $y=-\mathrm{e}^{-x}+x^2-5x+3$.

Câu 38: Cho biết $\int\frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x=a\ln\left|(x-1)(x+1)\right|+b\ln|x|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=2a+b$.

A. 0. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 39: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=1009.\frac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2019.2020}$. **C.** $T=\frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Câu 40: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$, thỏa mãn $F(0)=2020$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=\frac{e^{2020}-1}{e-1}+2019.2020$. **B.** $T=\frac{e^{2019}-1}{e-1}+2018.2019$.

C. $T=\frac{e^{2020}-1}{e-1}+2020^2$. **D.** $T=\frac{e^{2019}-1}{e-1}+2019^2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\cos 4x$ có một nguyên hàm là $F(x)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int F(x)\mathrm{d}x=-\frac{\cos 4x}{4}+2x+C$. **B.** $\int F(x)\mathrm{d}x=-4\cos 4x+2x+C$.

C. $\int F(x)\mathrm{d}x=-\cos 4x+2x+C$. **D.** $\int F(x)\mathrm{d}x=-\frac{\cos 4x}{16}+2x+C$.

Câu 42: Cho $\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=a\ln|x-1|+b\ln|x+1|+C$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 43: Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx-c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2018x^2-3x+1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T=a+2b+4c$.

A. $T=1011$. **B.** $T=-3035$. **C.** $T=1007$. **D.** $T=-5053$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Câu 45: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Câu 46: Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. **B.** $a=1, b=4$. **C.** $a=1, b=-1$. **D.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Câu 47: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{4}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Câu 48: Biết rằng $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^x$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(-1)$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{5-\mathrm{e}}{2}$. **C.** $\dfrac{7-\mathrm{e}}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 49: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 50: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $2<f(5)<3$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=x^2$ và $f(1)=-1$. Giá trị của $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{96}$. **B.** $\dfrac{1}{64}$. **C.** $\dfrac{1}{48}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Câu 52: Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x^2-5x+2)\mathrm{e}^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $f(F(0))$ bằng:

A. $\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $3\mathrm{e}$. **C.** $20\mathrm{e}^2$. **D.** $9\mathrm{e}$.

Câu 53: Cho hai hàm số $F(x)=(x^2+ax+b)\mathrm{e}^x$, $f(x)=(x^2+3x+4)\mathrm{e}^x$. Biết a,b là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=12$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

Câu 54: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính $f(2)$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)-2f(x)=0$. Tính $f(-1)$ biết rằng $f(1)=1$.

A. e^{-4}. **B.** e^{3}. **C.** e^{4}. **D.** e^{-2}.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. 12. **B.** $\ln 2$. **C.** $10+\ln 2$. **D.** $3-20\ln 2$.

Câu 58: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

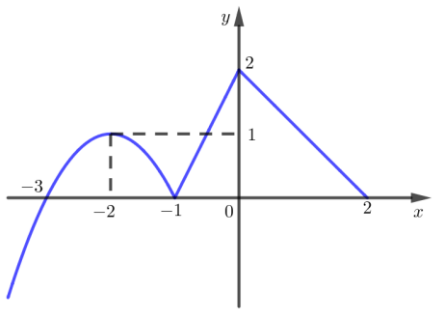
Câu 59: **3** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Vô số điểm. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\ f'(0)\ =1$. Giá trị của $\left(f(1)\right)^2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ.



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\dfrac{23}{6}$. **B.** $\dfrac{31}{6}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)\neq 0$; $f'(x)=(2x+1).f^2(x)$ và $f(1)=-0,5$. Biết tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{a}{b}$; $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N})$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng.

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $a-b=1$. **C.** $b-a=4035$. **D.** $a+b=-1$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f''(x)f(x)+\frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=[f'(x)]^2$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;4]$. Biết rằng $f'(0)=f(0)=1$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** e^3. **D.** e^2+1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.A**	**3.A**	**4.C**	**5.B**	**6.C**	**7.C**	**8.A**	**9.C**	**10.B**
11.B	**12.D**	**13.D**	**14.D**	**15.C**	**16.A**	**17.A**	**18.D**	**19.C**	**20.D**
21.C	**22.D**	**23.D**	**24.C**	**25.C**	**26.C**	**27.D**	**28.C**	**29.A**	**30.C**
31.D	**32.C**	**33.C**	**34.B**	**35.C**	**36.D**	**37.C**	**38.A**	**39.D**	**40.A**
41.D	**42.A**	**43.B**	**44.D**	**45.A**	**46.D**	**47.D**	**48.A**	**49.B**	**50.C**
51.A	**52.D**	**53.D**	**54.C**	**55.C**	**56.A**	**57.A**	**58.C**	**59.D**	**60.B**
61.B	**62.C**	**63.A**							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}=\frac{x^3+3x^2+3x+1-2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3-2}{(x+1)^2}=x+1-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{2}{x+1}+C.$$

Câu 2: **Chọn A**

Áp dụng công thức $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$, ta có $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 3: Chọn A

Ta có $f'(x)=2x+1\Rightarrow \int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x=x^2+x+C$

$\Rightarrow \exists C_1\in\mathbb{R}: f(x)=x^2+x+C_1\Rightarrow f(2)-f(1)=2^2+2+C_1-(1^2+1+C_1)=4$

Câu 4: Chọn C

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\sqrt{3x+2}\right)\mathrm{d}x=\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{(3x+2)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}.\frac{1}{3}+C=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C.$

Câu 5: Chọn B

Câu 6: Chọn C

Ta có: $F(x)=\int\left(ax+\frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{ax^2}{2}-\frac{b}{x}+c.$

Từ: $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}+b+c=1\\ \frac{a}{2}-b+c=4\\ a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\\ c=\frac{7}{4}\end{cases}.$

Vậy $F(x)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}.$

Câu 7: Chọn C

Do hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=2019^x\left(4-x^2\right)\left(x^2-3x+2\right)$

$\Rightarrow F'(x)=2019^x\left(4-x^2\right)\left(x^2-3x+2\right)=2019^x\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)\left(1-x\right)$

$F'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Do $x=-2$, $x=1$ là nghiệm bội 1, còn $x=2$ là nghiệm bội 2 nên hàm số $F(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 8: Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)=x^2+3x+2$.

Khi đó: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\int(3x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+1)\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{3}\frac{(3x+1)^2}{2}+C=\frac{1}{6}(3x+1)^2+C.$

Câu 10: Chọn B

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-1\right)}{x-1}=\ln\left|x-1\right|+C=\ln\left(x-1\right)+C$,.

Mà $F\left(\mathrm{e}+1\right)=4\Rightarrow\ln\left(e+1-1\right)+C=4\Rightarrow C=3$. Vậy $F\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)+3$.

Câu 11: Chọn B

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|x-1\right|+C=\ln\left(x-1\right)+C$ do $x\in\left(1;+\infty\right)$.

Mà $F\left(e+1\right)=4\Rightarrow\ln\left(e\right)+C=4\Rightarrow C=3$. Vậy $F\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)+3$.

Câu 12: Chọn D

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+C\ \left(C\in\mathbb{R}\right)$.

$F\left(1\right)=2\Rightarrow C=2$. Vậy với $x>\frac{1}{2}$ thì $F\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\left(2x-1\right)+2$.

Do đó, $F\left(2\right)=\frac{1}{2}\ln3+2$.

Câu 13: Chọn D

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{4}+C$.

Câu 15: Chọn C

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=\frac{-2}{\sqrt{x}}+C$.

Câu 16: Chọn A

Ta có $f\left(x\right)=2\sin x.\cos2x=\sin\left(-x\right)+\sin3x=-\sin x+\sin3x$.

$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x = \int(-\sin x + \sin 3x)\mathrm{d}x = -\int \sin x\mathrm{d}x + \int \sin 3x\mathrm{d}x = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 17: Chọn A

$\int f(x)\mathrm{dx} = \int(2x + \sin 2x)\mathrm{dx} = 2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}c\cos 2x + c = x^2 - \frac{1}{2}c\cos 2x + c$.

Câu 18: Chọn D

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int(2\mathrm{e}^{2x} + 1)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x} + x + C$. Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + x + C$.

Theo bài ra ta có: $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$. Vậy: $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + x + 1$.

Câu 19: Chọn C

$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C' = \frac{1}{2}.2\sin x\cos x + C' = \frac{1}{2}.(1 + 2\sin x\cos x) + \mathrm{C}' - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}.(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x) + \mathrm{C} = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 + C$

Câu 20: Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x^2 - 4x + C \Rightarrow f(x) = 6x - 4 \Rightarrow f(e^x) = 6e^x - 4$.

Vậy $\int f(e^x)\mathrm{d}x = \int(6e^x - 4)\mathrm{d}x = 6e^x - 4x + C$.

Câu 21: Chọn C

Ta có: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Rightarrow F(x) = \int(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{x+1}$. $F(x) = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos 2x + \ln|x+1| + C$.

Câu 23: Chọn D

$\int(x - \sin 2x)dx = \int x.dx - \int \sin 2x.dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 24: Chọn C

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int e^x\left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \int\left(2017e^x - \frac{2018}{x^5}\right)\mathrm{d}x = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$

Câu 25: Chọn C

Ta có $F'(x) = 3x^2 + \cos x$.

Câu 26: Chọn C

Ta có $F'(x) = 3x^2 + \cos x$.

Câu 27: Chọn D

$\int(\sin x + 1)\mathrm{d}x = -\cos x + x + C$.

Câu 28: Chọn C

Ta có: $f(x) = F'(x) = (\mathrm{e}^{2x})' = 2\mathrm{e}^{2x}$

Suy ra: $\int\frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int\frac{2\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int(2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$.

Câu 29: Chọn A

Ta có $F(x)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C=\ln(-x)+C$ với $\forall x\in(-\infty;0)$.

Lại có $F(-2)=0\Leftrightarrow\ln 2+C=0\Leftrightarrow C=-\ln 2$. Do đó $F(x)=\ln(-x)-\ln 2=\ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x)=\ln\left(\frac{-x}{2}\right)$ $\forall x\in(-\infty;0)$.

Câu 30: Chọn C

Vì $\int f(x)dx=me^{x^3+2}+nxe^{2x}-pe^{2x}+C$ nên $\left(me^{x^3+2}+nxe^{2x}-pe^{2x}+C\right)'=f(x)$

Suy ra $3mx^2e^{x^3+2}+2nxe^{2x}+(n-2p)e^{2x}=2x^2e^{x^3+2}+2xe^{2x}$ đồng nhất 2 biểu thức ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases}3m=2\\2n=2\\n-2p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{2}{3}\\n=1\\p=\frac{1}{2}\end{cases}$. Suy ra: $m+n+p=\frac{13}{6}$.

Câu 31: Chọn D

Ta có: $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\-2A+B=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=5\\B=-3\end{cases}$.

Khi đó: $\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C$.

Suy ra $a=5;\ b=-3$ nên $a-b=8$.

Câu 32: Chọn C

Ta có $f(x)=\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ nên $F(x)=\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

Câu 33: Chọn C

Theo lý thuyết ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2+2x+m)\mathrm{d}x=x^3+x^2+mx+C$.

Khi đó $f(x)$ có dạng: $f(x)=x^3+x^2+mx+C_1$

Theo đề ta có: $\begin{cases}f(2)=1\\f(0)=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^3+2^2+2m+C_1=1\\C_1=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\C_1=-5\end{cases}$.

Vậy hàm số $f(x)=x^3+x^2-3x-5$.

Câu 34: Chọn B

Ta có: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B=4\\3A+2B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=1\end{cases}$.

Khi đó: $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6}\mathrm{dx} = \int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{dx} = 3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C$.

Suy ra $a=3; b=1$ nên $P=a^2+ab+b^2=13$.

Câu 35: Chọn C

Ta có $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{-1}{\mathrm{e}^x+1}+C$.

Câu 36: Chọn D

Cách 1: Xét đáp án D, ta có: $\begin{cases} F(0)=\frac{3}{2} \\ F'(x)=e^x+2x=f(x) \end{cases}$.

Cách 2: Ta có $\int\left(e^x+2x\right)dx = e^x+x^2+C$.

$F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ suy ra $F(x)$ có dạng e^x+x^2+C

Theo đề bài $F(0)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0+0^2+C=\frac{3}{2} \Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 37: Chọn C

Ta có $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+2$ nên $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+2x-5$ là một nguyên hàm của hàm số $y=-\mathrm{e}^{-x}+2$.

Câu 38: Chọn A

Ta có: $\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1} = \frac{A\left(x^2-1\right)+Bx\left(x+1\right)+Dx\left(x-1\right)}{x^3-x}$

$= \frac{\left(A+B+D\right)x^2+\left(B-D\right)x-A}{x^3-x} \Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int \frac{1}{x^3-x}\mathrm{dx} = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{1}{2\left(x+1\right)}\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln\left|\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right|-\ln|x|+C$.

Suy ra $a=\frac{1}{2}; b=-1$ nên $P=2a+b=0$.

Câu 39: Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 2^x\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2}+C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, ta có $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$ mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$.

$T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+...+2^{2018}+2^{2019}\right) = \frac{1}{\ln 2}.\frac{2^{2020}-1}{2-1} = \frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$

Câu 40: Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$, ta có $F(x) = e^x + C$ mà $F(0) = 2020$

$\Rightarrow C = 2019 \Rightarrow F(x) = e^x + 2019$.

$T = F(0) + F(1) + ... + F(2018) + F(2019) = 1 + e + e^2 + ... + e^{2018} + e^{2019} + 2019.2020$

$= \dfrac{e^{2020} - 1}{e - 1} + +2019.2020$.

Câu 41: Chọn D

Ta có $F(x) = \int \cos 4x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\sin 4x + C$.

Từ $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ suy ra $C = 2$.

Ta được $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin 4x + 2$. Suy ra $\int F(x)\mathrm{d}x = \int\left(\dfrac{1}{4}\sin 4x + 2\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 4x}{16} + 2x + C$.

Câu 42: Chọn A

Ta có: $\int \dfrac{1}{x^2 - 1}\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + C$.

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2};\ b = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow a - b = 1$.

Câu 43: Chọn B

$F'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx - c)e^{2x} = \left[2ax^2 + (2b + 2a)x + b - 2c\right]e^{2x}$

Ta có: $\left[2ax^2 + (2b + 2a)x + b - 2c\right]e^{2x} = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2018 \\ 2(a+b) = -3 \\ b - 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = \dfrac{-2021}{2} \\ c = \dfrac{-2023}{4} \end{cases}$

Vậy $T = -3035$

Câu 44: Chọn D

Trên khoảng $(1;+\infty)$: $\int f'(x)dx = \int \dfrac{1}{x-1}dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1$.

Mà $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ $\int f'(x)dx = \int \dfrac{1}{x-1}dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2$.

Mà $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Suy ra $f(3) - f(-1) = 1$.

Câu 45: Chọn A

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$= 2\int \dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{\sin x} + \cot x + C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

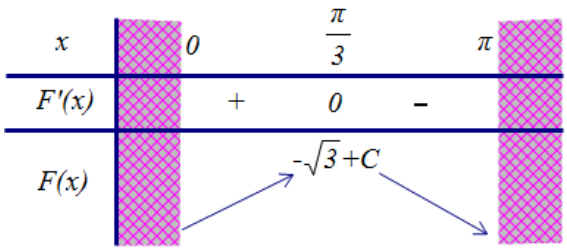
Xét hàm số $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:



$\max\limits_{(0;\pi)}F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$. Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$. Khi đó, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Câu 46: Chọn D

Do $4a-b\neq 0$ nên $F(x)\neq C\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vì luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}(4a-b\neq 0)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)$ không phải là hàm hằng.

Từ giả thiết $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{2f(x)}{F(x)-1}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế với vi phân $\mathrm{d}x$ ta được: $\int\dfrac{2f(x)}{F(x)-1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\ln|F(x)-1|=\ln|f(x)|+C$ với C là hằng số.

$2\ln|F(x)-1|+\ln e^C=\ln|f(x)|\Leftrightarrow|f(x)|=e^C.(F(x)-1)^2=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2\\ f(x)=-e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $f(x)=e^C.\left(\dfrac{(a-1)x+b-4}{x+4}\right)^2$. Ta có $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{4a-b}{(x+4)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$e^C.\left(\left(a-1\right)x+b-4\right)^2=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\e^C.\left(b-4\right)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{4e^C-1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $\left(a;b\right)=\left(1;\dfrac{4e^C-1}{e^C}\right)$.

Trường hợp 2. $f\left(x\right)=-e^C.\left(\dfrac{\left(a-1\right)x+b-4}{x+4}\right)^2$. Ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{4a-b}{\left(x+4\right)^2}$.

Đồng nhất hệ số ta có:

$$-e^C.\left(\left(a-1\right)x+b-4\right)^2=4a-b\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\-e^C.\left(b-4\right)^2=4-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\\left[\begin{array}{l}b=4\\b=\dfrac{4e^C+1}{e^C}\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại $b=4$ do điều kiện $4a-b\neq 0$. Do đó $\left(a;b\right)=\left(1;\dfrac{4e^C+1}{e^C}\right)$.

Câu 47: Chọn D

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1-F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Mà $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 48: Chọn A

Ta có $f\left(-x\right)=\left(x\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x,\ \forall x\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

Do đó $f\left(-x\right)=\mathrm{e}^{-\left(-x\right)}-\left(-x\right)\mathrm{e}^{-\left(-x\right)},\ \forall x\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

Suy ra $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(1-x\right),\ \forall x\in\left(-\infty;+\infty\right)$.

Nên $f'\left(x\right)=\left[\mathrm{e}^{-x}\left(1-x\right)\right]'=\mathrm{e}^{-x}\left(x-2\right)\Rightarrow f'\left(x\right)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}\left(x-2\right).\mathrm{e}^x=x-2$.

Bởi vậy $F\left(x\right)=\int\left(x-2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x-2\right)^2+C$.

Từ đó $F\left(0\right)=\dfrac{1}{2}\left(0-2\right)^2+C=C+2;\ F\left(0\right)=1\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x-2\right)^2-1\Rightarrow F\left(-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(-1-2\right)^2-1=\dfrac{7}{2}$.

Câu 49: Chọn B

$F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)\Rightarrow F'\left(x\right)=f\left(x\right)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$.

$$F'(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}\left(x^3-4x\right)=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

$$F'\left(x^2+x\right)=(2x+1).F'\left(x^2+x\right);\ (2x+1).F'\left(x^2+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\\x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.\\x^2+x=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.\\x^2+x=-2\ (ptvn)\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình $F'\left(x^2+x\right)=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 50: Chọn C

Ta có $\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$ $\begin{array}{l}f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}\\ \Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\end{array}$ $\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C.$ Vì $f(1)=1\Rightarrow C+\dfrac{4}{3}=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}.$

$\Rightarrow\ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}\Rightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3{,}8.$ Vậy $3<f(5)<4.$

Câu 51: Chọn A

Ta có $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=x^2\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x^3\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=x^3\Rightarrow xf(x)=\int x^3dx=\dfrac{x^4}{4}+C$.

$f(1)=-1\Rightarrow C=-\dfrac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x^4-5}{4x}\Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{96}$.

Câu 52: Chọn D

Tính $\left(F(x)\right)'=\left(\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}\right)'=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]\mathrm{e}^{-x}=\left(2x^2-5x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Suy ra $\left\{\begin{array}{l}a=-2\\2a-b=-5\\b-c=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-2\\b=1\\c=-1\end{array}\right.$ nên $F(x)=\left(-2x^2+x-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Tính $F(0)=-1$ suy ra $f\left(F(0)\right)=f(-1)=9\mathrm{e}$.

Câu 53: Chọn D

Nhận xét: Bài này sẽ chặt chẽ hơn nếu thêm điều kiện $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow(2x+a)\mathrm{e}^x+\left(x^2+ax+b\right)\mathrm{e}^x=\left(x^2+3x+4\right)\mathrm{e}^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+(2+a)x+a+b=x^2+3x+4,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đồng nhất hai vế ta có $\left\{\begin{array}{l}a+2=3\\a+b=4\end{array}\right.$. Suy ra $S=a+b=4$.

Câu 54: Chọn C

Ta có: $F(x)=\int\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+c$ mà $F(1)=\frac{1}{2}$ nên $c=1$. Hay $F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+1$.

Ta có: $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ ...\ +F(2019)$

$S=\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+1\right)+\ ...\ +\left(-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+1\right)$

$S=-1+\frac{1}{2020}+2019.1=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}$.

Câu 55: Chọn C

Ta có: $x(4-f'(x))=f(x)-1\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=4x+1\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=4x+1$

$\Rightarrow xf(x)=\int\left(xf(x)\right)'\mathrm{d}x=\int(4x+1)\mathrm{d}x=2x^2+x+C$.

Với $x=1$ thì $1f(1)=3+C\Leftrightarrow 3=3+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $xf(x)=2x^2+x$. Vậy $2f(2)=2.2^2+2$ hay $f(2)=5$.

Câu 56: Chọn A

Vì $f(x)>0$, nên ta có: $f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow\exists C\in\mathbb{R}:\ln\left|f(x)\right|=2x+C\Rightarrow\ln f(x)=2x+C$.

Cho $x=1\ \Rightarrow\ln f(1)=2+C\ \Leftrightarrow\ln 1=2+C\ \Leftrightarrow C=-2$

Do đó: $\ln f(x)=2x-2\Leftrightarrow f(x)=e^{2x-2}\ \Rightarrow f(-1)=e^{-4}$. Do đó: $S=a+b+c=-\frac{9}{2}$.

Câu 57: Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3x-1}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(3-\frac{7}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3x-7\ln\left|x+2\right|+C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Xét trên khoảng $(-2;+\infty)$ ta có: $f(0)=1\Leftrightarrow -7\ln 2+C=1\Rightarrow C=1+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln\left|x+2\right|+1+7\ln 2$, với mọi $x\in(-2;+\infty)$.

Suy ra $f(2)=7-7\ln 4+7\ln 2=7-7\ln 2$.

Xét trên khoảng $(-\infty;-2)$ ta có: $f(-4)=2\Leftrightarrow -12-7\ln 2+C=2\Rightarrow C=14+7\ln 2$.

Do đó, $f(x)=3x-7\ln\left|x+2\right|+14+7\ln 2$, với mọi $x\in(-\infty;-2)$. Suy ra $f(-3)=5+7\ln 2$.

Vậy $f(2)+f(-3)=7+7\ln 2+5-7\ln 2=12$.

Câu 58: Chọn C

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x-\cos x}{x^2}$ nên suy ra: $F'(x)=f(x)=\frac{x-\cos x}{x^2}$.

Ta có: $F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-\cos x}{x^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\cos x=0\\ x\in[-1;1]\setminus\{0\}\end{cases}$ (1).

Xét hàm số $g(x)=x-\cos x$ trên $\left[-1;1\right]$, ta có: $g'(x)=1+\sin x\geq 0,\forall x\in\left[-1;1\right]$. Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[-1;1\right]$. Vậy phương trình $g(x)=x-\cos x=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[-1;1\right]$ (2).

Mặt khác ta có: hàm số $g(x)=x-\cos x$ liên tục trên $(0;1)$ và $g(0)=0-\cos(0)=-1<0$, $g(1)=1-\cos(1)>0$ nên $g(0).g(1)<0$. Suy ra $\exists x_0\in(0;1)$ sao cho $g(x_0)=0$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\neq 0$. Đồng thời vì x_0 là nghiệm bội lẻ nên $F'(x)$ đổi qua $x=x_0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=F(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 59: Chọn D

Ta có $F'(x)=f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$.

$f'(x)=-\sin x+x$; $f''(x)=-\cos x+1\geq 0$ $\forall x\in R$.

Suy ra hàm số $f'(x)$ đồng biến trên R, từ đó dẫn đến phương trình $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác $f'(0)=0$ suy ra $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x)=0$.

Do hàm số $f'(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$ và vô nghiệm trên mỗi khoảng này nên dấu của $f'(x)$ không đổi trên mỗi khoảng trên.

Mà $f'(-1)<0$; $f'(1)>0$ suy ra $f'(x)<0$ $\forall x\in(-\infty;0)$ và $f'(x)>0$ $\forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Mà $f(0)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ hay phương trình $F'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 60: Chọn B

Ta có $\left(f(x).f'(x)\right)'=\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Rightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+C,\forall x\in\mathbb{R}.$

Lại có $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=1$ do đó $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=2f(x).f'(x)=6x^5+12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(f(x)\right)^2=x^6+4x^3+2x+C_1,\forall x\in\mathbb{R}.$

Mà $f(0)=1$ nên $C_1=1$. Vậy $\left(f(1)\right)^2=1^6+4.1^3+2.1+1=8.$

Câu 61: Chọn B

Cách 1: Giải bằng phương pháp tự luận

Ta xác định biểu thức của hàm số $y=f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $\left[-3,2\right]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

Nhánh parabol $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ xác định trên $\left[-3,-1\right]$ đi qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$.

Nhánh đường thẳng $y=a_2x+b_2$ xác định trên $\left[-1,0\right]$ đi qua 2 điểm $(-1,0)$ và $(0,2)$.

Nhánh đường thẳng $y=a_3x+b_3$ xác định trên $[0,2]$ đi qua 2 điểm $(0,2)$ và $(2,0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ 2x+2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -x+2 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x+C_3 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

Vì $f(-3)=0$ nên ta có: $-\dfrac{(-3)^3}{3}-2(-3)^2-3(-3)+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Do f liên tục tại $x=-1$ nên ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$, suy ra:

$$-\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2-3(-1)=(-1)^2+2(-1)+C_2\Leftrightarrow C_2=\frac{7}{3}.$$

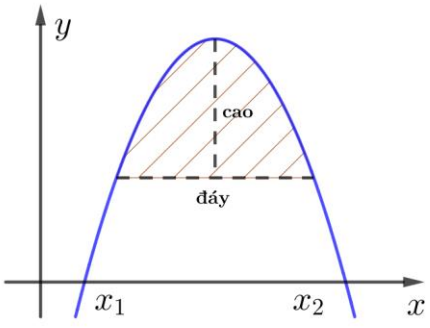
Tương tự, f liên tục tại $x=0$ nên ta có:

$$0^2+2.0+\frac{7}{3}=-\frac{0^2}{2}+2.0+C_3\Leftrightarrow C_3=\frac{7}{3}.$$

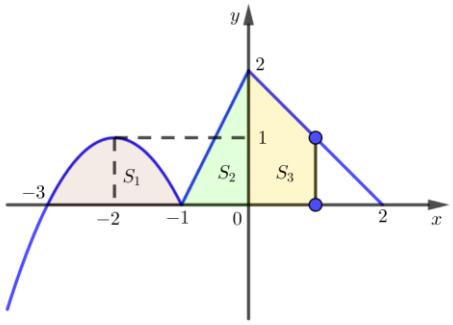
Vậy: $f(-1)+f(1)=\left[(-1)^2+2(-1)+\dfrac{7}{3}\right]+\left[-\dfrac{1^2}{2}+2.1+\dfrac{7}{3}\right]=\dfrac{31}{6}$.

Cách 2: Giải nhanh bằng phương pháp đánh giá diện tích trên đồ thị

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S=\dfrac{2}{3}$day.cao



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:



Nhánh parabol $y=ax^2+bx+c$ qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$ nên ta tính ra được hệ số $a=1$.

Ta có: $f(-1)+f(1)=\left[f(-1)-f(-3)\right]+\left[f(1)-f(-3)\right]=S_1+(S_1+S_2+S_3)$.

Với: $S_1=\frac{2}{3}2.1=\frac{4}{3}$, $S_2=\frac{1}{2}1.2=1$, $S_3=\frac{1}{2}(1+2).1=\frac{3}{2}$. Suy ra: $f(-1)+f(1)=\frac{31}{6}$.

Câu 62: Chọn C

Ta có: $f'(x)=(2x+1).f^2(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\ \ (do\ f(x)\neq 0)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x+C}$$

Mà $f(1)=-0,5\Rightarrow C=0$, do đó $f(x)=\frac{-1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

Nên

$$f(2017)+f(2016)+...+f(1)=\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2016}+...+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2018}-1=-\frac{2017}{2018}$$

Suy ra $a=-2017$; $b=2018$ nên $b-a=4035$.

Câu 63: Chọn A

Ta có: $f''(x)f(x)+\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2=-\frac{\left[f(x)\right]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

$$\Leftrightarrow\frac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\int(2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+C_1.$$

Thay $x=0$ ta được: $C_1=0$.

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}\Leftrightarrow\ln\left[f(x)\right]=\sqrt{2x+1}+C_2$$

Thay $x=0$ ta được $C_2=-1.\Rightarrow\ln\left[f(x)\right]=\sqrt{2x+1}-1$

Thay $x=4$ ta được $\ln\left[f(4)\right]=2\Rightarrow f(4)=e^2$.

DẠNG 2 Các phương pháp tính tích phân cơ bản

Câu 1: Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\dfrac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2n}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2n+1}$.

Câu 2: Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(2017x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2017}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2017$. **D.** $I=1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x\right)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^4 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** 88. **C.** 25. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Câu 4: Biết $\int_0^1\dfrac{x+2}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên, khi đó a^3+b^3 bằng

A. -9. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 5: Cho tích phân $\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\pi-\dfrac{m}{n}$, với $a,b,n,m\in\mathbb{N}^*$, các phân số $\dfrac{a}{b},\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính a^b+m^n.

A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 6: Cho $I=\int_0^3\dfrac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{d}+b\ln 2+c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\dfrac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 28. **D.** -2.

Câu 7: Cho $I=\int_3^8\dfrac{1}{x+x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ tối giản. Giá trị của $abc-d$ bằng

A. -6. **B.** 18. **C.** 0. **D.** -3.

Câu 8: Cho $\int_0^1\dfrac{\sqrt{3x+1}}{x-5}\mathrm{d}x=a+b\ln 5+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

A. 6. **B.** -4. **C.** 14. **D.** -2.

Câu 9: Cho $\int_0^2\dfrac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\pi$ với a, b là các số thực. Giá trị của a^2+3b^2 bằng

A. $\dfrac{7}{27}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{18}$. **D.** $\dfrac{35}{144}$.

Câu 10: Biết $\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + \frac{c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$

A. $T=-2$. **B.** $T=16$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-16$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $a>0$. Giả sử với mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$. Tính $I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=a\ln(a+1)$.

Câu 12: Cho $I=\int_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 13: Cho $\int_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = \ln\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 14: Biết rằng $\int_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 15: Cho tích phân $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x = \frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d$, trong đó $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S=a+b+c+d$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=2$. **D.** $S=11$.

Câu 16: Giả sử tích phân $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 2$ trong đó a, b, c là các số hữu tỉ. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $\frac{77}{36}$. **B.** $\frac{73}{36}$. **C.** $\frac{67}{36}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Câu 17: Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$; $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^3 f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-5$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-18$. **D.** $I=-10$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=2019$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f(\cos x)\mathrm{d}x$ là

A. 2019. **B.** 4038. **C.** –2019. **D.** –4038.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(mx)=nf(x)+p$, $\forall x\in\mathbb{R}\ (m\neq 0)$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=q\ \ (q\neq 0)$. Tính tích phân $I=\int_1^m f(x)\mathrm{d}x$.

A. nmq. **B.** $nmq+mp-q$. **C.** $mp-q$. **D.** $-nmp-nq$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=5f(x)+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=11$. **B.** $I=15$. **C.** $I=19$. **D.** $I=14$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x)\mathrm{d}x=13$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=8$. **C.** $I=7$. **D.** $I=9$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3x)=f(x)-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Giá trị $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-2 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x} & khi\ x>1\end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\dfrac{1}{b}\ln^2 2$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-2 & khi\ x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x} & khi\ x>1\end{cases}$. Biết tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a+\dfrac{1}{b}\ln^2 2$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\ln 2} f(e^x+1)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=8$.

Câu 28: **D3-2.2-3]**Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=4f(x)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=9$. **B.** $I=6$. **C.** $I=5$. **D.** $I=8$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{x}{x+f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 1$ và $2g(2)-g(1)=2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1,5$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x = ae+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $a^{2019}+b^{2019}$ bằng

A. $2^{2018}+1$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $2^{2018}-1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$ Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 36$ và $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 33: **6.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$ $\int_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{53}{5}$. **B.** $\frac{117}{20}$. **C.** $\frac{153}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 34: **7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{2}{285}$. **B.** $\frac{194}{95}$. **C.** $\frac{116}{57}$. **D.** $\frac{584}{285}$.

Câu 35: Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Biết $f\left(\mathrm{e}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$, tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^e\left(f'(x)\ln x+\frac{\mathrm{e}^{\ln x}}{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=e$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.A**	**3.A**	**4.B**	**5.D**	**6.B**	**7.A**	**8.D**	**9.C**	**10.D**
11.B	**12.C**	**13.C**	**14.A**	**15.A**	**16.B**	**17.B**	**18.D**	**19.A**	**20.B**
21.B	**22.C**	**23.D**	**24.C**	**25.D**	**26.D**	**27.B**	**28.B**	**29.B**	**30.C**
31.A	**32.B**	**33.B**	**34.C**	**35.A**					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Với $n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: Đặt $t = 1-x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \to t = 1; x = 1 \to t = 0$

Khi đó $I = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -2x\mathrm{d}x \to -\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = x\mathrm{d}x$

$$I = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{1}{2}.\frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

Câu 2: Chọn A

Đặt $t = 2017x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2017\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2017}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2017$

Vậy $I = \int_0^{2017} f(t).\frac{1}{2017}\mathrm{d}t = \frac{1}{2017}\int_0^{2017} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2017}$.

Câu 3: Chọn A

Đặt $x = t^3 + 3t$. Khi đó: $dx = \left(3t^2+3\right)dt$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 4 \Rightarrow t = 1$.

Vậy: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 f\left(t^3+3t\right)\left(3t^2+3\right)dt = \int_0^1 (t+1)\left(3t^2+3\right)dt = \frac{25}{4}$.

Câu 4: Chọn B

Đặt $t = x^2+4x+7 \Rightarrow \mathrm{d}t = (2x+4)\mathrm{d}x \Rightarrow (x+2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 7$; $x = 1 \Rightarrow t = 12$.

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x = \int_7^{12}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_7^{12} = \frac{1}{2}\ln 12 - \frac{1}{2}\ln 7 = \ln\sqrt{12} - \ln\sqrt{7} \Rightarrow a = 1;\ b = -1.$$

Vậy $a^3+b^3 = 0$.

Câu 5: Chọn D

Đặt $x = \cos 2t$. Ta có $\mathrm{d}x = -2\sin 2t\ \mathrm{d}t$, $0 = \cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)$ và $1 = \cos 0$.

Ta có $\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t} = \frac{1-1+2\sin^2 t}{1+2\cos^2 t-1} = \tan^2 t$.

Vậy $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{\tan^2 t}\left(-2\sin 2t\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\tan t\right| \sin 2t \ \mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos 2t\right)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \ \mathrm{d}t$

$= 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \frac{m}{n} = \frac{1}{1}$. Vì các phân số $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}$ tối giản nên ta suy ra $a=1, b=2, m=1, n=1$.

Do đó $a^b + m^n = 1^2 + 1^1 = 2$.

Câu 6: Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \to t = 1; \quad x = 3 \to t = 2$

$$I = \int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6\ln\left|t+2\right|\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3.$$

Suy ra $a=7, b=-12, c=6, d=3$. Do đó $a+b+c+d=4$.

Câu 7: Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Khi $x = 3 \Rightarrow t = 2$; Khi $x = 8 \Rightarrow t = 3$.

Khi đó $I = \int_2^3 \frac{1}{t^2 - 1 + \left(t^2-1\right)t}.2t\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{2t}{\left(t^2-1\right)\left(t+1\right)}\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{2t}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\mathrm{d}t$

$= \int_2^3 \frac{\left(t+1\right)+\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{\left(t+1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2} + \frac{\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t$

$= \int_2^3 \left(\frac{1}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)} + \frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}.\frac{\left(t+1\right)-\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)} + \frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right)\mathrm{d}t$

$= \int_2^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) + \frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right]\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|t-1\right| - \ln\left|t+1\right|\right) - \frac{1}{t+1}\right]\Big|_2^3$

$= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1}\right]\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{12} \Rightarrow a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=12$.

Vậy $abc - d = 3.2.1 - 12 = -6$.

Câu 8: Chọn D

Đặt $t = \sqrt{3x+1}$. Ta có $t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2t}{3}\mathrm{d}t$.

Ta có $x - 5 = \frac{t^2-1}{3} - 5 = \frac{t^2-16}{3}$.

Khi $x=0$ thì $t=1$, $x=1$ thì $t=2$ nên ta có:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3x+1}}{x-5}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{t}{\frac{t^2-16}{3}}\cdot\frac{2t}{3}\mathrm{d}t=2\int_1^2 \frac{t^2}{t^2-16}\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(1+\frac{2}{t-4}-\frac{2}{t+4}\right)\mathrm{d}t.$$

$$=\left[2\left(t+2\ln|t-4|-2\ln|t+4|\right)\right]\Big|_1^2=\left(4+4\ln 2-4\ln 6\right)-\left(2+4\ln 3-4\ln 5\right).$$

$$=2+4\ln 2-4\ln 3+4\ln 5-4\ln 6=2+4\ln 2-4\ln 3+4\ln 5-4\ln(2.3).$$

$$=2+4\ln 2-4\ln 3+4\ln 5-4\ln 2-4\ln 3=2+4\ln 5-8\ln 3.$$

Suy ra $a+b+c=2+4-8=-2$.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{x+1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x^2+2x+4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x-\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x.$

Tính $I_1=\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\ln 12-\ln 4\right)=\frac{1}{2}\ln 3.$

Tính $I_2=\int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2+3}\mathrm{d}x.$

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{6}$ và $x=2\Rightarrow u=\frac{\pi}{3}$.

Suy ra $I_2=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}.\frac{1}{3\left(1+\tan^2 u\right)}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$

Vậy $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=I_1-I_2=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Suy ra $a^2+3b^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3.\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2=\frac{5}{18}$.

Câu 10: Chọn D

Đặt $t=x^2+16\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=16; x=3\Rightarrow t=25$.

$I=\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{16}^{25}\ln t\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=t\end{cases}$.

$I=\frac{1}{2}\int_{16}^{25}\ln t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t\ln t\right)\Big|_{16}^{25}-\frac{1}{2}\int_{16}^{25}\mathrm{d}t=25\ln 5-32\ln 2-\frac{9}{2}.$

Vậy $T=a+b+c=25-32-9=-16$.

Cách 2.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+16\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+16}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}+8=\frac{x^2+16}{2}\end{cases}$.

$I=\int_0^3 x\ln\left(x^2+16\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2+16}{2}.\ln\left(x^2+16\right)\Big|_0^3-\int_0^3 x\,\mathrm{d}x=25\ln 5-32\ln 2-\frac{9}{2}$

Vậy $T = a+b+c = 25-32-9 = -16$.

Câu 11: Chọn B

Từ giả thiết: $f(x)>0$ và $f(x).f(a-x)=1$, ta suy ra: $f(a-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Đặt $x = a-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$; Với $x=0 \Rightarrow t=a$, $x=a \Rightarrow t=0$.

Khi đó: $I=\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1}{f(t)}} = \int_0^a \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+f(t)} = \int_0^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Suy ra $2I = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \int_0^a \frac{(1+f(x))\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \int_0^a \mathrm{d}x = a$. Vậy $I=\dfrac{a}{2}$.

Câu 12: Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=\ln(2+x^2) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó, $I=\displaystyle\int_0^1 x\ln(2+x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(2+x^2)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.\frac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x$

$= \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(2+x^2)\right]\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x \quad (1)$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \ln(x^2+2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2$.

Thay vào (1), suy ra $I = \dfrac{1}{2}\ln 3 - \dfrac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 = \dfrac{3}{2}\ln 3 - \ln 2 - \dfrac{1}{2}$. Vậy $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=-1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0$

Câu 13: Chọn C

Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=\mathrm{e} \Rightarrow t=1$. Khi đó:

$I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t+1}{(t+2)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{-3}{(t+2)^2} + \frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{3}{t+2} + 2\ln|t+2|\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{9}{4} - \frac{1}{2}$.

Vậy $a+b+c+d = 9+4+1+2 = 16$.

Câu 14: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+3}$. Ta có $t^2 = x+3 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=-2 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=2$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9} = \int_1^2 \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-3+5t+9} = \int_1^2 \frac{2t}{t^2+5t+6}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2t}{(t+2)(t+3)}\mathrm{d}t$.

$I=\int\limits_{1}^{2}\left(-\frac{4}{t+2}+\frac{6}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\left(-4\ln\left|t+2\right|+6\ln\left|t+3\right|\right)\Big|_{1}^{2}=-20\ln 2+4\ln 3+6\ln 5$.

Do đó $a=-20, b=4, c=6$. Vậy $a+b+c=-20+4+6=-10$.

Câu 15: Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{16-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}.\mathrm{d}x$

Đặt $x+\frac{1}{x}=4\sin t\Rightarrow\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: Với $x=1+\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$; với $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos t.\sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2}\mathrm{d}t=16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\left(8x+4\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}-4$

Mà $I=\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}.\mathrm{d}x=\frac{a.\pi}{b}+c\sqrt{3}+d\Rightarrow a=2,b=3,c=2,d=-4$.

Vậy $S=a+b+c+d=3$.

Câu 16: Chọn B

Ta có $\int\limits_{1}^{2}\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{x+1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{(x+1)}\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$=\ln\left|x+1\right|\Big|_{1}^{2}+\frac{1}{x+1}\Big|_{1}^{2}=-\frac{1}{6}+\ln 3-\ln 2$. Suy ra $a=-\frac{1}{6};\ b=1;\ c=-1$.

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=\left(-\frac{1}{6}\right)^2+1^2+\left(-1\right)^2=\frac{73}{36}$.

Câu 17: Chọn B

Cách 1: Ta có

$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\ \Rightarrow t^2=x^3+1\ \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2\sqrt{2}}$; $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\frac{2}{3}t\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{3}{2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đặt $y=\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\ \Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\ \Rightarrow\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$

Đổi cận $t=\frac{3}{2\sqrt{2}}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1}+\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{8}$;

$t=\sqrt{2}\Rightarrow y=\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$

$I=\frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{4}{3}\ln\left|y\right|\Big|_{\sqrt[4]{8}}^{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}=\frac{4}{3}\ln\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{3}\ln\frac{(2\sqrt{2}+2)^2}{8}=\frac{1}{3}\ln(\frac{3}{2}+\sqrt{2})$

Do đó $a+b+c+d=10$

Cách 2: Ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3\left(x^3+1\right)}}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^3\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x.$ Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{8};x=1\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{1}{8}}^{1}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$

Vậy $a+b+c+d=3+3+2+2=10.$

Câu 18: Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=0;\ x=3\Rightarrow t=2.$

Khi đó: $I=\int\limits_{-1}^{3}f'\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}2t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t=2t.f\left(t\right)\Big|_0^2-2\int\limits_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=4f\left(2\right)-2\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=-8-2=-10.$

Câu 19: Chọn A

Ta có: $3=3.1=3.\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}3f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$

Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}\left(2x\right)=\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=2.$

$\Leftrightarrow 3=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}.\Leftrightarrow 1+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5,\forall x\in\mathbb{R}.$

Câu 20: Chọn B

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Ta có: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f\left(\cos x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.\cos x.f\left(\cos x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{0}2t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\int\limits_{0}^{1}t.f\left(t\right)\mathrm{d}t$

$=2\int\limits_{0}^{1}x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=4038.$

Câu 21: Chọn B

Ta có: $n=\frac{n}{q}.q=\frac{n}{q}.\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\frac{n}{q}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\frac{f\left(mx\right)-p}{q}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\frac{f\left(mx\right)}{q}\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\frac{p}{q}\mathrm{d}x,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow n=\frac{1}{mq}\int\limits_{0}^{1}f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right)-\frac{p}{q}x\Big|_0^1=\frac{1}{mq}\int\limits_{0}^{1}f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right)-\frac{p}{q},\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right)=\left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $mx=t\Rightarrow \mathrm{d}\left(mx\right)=\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=m$.

$\int\limits_0^1 f\left(mx\right)\mathrm{d}\left(mx\right)=\left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \int\limits_0^m f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^m f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow q+\int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(n+\frac{p}{q}\right).mq, \forall x\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow \int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(n+\frac{p}{q}\right).mq-q=nmq+mp-q, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^m f\left(x\right)\mathrm{d}x=nmq+mp-q, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 22: Chọn C

Ta có: $f\left(2x\right)=5f\left(x\right)+x \Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[5f\left(x\right)+x\right]\mathrm{d}x=5\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x$

$=5.2+\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{21}{2}$. Mặt khác $\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{21}{2}\Rightarrow \int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=21$.

Do đó: $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=21-2=19$.

Câu 23: Chọn D

Xét $\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x=13$, đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\frac{1}{6}\Rightarrow u=\frac{1}{3}$; $x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=1$.

Ta có $13=\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=26$.

Xét $I=\int\limits_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$, đặt $t=x^3\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{3}\mathrm{d}t=x^2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$. Vậy ta có:

$I=\int\limits_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{3}} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{3}} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u$

$=\frac{1}{3}.1+\frac{1}{3}.26=9$.

Câu 24: Chọn C

Cách 1: Ta có: $f\left(3x\right)=f\left(x\right)-2x\Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-2x\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x = 5 - x^2\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x = 4$

Mặt khác $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$

Từ và suy ra $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x = 3.4 = 12$.

Do đó $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 12 - 5 = 7$.

Cách 2: Ta có $\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^1 \left[f(x) - 2x\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2.5 - 3x^2\Big|_0^1 = 10 - 3 = 7$.

Câu 25: Chọn D

Ta có $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x-2)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = -1 + \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^2 = -1 + \frac{1}{2}\ln^2 2$

$\Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow S = a + b = -1 + 2 = 1$.

Câu 26: Chọn D

Ta có $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x-2)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = -1 + \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^2 = -1 + \frac{1}{2}\ln^2 2$

$\Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow S = a + b = -1 + 2 = 1$.

Câu 27: Chọn B

Đặt $t = \mathrm{e}^x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = \ln 2 \Rightarrow t = 3$.

Do đó $\int\limits_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x + 1\right)\mathrm{d}x = 5 \Rightarrow \int\limits_2^3 \frac{f(t)}{t-1}\mathrm{d}t = 5 \Rightarrow \int\limits_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 5$.

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{(2x-2-1)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left[2f(x) - \frac{f(x)}{x-1}\right]\mathrm{d}x = 3$.

Suy ra $2I - \int\limits_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow 2I = 8 \Leftrightarrow I = 4$.

Câu 28: Chọn B

Ta có $K = \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[4f(x) - x\right]\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 7 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 7$.

$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 7 - 1 = 6$.

Câu 29: Chọn B

Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{x+f^2(x)}$ nên $g'(x)=\dfrac{x}{x+f^2(x)}$.

Đặt $I=\int\limits_1^2 \dfrac{x^2}{x+f^2(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow I=\int\limits_1^2 xg'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=g'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=g(x)\end{cases}$.

Khi đó $I=xg(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2g(2)-g(1)-1=1$.

Câu 30: Chọn C

Cách 1:

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1=\mathrm{e}.f(1)-f(0)=\mathrm{e}-1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, a, $b\in\mathbb{R}$ suy ra $a=1$, $b=-1$.

Do đó $a^{2019}+b^{2019}=1^{2019}+(-1)^{2019}=0$.

Cách 2:

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=f(x)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; ta có $\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$, $v=\mathrm{e}^x$.

Khi đó, $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1=\mathrm{e}.f(1)-f(0)=\mathrm{e}-1$.

Theo đề bài $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b$, a, $b\in\mathbb{R}$ suy ra $a=1$, $b=-1$.

Do đó $a^{2019}+b^{2019}=1^{2019}+(-1)^{2019}=0$.

Câu 31: Chọn A

Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}xdx=-\dfrac{2}{\pi}f(x).\cos\dfrac{\pi}{2}x\Big|_0^1+\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f'(x).\cos\dfrac{\pi}{2}xdx=\dfrac{3}{2}$

$\int\limits_0^1 (f(x)-3\sin\dfrac{\pi}{2}x)^2dx=\int\limits_0^1 f^2(x)dx-6\int\limits_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}xdx+9\int\limits_0^1 \sin^2\dfrac{\pi}{2}xdx=0$

Từ đây ta suy ra $f(x)=3\sin\dfrac{\pi}{2}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi}{2}xdx=\dfrac{6}{\pi}$.

Câu 32: Chọn B

Từ giả thiết: $\int\limits_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\int\limits_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính: $I=\int\limits_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=5x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{5}{2}x^2\end{cases}$. Ta có: $I=\int\limits_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\dfrac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$

$= \frac{5}{2}.f(1) - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = 10 - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x$,

Mà: $I = \int_0^1 5x.f(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2}\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = 36 \Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$,

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[10x^2.f'(x) - \left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)\left[10x^2 - f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$

Với $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{10.1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. Khi đó: $f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$.

Câu 33: Chọn B

Tính $I = \int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Ta có $I = \frac{1}{3}x^3.f(x)\Big|_0^3 - \frac{1}{3}\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = 54 - \frac{1}{3}\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$,.

Theo giả thiết: $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x = \frac{154}{3} \Rightarrow \frac{154}{3} = 54 - \frac{1}{3}\int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^3 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^3 \left(x^3 f'(x) - 4\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^3 f'(x)\left[x^3 - 4f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0 . \Rightarrow x^3 - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{16} + C$.

Với $f(3) = 6 \Rightarrow C = \frac{15}{16}$. Khi đó: $f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{15}{16}$.

Vậy $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{15}{16}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{80}x^5 + \frac{15}{16}x\right)\Big|_0^3 = \frac{117}{20}$.

Câu 34: Chọn C

Tính: $I = \int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{cases}$.

Ta có: $I = \frac{1}{4}x^4.f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x$,.

Theo giả thiết: $\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = -38$

$\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = -38.8 \Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = -38.\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left(8x^4 f'(x) + 38\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f'(x).\left[8x^4 + 38f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow\ 8x^4 + 38f'(x) = 0\ \Leftrightarrow\ f'(x) = -\dfrac{4}{19}x^4\ \Rightarrow\ f(x) = -\dfrac{4}{95}x^5 + C$.

Với $f(1) = 2\ \Rightarrow\ C = \dfrac{194}{95}$. Khi đó: $f(x) = -\dfrac{4}{95}x^5 + \dfrac{194}{95}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{4}{95}x^5 + \dfrac{194}{95}\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{2}{285}x^6 + \dfrac{194}{95}x\right)\Big|_0^1 = \dfrac{116}{57}$.

Câu 35: Chọn A

Xét $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(f'(x).\ln x + \dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x).\ln x.\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\mathrm{e}^{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$

$= \left[f(x).\ln x\right]\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(x)}{x}.\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\ln x}.\mathrm{d}(\ln x)$

$= \left(f(x).\ln x - \dfrac{1}{2x^2} + \mathrm{e}^{\ln x}\right)\Big|_1^{\mathrm{e}} = f(\mathrm{e}) - \dfrac{1}{2\mathrm{e}^2} + \mathrm{e} + \dfrac{1}{2} - 1 = \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

DẠNG 3 Tích phân cho bởi nhiều hàm

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}6x^2 & \text{khi } x\le 0\\ \left(a-a^2\right)x & khi\, x\ge 0\end{cases}$ và $I=\int_{-1}^{4}f(x)dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I+46\ge 0$?

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^3 \max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx$.

A. $\frac{117}{2}$. **B.** $\frac{707}{2}$. **C.** $\frac{275}{12}$. **D.** $\frac{119}{6}$.

Câu 3: Tính $I=\int_0^2 \min\{x;\sqrt[3]{2-x}\}dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 4: (Đề tham khảo – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1};f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$ **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 5: (Toán học và tuổi trẻ - Số 6 – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1};f(0)=2017$ và $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$

A. $S=1$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=\ln 4035$. **D.** $S=4$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x-2 & khi\, x\ge 4\\ \sqrt{x} & khi\, x\le 4\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_1^9 f(x)dx$.

A. $I=\frac{121}{6}$. **B.** $I=\frac{163}{6}$. **C.** $I=\frac{85}{6}$. **D.** $I=\frac{223}{6}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & khi\, x\ge \frac{\pi}{2}\\ \sin^2 x & khi\, x\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}f(x)dx=a+b\pi\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $T=a+b$.

A. $T=\frac{11}{8}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=\frac{15}{8}$. **D.** $T=\frac{7}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & khi\, x\ge 0\\ e^{2x} & khi\, x\le 0\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

A. $I=\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $I=\frac{7e^2+1}{2e^2}$. **C.** $I=\frac{9e^2-1}{2e^2}$. **D.** $I=\frac{11e^2-11}{2e^2}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2 & khi\, 0\le x\le 1\\ 4-x & khi\, 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 10: (Lục Ngạn – Bắc Giang – 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{3x-1}; f(0)=1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $3+5\ln 2$. **B.** $-2+5\ln 2$. **C.** $4+5\ln 2$. **D.** $2+5\ln 2$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\setminus\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}, f(e^2)=3, f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6$. Tính giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)$.

A. $3(\ln 2+1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2+1$. **D.** $\ln 2+3$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $P=\ln\frac{3}{5}+2$. **B.** $P=1+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $P=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $P=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$ được kết quả

A. $-1+\ln\frac{4}{5}$ **B.** $-1+\ln\frac{6}{5}$ **C.** $1+\ln\frac{4}{5}$ **D.** $1+\ln\frac{6}{5}$

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, biết $F(0)=1$; $F(\pi)=0$. Tính $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** Không tồn tại P. **D.** $P=1$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}, f(-3)=0, f(0)=1$ và $f(3)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(-4)+f(-1)+f(4)$.

A. $P=3+\ln\frac{3}{25}$. **B.** $P=3+\ln 3$. **C.** $P=2+\ln\frac{5}{3}$. **D.** $P=2-\ln\frac{5}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2+x-2}, f(-3)-f(3)=0, f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$.

A. $1+\ln 80$. **B.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$. **C.** $1+\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}$. **D.** $1+\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	**2.C**	**3.D**	**4.C**	**5.A**	**6.B**	**7.A**	**8.C**	**9.A**	**10.A**
11.A	**12.C**	**13.D**	**14.D**	**15.B**	**16.B**				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có $I=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx=\int_{-1}^{0}6x^2dx+\int_{0}^{4}\left(a-a^2\right)xdx=2x^3\Big|_{-1}^{0}+\left(a-a^2\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4}=2+8a-8a^2$

Khi đó $I+46\ge 0\Leftrightarrow 2+8a-8a^2+46\ge 0\Leftrightarrow a^2-a-6\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le a\le 3, a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 2: Chọn C

Trên đoạn $\left[0;3\right]$:

Xét $x^3\ge 4x^2-3x\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x\ge 0\Leftrightarrow x(x-1)(x-3)\ge 0\Rightarrow x\in[0;1]\text{do}\,x\in\left[0;3\right]$

Vậy $\begin{cases}x\in[0;1]\Rightarrow x^3\ge 4x^2-3x\\ x\in[1;3]\Rightarrow x^3\le 4x^2-3x\end{cases}\Rightarrow\max_{x\in[0;3]}\left\{x^3;4x^2-3x\right\}=\begin{cases}x^3 & \text{khi} \quad x\in[0;1]\\ 4x^2-3x & \text{khi} \quad x\in[1;3]\end{cases}.$

Khi đó $I=\int_{0}^{3}\max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx=\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{3}\left(4x^2-3x\right)dx=\frac{275}{12}$. Chọn đáp án C

Câu 3: Chọn D

Trên đoạn $\left[0;2\right]$:

Xét $x\ge\sqrt[3]{2-x}\Leftrightarrow x^3\ge 2-x\Leftrightarrow x^3+x-2\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)\ge 0\xrightarrow{x\in\left[0;2\right]}x\in[1;2]$

Vậy $\begin{cases}x\in[0;1]\Rightarrow x\le\sqrt[3]{2-x}\\ x\in[1;2]\Rightarrow x\ge\sqrt[3]{2-x}\end{cases}\Rightarrow\min_{x\in[0;2]}\{x;\sqrt[3]{2-x}\}=\begin{cases}x \quad khi \quad x\in[0;1]\\ \sqrt[3]{2-x} \quad \text{khi} \quad x\in[1;2]\end{cases}.$

Khi đó $I=\int_{0}^{2}\min\{x;\sqrt[3]{2-x}\}\cdot dx=\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}\sqrt[3]{2-x}dx\overset{\text{Castio}}{=}\frac{5}{4}$. Chọn đáp án D

Câu 4: Chọn C

Cách 1:

Từ $f'\left(x\right)=\frac{2}{2x-1}\Rightarrow f\left(x\right)=\int\frac{2dx}{2x-1}=\begin{cases}\ln\left|2x-1\right|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\\ \ln\left|2x-1\right|+C_2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}.$

Ta có: $\begin{cases}f\left(0\right)=1\\ f\left(1\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1\\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left|2x-1\right|+1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\\ \ln\left|2x-1\right|+2 \text{ khi } x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}.$

Khi đó: $f\left(-1\right)+f\left(3\right)=\ln 3+1+\ln 5+2=3+\ln 15$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1||_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{3} \quad (1) \\ f(3)-f(1)=f(x)|_{1}^{3}=\int\limits_{1}^{3}f'(x)dx=\int\limits_{1}^{3}\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1||_{1}^{3}=\ln 5 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f(1)=\ln 15 \Rightarrow f(3)+f(-1)=3+\ln 15$.

Câu 5: Chọn A

Cách 1:

Từ $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{dx}{x-1}=\begin{cases}\ln|x-1|+C_1 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\\ \ln|x-1|+C_2 \text{ khi } x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=2017\\ f(2)=2018\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=2017\\ 0+C_2=2018\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=2017\\ C_2=2018\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|x-1|+2017 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\\ \ln|x-1|+2018 \text{ khi } x\in(1;+\infty)\end{cases}$

.

Khi đó: $f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-(\ln 2+2017)=1$.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} f(0)-f(-1)=f(x)|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{1}{x-1}dx=\ln|x-1||_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{2} \quad (1) \\ f(3)-f(2)=f(x)|_{2}^{3}=\int\limits_{2}^{3}f'(x)dx=\int\limits_{2}^{3}\dfrac{1}{x-1}dx=\ln|x-1||_{2}^{3}=\ln 2 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(2)+(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)+f(0)-f(2)=0\Rightarrow S=f(3)+f(-1)=f(2)-f(0)=1$

Câu 6: Chọn B

Ta có; $I=\int\limits_{1}^{9}f(x)dx=\int\limits_{1}^{4}f(x)dx+\int\limits_{4}^{9}f(x)dx=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}dx+\int\limits_{4}^{9}(x-2)dx=\dfrac{163}{6}$.

Câu 7: Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx=\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{8}\pi=a+b\pi.$

Do $a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=\dfrac{5}{4};\ b=\dfrac{1}{8}\Rightarrow T=a+b=\dfrac{11}{8}$.

Câu 8: Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)dx=I=\int\limits_{-1}^{0}f(x)dx+I=\int\limits_{0}^{2}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}e^{2x}dx+I=\int\limits_{0}^{2}(x+1)dx=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$.

Câu 9: Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx+\int\limits_{1}^{2}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}3x^2dx+\int\limits_{1}^{2}(4-x)dx=x^3\Big|_{0}^{1}+\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$.

Câu 10: Chọn A

Cách 1: Từ $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{3dx}{3x-1}=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+C_2 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=1\\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0+C_1=1\\ 0+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+1 \text{ khi } x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\\ \ln|3x-1|+2 \text{ khi } x\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\end{cases}$.

Khi đó: $f(-1)+f(3)=\ln 4+1+\ln 8+2=3+\ln 32=3+5\ln 2$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases}f(0)-f(-1)=f(x)|_{-1}^{0}=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{3}{3x-1}dx=\ln|3x-1||_{-1}^{0}=\ln\dfrac{1}{4} \quad (1)\\ f(3)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f(x)|_{\frac{2}{3}}^{3}=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}f'(x)dx=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{3}\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|3x-1||_{\frac{2}{3}}^{3}=\ln 8 \quad (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$, ta được: $f(3)+f(-1)-f(0)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\ln 32\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+5\ln 2$.

Câu 11: Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{1}{x(\ln x-1)}dx=\int\dfrac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}=\ln|\ln x-1|+C$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln(\ln x-1)+C_1 & khi\ x\in(e;+\infty)\\ \ln(1-\ln x)+C_2 & khi\ x\in(0;e)\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}f(e^2)=3\\ f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\ln 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(\ln e^2-1)+C_1=3\\ \ln\left(1-\ln\dfrac{1}{e^2}\right)+C_2=\ln 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=3\\ C_2=\ln 2\end{cases}$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(\ln x-1)+3 & khi\ x\in(e;+\infty)\\ \ln(1-\ln x)+\ln 2 & khi\ x\in(0;e)\end{cases}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{e}\right)+f(e^3)=3(\ln 2+1)$

Câu 12: Chọn C

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+C=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1, |x|>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2, |x|<1\end{cases}$.

$f(-3)=\dfrac{1}{2}\ln 2+C_1$; $f(3)=-\dfrac{1}{2}\ln 2+C_1$, do đó $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow C_1=0$.

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln 3+C_2$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ln 3+C_2$, do đó $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Rightarrow C_2=1$.

$f(0)=C_2=1$; $f(4)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$, do đó $f(0)+f(4)=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$.

Câu 13: Chọn D

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

$= \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-1|-\ln|x+1|+C = \begin{cases}\ln\frac{x-1}{x+1}+C_1, |x|>1\\ \ln\frac{1-x}{x+1}+C_2, |x|<1\end{cases}$.

$f(-2)=\ln 3+C_1$; $f(2)=\ln\frac{1}{3}+C_1$, do đó $f(-2)+f(2)=0 \Rightarrow C_1=0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln 3+C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{3}+C_2$, do đó $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+1+\ln\frac{3}{5}=\ln\frac{6}{5}+1$.

Câu 14: Chọn D

Cách 1:

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x = \begin{cases}\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1, x\in\left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\\ \frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1, x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)+k2\pi\end{cases}$.

$\begin{cases}F(0)=1\\ F(\pi)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}+C_2=1\\ \frac{1}{2}+C_1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_2=\frac{1}{2}\\ C_1=-\frac{1}{2}\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}, x\in\left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\\ \frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}, x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)+k2\pi\end{cases}$

Khi đó $P=F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\tan\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)=1$

Cách 2:

$\begin{cases}F(0)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=F(x)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{dx}{1+\sin 2x}(1)\\ F(\pi)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=F(x)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=\int\limits_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin 2x}(2)\end{cases}$

Lấy $(2)-(1)$ ta được $F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)+F(\pi)-F(0)=\int\limits_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin 2x}-\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{dx}{1+\sin 2x}$

$\xleftrightarrow{casio} F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)-1=0 \Leftrightarrow F\left(-\frac{\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=1$.

Câu 15: Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{4}{x^2-4}dx=\int\frac{4dx}{(x-2)(x+2)}=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+C_1 & khi\ x\in(2;+\infty)\\ \ln\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right)+C_2 & khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+C_3 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Ta có $\begin{cases}f(3)=2\\ f(0)=1\\ f(-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)+C_1=2\\ C_2=1\\ \ln 5+C_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=2+\ln 5\\ C_2=1\\ C_3=-\ln 5\end{cases}$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)+2+\ln 5 & khi\ x\in(2;+\infty)\\ \ln\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right)+1 & khi\ x\in(-2;2)\\ \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)-\ln 5 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$

Suy ra $P=f(-4)+f(-1)+f(4)=3+\ln 3$.

Câu 16: Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{dx}{x^2+x-2}=\int\dfrac{dx}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)+C_1 & khi\ x\in(1;+\infty)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)+C_2 & khi\ x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)+C_3 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$$

Ta có $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow\dfrac{1}{3}\ln 4+C_3-\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_1\right)=0\Leftrightarrow C_1=C_3+\dfrac{1}{3}\ln 10$

$f(0)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)+C_3+\dfrac{1}{3}\ln 10 & khi\ x\in(1;+\infty)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2 & khi\ x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)+C_3 & khi\ x\in(-\infty;-2)\end{cases}$

Suy ra $f(-4)+f(-1)-f(4)=\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}+C_3\right)+\left(\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2\right)-\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_1+\dfrac{1}{3}\ln 10\right)$.

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\ln 2$.

DẠNG 4 Kết hợp đổi biến, từng phần tính tích phân

Câu 1: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\ln 5} e^{2x} f'\left(e^x\right) dx$ bằng

A. 126. **B.** 84. **C.** 63. **D.** 42.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x) dx = 1$. Khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x) dx$ bằng

A. -25. **B.** 15. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** 23.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x > 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{-2}^{2} x f'(2x) dx$ bằng

A. $\frac{13}{24}$. **B.** $\frac{50}{3}$. **C.** $\frac{19}{24}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4) = 5$; $\int_{-2}^{0} f(2x + 4) dx = 6$. Tính giá trị $I = \int_0^4 xf'(x) dx$.

A. $I = 8$. **B.** $I = -8$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = -4$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x)\right)$, $\forall x \in (0; +\infty)$ và $f(4) = \frac{4}{3}$. Giá trị của $\int_1^4 \left(x^2 - 1\right) f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{263}{15}$. **B.** $-\frac{263}{30}$. **C.** $\frac{457}{15}$. **D.** $\frac{457}{30}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) f'(x)$ là

A. $\frac{x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. **B.** $\frac{x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. **C.** $\frac{x^2 + 2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. **D.** $\frac{2x^2 + x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'(3x) dx$.?

A. $I=15$. **B.** $I=6$. **C.** $I=12$. **D.** $I=9$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$, $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=3$. Tính

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10: Cho $\int_1^2 \frac{x-2}{x}\ln x\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln^2 2$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+2b-3c$.

A. $S=\frac{9}{2}$. **B.** $S=6$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^5 x^2f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=23$. **B.** $I=15$. **C.** $I=\frac{123}{5}$. **D.** $I=-25$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x>0\\ x^2-x-1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Tích phân $I=\int_{-2}^{2} xf'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{13}{24}$. **B.** $\frac{50}{3}$. **C.** $\frac{19}{24}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $f(x)+f(3-x)=x^2-3x+4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{21}{4}$. **B.** $\frac{23}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{49}{4}$.

Câu 14: Cho biết $\int_0^1 x\left[\sin\pi x+\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x=a+\frac{b}{\pi}+c\ln 2$; với a,b,c là những số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{-10}{3}$. **B.** $\frac{-4}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 x.f'(x)\,dx$

A. $I=-\frac{10}{3}$. **B.** $I=-\frac{4}{3}$. **C.** $I=\frac{5}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{3}$.

Câu 17: Cho $\int_0^1 x\left(e^{2x}+2\sqrt[3]{x-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{ae^2-b}{c}$, với a,b,c là các số nguyên và a,b nguyên tố cùng nhau. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=10$. **B.** $P=18$. **C.** $P=46$. **D.** $T=24$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+1} & \text{khi } 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{khi } \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}-4\ln 3+4\ln 2$. **B.** $\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$.

C. $-\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+4\ln 3-4\ln 2$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(3)=21,\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính $\int_0^1 xf'(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int_0^1 x^3f'(x^2)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** –1.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x)-7f(1-x)=3(x^2-2x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{a}{b}$ (với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=3a-b$.

A. $T=0$. **B.** $T=-48$. **C.** $T=16$. **D.** $T=1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ và thỏa mãn $3xf'(x)=3+2f'(x),\forall x\in D$. Biết rằng $f(2)=\ln 8, f(0)=0$ và tích phân $I=\int_{-1}^0\left(f(x)+f(1)\right)\mathrm{d}x=\frac{a\ln 5-b\ln 2}{3}-1,(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị $a+b$.

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}dx = a\ln\frac{4}{c} + b$, với $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x.dx$.

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Ta có: $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6}dt = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Big|_0^1 = \ln\frac{4}{3}$.

Vậy $a = 1, b = 0, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int\limits_0^{\ln 5} e^{2x} f'\left(e^x\right)dx$ bằng

A. 126. **B.** 84. **C.** 63. **D.** 42.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = e^x \Rightarrow \mathrm{d}t = e^x \mathrm{d}x$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = \ln 5 \Rightarrow t = 5$.

Ta có $I = \int\limits_1^5 t.f'(t)\mathrm{d}t$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$.

Suy ra $I = \int\limits_1^5 t.f'(t)\mathrm{d}t = tf(t)\Big|_1^5 - \int\limits_1^5 f(t)\mathrm{d}t = 5f(5) - f(1) - \int\limits_1^2 (4x-3)\mathrm{d}x - \int\limits_2^5 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$

$= 130 - 1 - 3 - 42 = 84$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)dx = 1$. Khi đó $\int\limits_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. -25. **B.** 15. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** 23.

Lời giải

Chọn A

+)Xét $A = \int\limits_0^1 xf(5x)dx = 1$

Đặt $t = 5x \Rightarrow dt = 5dx$

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=5 \end{cases}$

$A=\int_0^5 \frac{t}{5} f(t).\frac{dt}{5}=\frac{1}{25}\int_0^5 t.f(t)dt=1\Rightarrow \int_0^5 t.f(t)dt=25\Rightarrow \int_0^5 \mathrm{x}.f(\mathrm{x})dx=25$

+) $I=\int_0^5 x^2 f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ v'=f'(x) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} u'=2\mathrm{x} \\ v=f(x) \end{cases}$.

$I=\int_0^5 x^2 f'(x)dx=\left(x^2 f(x)\right)\Big|_0^5-\int_0^5 2xf(x)dx=25.f(5)-2.25=25-2.25=-25$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x>0 \\ x^2-x-1 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Tích phân $I=\int_{-2}^{2} xf'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{13}{24}$. **B.** $\frac{50}{3}$. **C.** $\frac{19}{24}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx$. Đổi cận $x=-2\Rightarrow t=-4$, $x=2\Rightarrow t=4$

$I=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} tf'(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} xf'(x)dx=\frac{1}{4}\left(xf(x)\Big|_{-4}^{4}-\int_{-4}^{4} f(x)dx\right)$

$=\frac{1}{4}\left(104-\int_{-4}^{0}\left(x^2-x-1\right)dx-\int_{-4}^{0}(2x-1)dx\right)=\frac{50}{3}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4)=5;\ \int_{-2}^{0} f(2x+4)dx=6$.

Tính giá trị $I=\int_0^4 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-2}^{0} f(2x+4)\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(2x+4)\mathrm{d}(2x+4)=6\xrightarrow{t=2x+4}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t=12$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó $I=xf(x)\Big|_0^4-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=4.5-12=8$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\right)$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(4)=\frac{4}{3}$.

Giá trị của $\int_1^4 \left(x^2-1\right)f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{263}{15}$. **B.** $-\frac{263}{30}$. **C.** $\frac{457}{15}$. **D.** $\frac{457}{30}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có

$f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\right)\Rightarrow f(x)+xf'(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\left(xf(x)\right)'=x+\sqrt{x}$

$\Rightarrow xf(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Mặt khác $f(4)=\frac{4}{3}$, suy ra $C=-8$ hay $xf(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8$.

Đặt $u=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x$, chọn $v=f(x)$.

Khi đó

$\int_1^4\left(x^2-1\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-1\right)f(x)\Big|_1^4-2\int_1^4 xf(x)\,\mathrm{d}x=15f(4)-2\int_1^4\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8\right)\mathrm{d}x=\frac{457}{15}$.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=\left(x+1\right)f'\left(x\right)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\frac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **C.** $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\frac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\left(x+1\right)\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

$\Rightarrow\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x+1\right)f\left(x\right)-\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x+1\right)f\left(x\right)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

Tính $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+4}+C$.

Khi đó: $\int g\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(x+1\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\sqrt{x^2+4}+C=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(3\right)=21$, $\int_0^3 f\left(x\right)dx=9$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'\left(3x\right)dx$.?

A. $I=15$. **B.** $I=6$. **C.** $I=12$. **D.** $I=9$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(3x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} f(3x) \end{cases}$

Khi đó: $I = x.\frac{1}{3} f(3x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} f(3x)dx = \frac{1}{3} f(3) - \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^1 f(3x)dx}_{K}$

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$. Đổi cận $\begin{matrix} x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{matrix}$

$K = \int_0^3 f(t).\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}.9 = 3.$

Cuối cùng $I = \frac{1}{3}.21 - \frac{1}{3}.3 = 6.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 3$, $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = 3$.

Tính

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 1$; khi $x = 4$ thì $t = 2$.

Khi đó $2 = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = 1$ hay $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Ta có $3 = \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(2) - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3 = 2.3 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3.$

Ta lại có: $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3 - 1 = 2.$

Câu 10: Cho $\int_1^2 \frac{x-2}{x}\ln x\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln^2 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b - 3c$.

A. $S = \frac{9}{2}$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 \frac{x-2}{x}\ln x\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln x\mathrm{d}x - 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Tính $I_1 = \int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

$I_1 = \int_1^2 \ln x\mathrm{d}x = \left(x\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 x.\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \int_1^2 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Tính $I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

Đổi

x	t
2	$\ln 2$
1	0

cận:

$I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$

Do đó $\int_1^2 \frac{x-2}{x}\ln x\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1 - \ln^2 2$

Suy ra $a=-1;\ b=2;\ c=-1$.

Vậy $S = a+2b-3c = -1+2.2-3.(-1) = 6$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^5 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=23$. **B.** $I=15$. **C.** $I=\frac{123}{5}$. **D.** $I=-25$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int_0^1 5xf(5x)\mathrm{d}(5x) = 25 \Rightarrow \int_0^5 xf(x)\mathrm{d}x = 25$.

Khi đó $I = \int_0^5 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^5 x^2\mathrm{d}(f(x)) = x^2 f(x)\Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}(x^2)$

$= 25f(5) - 2\int_0^5 xf(x)\mathrm{d}x = 25-50 = -25$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x>0 \\ x^2-x-1 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{-2}^2 xf'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{13}{24}$. **B.** $\frac{50}{3}$. **C.** $\frac{19}{24}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx$. Đổi cận $x=-2\Rightarrow t=-4$, $x=2\Rightarrow t=4$

$$I=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}tf'(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}xf'(x)dx=\frac{1}{4}\left(xf(x)\Big|_{-4}^{4}-\int_{-4}^{4}f(x)dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(104-\int_{-4}^{0}\left(x^2-x-1\right)dx-\int_{-4}^{0}(2x-1)dx\right)=\frac{50}{3}.$$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $f(x)+f(3-x)=x^2-3x+4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{21}{4}$. **B.** $\frac{23}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Do $f(x)+f(3-x)=x^2-3x+4$ nên $f(3)+f(0)=4\Rightarrow f(3)=4-f(0)=3$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^3 xf'(x)dx=\int_0^3 xd(f(x))=xf(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f(x)dx=3f(3)-\int_0^3 f(x)dx=9-\int_0^3 f(x)dx$$

Xét tích phân $I=\int_0^3 f(x)dx$.

Đặt $x=3-t$ ta có $dx=-dt$

Đổi cận $x=0$ thì $t=3$ và $x=3$ thì $t=0$ nên

$$\int_0^3 f(x)dx=-\int_3^0 f(3-t)dt=\int_0^3 f(3-t)dt=\int_0^3 f(3-x)dx$$

Do đó

$$I=\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 f(3-x)dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(f(x)+f(3-x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3(x^2-3x+4)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Big|_0^3=\frac{15}{4}$$

Suy ra $\int_0^3 xf'(x)\mathrm{d}x=9-\frac{15}{4}=\frac{21}{4}$.

Câu 14: Cho biết $\int_0^1 x\left[\sin\pi x+\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x=a+\frac{b}{\pi}+c\ln 2$; với a,b,c là những số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x\left[\sin \pi x+\ln\left(x+1\right)\right]\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_0^1 x\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x}_{A}+\underbrace{\int\limits_0^1 x\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x}_{B}$.

* Tính $A=\int\limits_0^1 x\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x\right)\end{cases}$ ta được:

$A=-\frac{x}{\pi}\cos\left(\pi x\right)\Big|_0^1+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}.\frac{1}{\pi}\sin\left(\pi x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}$.

* Tính $B=\int\limits_0^1 x\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+1\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\end{cases}$ ta được:

$B=\left(\frac{x^2-1}{2}\right)\ln\left(x+1\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2-1}{x+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}$.

Vậy $I=A+B=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=1\\ c=0\end{cases}\Rightarrow T=a+b+c=\frac{1}{4}+1+0=\frac{5}{4}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2\mathrm{x}+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{-10}{3}$. **B.** $\frac{-4}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

+) Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}$. Chọn $\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$

$I=x.f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2f\left(2\right)-J$ (1) với $J=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

+) Đặt $x=2-t\ \Rightarrow J=-\int\limits_2^0 f\left(2-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^2 f\left(2-x\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2\left[x^2-2\mathrm{x}+2-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2\mathrm{x}+2\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}-J$

Suy ra $2J=\frac{8}{3}\Rightarrow J=\frac{4}{3}$ (2)

+) Ta có: $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Chọn $x=0$, ta có: $f(0)+f(2)=2$ mà $f(0)=3$ suy ra $f(2)=-1\ (3)$

+) Từ (1), (2) và (3) suy ra $I=2.(-1)-\dfrac{4}{3}=\dfrac{-10}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 x.f'(x)dx$

A. $I=-\dfrac{10}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $I=\dfrac{5}{3}$. **D.** $I=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

* Với $x=0$, ta có: $f(0)+f(2)=2\Leftrightarrow f(2)=-1$

$f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2\left(x^2-2x+2\right)dx$

$\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{8}{3}$

$\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{4}{3}$

* Xét $I=\int_0^2 x.f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x).dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=d\\v=f(x)\end{cases}$

$I=x.f(x)\big|_0^2-\int_0^2 f(x)dx=2.f(2)-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{10}{3}$.

Câu 17: Cho $\int\limits_0^1 x\left(e^{2x}+2\sqrt[3]{x-1}\right)dx=\dfrac{ae^2-b}{c}$, với a,b,c là các số nguyên và a,b nguyên tố cùng nhau. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=10$. **B.** $P=18$. **C.** $P=46$. **D.** $T=24$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\int_0^1 x\left(e^{2x}+2\sqrt[3]{x-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(e^{2x}+2\sqrt[3]{x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x+2\int_0^1 (x-1+1)\sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1+2\int_0^1 (x-1)\sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x+2\int_0^1 \sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}+2\int_0^1 (x-1)^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x+2\int_0^1 (x-1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}+2\frac{(x-1)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\Bigg|_0^1+2\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}+\frac{6}{7}-\frac{3}{2}=\frac{7e^2-11}{28}=\frac{ae^2-b}{c}$$

$\Rightarrow a=7, b=11, c=28.$

Vậy $T=a+b+c=7+11+28=46$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{khi} \quad 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{khi} \quad \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}-4\ln 3+4\ln 2$. **B.** $\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$.

C. $-\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+4\ln 3-4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f'(\sin x).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

Với $x=0$ thì $t=0$.

Với $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=1$.

Khi đó $I=2\int_0^1 t.f'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f(t)\end{cases}$.

Suy ra $I=2\left(\left(tf\left(t\right)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right)=2f\left(1\right)-2\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=2-2\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(2x-1\right)\mathrm{d}x\right)$

$=2-2\left(\left(2\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\left(x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right)$

$=2-4\left(\ln 3-\ln 2\right)-\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}-4\ln 3+4\ln 2$.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(3\right)=21,\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=9$. Tính $\int\limits_0^1 xf'\left(3x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta xét $\int\limits_0^1 xf'\left(3x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=3x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{3}=\mathrm{d}x$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=3$.

Suy ra $\int\limits_0^1 xf'\left(3x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 tf'\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$ (vì tích phân không phụ thuộc vào biến).

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$.

Suy ra $\frac{1}{9}\int\limits_0^3 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left[xf\left(x\right)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right]=7-1=6$.

Vậy $\int\limits_0^1 xf'\left(3x\right)\mathrm{d}x=6.$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=4$ và $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_0^1 x^3f'\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** –1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=1.$

Do đó

$$\int_0^1 x^3.f'\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t.f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x$$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó

$$\int_0^1 x^3.f'\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x.f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(f(1)-3\right)=\frac{1}{2}(4-3)=\frac{1}{2}.$$

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{a}{b}$ (với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=3a-b.$

A. $T=0.$ **B.** $T=-48.$ **C.** $T=16.$ **D.** $T=1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x.\mathrm{d}\,f(x)=I=x.f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$ (1)

Theo giả thiết: $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right)\Rightarrow\int_0^1\left[5f(x)-7f(1-x)\right]\mathrm{d}x=3\int_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-7\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=3\int_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-7\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-2.\ (2)$$

Bằng cách đổi biến $t=1-x$, ta có $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. (3)

Thay (3) vào (2), ta có $5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-7\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1.$

Mặt khác do $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right)$ nên lần lượt chọn $x=0,x=1$ ta có

$$\begin{cases}5f(0)-7f(1)=0\\ 5f(1)-7f(0)=-3\end{cases}\Rightarrow f(1)=\frac{5}{8}.$$

Thay $f(1)=\frac{5}{8}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ vào (1) ta có $I=f(1)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{8}-1=-\frac{3}{8}.$

Vậy $a=3;\ b=8\Rightarrow T=3a-b=9-8=1.$

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ và thỏa mãn $3xf'(x)=3+2f'(x),\forall x\in D$. Biết rằng $f(2)=\ln 8,\ f(0)=0$ và tích phân $I=\int_{-1}^0\left(f(x)+f(1)\right)\mathrm{d}x=\frac{a\ln 5-b\ln 2}{3}-1,(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị $a+b$.

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Với $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ ta có $3xf'(x)=3+2f'(x)\Leftrightarrow(3x-2)f'(x)=3\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{3x-2}$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3}{3x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(3x-2)}{3x-2}=\begin{cases}\ln(3x-2)+C_1, x>\frac{2}{3}\\ \ln(2-3x)+C_2, x<\frac{2}{3}\end{cases}$.

Theo bài ra thì $f(2)=\ln 8, f(0)=0\Rightarrow\begin{cases}\ln 4+C_1=\ln 8\\ \ln 2+C_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\ln 2\\ C_2=-\ln 2\end{cases}$. Suy ra $f(1)=\ln 2$.

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{0}\left(f(x)+f(1)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(\ln(2-3x)-\ln 2+\ln 2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\ln(2-3x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2-3x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\frac{3}{2-3x}\mathrm{d}x=\frac{3}{3x-2}\mathrm{d}x\\ v=x-\frac{2}{3}=\frac{3x-2}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\frac{3x-2}{3}.\ln(2-3x)\Big|_{-1}^{0}-\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x-2}{3}.\frac{3}{3x-2}\mathrm{d}x$

$=-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{5}{3}\ln 5-\int\limits_{-1}^{0}\mathrm{d}x=\frac{5\ln 5-2\ln 2}{3}-1$.

Suy ra $a=5, b=2\Rightarrow a+b=7$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$, đặt: $\sqrt{x}=t\Rightarrow\mathrm{d}x=2t.\mathrm{d}t$, đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 2t.f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{5}\Rightarrow\int\limits_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x.\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x).\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{x^2}{2}.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{(1)^2}{2}.1-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$.

Xét: $\int_0^1 \left[f'(x)+kx^2 \right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x + 2k.\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x + k^2.\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{9}{5} + 2k.\frac{3}{5} + \frac{1}{5}.k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Khi đó: $\int_0^1 \left[f'(x)-3x^2 \right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x)-3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2$

$\Rightarrow \int f'(x)\mathrm{d}x = \int 3x^2 \mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C \Leftrightarrow f(1) = (1)^3 + C \Leftrightarrow C = 0$.

Nên: $f(x) = x^3 \Leftrightarrow f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^6 \mathrm{d}x = \frac{1}{7}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề bài ta có $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$ và $f(0) = 0$ suy ra $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$I = x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \quad (*)$

Ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad (**)$

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

x	$0 \quad \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \quad 0$

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \qquad (***)$

Từ (**) và (***) suy ra: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{4}$ thế vào (*) suy ra $I = -\frac{1}{4}$.

DẠNG 5 Tích phân hàm ẩn phần 1

Lưu ý: Trên đây chỉ đưa ra công thức áp dụng mang tính chất tham khảo và công thức được chứng minh từ các ví dụ ở bài tập rèn luyện.

- **Dạng 1:** $f'(x).h\left(f(x)\right)=g(x)$

  Lấy tích phân hai vế, ta được $\int f'(x).h\left[f(x)\right]=\int g(x)$

  Sử dụng phương pháp vi phân: $\int h\left[f(x)\right]d\left[f(x)\right]=\int g(x)$

- **Dạng 2:** $A.f(x)+B.u'f(u)+C.f(a+b-x)=g(x)$ với $\begin{cases}u(a)=a\\u(b)=b\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u(a)=b\\u(b)=a\end{cases}$

  Khi đó: $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{A+B+C}\int_a^b g(x)dx=\frac{1}{A-B+C}\int_a^b f(x)dx$

- **Dạng 3:** $A.f(ax+b)+B.f(-ax+c)$ (với $A^2\neq B^2$), khi đó $f(x)=\frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right)-B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2-B^2}$

  - **Hệ quả 1:** $A.f(x)+b.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2+B^2}$.
  - **Hệ quả 2:** $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\frac{g(x)}{A+B}$, $g(x)$ là hàm chẵn.

- **Dạng 4:** Hàm ẩn cho dưới cận tích phân

  Áp dụng công thức $\left(\int_{v\,x}^{u\,x} f\ t\ dt\right)'=u'\ x\ \ f\ \ u\ x\ \ -v'\ x\ \ f\ \ v\ x\ \ .$

- **Dạng 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f\left(u(x)\right)=v(x)$ và $u(x)$ là một hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

  Tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thì ta đặt $t=u(x)\rightarrow\begin{cases}dt=u'(x)dx\\f(t)=v(x)\end{cases}\Rightarrow I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

- **Dạng 6:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g\left(f(x)\right)=x$ và $g(t)$ là một hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thì ta đặt $y=f(x)\rightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g'(y)dy$. Sau đó thực hiện đổi cận và đưa về tích phân cơ bản.

- **Dạng 7:** $f\ x\ .f\ \ a+b-x\ \ =k^2$ khi đó $I=\int_a^b\frac{dx}{k+f\ \ x}=\frac{b-a}{2k}$.

- **Dạng 8:** $f\ \ x\ \ =f\ \ a+b-x\ \ $ và $\ \ I=\int_a^b x.f\ \ x\ \ dx$ thì ta có: $\int_a^b f\ \ x\ \ dx=\frac{2I}{a+b}$

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-1$.

Câu 2: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{15}$. **B.** $I=\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{4}{75}$. **D.** $I=\frac{1}{25}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** $\frac{2}{1009}$. **C.** $\frac{4}{2019}$. **D.** $\frac{1}{1009}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=e^x$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$.

A. $I=\frac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $I=\frac{e^2-1}{2018e}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{e}$.

Câu 5: Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2$. **B.** $y=4x-6$. **C.** $y=2x-6$. **D.** $y=4x-2$.

Câu 6: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x)+g(-x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$.

A. $I=2018$. **B.** $I=\frac{1009}{2}$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1008$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. $I=-2$.. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$.. **D.** $I=2$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx.$

A. $I=-\dfrac{\pi}{10}.$ **B.** $I=-\dfrac{\pi}{20}.$ **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}.$ **D.** $I=\dfrac{\pi}{10}.$

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx.$

A. $I=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $I=\dfrac{3}{5}.$ **C.** $I=\dfrac{2}{3}.$ **D.** $I=\dfrac{4}{3}.$

Câu 11: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f\left(x\right)dx.$

A. $\dfrac{\pi}{20}.$ **B.** $\dfrac{\pi}{16}.$ **C.** $\dfrac{\pi}{6}.$ **D.** $\dfrac{\pi}{4}.$

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{0}^{x^2}f\left(t\right)dt=x\cos(\pi x).$ Giá trị của $f\left(4\right)$ là

A. $f\left(4\right)=1.$ **B.** $f\left(4\right)=4.$ **C.** $f\left(4\right)=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $f\left(4\right)=\dfrac{1}{4}.$

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{0}^{x^2}f\left(t\right)dt=e^{x^2}+x^4-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(4\right)$ là

A. $f\left(4\right)=e^4+4.$ **B.** $f\left(4\right)=4e^4.$ **C.** $f\left(4\right)=e^4+8.$ **D.** $f\left(4\right)=1.$

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;+\infty\right)$ với $a>0$ và thỏa mãn $\int\limits_{a}^{x}\dfrac{f\left(t\right)}{t^2}dt+6=2\sqrt{x}$ với $x>a$. Tính $f\left(4\right)$

A. $f\left(4\right)=2.$ **B.** $f\left(4\right)=8.$ **C.** $f\left(4\right)=4.$ **D.** $f\left(4\right)=16.$

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)>0$, xác định và có đạo hàm trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $g\left(x\right)=1+2018\int\limits_{0}^{x}f\left(t\right)dt$ và $g\left(x\right)=f^2\left(x\right)$. Tính $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{g\left(x\right)}dx$

A. $\dfrac{1011}{2}.$ **B.** $\dfrac{1099}{2}.$ **C.** $\dfrac{2019}{2}.$ **D.** 505.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ .Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2+1}dx$

A. $I=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=\dfrac{5}{2}.$ **D.** $I=3.$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+x)=x^2-1$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=-\frac{6}{5}$. **B.** $I=\frac{15}{16}$. **C.** $I=-\frac{6}{5}$. **D.** $I=-\frac{15}{16}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$. Tính $I=\int_1^{10} f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{45}{4}$. **B.** $I=\frac{9}{4}$. **C.** $I=\frac{135}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+1)=2x-1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=6$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_1^5 xf'(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{17}{4}$. **C.** $I=\frac{33}{4}$. **D.** $I=-1761$.

Câu 21: . Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x^4+x^2+x-1)=\frac{1}{x+1}$. Biết $I=\int_2^{21} f(x)dx=\frac{a}{b}-\ln\frac{c}{d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $T=a+b+c+d$.

A. $T=243$. **B.** $T=306$. **C.** $T=312$. **D.** $T=275$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f\left(x-\frac{1}{x}+1\right)=\frac{1}{x}$. Biết $I=\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)dx=\frac{a}{b}+\ln c$ với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là các phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=13$. **B.** $T=69$. **C.** $T=96$. **D.** $T=88$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 24: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f^3(x)-3f^2(x)+6f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^5 f(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{12}$. **D.** $I=\frac{5}{3}$.

Câu 25: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+f^3(x)+2f(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-2}^1 f(x)dx$

.

A. $I=\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{2}$. **C.** $I=\frac{7}{3}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 26: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2x+f^5(x)+f(x)-4=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{3}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{3}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $x-f^3(x)-f(x)+3=0$. Tính $I=\int_{-1}^{7} xf'(x)dx$.

A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{51}{4}$. **C.** $I=\frac{9}{4}$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$ biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $f(x)>0$ và $f(x).f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{2018}\frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $I=2018$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1009$. **D.** $I=4016$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập R, ta có $f(x)>0$ *và* $f(0).f(10-x)=9$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-2}^{12}\frac{1}{3+f(x)}dx$.

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$ **C.** $I=\frac{7}{6}$. **D.** $I=\frac{7}{3}$

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập R và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_{1}^{3} x.f(x)dx=5$.Tính tích phân $\int_{1}^{3} f(x)dx$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập R và thỏa mãn $f(x)-f(3-x)=0$. Biết $\int_{-1}^{4} x.f(x)dx=2$. Tính tích phân $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{2}{9}; f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$.. Giá trị của $f(1)$ là

A. $\frac{-35}{36}$. **B.** $\frac{-2}{3}$. **C.** $\frac{-19}{36}$. **D.** $\frac{-2}{5}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}; f'(x)=x\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$.. Giá trị của $f(1)$ là

A. $\frac{-11}{6}$. **B.** $\frac{-2}{3}$. **C.** $\frac{-2}{9}$. **D.** $\frac{-7}{6}$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}; f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$.. Giá trị của $f(1)$ là

A. $\frac{-41}{400}$. **B.** $\frac{-1}{10}$. **C.** $\frac{-391}{400}$. **D.** $\frac{-1}{40}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng :

A. $-\frac{4}{35}$. **B.** $-\frac{71}{20}$. **C.** $-\frac{79}{20}$. **D.** $-\frac{4}{5}$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-e^x.f^2(x), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2)=\frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\left(x.f(x)\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị (C) là

A. $y=6x+30$. **B.** $y=-6x+30$. **C.** $y=36x-30$. **D.** $y=-36x+42$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$ tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0, f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $f(2)=\frac{1}{15}$. Tính $f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{11}{15}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{7}{30}$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x).f'(x)=12x+13$ và $f(0)=2$. Khi đó phương trình $f(x)=3$ có bao nhiêu nghiệm

A. 2. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}$ và $b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 44: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4<f(5)<5$. **B.** $2<f(3)<3$. **C.** $3<f(5)<4$. **D.** $1<f(5)<2$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2, \forall x\in[1;4], f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$. **B.** $\frac{361}{18}$. **C.** $\frac{381}{18}$. **D.** $\frac{371}{18}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}, f(0)=0$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ bằng

A. 22. **B.** $4\sqrt{11}+\sqrt{3}$. **C.** $20+\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{11}+\sqrt{3}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên R thỏa mãn $f(0)=1;\left(f'(x)\right)^2=e^x.f(x), \forall x\in R$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2.f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. 2. **B.** 4. **C.** –1. **D.** 6.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ .Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{16}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=2x$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$

A. –4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Câu 51: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2-2)+3f(1-x)=4x^3$ Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I=5$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=15$.

Câu 52: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1,2]$ và thỏa mãn $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính giá trị tích phân $I=\int_{-1}^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Câu 53: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn $f(x)+xf(1-x^2)+3f(1-x)=\frac{1}{x+1}$. Tính giá trị tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{9}{2}\ln 2$. **B.** $I=\frac{2}{9}\ln 2$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c};\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

A. 6. **B.** –4 **C.** 4. **D.** –10.

Câu 55: Cho hàm số liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx=a\ln 2+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P=a+b$

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$ **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng

A. $\frac{-\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1+2x)+f(1-2x)=\frac{x^2}{x^2+1},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

A. $I=2-\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=1-\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $-\frac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\frac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(0)\neq 0$ với $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}dx=1$ và $f(4)=\frac{1}{4},f(8)=\frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.C**	**3.C**	**4.A**	**5.D**	**6.A**	**7.D**	**8.B**	**9.C**	**10.C**
11.A	**12.D**	**13.C**	**14.B**	**15.A**	**16.A**	**17.D**	**18.C**	**19.A**	**20.C**
21.B	**22.A**	**23.D**	**24.B**	**25.A**	**26.D**	**27.C**	**28.B**	**29.C**	**30.D**
31.A	**32.C**	**33.B**	**34.B**	**35.B**	**36.D**	**37.D**	**38.C**	**39.C**	**40.B**
41.D	**42.A**	**43.D**	**44.C**	**45.A**	**46.D**	**47.B**	**48.B**	**49.C**	**50.D**
51.C	**52.B**	**53.B**	**54.A**	**55.A**	**56.D**	**57.A**	**58.A**	**59.D**	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ khi đó trở thành: $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f\left(t\right)=\frac{3}{t}\Rightarrow 2f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}.$

Hay $4f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x},$ kết hợp với điều kiện $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$

Suy ra: $3f\left(x\right)=\frac{6}{x}-3x\Rightarrow \frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{2}{x^2}-1\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(\frac{-2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$

Câu 2: Chọn C

Cách 1: Áp dụng kết quả của dạng 3, ta có:

$2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2g\left(x\right)-3g\left(1-x\right)}{2^2-3^2}=\frac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}.$

Suy ra: $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{2x\sqrt{1-x}-3\left(1-x\right)\sqrt{x}}{-5}dx\overset{casio}{=}0,05\left(3\right)=\frac{4}{75}$

Cách 2:

Với $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}$ ta có $A=2;B=0;C=3.$

Suy ra: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{1}{2+3}\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx\overset{casio}{=}0,05\left(3\right)=\frac{4}{75}$

Cách 3:

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}\Rightarrow 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+3\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx\overset{casio}{=}0,2\left(6\right)=\frac{4}{15}\left(*\right)$

Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx;$ Với $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=1\Rightarrow u=0.$

Suy ra $\int\limits_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(u\right)du=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ thay vào ta được:

$5\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{4}{75}$

Câu 3: Chọn C

Cách 1:

Áp dụng hệ quả 2: $A.f\left(x\right)+B.f\left(-x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{A+B}$, $g\left(x\right)$ là hàm chẵn.

Ta có: $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x \Rightarrow f(x)=\dfrac{2x\sin x}{2019}$

$\Rightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{2}{2019}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \overset{casio}{=} \dfrac{4}{2019}$.

Cách 2:

Với $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$ với $A=1;b=0;C=2018$.

Suy ra $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x dx \overset{casio}{=} \dfrac{4}{2019}$.

Câu 4: Chọn D

Cách 1:

Áp dụng hệ quả 1: $A.f(x)+b.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{A.g(x)-B.g(-x)}{A^2+B^2}$.

Ta có: $f(-x)+2018f(x)=e^x \Rightarrow f(x)=\dfrac{2018e^x-e^{-x}}{2018^2-1}$

$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\dfrac{1}{2019.2017}\int\limits_{-1}^{1}\left(2018e^x-e^{-x}\right)dx \overset{casio}{\approx} 1{,}164.10^{-4}\approx\dfrac{e^2-1}{2019e}$. Chọn A

Cách 2:

Với $f(-x)+2018f(x)=e^x$ ta có $A=1;B=0;C=2018.$

Suy ra $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\dfrac{1}{1+2018}\int\limits_{-1}^{1} e^x dx=\dfrac{1}{2019}e^x\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{e^2-1}{2019e}$.

Câu 5: Chọn D

Áp dụng kết quả dạng 3, có $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2=g(x)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{2g\left(\dfrac{x}{2}\right)-g\left(\dfrac{x-1}{-2}\right)}{2^2-1}=\dfrac{6x^2-3(x-1)^2}{3}=x^2+2x-1.$

Suy ra $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=4 \end{cases}$. Khi đó, phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y=4x-2$.

Câu 6: Chọn A

Áp dụng Hệ quả 2 :

$A.g(x)+B.g(-x)=h(x)\Rightarrow g(x)=\dfrac{h(x)}{A+B}$ với $h(x)$ là hàm số chẵn

Ta có: $g(x)+g(-x)=1=h(x)\Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=2018$.

Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Câu 7: Chọn D

Cách 1:

Áp dụng hệ quả 2: $A.f(x)+B.f(-x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn

Ta có: $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2}=|\cos x|$

$\Rightarrow I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx \overset{\text{Casio}}{=} 6$

Cách 2:

Với $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ ta có $A=1;B=0;C=1$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{1+1}\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx \overset{\text{Casio}}{=} 6$

Cách 3:

Từ $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$

$\Rightarrow \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos x|dx \overset{\text{Casio}}{=} 12 \qquad (*)$

Đặt $u=1-x\Rightarrow du=-dx$. Với $x=-\dfrac{3\pi}{2}\to u=\dfrac{3\pi}{2}$; $x=\dfrac{3\pi}{2}\to u=-\dfrac{3\pi}{2}$

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(u)du=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Thay vào , ta được: $2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=12\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=6$.

Câu 8: Chọn B

Với $2f(x)+f(-x)=\cos x$ ta có $A=2;B=0;C=1$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{2+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx=\dfrac{2}{3}$.

Câu 9: Chọn C

Với $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. ta có $A=2;B=0;C=3$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx.=\dfrac{1}{2+3}\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{dx}{4+x^2}\approx 0{,}157\approx \dfrac{\pi}{20}$.

Câu 10: Chọn C

Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t$.

Khi đó $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4\Leftrightarrow (1-t)^2f(1-t)+f(t)=2(1-t)-(1-t)^4$

$\Leftrightarrow (t^2-2t+1)f(1-t)+f(t)=1+2t-6t^2+4t^3-t^4$

Hay $(x^2-2x+1)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$ (*)

Từ điều kiện: $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4\Rightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$ (**).

Thay vào ta được: $(x^2-2x+1)\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$\Leftrightarrow(1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$

$\Leftrightarrow(1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=(1-x^2)(1-x^2+2x^3-x^4)\Rightarrow f(x)=(1-x^2).$

Suy ra: $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}.$

Câu 11: Chọn A

Ta có $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\int_0^1 2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx.$

Xét $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ đặt $x=\sin t$ khi đó $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2t+1\right)dt=\frac{\pi}{4},(1).$

Xét $\int_0^1 2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)dx=2\int_0^1 f\left(x\right)dx+3\int_0^1 f\left(1-x\right)dx,(*).$

Đặt $1-x=t$ khi đó $\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int_0^1 f\left(t\right)dt$. Do tích phân có tính chất bất biến nên $\int_0^1 f\left(t\right)dt=\int_0^1 f\left(x\right)dx$. Khi đó $(*)$ trở thành $\int_0^1 2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)dx=5\int_0^1 f\left(x\right)dx,(2).$

Từ $(1),(2)$ ta có $5\int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{20}.$

Câu 12: Chọn D

Áp dụng công thức $\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f\left(t\right)dt\right)'=u'\left(x\right)f\left(u\left(x\right)\right)-v'\left(x\right)f\left(v\left(x\right)\right).$

Ta có $\left(\int_0^{x^2} f\left(t\right)dt\right)'=\left(x\cos(\pi x)\right)'\Leftrightarrow 2xf\left(x^2\right)=\cos(\pi x)-\pi x\sin(\pi x),(1).$

Thay $x=2$ vào (1) ta được $f\left(4\right)=\frac{1}{4}.$

Câu 13: Chọn C

Áp dụng công thức $\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f\left(t\right)dt\right)'=u'\left(x\right)f\left(u\left(x\right)\right)-v'\left(x\right)f\left(v\left(x\right)\right).$ Ta có

$\left(\int_0^{x^2} f\left(t\right)dt\right)'=\left(e^{x^2}+x^4-1\right)'\Leftrightarrow 2xf\left(x^2\right)=2xe^{x^2}+4x^3,(1).$

Thay $x=2$ vào (1) ta được $f\left(4\right)=e^4+8.$

Câu 14: Chọn B

Áp dụng công thức: $\int_a^{u(x)} f\left(t\right)dt=u'.f\left(u\right)$

$\int_a^x\frac{f\left(t\right)}{t^2}dt+6=2\sqrt{x}\Leftrightarrow\int_a^x\frac{f\left(t\right)}{t^2}dt+6=\left(2\sqrt{x}\right)'$

$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}$. Vậy $f(4)=8.$

Câu 15: Chọn A

Áp dụng công thức: $\int\limits_a^{u(x)} f(t)dt=u'.f(u)$

$g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)dt\Rightarrow g'(x)=2018f(x)\Leftrightarrow g'(x)=2018\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018$

Suy ra: $\int\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx=\int 2018dx\Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)}=2018x+C\ (*)$

Từ điều kiện: $g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)dt\Rightarrow g(0)=1$ thay vào $(*)$ ta có $C=2$

Do đó: $\sqrt{g(x)}=1009x+1$. Vậy $\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}dx=\int\limits_0^1(1009x+1)dx=\frac{1011}{2}$

Câu 16: Chọn A

Đặt: $t=\frac{1}{x}\Rightarrow dt=-\frac{1}{x^2}dx$; $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2, x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$,

$I=\int\limits_2^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}1.\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx$

Do đó: $2I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f(x)}{x^2+1}dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+2}{x^2+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=3$

Vậy: $I=\frac{3}{2}.$

Câu 17: Chọn D

Đặt $t=x^3+x\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x\\ f(t)=x^2-1\end{cases}$.

Đổi cận: $t=0\Rightarrow x^3+x=0\Leftrightarrow x=0$ và $t=2\Rightarrow x^3+x=2\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(x^2-1\right)\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x\overset{\text{Casio}}{=}-\frac{16}{15}$.

Câu 18: Chọn C

Đặt $t=x^3+2x-2\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\left(3x^2+2\right)\mathrm{d}x\\ f(t)=3x-1\end{cases}$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x^3+2x-2=1\Leftrightarrow x=1$ và $t=10\Rightarrow x^3+2x-2=10\Leftrightarrow x=2$.

Khi đó $I=\int\limits_1^{10} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(3x-1\right)\left(3x^2+2\right)\mathrm{d}x\overset{\text{Casio}}{=}\frac{135}{4}$.

Câu 19: Chọn A

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\\ f(t)=2x-1\end{cases}$.

Đổi cận: $t=0\Rightarrow x^3+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $t=2\Rightarrow x^3+1=2\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó $I=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^1(2x-1)3x^2\mathrm{d}x\overset{\text{Casio}}{=}-2$.

Câu 20: Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow I=xf(x)\Big|_1^5-\int_1^5 f(x)dx=5f(5)-f(1)-\int_1^5 f(t)dt$.

Đặt $t=x^3+3x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=(3x^2+3)dx\\ f(t)=3x+2\end{cases}$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0; t=5\Rightarrow x^3+3x+1=5\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra: $f(5)=3.1+2\ (x=1)$ và $f(1)=3.0+2\ (x=0)$.

Khi đó $I=5.5-2-\int_0^1(3x+2)(3x^2+3)dx\overset{Casio}{=}\frac{33}{4}$.

Câu 21: Chọn B

Đặt $t=x^4+x^2+x-1\Rightarrow\begin{cases}dt=(4x^3+2x+1)dx\\ f(t)=\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$.

Đổi cận: $t=2\Rightarrow x^4+x^2+x-1=2\Rightarrow x=1; t=21\Rightarrow x^4+x^2+x-1=21\Rightarrow x=2\ (x>0)$.

Ta có: $I=\int_2^{21} f(x)dx=\int_2^{21} f(t)dt=\int_1^2\frac{1}{x+1}(4x^3+2x+1)dx=\int_1^2\left(4x^2-4x+6-\frac{5}{x+1}\right)dx$.

$=\left(\frac{4x^3}{3}-2x^2+6x-5\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{28}{3}-5\ln\frac{3}{2}=\frac{28}{3}-\ln\frac{243}{32}$.

Suy ra $a=28; b=3; c=243; d=32\Rightarrow T=306$.

Câu 22: Chọn B

Đặt $t=x-\frac{1}{x}+1\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx\\ f(t)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x-\frac{1}{x}+1=1\Rightarrow x=1; t=\frac{5}{2}\Rightarrow x-\frac{1}{x}+1=\frac{5}{2}\Rightarrow x=2\ (x>0)$.

Ta có: $I=\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)dx=\int_1^{\frac{5}{2}} f(t)dt=\int_1^2\frac{1}{x}.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x}.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}dx$

$=\left(\ln|x|-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{8}+\ln 2$. Suy ra $a=3; b=8; c=2\Rightarrow T=13$.

Câu 23: Chọn D

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=y^3+y\Rightarrow dx=(3y^2+1)dy$.

Đổi cận:

$x=0\Rightarrow y^3+y=0\Rightarrow y=0$;

$x=2\Rightarrow y^3+y=2\Rightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy=\int_0^1(3y^3+y)dy \overset{\text{casio}}{=}\frac{5}{4}$.

Câu 24: Chọn B

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=2y^3-3y^2+6y\Rightarrow dx=(6y^2-6y+6)dy$.

Đổi cận:

$x=0\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=0\Rightarrow y=0$;

$x=5\Rightarrow 2y^3-3y^2+6y=5\Rightarrow y=1$.

Khi đó $I=\int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 y.6(y^2-y+1)dy=6\int_0^1(y^3-y^2+y)dy \overset{casio}{=}\frac{5}{2}$.

Câu 25: Chọn A

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=-y^3-2y+1\Rightarrow dx=(-3y^2-2)dy$.

Đổi cận:

$x=-2\Rightarrow -y^3-2y+1=-2\Rightarrow y=1$;

$x=1\Rightarrow -y^3-2y+1=1\Rightarrow y=0$.

Khi đó $I=\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_1^0 y.(-3y^2-2)dy=\int_0^1(3y^3+2y)dy \overset{casio}{=}\frac{7}{4}$.

Câu 26: Chọn D

Đặt $y=f(x)\Rightarrow 2x=-y^5-y+4\Rightarrow 2dx=(-5y^4-1)dy$.

Đổi cận:

$x=1\Rightarrow -y^5-y+4=1\Rightarrow y=1$;

$x=2\Rightarrow -y^5-y+4=2\Rightarrow y=0$.

Khi đó $I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^0 y.(-5y^4-1)dy=\int_0^1(5y^5+y)dy \overset{casio}{=}\frac{4}{3}$.

Câu 27: Chọn C

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int_{-1}^7 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_{-1}^7-\int_{-1}^7 f(x)dx=7f(7)+f(-1)-\int_{-1}^7 f(x)dx$

Từ $x-f^3(x)-f(x)+3=0\Rightarrow\begin{cases}f^3(7)+f(7)-10=0\\f^3(-1)+f(-1)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(7)=2\\f(-1)=1\end{cases}$

Đặt $t=f(x)\Rightarrow x-t^3-t+3=0\Leftrightarrow x=t^3+t-3\Rightarrow dx=(3t^2+t)dt$

Đổi cận $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow -1=t^3+t-3 \Leftrightarrow t=1 \\ x=7 \Rightarrow 7=t^3+t-3 \Leftrightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{7} f(x)dx = \int\limits_{1}^{2} (3t^2+t)dx \overset{Casio}{=} \frac{51}{4}$. Suy ra $I = 15 - \int\limits_{-1}^{7} f(x)dx = 15 - \frac{51}{4} = \frac{9}{4}$.

Câu 28: Chọn B

Cách 1: Dùng công thức tính nhanh dạng 7

Cách 2: Đặt: $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; f(x) = \frac{1}{f(t)}$ và $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$

Khi đó $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+f(x)} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(t)dt}{1+f(t)} = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

$\Rightarrow 2I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+f(x)} + \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int\limits_{0}^{1} dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn C

Cách 1: Dùng công thức tính nhanh dạng 7

Khi đó: $I = \int\limits_{0}^{2018} \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{2018-0}{2.1} = 1009$

Cách 2: Đặt: $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; f(x) = \frac{1}{f(t)}$ và $x = 0 \Rightarrow t = 2018; x = 2018 \Rightarrow t = 0$

Khi đó $I = \int\limits_{0}^{2018} \frac{dx}{1+f(x)} = \int\limits_{0}^{2018} \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int\limits_{0}^{2018} \frac{f(t)dt}{1+f(t)} = \int\limits_{0}^{2018} \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

$\Rightarrow 2I = \int\limits_{0}^{2018} \frac{dx}{1+f(x)} + \int\limits_{0}^{2018} \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int\limits_{0}^{2018} dx = 2018 \Rightarrow I = 1009$.

Câu 30: Chọn D

Dùng công thức tính nhanh dạng 7

Do đó: $I = \int\limits_{-2}^{12} \frac{1}{3+f(x)}dx = \frac{12-(-2)}{2.3} = \frac{7}{3}$.

Câu 31: Chọn A

Cách 1: Sử dụng công thức giải nhanh dạng 8:

Do đó: $\int\limits_{1}^{3} f(x)dx = \frac{2.5}{1+3} = \frac{5}{2}$.

Cách 2: Đặt $t = 4-x \Rightarrow dt = -dx$ *và* $x = 1 \Rightarrow t = 3;\ x = 3 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó: $5 = \int\limits_{1}^{3} x.f(x)dx = \int\limits_{1}^{3} (4-t).f(4-t)dt = \int\limits_{1}^{3} (4-x).f(4-x)dx = \int\limits_{1}^{3} (4-x).f(x)dx$.

Suy ra: $10 = \int\limits_{1}^{3} x.f(x)dx + \int\limits_{1}^{3} (4-x).f(x)dx = 4\int\limits_{1}^{3} f(x)dx \Rightarrow \int\limits_{1}^{3} f(x)dx = \frac{5}{2}$.

Câu 32: Chọn C

Sử dụng công thức giải nhanh dạng 8:

Do đó: $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \frac{2.2}{-1+4} = \frac{4}{3}$.

Câu 33: Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int 2xdx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^2 + C$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2+C} \overset{f(2)=-\frac{2}{9}}{\Rightarrow} C = \frac{1}{2}$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

$f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 2x \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int_1^2 2xdx = 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = 3 \Leftrightarrow f(1) = \frac{-2}{3}$.

Câu 34: Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x) = x\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int xdx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2}+C} \overset{f(2)=-\frac{1}{3}}{\Rightarrow} C = 1$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Cách 2:

$f'(x) = x\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = x \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int_1^2 xdx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = 3 \Leftrightarrow f(1) = \frac{-2}{3}$.

Câu 35: Chọn B

Cách 1: Ta có: $f'(x) = 4x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 4x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int 4x^3dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^4 + C$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^4+C} \overset{f(2)=-\frac{1}{25}}{\Rightarrow} C = 9$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2+9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Cách 2:

$f'(x) = 4x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 4x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int_1^2 4x^3dx = 15 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = 3 \Leftrightarrow f(1) = \frac{-1}{10}$.

Câu 36: Chọn D

Ta có $f'(x) = x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = x^3$.

Cách 1: Từ suy ra $\int \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int x^3dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C$.

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4}+C} \xrightarrow{f(2)=-\frac{1}{5}} -\frac{1}{5} = -\frac{1}{4+C} \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4}+1} \Rightarrow f(1) = -\frac{4}{5}$.

Cách 2: suy ra $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx = \int_1^2 x^3 dx \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow f(1) = -\frac{4}{5}$.

Câu 37: Chọn D

Biến đổi

$$f'(x) = -e^x.f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \Rightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_0^{\ln 2} -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^{\ln 2} = -1 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{3}$$

Câu 38: Chọn C

Biến đổi $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow f(1) = 6$.

Từ $f'(x) = \left(x.f(x)\right)^2 \Rightarrow f'(1) = \left(1.f(1)\right)^2 = 36$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 36(x-1)+6 \Leftrightarrow y = 36x - 30$.

Câu 39: Chọn C

Ta có $f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \text{-}2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_{-1}^1 = -2x\Big|_{-1}^1 \Leftrightarrow \ln f(1) - \ln f(-1) = -4$$

$$\Leftrightarrow \ln f(-1) = 4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4.$$

Câu 40: Chọn B

Ta có $f'(x).f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x).f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^4 + x^2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^2 = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(2)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} = \frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{332}{15}.$$

Câu 41: Chọn D

$$f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 4$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (-2x-4)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 4x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - C}.$$

Với $f(2) = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{12 - C} \Rightarrow C = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$.

Khi đó $f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} = \frac{7}{30}$

Câu 42: Chọn A

Từ $f^6(x).f'(x) = 12x + 13 \Rightarrow \int f^6(x).f'(x)dx = \int (12x+3)dx$

$$\Leftrightarrow \int f^6(x)df(x) = 6x^2 + 13x + C \Leftrightarrow \frac{f^7(x)}{7} = 6x^2 + 13x + C \xrightarrow{f(0)=2} C = \frac{2^7}{7}.$$

Suy ra $f^7(x) = 42x^2 + 91x + 2^7$.

Do đó phương trình $f(x)=3 \Leftrightarrow f^7(x)=2187 \Rightarrow 42x^2+91x-2059=0\ (*)$.

Phương trình $(*)$ có $ac<0$ nên có hai nghiệm trái dấu.

Câu 43: Chọn B

Biến đổi: $f'(x)=(2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3 \Leftrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int (2x+3)dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C} \xrightarrow{f(0)=-\frac{1}{2}} C=2$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Khi đó:

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2018)=-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{2018.2019}+\frac{1}{2019.2020}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}\right)=-\frac{1009}{2020}.$$

Với điều kiện a, b thỏa mãn bài toán, suy ra $a=-1009, b=2020 \Rightarrow b-a=3029$.

Câu 44: Chọn C

Cách 1:

Ta có $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{3f(x)}=\frac{1}{3}\int (3x+1)^{\frac{-1}{2}}d(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C \Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}.$$

Khi đó $f(1)=1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3;4)$.

Cách 2: Với điều kiện bài toán, ta có

$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Rightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{df(x)}{f(x)}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^5=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\frac{f(5)}{f(1)}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(5)=f(1).e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3;4).$$

Câu 45: Chọn A

Ta có: $x+2xf(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1+2f(x))=[f'(x)]^2$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1+2f(x)}=x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x} \Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4 \sqrt{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-2=\frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4)=\frac{391}{18}$$

Chú ý: Nếu không nhìn được ra luôn $\int_1^4 \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\sqrt{1+2f(4)}-2$ thì ta có thể sử dụng kĩ thuật vi phân hoặc đổi biến .

Vi phân

$$\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx = \int_1^4 \frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(1+2f(x)\right)^{\frac{-1}{2}} d(1+2f(x))$$

$$= \sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4 = \sqrt{1+2f(4)} - 2$$

Đổi biến: Đặt $t = \sqrt{1+2f(x)} \Rightarrow t^2 = 1+2f(x) \Leftrightarrow tdt = f'(x)dx$

Với $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1+2f(1)} = 2;\ x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{1+2f(4)}$

Khi đó $I = \int_2^{\sqrt{1+2f(4)}} \frac{tdt}{t} = t\Big|_2^{\sqrt{1+2f(4)}} = \sqrt{1+2f(4)} - 2$

Câu 46: Chọn D

Ta có $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}dx = \int 2xdx \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C$$

Với $f(0) = 0 \Rightarrow 1 = C \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 = g(x)$

Ta có $g'(x) = 4x^3 + 4x > 0, \forall x \in [1;3]$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

Suy ra $g(1) \le g(x) = f^2(x) \le g(3) \Leftrightarrow 3 \le f^2(x) \le 99 \overset{f(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{3} \le f(x) \le 3\sqrt{11}$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = \sqrt{3}; \max\limits_{[1;3]} f(x) = 3\sqrt{11}$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1;3]$ bằng $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$

Câu 47: Chọn B

Ta có $\left(f'(x)\right)^2 = e^x.f(x) \Leftrightarrow \frac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{e^x} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{e^x}dx$

$$\Leftrightarrow \int \left(f(x)\right)^{\frac{-1}{2}} df(x) = \int e^{\frac{x}{2}}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = 2e^{\frac{x}{2}} + C \overset{f(0)=1}{\rightarrow} C = 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$

Câu 48: Chọn B

$$f\left(x\right) = 6x^2.f\left(x^3\right) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow I = \int_0^1 f\left(x\right)dx = 2\int_0^1 \left(3x^2.f\left(x^3\right) - \frac{3}{\sqrt{3x+1}}\right)dx = A - B$$

Gọi $A = 2\int_0^1 3x^2.f\left(x^3\right)dx$. Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$A = 2\int_0^1 f\left(t\right)dt = 2\int_0^1 f\left(x\right)dx = 2I$$

$$I = 2I - B \Rightarrow I = B = 6\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx = 6\int_0^1 \left(3x+1\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{3}.d\left(3x+1\right) = 2.2.\sqrt{3x+1}\Big|_0^1 = 4.$$

Câu 49: Chọn C

$4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2.\int_0^1 2x.f\left(x^2\right)dx+3\int_0^1 f\left(1-x\right)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \Leftrightarrow 2A+3B=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx(*)\ A=\int_0^1 2x.f\left(x^2\right)dx$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx;\ x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1\ A=\int_0^1 f\left(t\right)dt=\int_0^1 f\left(x\right)dx$

$B=\int_0^1 f\left(1-x\right)dx$ Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx;x=0\Rightarrow t=1,x=1\Rightarrow t=0\ B=\int_0^1 f\left(t\right)dt=\int_0^1 f\left(x\right)dx$

$(*)\Leftrightarrow 2\int_0^1 f\left(x\right)dx+3\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Leftrightarrow 5.\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt: $x=\sin t\Rightarrow dx=costdt,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2t}{2}dt=\frac{1}{2}.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ .Vậy

$\int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{20}.$

Câu 50: Chọn D

$f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=2x\Leftrightarrow\int_0^2 f\left(x\right)dx+\int_0^2 f\left(2-x\right)dx=\int_0^2 2xdx$

$\Leftrightarrow\int_0^2 f\left(x\right)dx=-\int_0^2 f\left(2-x\right)dx+\int_0^2 2xdx$

Đặt: $t=2-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=2,x=2\Rightarrow t=0$

$\int_0^2 f\left(2-x\right)dx=\int_0^2 f\left(t\right)dt=\int_0^2 f\left(x\right)dx$. Do đó: $2\int_0^2 f\left(x\right)dx=x^2\Big|_0^2=4$. Vậy: $\int_0^2 f\left(x\right)dx=2$

Câu 51: Chọn C

$f\left(x\right)+2xf\left(x^2-2\right)+3f\left(1-x\right)=4x^3$

$\Rightarrow\int_{-1}^2 f\left(x\right)dx+\int_{-1}^2 2x.f\left(x^2-2\right)dx+3\int_{-1}^2 f\left(1-x\right)=\int_{-1}^2 4x^3ds=15(*).$

Đặt $u=x^2-2\Rightarrow du=2xdx$; với $x=-1\Rightarrow u=-1;x=2\Rightarrow u=2$.

Khi đó $\int_{-1}^2 2x.f\left(x^2-2\right)dx=\int_{-1}^2 f\left(u\right)du=\int_{-1}^2 f\left(x\right)dx(1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$; với $x=-1\Rightarrow t=2;x=2\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $\int_{-1}^2 f\left(1-x\right)dx=\int_{-1}^2 f\left(t\right)dt=\int_{-1}^2 f\left(x\right)dx(2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được $5\int_{-1}^2 f\left(x\right)dx=15\Rightarrow\int_{-1}^2 f\left(x\right)dx=3$.

Câu 52: Chọn B

$f\left(x\right)-xf\left(3-x^2\right)=\sqrt{x+2}\Rightarrow\int_{-1}^2 f\left(x\right)dx-\int_{-1}^2 xf\left(3-x^2\right)dx=\int_{-1}^2\sqrt{x+2}dx=\frac{14}{3}(*).$

Đặt $u=3-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; với $x=-1\Rightarrow u=2; x=2\Rightarrow u=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2}xf\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f\left(u\right)du=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)dx\left(2\right)$

Thay vào $\left(*\right)$ ta được $\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)dx-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)dx=\frac{14}{3}\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)dx=\frac{28}{3}$.

Câu 53: Chọn B

$f\left(x\right)+xf\left(1-x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx+\int\limits_{0}^{1}xf\left(1-x^2\right)dx+3\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x+1}=\ln\left|x+1\right|\Big\|_{0}^{1}=\ln2\left(*\right)$

Đặt $u=1-x^2\Rightarrow du=-2xdx$; với $x=0\Rightarrow u=1; x=1\Rightarrow u=0$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{1}2xf\left(x^2-2\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f\left(u\right)du=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx\left(1\right)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$; với $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}f\left(t\right)dt=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx\left(2\right)$.

Thay $\left(1\right),\left(2\right)$ vào $\left(*\right)$ ta được

$\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx+3\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\ln2\Rightarrow\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\ln2\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\frac{2}{9}\ln2$.

Câu 54: Chọn A

Cách 1: .

Biến đổi: $f\left(x\right)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow f\left(x\right)-2\left(4x^3\right)f\left(x^4\right)=-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ với

$A=1;B=-2;C=0$.

Áp dụng công thức ta có: $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\frac{1}{1+\left(-2\right)}\int\limits_{0}^{1}-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx;$ với $\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Khi đó

$\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}xdx=\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.tdt=\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right).dt=\frac{t^3}{3}-t\Big|_{1}^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$.

Suy ra $a=2;b=1;c=3\Rightarrow a+b+c=6$.

Cách 2:

Từ $f\left(x\right)-8x^3f\left(x^4\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx-2\int\limits_{0}^{1}4x^3f\left(x^4\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=0\left(*\right)$.

Đặt $u=x^4\Rightarrow du=4x^3dx;$ với $x=0\Rightarrow u=0; x=1\Rightarrow u=1.$

Khi đó $\int\limits_{0}^{1}4x^3f\left(x^4\right)dx=\int\limits_{0}^{1}f\left(u\right)du=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx$ thay vào $\left(*\right)$, ta được:

$\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx-2\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$; với $\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Khi đó

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}xdx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.tdt=\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right).dt=\frac{t^3}{3}-t\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}=\frac{a-b\sqrt{2}}{c}.$$

Câu 55: Chọn A

Cách 1: Dùng công thức dạng 2

Từ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Ta có $A=1;B=1;C=0$.

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}=\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+1}$

Cách 2: Dùng công thức đổi biến số.

Từ $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx+\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(-x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx\ (*)$.

Đặt $u=-x\Rightarrow du=-dx$; Với $x=-\ln 2\Rightarrow u=\ln 2;\ x=\ln 2\Rightarrow u=-\ln 2.$

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(-x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(u)du=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$$2\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx\Rightarrow\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx.$$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$; Với $x=-\ln 2\Rightarrow t=\frac{1}{2};x=\ln 2\Rightarrow t=2.$

Suy ra $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x\left(e^x+1\right)}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dt}{t(t+1)}=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$.

Khi đó $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2=a\ln 2+b\ln 3\xrightarrow{a,b\in\mathbb{Q}}a=\frac{1}{2};b=0\Rightarrow P=\frac{1}{2}$.

Câu 56: Chọn D

Cách 1:

Với $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x$ ta có $A=1;B=0;C=1.$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=-\frac{1}{1+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{4}$.

Cách 2:

Từ $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\ (*)$

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow du=-dx;x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{4}\ (1)$ Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}$;

$\Rightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\ .\ (*)$

Từ điều kiện $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=0\\f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)=0\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\ (2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$, ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=\frac{-1}{4}$

Câu 57: Chọn A

Đặt $t=1+2x\Rightarrow 1-2x=2-t$ và $x=\frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành:

$$f(t)+f(2-t)=\frac{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+1}\Rightarrow f(t)+f(2-t)=\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+5}\Rightarrow f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}(*).$$

Cách 1:

Với $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}$, ta có $A=1;B=1$.

Suy ra: $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{x+1}\int\limits_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\frac{\pi}{2}.$

Cách 2:

Từ $(*)$, ta có: $f(x)+f(2-x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}\Rightarrow\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx+\int\limits_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int\limits_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx(**).$

Đặt $u=2-x\Rightarrow du=-dx$, Với $x=-1\Rightarrow u=3$ và $x=3\Rightarrow u=-1$.

Suy ra $\int\limits_{-1}^{3} f(2-x)dx=\int\limits_{-1}^{3} f(u)du=\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$ thay vào $(*)$, ta được:

$2\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\Rightarrow\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+5}dx\approx 0,429=2-\frac{\pi}{2}.$

Câu 58: Chọn A

Biến đổi $x^2f^2(x)+2xf(x)+1=f(x)+xf'(x)\Leftrightarrow\left(xf(x)+1\right)^2=f(x)+xf'(x)(*).$

Đặt $h(x)=xf(x)+1\Rightarrow h'(x)=f(x)+x.f'(x)$, Khi đó $(*)$ có dạng:

$h^2(x)=h'(x)\Rightarrow\dfrac{h'(x)}{h^2(x)}=1\Rightarrow\int\dfrac{h'(x)}{h^2(x)}dx=\int dx\Leftrightarrow\int\dfrac{dh(x)}{h^2(x)}=x+C\Leftrightarrow-\dfrac{1}{h(x)}=x+C.$

$\Rightarrow h(x)=-\dfrac{1}{x+C}\Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+C}\xrightarrow{f(1)=-2}-2+1=-\dfrac{1}{1+C}\Rightarrow C=0.$

Khi đó $xf(x)+1=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$. Suy ra: $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}dx=-\dfrac{1}{2}-\ln 2$.

Câu 59: Chọn D

Xét $\int\limits_4^8\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int\limits_4^8\dfrac{df(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{1}{f(8)}-\dfrac{1}{f(4)}=-(2-4)=2$.

Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2dx=0$

Ta có:

$\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2dx=\int\limits_4^8\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}dx+2k\int\limits_4^8\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx+k^2\int\limits_4^8dx=1+4k+4k^2=(2k+1)^2.$

Suy ra $k=-\dfrac{1}{2}$ thì $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{1}{2}\right)^2dx=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\int\limits_4^6\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_4^6dx$

$\Leftrightarrow\int\limits_4^6\dfrac{df(x)}{f^2(x)}dx=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(4)}-\dfrac{1}{f(6)}=1\Leftrightarrow 4-\dfrac{1}{f(6)}=1\Leftrightarrow f(6)=\dfrac{1}{3}$.

Chú ý: $\int\limits_a^b f(x)dx=0$ không được phép suy ra $f(x)=0$, nhưng $\int\limits_a^b f^{2k}(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0.$

DẠNG 6 Tích phân hàm ẩn phần 2

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ tương ứng với

A. $\int_a^b f(a+b-x)dx$. **B.** $\int_a^b f(a+b+x)dx$. **C.** $-\int_a^b f(a+b-x)dx$. **D.** $\int_a^b f(x-a+b)dx$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có tích phân $\int_0^3 f(x)dx=8$. Giá trị của tích phân $I=\int_0^3 f(3-x)dx$ tương ứng bằng

A. 11. **B.** -8 **C.** -11. **D.** 8.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(3-x)=x^2-3x+\frac{13}{2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{27}{5}$. **B.** $\frac{30}{4}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $\frac{95}{6}$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(2-x)=g(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Biết rằng tích phân $\int_0^1 f(2x)dx=-3$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 g(x)dx$ tương ứng bằng

A. -15. **B.** 6. **C.** -30. **D.** 12.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức $f(x)-f(4-x)=g(x)$ với $x\in[1;3]$. Giá trị của tích phân $\int_1^3 g(x)dx$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)-f(3-x)=g(x)$ và $f(x)+2f(3-x)=3x^2+1$ với $[1;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 g(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 9. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=4x^3+1$ với $\forall x\in[0;6]$. Giá trị của biểu thức $\int_1^2 f(4-x)dx+\int_1^3 f(3-x)dx$ tương ứng bằng

A. -98. **B.** -36. **C.** 42. **D.** -48.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=2x$ với $\forall x\in[-6;6]$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_a^{3-a} f(4-x)dx$ tương ứng bằng bao nhiêu? Với số thực $a\in[0;3]$

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)-f(2-x)-f(3x^2-1)=3x^2-\frac{15}{4}$ với mọi $x\in[-10;10]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx$ bằng bao nhiêu? Với số thực $a\in[1;6]$

A. $-\frac{15}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -10. **D.** -6.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$. **B.** $-\int\limits_{-a}^{a} f(a-x)dx$. **C.** $\int\limits_{-a}^{a} f(-x)dx$. **D.** $\int\limits_{-a}^{a} f(2a-x)dx$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+3f(-x)=6x^2-1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+4f(-x)=g(x)$ với $\forall x\in[-a;a]$. Biết giá trị của tích phân $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-a}^{a} g(x)dx$ tương ứng bằng

A. 9. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** 14. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $5f(x)-2f(-x)=x^2\cos\pi x$ với $\forall x\in[-1;1]$; $f(1)+f(-1)=3$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1} xf'(x)dx=a+\frac{b}{c.\pi^2}$; với a,b,c là những số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f(a+b-x)=1$ với $\forall x\in[a;b]$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{1+f(x)}$ tương ứng bằng

A. $\frac{b-a}{2}$. **B.** 1. **C.** $b-a$. **D.** $\frac{b^2-a^2}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên R thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

A. $I=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$. **B.** $I=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$. **C.** $I=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{g(x)dx}{x}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx=6$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\mathrm{d}x=10$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}}\frac{f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}{x}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 11.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} f'(x)\ln x\mathrm{d}x=18$ và $\left(f(\mathrm{e})+f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)=5$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} g(x)\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

A. -13. **B.** -39. **C.** 18. **D.** -6.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(2x-1)=3x^2+1$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

A. 32. **B.** 4. **C.** 20. **D.** 18.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=6x+2$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

A. 22. **B.** $\frac{43}{2}$. **C.** $\frac{50}{3}$. **D.** $\frac{35}{2}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $f(x)=f(1-x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=-6$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^3-3x^2\right)f(x)dx$ tương ứng bằng

A. -3. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 3.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $f(x)=f(2-x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=12$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\left(x^3-3x^2\right)f(x)dx$ tương ứng bằng

A. -12. **B.** -24. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $\left(f(x)\right)^3+2f(x)=2x-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=2$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $(f(x))^5+3f(x)=x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)\right)^2dx$ tương ứng bằng

A. $I=\frac{12}{7}$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=8$. **D.** $I=\frac{16}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+1)+f(x+2)=e^x(x^2-1)$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^3 f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-3$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa hệ thức $f(x+1)+f(x+2)+...+f(x+2019)=3x^2+2x$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^{2019} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=5$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-2;+\infty)$ và thỏa mãn hệ thức điều kiện $\frac{1}{3}f(2x-1)+\frac{1}{2}f(3x+6)=x\ln(x+2)$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-3}^{12} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{27}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=x+2$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^{17} f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\frac{27}{2}$. **B.** 36. **C.** 72. **D.** 18.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và thỏa mãn hệ thức điều kiện $f(x+1)+3f(3x+2)-4f(4x+1)-f(2^x)=\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}$ tương ứng bằng

A. $\ln 2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ **B.** $(2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2})\ln 2$.

C. $2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}\cdot$ **D.** $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-1\cdot$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.D**	**3.D**	**4.C**	**5.B**	**6.A**	**7.A**	**8.B**	**9.B**	**10.C**
11.D	**12.C**	**13.B**	**14.A**	**15.D**	**16.C**	**17.A**	**18.B**	**19.C**	**20.B**
21.D	**22.B**	**23.C**	**24.A**	**25.C**	**26.B**	**27.D**	**28.C**	**29.B**	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=b\\x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

Câu 2. Chọn D

Cách 1: Trắc nghiệm: Hàm tự do một giả thiết nên ta chọn hàm luôn có dạng $f(x)=a$ là hằng số.

Suy ra: $\int_0^3 f(x)dx=8=\int_0^3 adx=3a\Rightarrow a=\frac{8}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{8}{3}=f(3-x)$.

Suy ra: $I=\int_0^3 f(3-x)dx=\int_0^3\frac{8}{3}dx=8$.

Cách 2: Áp dụng công thức: $I=\int_0^3 f(3-x)dx=\int_0^3 f(x)dx=8$.

Cách 3: Với tích phân: $I=\int_0^3 f(3-x)dx$. Đặt: $t=3-x\Rightarrow dt=-dx;$ đổi cân: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=3\\x=3\Rightarrow t=0\end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^3 f(3-x)dx=\int_3^0 f(t)(-dt)=\int_0^3 f(t)dt=8$.

Câu 3. Chọn D

Từ giả thiết ta tích phân hai vế: $\int_{-1}^{4}\left[f(x)+f(3-x)\right]dx=\int_{-1}^{4}\left(x^2-3x+\frac{13}{2}\right)dx=\frac{95}{3}$

$\Leftrightarrow\int_{-1}^{4}f(x)dx+\int_{-1}^{4}f(3-x)dx=\frac{95}{3}\Leftrightarrow\int_{-1}^{4}f(x)dx+\int_{-1}^{4}f(x)dx=\frac{95}{3}$

$\Leftrightarrow 2\int_{-1}^{4}f(x)dx=\frac{95}{3}\Leftrightarrow\int_{-1}^{4}f(x)dx=\frac{95}{6}$.

Câu 4. Chọn C

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(2-x)dx$.

Xử lý tích phân $\int_0^1 f(2x)dx=-3$.

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow\int_0^1 f(2x)dx=-3=\int_0^2 f(t)\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$

$\Rightarrow\int_0^2 f(t)dt=-6=\int_0^2 f(x)dx$.

Từ giải thiết, ta lấy tích phân hai vế:

$$\int_0^2 \left[2f(x)+3f(2-x)\right]dx = \int_0^2 g(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx + 3\int_0^2 f(2-x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 g(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx + 3\int_0^2 f(x)dx = 5\int_0^2 f(x)dx = 5.(-6) = -30.$$

Câu 5. Chọn B

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(4-x)dx$.

Từ giả thiết ta lấy tích phân 2 vế: $0 = \int_1^3 \left(f(x)-f(4-x)\right)dx = \int_1^3 g(x)dx$.

Câu 6. Chọn A

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(3-x)dx$.

Từ $f(x)+2f(3-x)=3x^2+1$ suy ra:

$$\int_1^2 \left(f(x)+2f(3-x)\right)dx = \int_1^2 \left(3x^2+1\right)dx \Leftrightarrow 3\int_1^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = \frac{8}{3}.$$

Từ $3f(x)-f(3-x)=g(x)$ suy ra:

$$\int_1^2 \left(3f(x)-f(3-x)\right)dx = \int_1^2 g(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx = 2\int_1^2 f(x)dx = \frac{16}{3}.$$

Câu 7. Chọn A

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, suy ra:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(3-x)dx; \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(4-x)dx$$

Từ $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=4x^3+1$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(f(x)-f(3-x)-f(4-x)\right)dx = \int_1^2 \left(4x^3+1\right)dx = 16$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 f(3-x)dx - \int_1^2 f(4-x)dx = 16$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(4-x)dx = 16 \Leftrightarrow \int_1^2 f(4-x)dx = -16 \quad (1)$$

Từ $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=4x^3+1$

$$\Rightarrow \int_1^3 \left(f(x)-f(3-x)-f(4-x)\right)dx = \int_1^3 \left(4x^3+1\right)dx = 82$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 f(3-x)dx - \int_1^3 f(4-x)dx = 82$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^3 f(3-x)dx = 82 \Leftrightarrow \int_1^3 f(3-x)dx = -82 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_1^2 f(4-x)dx + \int_1^3 f(3-x)dx = -16-82 = -98$.

Câu 8. Chọn B

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, suy ra: $\int_a^{3-a} f(x)dx = \int_a^{3-a} f(3-x)dx$.

Từ $f(x)-f(3-x)-f(4-x)=2x \Rightarrow \int_a^{3-a} \left(f(x)-f(3-x)-f(4-x)\right)dx = \int_a^{3-a} 2xdx$

$$\Leftrightarrow \int_a^{3-a} f(x)dx - \int_a^{3-a} f(3-x)dx - \int_a^{3-a} f(4-x)dx = \int_a^{3-a} 2xdx = -6a+9$$

$\Leftrightarrow -\int_a^{3-a} f\left(4-x\right)dx = -6a+9 \Leftrightarrow \int_a^{3-a} f\left(4-x\right)dx = 6a-9 \le 6.3-9 = 9$.

Dấu " = " xảy ra khi $a=3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tích phân $\int_a^{3-a} f\left(4-x\right)dx$ bằng 9 khi $a=3$.

Câu 9. Chọn B

Áp dụng công thức $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(a+b-x\right)dx$. Suy ra $\int\limits_a^{2-a} f\left(x\right)dx = \int\limits_a^{2-a} f\left(2-x\right)dx$

Từ $f\left(x\right)-f\left(2-x\right)-f\left(3x^2-1\right)=3x^2-\dfrac{15}{4}$

$\Rightarrow \int\limits_a^{2-a}\left(f\left(x\right)-f\left(2-x\right)-f\left(3x^2-1\right)\right)dx = \int\limits_a^{2-a}\left(3x^2-\dfrac{15}{4}\right)dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_a^{2-a} f\left(x\right)dx - \int\limits_a^{2-a} f\left(2-x\right)dx - \int\limits_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)dx = -2a^3+6a^2-\dfrac{9}{2}a+\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \int\limits_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)dx = 2a^3-6a^2+\dfrac{9}{2}a-\dfrac{1}{2}$.

Khảo sát nhanh hàm số $h\left(a\right)=2a^3-6a^2+\dfrac{9}{2}a-\dfrac{1}{2}$ trên đoạn $a\in\left[1;6\right]$ ta được

Gí trị nhỏ nhất của hàm số $\min\limits_{a\in\left[1;6\right]} h\left(a\right) = h\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_a^{2-a} f\left(3x^2-1\right)dx$ là $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Chọn C

Áp dụng công thức $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(a+b-x\right)dx$.

Suy ra $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = \int\limits_{-a}^{a} f\left(a+\left(-a\right)-x\right)dx = \int\limits_{-a}^{a} f\left(-x\right)dx$.

Câu 11. Chọn D

Áp dụng công thức: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} f(-x)dx$. Suy ra $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx$.

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế: $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx = \int\limits_{-1}^{1} 6x^2-1 = 2$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx = 2 = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 4\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \dfrac{1}{2}$.

Câu 12. Chọn C

Áp dụng công thức: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} f(-x)dx$.

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế:

$\int\limits_{-a}^{a} (3f(x)+4f(-x))\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = 3\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x + 4\int\limits_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x + 4\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = 7\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 7.2 = 14.$

Câu 13. Chọn B

Với tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}xf'(x)dx=a+\dfrac{b}{c.\pi^2}$, đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{1}xf'(x)dx=xf(x)\Big|_{-1}^{1}-\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=f(1)+f(-1)-\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=3-\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx\quad(1)$

Từ giả thiết, suy ra: $\int\limits_{-1}^{1}\left(5f(x)-2f(-x)\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2\cos\pi x\right)dx=\dfrac{-4}{\pi^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{-4}{\pi^2}=5\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx-2\int\limits_{-1}^{1}f(-x)dx=3\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{-4}{3\pi^2}\quad(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $I=3+\dfrac{4}{3\pi^2}=a+\dfrac{b}{c\pi^2}$

Suy ra $a=3, b=4, c=3$. Vậy $T=a+b+c=10$.

Câu 14. Chọn A

Cách 1:

Chọn hàm hằng số: $f(x)=f(a+b-x)=1$.

Suy ra: $I=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dx}{1+1}=\dfrac{b-a}{2}$

Cách 2:

Với tích phân $I=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dx}{1+f(x)}$, ta đặt: $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=b\\x=b\Rightarrow t=a\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dx}{1+f(x)}=\int\limits_{b}^{a}\dfrac{-dt}{1+f(a+b-t)}=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dt}{1+\dfrac{1}{f(t)}}=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{f(t)dt}{1+f(t)}=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra: $I+I=2I=\int\limits_{a}^{b}\dfrac{dx}{1+f(x)}+\int\limits_{a}^{b}\dfrac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_{a}^{b}dx=b-a\Rightarrow I=\dfrac{b-a}{2}$.

Câu 15. Chọn D

Với tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f(x)dx}{x}$; ta đặt: $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow dt=-\dfrac{dx}{x^2}$; đổi cận: $\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}\Rightarrow t=a\\x=a\Rightarrow t=\dfrac{1}{a}\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f(x)dx}{x}=\int\limits_{a}^{\frac{1}{a}}\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)}{\frac{1}{t}}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}$.

Suy ra: $I+I=2I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f(x)dx}{x}+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{g(x)}{x}dx$.

$\Rightarrow I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\dfrac{g(x)}{x}dx$.

Câu 16. Chọn C

Áp dụng công thức: $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}$.

Từ giả thiết: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)\Rightarrow\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=g(x)$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)dx\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)dx=2\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)dx}{x}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)dx=\frac{1}{2}.6=3$.

Câu 17. Chọn A

Áp dụng công thức $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{x}$.

Từ giả thiết: $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)\Rightarrow2\frac{f(x)}{x}+3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=g(x)$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\left(2\frac{f(x)}{x}+3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow2\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+3\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)\mathrm{d}x=5\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.10=2$.

Xét tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}}\frac{f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}{x}$. Đặt $t=x^2\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{1}{a}}\Rightarrow t=\frac{1}{a}\\x=\sqrt{a}\Rightarrow t=a\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}}\frac{f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=1$.

Câu 18. Chọn B

Áp dụng công thức: $I=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}{x}$.

Từ giả thiết: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)\Rightarrow\frac{f(x)}{x}+2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=g(x)$

$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\left(\frac{f(x)}{x}+2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Với tích phân: $\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=18$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra:

$18=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=f(x)\ln x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}-\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=f(\mathrm{e})+f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=5-\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}$

$\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=-13$. Vậy $I=\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}g(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=-39$.

Câu 19. Chọn C

Dạng bài toán $\begin{cases}f(u(x))=v(x)\\ I=\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=?\end{cases}$

Xử lý tổng quát: $\begin{cases}x=u(t)\Rightarrow\mathrm{d}x=u'(t)\mathrm{d}t\\ f(x)=f(u(t))=v(t)\end{cases}\Rightarrow\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a'}^{b'}v(t)u'(t)\mathrm{d}t$

Với $I=\int\limits_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $x=2t-1\Rightarrow\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$

Đổi cận $\begin{cases}x=-1\\ x=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=2\end{cases}$. Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left(3t^2+1\right).2\mathrm{d}t=20$

Ta có thể xử lý bằng phương trình hàm

Câu 20. Chọn B

Với $I=\int\limits_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=t^3+3t+1\Rightarrow\mathrm{d}x=\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t;\ f(x)=f\left(t^3+3t+1\right)=6t+2$

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=5 \Rightarrow t=1 \end{cases}$

Suy ra $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (6t+2)(3t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{43}{2}$.

Câu 21. Chọn D

Cách 1: Trắc nghiệm

Ta chọn hàm hằng: $f(x)=f(1-x)=a=$ hằng số

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx=-6=\int_0^1 adx=a \Rightarrow f(x)=f(1-x)=-6$

Suy ra: $I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^1 (2x^3-3x^2)(-6)dx=3$

Cách 2: Với tích phân $I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx$.

Đặt $t=1-x \Rightarrow dt=-dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=\int_1^0 \left(2(1-t)^3-3(1-t)^2\right)f(1-t)(-dt)$

$=\int_0^1 (-2t^3+3t^2-1)f(t)dt$

$\Leftrightarrow I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^1 (-2x^3+3x^2-1)f(x)dx$

$=\int_0^1 (-2x^3+3x^2)f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow I=\int_0^1 (2x^3-3x^2)f(x)dx=-I+6 \Leftrightarrow I=3$.

Câu 22. Chọn B

Cách 1: Trắc nghiệm

Ta chọn hàm hằng: $\Rightarrow f(x)=f(2-x)=a=$ hằng số

Suy ra: $\int_0^2 f(x)dx=12=\int_0^2 adx=2a \Rightarrow f(x)=f(2-x)=a=6$

Suy ra: $I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx=\int_0^2 (x^3-3x^2)(6)dx=-24$

Cách 2: Với tích phân $I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx$.

Đặt $t=2-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx=\int_2^0 \left((2-t)^3-3(2-t)^2\right)f(2-t)(-dt)$

$=\int_0^2 (-t^3+3t^2-4)f(t)dt$

$\Leftrightarrow I=\int\limits_0^2\left(x^3-3x^2\right)f\left(x\right)dx=\int\limits_0^2\left(-x^3+3x^2-4\right)f\left(x\right)dx=\int\limits_0^2\left(-x^3+3x^2\right)f\left(x\right)dx-4\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx$

$\Leftrightarrow I=-I-4.12\Rightarrow I=-24$.

Câu 23. Chọn C

Với dạng này ta có cách làm tổng quát sau:

Từ giả thiết vi phân hai vế sẽ được $\left(3\left(f(x)\right)^2+2\right)f'(x)dx=2dx$.

Suy ra $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\left(3\left(f(x)\right)^2+2\right)f'(x)dx$

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx$

Đổi cận:

$x=-1\Rightarrow\left(f(-1)\right)^3+2f(-1)=-3\Rightarrow f(-1)=t=-1$

$x=2\Rightarrow\left(f(2)\right)^3+2f(2)=3\Rightarrow f(2)=t=1$

Suy ra $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\left(3\left(f(x)\right)^2+2\right)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}t(3t^2+2)dt=0$

Câu 24. Chọn A

Từ giả thiết vi phân hai vế sẽ được $\left(5\left(f(x)\right)^4+3\right)f'(x)dx=dx$.

Suy ra $I=\int\limits_0^4\left(f(x)\right)^2dx=\int\limits_0^4\left(f(x)\right)^2\left(5\left(f(x)\right)^4+3\right)f'(x)dx=\int\limits_0^4\left(5\left(f(x)\right)^6+3\left(f(x)\right)^2\right)f'(x)dx$.

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx$.

Đổi cận:

$x=0\Rightarrow\left(f(0)\right)^5+3f(0)=0\Rightarrow f(0)=t=0$.

$x=4\Rightarrow\left(f(4)\right)^5+3f(4)=4\Rightarrow f(4)=t=1$.

Suy ra $I=\int\limits_0^4\left(5\left(f(x)\right)^6+3\left(f(x)\right)^2\right)f'(x)dx=\int\limits_0^1(5t^6+3t^2)dt=\frac{12}{7}$.

Câu 25. Chọn C

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 ta được:

$\int_0^1 f\left(x+1\right)dx+\int_0^1 f\left(x+2\right)dx=\int_0^1 e^x\left(x^2-1\right)dx=-1\quad(1)$

Với tích phân $A=\int_0^1 f\left(x+1\right)dx$. Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$

Suy ra $A=\int_0^1 f\left(x+1\right)dx=\int_1^2 f\left(t\right)dt=\int_1^2 f\left(x\right)dx\qquad(2)$

Với tích phân $B=\int_0^1 f\left(x+2\right)dx$. Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=1\Rightarrow t=3\end{cases}$

Suy ra $B=\int_0^1 f\left(x+2\right)dx=\int_2^3 f\left(t\right)dt=\int_2^3 f\left(x\right)dx\qquad(3)$

Thay A,B từ $(2);(3)$ vào (1) ta được

$\int_0^1 f\left(x+1\right)dx+\int_0^1 f\left(x+2\right)dx=-1=\int_1^2 f\left(x\right)dx+\int_2^3 f\left(x\right)dx=\int_1^3 f\left(x\right)dx$.

Câu 26. Chọn B

Lấy tích phân từ 0 đến 1 ta được:

$\int_0^1 f(x+1)dx+\int_0^1 f(x+2)dx+...+\int_0^1 f(x+2019)dx=\int_0^1(3x^2+2x)dx=2 \quad (1)$

Với tích phân: $\int_0^1 f(x+1)dx$. Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 f(x+1)dx=\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 f(x)dx$

Với tích phân: $\int_0^1 f(x+2)dx$. Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$; đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=1\Rightarrow t=3\end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 f(x+2)dx=\int_2^3 f(x)dx$

Tương tự ta có: $\int_0^1 f(x+3)dx=\int_3^4 f(x)dx;...;\int_0^1 f(x+2019)dx=\int_{2019}^{2020} f(x)dx$

Thay vào (1) ta được:

$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_{2019}^{2020} f(x)dx=2\Leftrightarrow\int_1^{2020} f(x)dx=2$.

Câu 27. Chọn D

Từ giả thiết:

$\frac{1}{3}f(2x-1)+\frac{1}{2}f(3x+6)=x\ln(x+2)\Leftrightarrow 2f(2x-1)+3f(3x+6)=6x\ln(x+2)$

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 2, ta được:

$\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx+\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx=\int_{-1}^{2}6x\ln(x+2)dx=\frac{27}{2}$. (1)

Với tích phân: $A=\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx$; đặt $t=2x-1\Rightarrow dt=2dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=-3\\x=2\Rightarrow t=3\end{cases}$

Suy ra: $A=\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx=\int_{-3}^{3}f(t)dt=\int_{-3}^{3}f(x)dx$. (2)

Với tích phân: $B=\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx$; đặt $t=3x+6\Rightarrow dt=3dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=3\\x=2\Rightarrow t=12\end{cases}$

Suy ra: $B=\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx=\int_{3}^{12}f(t)dt=\int_{3}^{12}f(x)dx$. (3)

Thay A và B từ (2), (3) vào (1), ta được:

$\int_{-1}^{2}2f(2x-1)dx+\int_{-1}^{2}3f(3x+6)dx=\int_{-1}^{2}6x\ln(x+2)dx=\frac{27}{2}$

$\Leftrightarrow\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{12}f(x)dx=\frac{27}{2}=\int_{-3}^{12}f(x)dx$.

Câu 28. Chọn C

Ta có: $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=x+2\Leftrightarrow xf(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}=x^2+2x,\quad\forall x>0.$

Lấy tích phân hai vế cận từ 1 đến 4, ta được:

$$\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx+\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx=\int_1^4 (x^2+2x)dx=36. \qquad (1)$$

Với tích phân: $A=\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx$; đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$; đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=4\Rightarrow t=17\end{cases}$.

Suy ra: $A=\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx=\int_2^{17} f(t)\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int_2^{17} f(x)dx$. (2)

Với tích phân: $B=\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx$; đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Suy ra: $B=\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx$. (3)

Thay A và B từ (2), (3) vào (1), ta được:

$$\int_1^4 xf\left(x^2+1\right)dx+\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}dx=36\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_2^{17} f(x)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=36.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_1^{17} f(x)dx=36\Leftrightarrow\int_1^{17} f(x)dx=72.$$

Câu 29. Chọn B

Từ giả thiết ta lấy tích phân hai vế cận từ $0\to 1$, sẽ được

$$\int_0^1 f(x+1)\mathrm{d}x+\int_0^1 3f(3x+2)\mathrm{d}x-\int_0^1 4f(4x+1)\mathrm{d}x-\int_0^1 f\left(2^x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\ (1).$$

Với $\int_0^1 \frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\int_0^1 3\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=2\left[(x+2)\sqrt{x+2}-(x+1)\sqrt{x+1}\right]\Big|_0^1=2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}.$$

Dễ dàng dùng phương pháp đổi cận ta có

$$\int_0^1 f(x+1)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

$$\int_0^1 3f(3x+2)\mathrm{d}x=\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x \quad (3)$$

$$\int_0^1 4f(4x+1)\mathrm{d}x=\int_1^5 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \quad (4)$$

$$\int_0^1 f\left(2^x\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x} \quad (5)$$

Thay (2), (3), (4), (5) vào (1) ta được:

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x}=\left(2+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\ln 2.$$

DẠNG 7 Tích phân đặc biệt kết hợp với tích phân hàm ẩn

Câu 1: Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $f(0)=2$ và $f(4x)-f(x)=4x^3+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{148}{63}$. **B.** $\frac{146}{63}$. **C.** $\frac{149}{63}$. **D.** $\frac{145}{63}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R thoả mãn $f(6)=1$ và $\int_0^6 (x^2.f'(x)+6f(x))dx=10$; khi đó: $\int_{-3}^3 xf(x+3)dx$ bằng:

A. -13. **B.** 26. **C.** -26. **D.** 13.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^3-4x\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$ và $f(1)>0$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 64.. **B.** 60.. **C.** 62.. **D.** 63.

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực R và thỏa mãn: $f\left(e^x+x+1\right)=\frac{x^9}{e^x+1}$. Tính $I=\int_2^{e+2} f(x)dx$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{1}{11}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(1)=-2$, $f(x)\neq-\frac{1}{x}$ và $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int_1^4 f(x)dx$.

A. $-2\ln 2-\frac{3}{4}$. **B.** $-2\ln 2-\frac{1}{4}$. **C.** $-\ln 2-\frac{3}{4}$. **D.** $-\ln 2-\frac{1}{4}$.

Câu 6: Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx=6$. Tính $\int_0^1\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]dx$.

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f^2(x)-xf(x)f'(x)=2x+4,\ \forall x\in[0;1]$. Biết $f(1)=3$. Tích phân $I=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** 19. **C.** 13. **D.** $\frac{13}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x)>0,\forall x\in[1;4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, thỏa mãn $f(1)=1$ và $\left[2f(x)+xf'(x)\right]^2=\frac{f(x)}{x}$ với mọi $x\in[1;4]$. Khi đó $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $2\ln 2$. **C.** $2\ln 2-2$. **D.** -2.

Câu 9: Cho a,b,c là các số thực và $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $f'(t)=f'(t+5)=2$ với t là hằng số. Giá trị $\int_t^{t+5} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{105}{2}$. **B.** $\frac{134}{3}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{19}{4}$.

Câu 10: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $0;+\infty$ và thỏa mãn $f\ x^2+4x\ =-2x^2-7x+1, \forall x\in\ 0;+\infty$. Biết $f\ 5\ =-8$, tính $I=\int_0^5 x.f'\ x\ \mathrm{d}x$?

A. $I=-\frac{68}{3}$. **B.** $I=-\frac{35}{3}$. **C.** $I=-\frac{52}{3}$. **D.** $I=-\frac{62}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $xf'(x)=e^{x^2}-1, \forall x\in\mathbb{R}, f(1)=0$. Giá trị $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{4}(e-2)$. **B.** $\frac{1}{4}(e-2)$. **C.** $-\frac{1}{2}(e-2)$. **D.** $\frac{1}{2}(e-2)$.

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(1)=0$. Biết $\int_0^1 (f'(x))^2 dx=\frac{1}{3}, \int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{3}$. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{11}{48}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{6}{23}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=f(1)=1$. Tính $\int_0^1 \mathrm{e}^x\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I=0$. **B.** $I=e+1$. **C.** $I=e-1$. **D.** e.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$. Tính $f(-1)$

A. e^{-2}. **B.** e^{-4}. **C.** e^{2}. **D.** e^{4}.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=x\sqrt{x}+\int_0^1 xf(x)dx$. Tích phân $\int_0^4 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{528}{35}$. **B.** $\frac{438}{35}$. **C.** $\frac{408}{35}$. **D.** $\frac{368}{35}$

Câu 16: Cho hàm số $f\ x$ thỏa $f\ 2\ =0$ và $f'\ x\ =\frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $\forall x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. Biết $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$, $b>0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x>3\\ ax-3a+7 & \text{khi } x\le 3\end{cases}$ **(a là tham số thực)**. Nếu $\int\limits_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x dx=e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. **B.** $6e-6$ **C.** $6e+6$ **D.** $-6e+6$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & khi\ x>3\\ ax-3a+7 & khi\ x\le 3\end{cases}$ **(a là tham số thực)**. Nếu $\int\limits_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x\mathrm{d}x=e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. **B.** $6e-6$. **C.** $6e+6$. **D.** $-6e+6$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x>3\\ ax-3a+7 & \text{khi } x\le 3\end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int\limits_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x\mathrm{d}x=e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. **B.** $6e-6$. **C.** $6e+6$. **D.** $-6e+6$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_1^5 x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** $\frac{33}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** $\frac{49}{4}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$ với mọi $x>0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$.

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$. Khi đó $\int\limits_1^2 f\left(x^2\right)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_0^1\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_0^1\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 26: Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+g(x)=x$; $g'(x)+f(x)=-x$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=g(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{e}-2$. **B.** $e+\frac{1}{e}-2$. **C.** $\frac{e^2+2}{2e}$. **D.** $\frac{e^2-2}{2e}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=x^{2021}+\sin x+2021$. Biết rằng có duy nhất giá trị của $m=-\frac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $(a,b)=1$) để $\int_0^m (x.f'(\mathrm{m}-x)-f(x))dx=1$. Tìm $a+b$.

A. $a+b=2021$. **B.** $a+b=2023$. **C.** $a+b=2020$. **D.** $a+b=2022$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=f(1)=1; f'(0)=2021$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=-2021$. **B.** $\int_0^1(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=2021$.

C. $\int_0^1(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=1$. **D.** $\int_0^1(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=-1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{3}{4}+2\ln 2$ **B.** $\frac{3}{2}+2\ln 2$. **C.** $\frac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $3+\ln 2$.

Câu 30: Biết $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=10, \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=-4$. Tính $\int_{-1}^3 f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$		-2		-1		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	2021	↘	8	↗	$+\infty$

Giá trị $I=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx+\int\limits_{0}^{3}\frac{f'(x+1)}{2}dx$ bằng

A. 3. **B.** 2021. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=f(5-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x=2$.

Tính $I=\int\limits_{2}^{3} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=20$. **B.** $I=10$. **C.** $I=15$. **D.** $I=5$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0)=-2$ và $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=-\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=-\frac{5}{2}$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2021f(x)-f(-x)=x\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{3}{2022}$. **B.** $\frac{1}{1010}$. **C.** $\frac{2}{2019}$. **D.** $\frac{1}{2020}$.

Câu 35: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;e]$ thoả mãn $f(x).f(e-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{e}\frac{1}{1+f(x)}dx$

A. $I=e$. **B.** $I=\frac{e}{2}$. **C.** $I=\frac{2e}{3}$. **D.** $I=\frac{e}{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x^3+2x+3\right)=x^6+4x^4+3x^3+6x+2,$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{6} f(x)dx.$

A. $\frac{206}{35}$. **B.** $\frac{1976232}{5}$. **C.** $\frac{125}{24}$. **D.** $\frac{125}{48}$.

Câu 37: $\int_{-1}^{1}\left(3x^2+2\right)f\left(x^3+2x+3\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2+2\right)\left(x^6+4x^4+3x^3+6x+2\right)dx \Leftrightarrow \int_{0}^{6}f(t)dt=\frac{298}{15}$. **(SGD VĨNH PHÚC - LẦN 2 - 2021)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(0\right)=0$, tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=-\frac{\pi}{4}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+2x\right)=4x-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

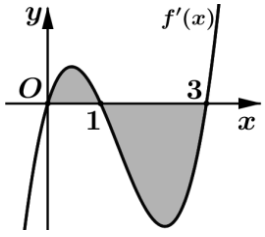
Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2-x\right)+2f\left(x\right)=3x^2+2$. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{1}xf\left(x^2\right)dx+\int_{0}^{1}\frac{3f\left(\sqrt{3x+1}\right)}{4\sqrt{3x+1}}dx$

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 40: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(x^2+1\right)+\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{x}$. Biết $\int_{1}^{17}f\left(x\right)\mathrm{dx}=a\ln 4-b$ với a, $b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 20. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S=a$. Biết rằng $\int_{0}^{1}\left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=b$ và $f\left(3\right)=c$. Giá trị của $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. $a-b-c$. **B.** $-a+b+c$. **C.** $-a+b-c$. **D.** $a-b+c$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $\frac{f\left(x\right)}{x}=f\left(x\right)+f'\left(x\right)-e^{-x}$ đồng thời $f\left(1\right)=\frac{1}{e}$. Tính giá trị của $f\left(2\right)$.

A. $f\left(2\right)=e^{-2}\left(1+2\ln 2\right)$. **B.** $f\left(2\right)=e^{-2}\left(3+2\ln 2\right)$.

C. $f\left(2\right)=e^{-2}\left(2+\ln 3\right)$. **D.** $f\left(2\right)=2e^{-2}\left(1+\ln 2\right)$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x)-1=\int_{-1}^{1}\left(x+e^{t}\right)f(t)dt$. Tích phân $\int_{-1}^{1}e^{x}f(x)dx$ bằng

A. $I=\dfrac{e+3}{-e^2+e-3}$. **B.** $I=\dfrac{e^2+3}{e^2-e+3}$. **C.** $I=\dfrac{e^2+3}{-e^2+e-3}$. **D.** $I=\dfrac{-2e}{e^2-e+3}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-2;2]$ thỏa mãn $\int_{-2}^{2}\left[f^2(x)-2f(x)(x+2)\right]dx=-\dfrac{64}{3}$. Tính $I=\int_0^1\dfrac{f(x)}{x^2+1}dx$.

A. $I=\dfrac{\pi-2\ln 2}{2}$. **B.** $I=\dfrac{\pi-\ln 2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{\pi+\ln 2}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\pi+2\ln 2}{2}$.

Câu 45: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(0)=0$. Biết $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}$. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\dfrac{5}{48}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{6}{23}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(1)=0$, $f'(x).f(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$, $\forall x\in[1;+\infty)$. Tính $f^2(2)$.

A. 1. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 24.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f\left(x^2+1\right)+\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{\ln x}{x}$. Biết $\int_1^{17}f(x)dx=a\ln 4-b$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 20.

Câu 48: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{45}{8}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{khi } 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{khi } \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)dx$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}-4\ln 3+4\ln 2$. **B.** $\dfrac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$.

C. $-\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+4\ln 3-4\ln 2$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\pi}{20}$. **B.** $-\frac{\pi}{20}$.**C.** $-\frac{\pi}{10}$. **D.** $\frac{\pi}{10}$

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f(1)=e^3$. Biết $\frac{f'(x)}{f(x)}=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\ge e^{\frac{3}{4}}$. **B.** $0<m<e^{\frac{3}{4}}$. **C.** $1<m<e^{\frac{3}{4}}$. **D.** $m>e^{\frac{3}{4}}$.

Câu 52: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{55}$. **B.** $I=\frac{1}{11}$. **C.** $I=55$. **D.** $I=11$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]dx=-\frac{109}{12}$. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx$ bằng

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{5}{9}$. **C.** $\ln\frac{2}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f^2(x)-xf(x)f'(x)=2x+4,\forall x\in[0;1]$.

Biết $f(1)=3$. Tích phân $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 19. **B.** 13. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{13}{3}$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=2021$. Tính $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2021$. **B.** $I=1010\pi$. **C.** $I=\frac{2021\pi}{2}$. **D.** $I=2021\pi$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4)=\frac{4}{3}$ và $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\right)$, $\forall x>0$. Khi đó $\int_1^4 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1283}{30}$. **B.** $-\frac{157}{30}$. **C.** $\frac{157}{30}$. **D.** $-\frac{1283}{30}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=2$ và $\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{3}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 58: Cho hàm số $f\ x$ thỏa mãn $\int_0^3 \left[2x\ln\ x+1\ +xf'\ x\ \right]dx=0$ và $f\ 3\ =1$. Biết $\int_0^3 f\ x\ dx=\frac{a+b\ln 2}{2}$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ là

A. 35. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 29.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$. Khi đó $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ là:

A. $-\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $-\ln 2$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_1^8 \frac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x$

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 10.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$ và

$f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x),\forall x\in[1;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)dx$ bằng

A. $\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{4}$. **C.** $\ln 3$. **D.** 0.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \ khi \ x\geq 2\\ x^2-2x+3 \ khi \ x<2\end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2sinx+1\right)cosx\,dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^2-x-2\right)=x+3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $I=\int_{-2}^{0} xf'(x)dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{-10}{3}$. **D.** $\frac{-46}{3}$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+6x & khi\, x\geq 2\\ \frac{2}{2x-5} & khi\, x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx$ bằng

A. $15+\frac{1}{2}\ln 6$. **B.** $15-\frac{1}{5}\ln 6$. **C.** $15+\frac{1}{5}\ln 6$. **D.** $15-\frac{1}{2}\ln 6$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4)=\frac{4}{3}$ và $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\right),\forall x>0$. Khi đó $\int_1^4 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{1283}{30}$. **B.** $-\frac{157}{30}$. **C.** $\frac{157}{30}$. **D.** $-\frac{1283}{30}$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1)=3$ và $\frac{2f^2(x)}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^3}\right)f(x)+\frac{8}{x^4}=f'(x),\forall x>0$. Tính $\int_2^4 f(x)dx$

A. 6 – 2ln2. **B.** 6 + 4ln2. **C.** 6 + 2ln2. **D.** 8 + 4ln2.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $f(0)=2$ và $f(4x)-f(x)=4x^3+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{148}{63}$. **B.** $\frac{146}{63}$. **C.** $\frac{149}{63}$. **D.** $\frac{145}{63}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{cases} f(4x)-f(x)=4x^3+2x, \forall x\in\mathbb{R} \\ f(0)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64a-a=4 \\ 16b-b=0 \\ 4c-c=2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{63} \\ b=0 \\ c=\frac{2}{3} \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{4}{63}x^3+\frac{2}{3}x+2$$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{63}x^3+\frac{2}{3}x+2\right)dx=\frac{148}{63}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R thoả mãn $f(6)=1$ và $\int_0^6 (x^2.f'(x)+6f(x))dx=10$; khi đó: $\int_{-3}^3 xf(x+3)dx$ bằng:

A. -13. **B.** 26. **C.** -26. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+3$ khi đó ta có:

$$I=\int_{-3}^3 xf(x+3)dx=\int_0^6 (t-3)f(t)dt$$

$$=\int_0^6 t.f(t)dt-3\int_0^6 f(t)dt=\int_0^6 x.f(x)dx-3\int_0^6 f(x)dx=I_1-3\int_0^6 f(x)dx$$

Xét $I_1=\int_0^6 t.f(t)dt=\int_0^6 x.f(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=xdx \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$

Khi đó:

$$I_1=\int_0^6 x.f(x)dx=\frac{x^2}{2}.f(x)\Big|_0^6-\int_0^6\frac{x^2}{2}.f'(x)dx=18.f(6)-\int_0^6\frac{x^2}{2}.f'(x)dx=18-\int_0^6\frac{x^2}{2}.f'(x)dx$$

Vậy: $I=18-\frac{1}{2}(\int_0^6 x^2f'(x)dx+\int_0^6 6f(x)dx)=18-5=13$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^3-4x\int_0^1\left|f(x)\right|dx$ và $f(1)>0$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 64.. **B.** 60.. **C.** 62.. **D.** 63.

Lời giải

Chọn C

Đặt $m=\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x,\left(m\ge 0\right)\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-4mx.$

Do $f\left(1\right)>0\Rightarrow 1-4m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{4}\Rightarrow m\in\left[0;\frac{1}{4}\right).$

Khi đó $m=\int\limits_0^1\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left|x^3-4mx\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2\sqrt{m}}\left|x^3-4mx\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{2\sqrt{m}}^1\left|x^3-4mx\right|\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow m=-\int\limits_0^{2\sqrt{m}}\left(x^3-4mx\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2\sqrt{m}}^1\left(x^3-4mx\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow m=-\left(\frac{1}{4}x^4-2mx^2\right)\Big|_0^{2\sqrt{m}}+\left(\frac{1}{4}x^4-2mx^2\right)\Big|_{2\sqrt{m}}^1$

$\Leftrightarrow m=-\left(\frac{1}{4}x^4-2mx^2\right)\Big|_0^{2\sqrt{m}}+\left(\frac{1}{4}x^4-2mx^2\right)\Big|_{2\sqrt{m}}^1$

$\Leftrightarrow 8m^2-3m+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{4}\\m=\frac{1}{8}\end{array}\right.$

Vì $m\in\left[0;\frac{1}{4}\right)$ nên $m=\frac{1}{8}.$

Khi đó $f\left(x\right)=x^3-\frac{1}{2}x\Rightarrow f\left(4\right)=62..$

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực R và thỏa mãn: $f\left(e^x+x+1\right)=\frac{x^9}{e^x+1}$. Tính $I=\int\limits_2^{e+2}f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{1}{11}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(e^x+x+1\right)=\frac{x^9}{e^x+1}\Leftrightarrow\left(e^x+1\right).f\left(e^x+x+1\right)=x^9$. Lấy tích phân hai vế:

$\int\limits_0^1\left(e^x+1\right).f\left(e^x+x+1\right)dx=\int\limits_0^1x^9dx$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(e^x+1\right).f\left(e^x+x+1\right)dx=\frac{1}{10}(1)$

Đặt: $u=e^x+x+1\Rightarrow du=\left(e^x+1\right)dx$

Đổi cân: $x=0\Rightarrow u=2; x=1\Rightarrow u=e+2$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow \int\limits_{2}^{e+2} f(u)du=\frac{1}{10}$. Vậy $(1)\Leftrightarrow \int\limits_{2}^{e+2} f(x)dx=\frac{1}{10}$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(1)=-2$, $f(x)\neq -\frac{1}{x}$ và $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int\limits_{1}^{4} f(x)dx$.

A. $-2\ln 2-\frac{3}{4}$. **B.** $-2\ln 2-\frac{1}{4}$. **C.** $-\ln 2-\frac{3}{4}$. **D.** $-\ln 2-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$

$\Leftrightarrow x^2f^2(x)+2xf(x)-f(x)=xf'(x)-1$

$\Leftrightarrow x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow \left[xf(x)+1\right]^2=\left(xf(x)\right)'\Leftrightarrow \left[xf(x)+1\right]^2=\left(xf(x)+1\right)'$.

Do đó $\frac{\left(xf(x)+1\right)'}{\left[xf(x)+1\right]^2}=1\Rightarrow \int\frac{\left(xf(x)+1\right)'}{\left[xf(x)+1\right]^2}dx=\int dx\Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1}=x+C$.

Mà $f(1)=-2\Rightarrow -\frac{1}{f(1)+1}=1+C\Rightarrow -\frac{1}{-2+1}=1+C\Rightarrow C=0$.

Nên $-\frac{1}{xf(x)+1}=x\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$.

Suy ra $\int\limits_{1}^{4} f(x)dx=\int\limits_{1}^{4}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\Big|_1^4=\frac{1}{4}-\ln 4-1+\ln 1=-2\ln 2-\frac{3}{4}$.

Câu 6: Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=6$. Tính $\int\limits_{0}^{1}\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]dx.$

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_{0}^{1}\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]dx.=\int\limits_{0}^{1}xf\left(x^2\right)dx-\int\limits_{0}^{1}x^2f\left(x^3\right)dx=I_1-I_2$

+ Tính $I_1=\int\limits_{0}^{1}xf\left(x^2\right)dx$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$; $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=1$

Ta có: $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$

+ Tính $I_2 = \int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)dx$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$

Ta có: $I_2 = \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}.6 = 1$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4$, $\forall x \in [0;1]$. Biết $f(1) = 3$. Tích phân $I = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** 19. **C.** 13. **D.** $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tính $I = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = f^2(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$.

Khi đó $I = \left(xf^2(x)\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = f^2(1) - 2\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = 9 - 2\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4$, lấy tích phân hai vế ta được

$\int_0^1 \left[f^2(x) - xf(x)f'(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+4)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+4)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow I + \frac{I-9}{2} = 5 \Leftrightarrow I = \frac{19}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x) > 0, \forall x \in [1;4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\left[2f(x) + xf'(x)\right]^2 = \frac{f(x)}{x}$ với mọi $x \in [1;4]$. Khi đó $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $2\ln 2$. **C.** $2\ln 2 - 2$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

◆ Ta có $\left[2f(x) + x.f'(x)\right]^2 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow 2f(x) + x.f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} + \frac{x.f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left[2x.\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

◆ Suy ra $\int\left[2x.\sqrt{f\left(x\right)}\right]'dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx\Leftrightarrow 2x.\sqrt{f\left(x\right)}=2\sqrt{x}+C$.

◆ Thế $x=1$, ta được $2.\sqrt{f\left(1\right)}=2\sqrt{1}+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $2x.\sqrt{f\left(x\right)}=2\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2.f\left(x\right)=x\Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

◆ Ta có $\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx=\int\limits_1^4\frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|\Big|_1^4=2\ln 2$.

Câu 9: Cho a,b,c là các số thực và $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $f'\left(t\right)=f'\left(t+5\right)=2$ với t là hằng số. Giá trị $\int\limits_t^{t+5} f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{105}{2}$. **B.** $\frac{134}{3}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2+2ax+b$. Vì $f'\left(t\right)=f'\left(t+5\right)=2$ nên t và $t+5$ là hai nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)-2=0\Leftrightarrow 3x^2+2ax+b-2=0$.

Theo Viet ta có $\begin{cases}t+t+5=-\frac{2a}{3}\\ t\left(t+5\right)=\frac{b-2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\left(2t+5\right)\\ b=3\left(t^2+5t\right)+2\end{cases}$.

Do đó

$I=\int\limits_t^{t+5} f'\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(t+5\right)-f\left(t\right)=\left[\left(t+5\right)^3-t^3\right]+a\left[\left(t+5\right)^2-t^2\right]+b\left[\left(t+5\right)-t\right]$

$=\left[\left(t+5-t\right)^3+3t\left(t+5\right)\left(t+5-t\right)\right]+a.5.\left(2t+5\right)+5b$

$=125+15\left(t^2+5t\right)-\frac{15}{2}\left(2t+5\right)^2+5\left[3\left(t^2+5t\right)+2\right]$

$=135+30\left(t^2+5t\right)-\frac{15}{2}\left(4t^2+20t+25\right)=-\frac{105}{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $0;+\infty$ và thỏa mãn $f\ x^2+4x\ =-2x^2-7x+1,\forall x\in 0;+\infty$. Biết $f\ 5\ =-8$, tính $I=\int\limits_0^5 x.f'\ x\ \mathrm{d}x$?

A. $I=-\frac{68}{3}$. **B.** $I=-\frac{35}{3}$. **C.** $I=-\frac{52}{3}$. **D.** $I=-\frac{62}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x^2+4x=t$, với $x\in 0;+\infty$ thì $t\geq 0$.

Suy ra $x+2\ ^2=t+4\Rightarrow x=\sqrt{t+4}-2$.

Do đó $-2x^2-7x+1=-2\ x^2+4x\ +x+1=-2t+\sqrt{t+4}-1$.

Khi đó $f\left(x^2+4x\right)=-2x^2-7x+1\Rightarrow f\left(t\right)=-2t+\sqrt{t+4}-1$: $f\left(t\right)$ liên tục trên $0;+\infty$.

Tính $I=\int_0^5 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$:

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=f\left(x\right)\end{cases}$

$I=xf\left(x\right)\Big|_0^5-\int_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5.f\left(5\right)-\int_0^5 f\left(t\right)\mathrm{d}t$

$=5.\left(-8\right)-\int_0^5\left(-2t+\sqrt{t+4}-1\right)\mathrm{d}t=-40-\left(-t^2+\frac{2}{3}\sqrt{\left(t+4\right)^3}-t\right)\Big|_0^5=-\frac{68}{3}.$

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $xf'\left(x\right)=e^{x^2}-1,\forall x\in\mathbb{R},f\left(1\right)=0$. Giá trị $\int_0^1 xf\left(x\right)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{4}\left(e-2\right)$. **B.** $\frac{1}{4}\left(e-2\right)$. **C.** $-\frac{1}{2}\left(e-2\right)$. **D.** $\frac{1}{2}\left(e-2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $xf'\left(x\right)=e^{x^2}-1\Rightarrow x^2f'\left(x\right)=x\left(e^{x^2}-1\right).$

Xét $I=\int_0^1 xf\left(x\right)dx$. Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'\left(x\right)dx\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Suy ra $I=\frac{x^2}{2}f\left(x\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'\left(x\right)dx=\frac{1}{2}f\left(1\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(e^{x^2}-1\right)dx$.

Xét $J=\int_0^1 x\left(e^{x^2}-1\right)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx-\int_0^1 xdx$. Đặt

$t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow J=\frac{1}{2}\int_0^1 e^tdt-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^t\Big|_0^1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e-1=\frac{1}{2}\left(e-2\right).$

Vậy $I=-\frac{1}{2}.J=-\frac{1}{4}\left(e-2\right).$

Câu 12: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\left[0;1\right]$, $f\left(1\right)=0$. Biết $\int_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2dx=\frac{1}{3},\int_0^1 f\left(x\right)dx=-\frac{1}{3}$. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(x\right)dx$ bằng

A. $-\frac{11}{48}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{6}{23}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Từ $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, ta đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ v = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = x \end{cases}$;

Do đó: $-\frac{1}{3} = x.f(x)\Big|_0^1 - \int x.f'(x)dx \Rightarrow \int x.f'(x)dx = \frac{1}{3}$.

Từ đó ta suy ra $\int_0^1 \left(f'(x) - x\right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + C$

Lại có $f(1) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$; suy ra $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dx = -\frac{11}{48}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Tính $\int_0^1 e^x \left[f(x) + f'(x)\right]dx$

A. $I = 0$. **B.** $I = e + 1$. **C.** $I = e - 1$. **D.** e.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$\int_0^1 e^x \left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x)dx + \int_0^1 e^x f'(x)dx = ef(1) - f(0) = e - 1.$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$. Tính $f(-1)$

A. e^{-2}. **B.** e^{-4}. **C.** e^2. **D.** e^4.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có :Vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -2\int_{-1}^1 dx \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)\Big|_{-1}^1 = -2x\Big|_{-1}^1$

$\Leftrightarrow \ln\frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4$.

Vậy $f(-1) = e^4$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \int_0^1 xf(x)dx$. Tích phân $\int_0^4 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{528}{35}$. **B.** $\frac{438}{35}$. **C.** $\frac{408}{35}$. **D.** $\frac{368}{35}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\int_0^1 xf(x)dx = a$. Suy ra

$f(x) = x\sqrt{x} + a \Rightarrow xf(x) = x^2\sqrt{x} + ax \Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 \left(x^2\sqrt{x} + ax\right)dx$

$a = \int_0^1 x^2\sqrt{x}dx + a\int_0^1 xdx = \frac{2}{7} + \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{7}$.

Vậy $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{4}{7}$. Suy ra $\int_0^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{4}{7}\right)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7}x\right)\Big|_0^4 = \frac{528}{35}$.

Câu 16: Cho hàm số $f\ x$ thỏa $f\ 2 = 0$ và $f'\ x = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $\forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$.

Khi đó $I = \int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_2^{\frac{7}{2}} f\ t\ 2dt$.

Đặt $\begin{cases} u = f\ t \\ dv = 2dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'\ t\ dt \\ v = 2\left(t - \frac{7}{2}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow I = 2\left(t - \frac{7}{2}\right) f\ t\ \Big|_2^{\frac{7}{2}} - \int_2^{\frac{7}{2}} 2\left(t - \frac{7}{2}\right) f'\ t\ dt = 0 - \int_2^{\frac{7}{2}} 2\left(t - \frac{7}{2}\right).\frac{t+7}{\sqrt{2t-3}}dt = \frac{236}{15}$

$\Rightarrow a = 236; b = 15 \Rightarrow a + b = 251$.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax - 3a + 7 & \text{khi } x \le 3 \end{cases}$ **(a là tham số thực)**. Nếu $\int_0^1 f\left(e^x + 1\right)e^x dx = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$. **B.** $6e - 6$ **C.** $6e + 6$ **D.** $-6e + 6$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$. Nếu $x = 0 \Rightarrow t = 2$, Nếu $x = 1 \Rightarrow t = e + 1$

Suy ra:

$$\int_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x dx = \int_2^{e+1} f(t)dt = \int_2^3 f(t)dt + \int_3^{e+1} f(t)dt = \int_2^3 (at-3a+7)dt + \int_3^{e+1} (2t+1)dt$$

$$= \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t\right)\Big|_2^3 + \left(t^2+t\right)\Big|_2^{e+1} =$$

$$= \left(\frac{a.3^2}{2} - 3a.3 + 7.3\right) - \left(\frac{a.2^2}{2} - 3a.2 + 7.2\right) + \left((e+1)^2 + e + 1\right) - \left(3^2+3\right)$$

$$= \frac{-a}{2} + e^2 + 3e - 3$$

Theo giả thiết: $\int_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x dx = e^2$ nên ta có phương trình:

$$\frac{-a}{2} + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 3e - 3 \Leftrightarrow a = 6e - 6$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & khi\ x > 3 \\ ax - 3a + 7 & khi\ x \le 3 \end{cases}$ **(a là tham số thực)**. Nếu $\int_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x \mathrm{d}x = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. **B.** $6e-6$. **C.** $6e+6$. **D.** $-6e+6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = e+1$

Khi đó $\int_2^{e+1} f(t).\mathrm{dt} = e^2 \Leftrightarrow \int_2^3 (at-3a+7)dt + \int_3^{e+1} (2t+1)\mathrm{dt} = e^2$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t\right)\Big|_2^3 + \left(t^2+t\right)\Big|_3^{e+1} = e^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21\right) - (2a - 6a + 14) + \left[(e+1)^2 + (e+1)\right] - \left(3^2+3\right) = e^2$$

$\Leftrightarrow a = 6e - 6$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax - 3a + 7 & \text{khi } x \le 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f\left(e^x+1\right)e^x \mathrm{d}x = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. **B.** $6e-6$. **C.** $6e+6$. **D.** $-6e+6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = e + 1$

Khi đó $\int\limits_2^{e+1} f(t)\mathrm{d}t = e^2 \Leftrightarrow \int\limits_2^3 (at - 3a + 7)dt + \int\limits_3^{e+1} (2t + 1)\mathrm{d}t = e^2$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t \right)\Big|_2^3 + \left(t^2 + t \right)\Big|_3^{e+1} = e^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - \left(2a - 6a + 14 \right) + \left[(e+1)^2 + (e+1) \right] - \left(3^2 + 3 \right) = e^2$$

$$\Leftrightarrow a = 6e - 6.$$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 3$, $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = 3$.

Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

- Gọi $A = \int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}t$.

$x = 1 \Rightarrow t = 1;\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A = \int\limits_1^2 \frac{f(t).2\sqrt{x}\mathrm{d}t}{\sqrt{x}} = 2\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t$.

Mà $A = 2 \Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

- Gọi $B = \int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Ta có: $B = \int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x\mathrm{d}\left(f(x) \right) = xf(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(2) - \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Mà $f(2) = 3$ và $B = 3 \Rightarrow 6 - \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3 - 1 = 2$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3 + 3x + 1\right) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tích phân $\int\limits_1^5 x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** $\frac{33}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2$ và $3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $f(1)=2$, $f(5)=5$

và $\left(3x^2+3\right)f\left(x^3+3x+1\right)=\left(3x^2+3\right)(3x+2),\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\int_0^1\left(3x^2+3\right)f\left(x^3+3x+1\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^2+3\right)(3x+2)\mathrm{d}x$ hay $\int_1^5 f(u)\mathrm{d}u=\frac{59}{4}$.

Ta có: $\int_1^5 x.f'(x)\mathrm{d}x=5.f(5)-f(1)-\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{33}{4}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$ với mọi $x>0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Xét trên $(0;+\infty)$:

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta có: $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)+2xf\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

Ta có: $\begin{cases}2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x\\ f(x)+2xf\left(\frac{1}{x}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{2x-1}{3}\\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2-x}{3x}=\frac{\frac{2}{x}-1}{3}\end{cases}$.

Vậy $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{2x-1}{3}dx=\frac{3}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$. Khi đó $\int_1^2 f\left(x^2\right)dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\left[g(x)\right]'=x-1\Rightarrow f\left(x^2\right)=x^2-1$.

Khi đó $\int_1^2 f\left(x^2\right)dx=\int_1^2\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_0^1\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

◆ Ta có $I=\int_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=A-B.$

◆ Tính $A=\int_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.
Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=0$; Khi $x=1\Rightarrow t=1$.
Ta có $A=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$.

◆ Tính $B=\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2\mathrm{d}x$.
Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=0$; Khi $x=1\Rightarrow t=1$.
Suy ra $B=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$.
Vậy $I=A-B=3-2=1$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_0^1\left[xf\left(x^2\right)-x^2f\left(x^3\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

◆ Ta có $I=\int_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=A-B.$

◆ Tính $A=\int_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.
Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=0$; Khi $x=1\Rightarrow t=1$.
Ta có $A=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$.

◆ Tính $B=\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2\mathrm{d}x$.
Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=0$; Khi $x=1\Rightarrow t=1$.

Suy ra $B=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Vậy $I=A-B=3-2=1$.

Câu 26: Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+g(x)=x$; $g'(x)+f(x)=-x$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=g(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{e}-2$. **B.** $e+\frac{1}{e}-2$. **C.** $\frac{e^2+2}{2e}$. **D.** $\frac{e^2-2}{2e}$.

Lời giải

Chọn B

* Ta có: $\begin{cases} f'(x)+g(x)=x \\ g'(x)+f(x)=-x \end{cases} \Rightarrow f'(x)+g'(x)=-f(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=-g'(x)-g(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=-g'(x)e^x-g(x)e^x$

$\Leftrightarrow \left[f(x)e^x\right]'=-\left[g(x)e^x\right]'$

$\Leftrightarrow f(x).e^x=-g(x)e^x+C$.

$\Rightarrow f(x)=-g(x)+c \Leftrightarrow c=2$.

Vậy $g(x)=\frac{2-f(x)e^x}{e^x}=\frac{2}{e^x}-f(x)$.

* Ta có: $f'(x)+g(x)=x$

$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{2}{e^x}-f(x)=x$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=xe^{-x}-2e^{-2x}$

$\Leftrightarrow \left[f(x)e^{-x}\right]'=xe^{-x}-2e^{-2x}$.

Vì hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$\int_0^1\left[f(x)e^{-x}\right]'dx=\int_0^1\left[xe^{-x}-2e^{-2x}\right]dx \Leftrightarrow f(x)e^{-x}\Big|_0^1=(-xe^{-x}-e^{-x}+e^{-2x})\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow f(1)e^{-1}=\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e}+1 \Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{e}+e-2$

Vậy $f(1)=\frac{1}{e}+e-2$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=x^{2021}+\sin x+2021$. Biết rằng có duy nhất giá trị của $m=-\frac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $(a,b)=1$) để $\int_0^m (x.f'(\mathrm{m}-x)-f(x))dx=1$. Tìm $a+b$.

A. $a+b=2021$. **B.** $a+b=2023$. **C.** $a+b=2020$. **D.** $a+b=2022$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^m (x.f'(\mathrm{m}-x)-f(x))dx=1 \Leftrightarrow \int_0^m x.f'(\mathrm{m}-x)dx-\int_0^m f(x)dx=1$

$\Leftrightarrow \left[-x.f(m-x)\right]\Big|_o^m+\int_0^m f(m-x)\mathrm{d}x-\int_0^m f(x)dx=1$

$\Leftrightarrow -mf(0)-\int_m^0 f(t)dt-\int_0^m f(x)dx=1$

$\Leftrightarrow -2021m+\int_o^m f(t)dt-\int_0^m f(x)dx=1$

$\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2021}$. Vậy $a=1;b=2021\Rightarrow a+b=2022$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=f(1)=1; f'(0)=2021.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 (1-x)f''(x)\mathrm{d}x=-2021.$ **B.** $\int_0^1 (1-x)f''(x)\mathrm{d}x=2021.$

C. $\int_0^1 (1-x)f''(x)\mathrm{d}x=1.$ **D.** $\int_0^1 (1-x)f''(x)\mathrm{d}x=-1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 (1-x)f''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}f'(x)$

$=(1-x)f'(x)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$

$=-f'(0)+f(1)-f(0)=-2021.$

Vậy $\int_0^1 (1-x)f''(x)\mathrm{d}x=-2021.$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}, \forall x\in[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $\dfrac{3}{4}+2\ln 2$ **B.** $\dfrac{3}{2}+2\ln 2.$ **C.** $\dfrac{3}{4}+\ln 2.$ **D.** $3+\ln 2.$

Lời giải

Chọn C

Ta luôn có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thì $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế của đẳng thức $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ ta được:

$2.\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}dx=\dfrac{3}{2}+2\ln 2\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\dfrac{3}{4}+\ln 2.$

Câu 30: Biết $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x = 10, \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = -4$. Tính $\int_{-1}^3 f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^3 f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} f(1-3x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^3 f(3x-1)\mathrm{d}x = A + B$$

Đặt $u = 1-3x \Rightarrow du = -3\mathrm{d}x$

$x = -1 \Rightarrow u = 4$

$x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow u = 0$

Khi đó $A = \dfrac{1}{3}\int_0^4 f(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{3}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{-4}{3}$

Đặt $t = 3x-1 \Rightarrow \mathrm{dt}=3\mathrm{d}x$

$x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow t = 0$

$x = 3 \Rightarrow t = 8$

Khi đó $B = \dfrac{1}{3}\int_0^8 f(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{3}\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{10}{3}$

Vậy $I = \dfrac{10}{3} + \left(\dfrac{-4}{3}\right) = 2.$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$		-2		-1		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	2021	↘	8	↗	$+\infty$

Giá trị $I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx + \int_0^3 \dfrac{f'(x+1)}{2}dx$ bằng

A. 3. **B.** 2021. **C.** 5. **D.** 10.

Lờigiải

Chọn A

Xét $I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx$

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2}$

Khi $x=-1\Rightarrow t=-2; x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=1$

Ta có $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx=\int\limits_{-2}^{1} f'(t)\dfrac{dt}{2}=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} f'(t)dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} f'(x)dx$

Xét $I_2=\int\limits_{0}^{3}\dfrac{f'(x+1)}{2}dx$

Đặt $x+1=u\Rightarrow dx=du$

Khi $x=0\Rightarrow u=1; x=3\Rightarrow u=4$

Ta có $I_2=\int\limits_{0}^{3}\dfrac{f'(x+1)}{2}dx=\int\limits_{1}^{4}\dfrac{f'(u)}{2}du=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{4} f'(u)du=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{4} f'(x)dx$

Có $I=I_1+I_2$

$=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} f'(x)dx+\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{4} f'(x)dx$

$=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4} f'(x)dx=\dfrac{1}{2}f(x)\Big|_{-2}^{4}=\dfrac{f(4)-f(-2)}{2}=\dfrac{8-2}{2}=3$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=f(5-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x=2$.

Tính $I=\int\limits_{2}^{3} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=20$. **B.** $I=10$. **C.** $I=15$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=5-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Cho $x=2\Rightarrow t=3; x=3\Rightarrow t=2$.

$I=\int\limits_{2}^{3} xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{3}(5-t)f(5-t)\mathrm{d}t$

$=\int\limits_{2}^{3}(5-x)f(5-x)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{2}^{3}5f(5-x)\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{3} xf(5-x)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{2}^{3}5f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{3} xf(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_{2}^{3} xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{3}5f(x)\mathrm{d}x=5.2=10$

$\Leftrightarrow \int\limits_{2}^{3} xf(x)\mathrm{d}x=5.$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0)=-2$ và $\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$\bullet\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}.f'(x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+1}.f(x)\right]'=\left(-\sqrt{x^2+1}\right)'$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}+C$.

$\bullet\ f(0)=-2\Rightarrow\sqrt{1}.f(0)=-\sqrt{1}+C\Rightarrow C=-1$.

$\bullet\ \sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}-1\ \Rightarrow f(x)=-1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Khi đó:

$$I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[-x-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x^2+1}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{3+1}\right)-(-0-1)=-\frac{5}{2}.$$

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2021f(x)-f(-x)=x\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{3}{2022}$. **B.** $\dfrac{1}{1010}$. **C.** $\dfrac{2}{2019}$. **D.** $\dfrac{1}{2020}$.

Lời giải

Chọn B

Bổ đề: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b(a+b-x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x$$

Ta có: $2021f(x)-f(-x)=x\sin x$

Lấy tích phân 2 vế, cận từ $\dfrac{-\pi}{2}$ đến $\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2021\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2021\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2020\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2020\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 2$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2020} = \frac{1}{1010}.$$

Câu 35: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;e]$ thoả mãn $f(x).f(e-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^e \frac{1}{1+f(x)}dx$

A. $I=e$. **B.** $I=\frac{e}{2}$. **C.** $I=\frac{2e}{3}$. **D.** $I=\frac{e}{3}$.

Lời giải

Chọn B

◆ Ta có: $f(x).f(e-x)=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{f(e-x)} \Rightarrow 1+f(x)=1+\frac{1}{f(e-x)}=\frac{f(e-x)+1}{f(e-x)}$

Khi đó: $\frac{1}{1+f(x)}=\frac{f(e-x)}{1+f(e-x)}=1-\frac{1}{1+f(e-x)}$.

Do đó: $\int_0^e \frac{1}{1+f(x)}=\int_0^e 1dx-\int_0^e \frac{1}{1+f(e-x)}dx$.

$\Rightarrow \int_0^e \frac{1}{1+f(x)}=e-\int_0^e \frac{1}{1+f(e-x)}dx$.

$\Rightarrow \int_0^e \frac{1}{1+f(x)}+\int_0^e \frac{1}{1+f(e-x)}dx=e \quad (1)$.

◆ Xét: $I=\int_0^e \frac{1}{1+f(x)}dx$

Đặt $x=e-t \Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=e \\ x=e \Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$I=\int_0^e \frac{1}{1+f(x)}dx=\int_e^0 \frac{-dt}{1+f(e-t)}=\int_0^e \frac{dt}{1+f(e-t)}=\int_0^e \frac{dx}{1+f(e-x)} \quad (2)$.

◆ Từ (1) và (2) ta được: $2I=e \Rightarrow I=\frac{e}{2}$.

Cách 2. Chọn hàm $f(x)=1\Rightarrow f(e-x)=1\Rightarrow I=\int_0^e \frac{1}{1+f(x)}dx=\int_0^e \frac{1}{2}dx=\frac{e}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x^3+2x+3\right)=x^6+4x^4+3x^3+6x+2,$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^6 f(x)dx.$

A. $\frac{206}{35}$. **B.** $\frac{1976232}{5}$. **C.** $\frac{125}{24}$. **D.** $\frac{125}{48}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy tích phân hai vế, ta được:

Câu 37: $\int_{-1}^{1}\left(3x^2+2\right)f\left(x^3+2x+3\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2+2\right)\left(x^6+4x^4+3x^3+6x+2\right)dx\Leftrightarrow\int_0^6 f(t)dt=\frac{298}{15}$. **(SGD VĨNH PHÚC - LẦN 2 - 2021)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(0\right)=0$, tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Do $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Do $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+2x\right)=4x-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(x^3+2x\right)=4x-1\Rightarrow\left(3x^2+2\right).f\left(x^3+2x\right)=\left(4x-1\right)\left(3x^2+2\right)$

$\Leftrightarrow \left(3x^2+2\right).f\left(x^3+2x\right)=12x^3+8x-3x^2-2$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(3x^2+2\right).f\left(x^3+2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(12x^3+8x-3x^2-2\right)\mathrm{d}x=4 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(3x^2+2\right).f\left(x^3+2x\right)\mathrm{d}x=4$

Đặt $x^3+2x=t \Rightarrow \left(3x^2+2\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	3

$\Rightarrow 4=\int_0^1 \left(3x^2+2\right).f\left(x^3+2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2-x\right)+2f\left(x\right)=3x^2+2$. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx+\int_0^1 \frac{3f\left(\sqrt{3x+1}\right)}{4\sqrt{3x+1}}dx$

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

+) Xét $A=\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx$

Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$

$x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$

Suy ra $A=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(t\right)dt$.

+) Xét $B=\int_0^1 \frac{3f\left(\sqrt{3x+1}\right)}{4\sqrt{3x+1}}dx$

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow dt=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}dt$

$x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=2$

Suy ra $B=\int_1^2 \frac{3}{4}.\frac{2}{3}f\left(t\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^2 f\left(t\right)dt$.

+) $I=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(t\right)dt+\int_1^2 f\left(t\right)dt\right]=\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(t\right)dt$.

+) Theo đề $f\left(2-x\right)+2f\left(x\right)=3x^2+2$

$\Rightarrow \int_0^2 f\left(2-x\right)dx+\int_0^2 2f\left(x\right)dx=\int_0^2 \left(3x^2+2\right)dx$ (1)

Xét $\int_0^2 f(2-x)dx$

Đặt $t = 2-x \Rightarrow dt = -dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 2;\ \ x = 2 \Rightarrow t = 0$

$(1) \Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt + 2\int_0^2 f(x)dx = 12$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + 2\int_0^2 f(x)dx = 12$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)dx = 12 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4.$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = 2$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f\left(x^2+1\right)+\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{x}$. Biết $\int_1^{17} f(x)\mathrm{d}x = a\ln 4 - b$ với a, $b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 20. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x^2+1\right)+\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2xf\left(x^2+1\right)+\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}=2\ln x$. (1)

Lấy tích phân từ 1 đến 4 cả hai vế của (1) ta được

$$\int_1^4 2xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x+\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^4 2\ln x\,\mathrm{d}x \quad (1)$$

Ta có $\int_1^4 2\ln x\,\mathrm{d}x = 2\left[x\ln x\Big|_1^4 - \int_1^4 x\,\mathrm{d}(\ln x)\right] = 2\left(4\ln 4 - \int_1^4 1\mathrm{d}x\right) = 2\left(4\ln 4 - x\Big|_1^4\right) = 8\ln 4 - 6.$

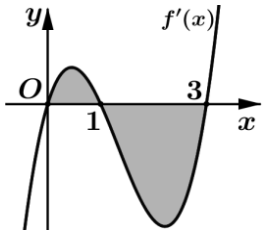
Ta có $\int_1^4 2xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \int_1^4 f\left(x^2+1\right)\mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \int_2^{17} f(t)\mathrm{d}t = \int_2^{17} f(x)\mathrm{d}x$ (ở đây ta đặt $t = x^2+1$).

Lại có $\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right) = \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. (ở đây ta đặt $t = \sqrt{x}$).

Từ $(1) \Rightarrow \int_2^{17} f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 8\ln 4 - 6 \Leftrightarrow \int_1^{17} f(x)\mathrm{d}x = 8\ln 4 - 6$.

Suy ra $a = 8$; $b = 6 \Rightarrow a + 2b = 8 + 2.6 = 20$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S=a$. Biết rằng $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=b$ và $f(3)=c$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $a-b-c$. **B.** $-a+b+c$. **C.** $-a+b-c$. **D.** $a-b+c$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$a=S=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2f(1)-f(0)-f(3)=a \Leftrightarrow 2f(1)-f(0)=a+c \ (1)$$

Xét $b=\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ dv=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$, ta có:

$$b=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2f(1)-f(0)-b \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra được: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a+c-b$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\frac{f(x)}{x}=f(x)+f'(x)-e^{-x}$ đồng thời $f(1)=\frac{1}{e}$. Tính giá trị của $f(2)$.

A. $f(2)=e^{-2}(1+2\ln 2)$. **B.** $f(2)=e^{-2}(3+2\ln 2)$.

C. $f(2)=e^{-2}(2+\ln 3)$. **D.** $f(2)=2e^{-2}(1+\ln 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\frac{f(x)}{x}=f(x)+f'(x)-e^{-x} \Leftrightarrow f(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)+f'(x)=e^{-x} \Leftrightarrow f(x)\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)+\frac{e^x}{x}f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x).\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int_1^2 \left(f(x).\frac{e^x}{x}\right)'dx=\int_1^2 \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \left[f(x).\frac{e^x}{x}\right]\Big|_1^2=\ln x\Big|_1^2 \Leftrightarrow f(2).\frac{e^2}{2}-e.f(1)=\ln 2$$

$$\Leftrightarrow f(2)=\frac{2\ln 2}{e^2}+\frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(2)=2e^{-2}(1+\ln 2).$$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x)-1=\int_{-1}^{1}(x+e^t)f(t)dt$. Tích phân $\int_{-1}^{1}e^x f(x)dx$ bằng

A. $I=\dfrac{e+3}{-e^2+e-3}$. **B.** $I=\dfrac{e^2+3}{e^2-e+3}$. **C.** $I=\dfrac{e^2+3}{-e^2+e-3}$. **D.** $I=\dfrac{-2e}{e^2-e+3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $f(x)-1=\int_{-1}^{1}(x+e^t)f(t)dt=x\int_{-1}^{1}f(t)dt+\int_{-1}^{1}e^t f(t)dt$

$f(x)=x\int_{-1}^{1}f(t)dt+\int_{-1}^{1}e^t f(t)dt+1$

Đặt $a=\int_{-1}^{1}f(t)dt, b=\int_{-1}^{1}e^t f(t)dt+1$, khi đó $f(x)=ax+b$

$f(x)=x\int_{-1}^{1}(at+b)dt+\int_{-1}^{1}e^t(at+b)dt+1$

$=x\left(\dfrac{at^2}{2}+bt\right)\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(at+b)de^t+1$

$=2bx+\left[\left((at+b)e^t\right)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}a.e^t dt\right]+1$

$=2bx+\left[(a+b)e-(-a+b)e^{-1}-a\left(e-e^{-1}\right)\right]+1=2bx+\dfrac{be^2-b+2a+e}{e}$

Mà $f(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\ b=\dfrac{be^2-b+2a+e}{e}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-2e}{e^2-e+3}\\ b=\dfrac{-e}{e^2-e+3}\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{-2e}{e^2-e+3}x+\dfrac{-e}{e^2-e+3}$

$\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{-2e}{e^2-e+3}x+\dfrac{-e}{e^2-e+3}\right)dx=\left(\dfrac{-e}{e^2-e+3}x^2+\dfrac{-e}{e^2-e+3}x\right)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{-2e}{e^2-e+3}$

$\Rightarrow\int_{-1}^{1}e^x f(x)dx=f(x)-1-x\int_{-1}^{1}f(t)dt=\dfrac{-2e}{e^2-e+3}x+\dfrac{-e}{e^2-e+3}-1-\dfrac{-2e}{e^2-e+3}x=\dfrac{-e^2-3}{e^2-e+3}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-2;2]$ thỏa mãn $\int_{-2}^{2}\left[f^2(x)-2f(x)(x+2)\right]dx=-\dfrac{64}{3}$. Tính $I=\int_0^1\dfrac{f(x)}{x^2+1}dx$.

A. $I=\dfrac{\pi-2\ln 2}{2}$. **B.** $I=\dfrac{\pi-\ln 2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{\pi+\ln 2}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\pi+2\ln 2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\int_{-2}^{2}\left[f^2(x)-2f(x)(x+2)\right]dx=-\frac{64}{3}\Leftrightarrow\int_{-2}^{2}\left[f(x)-(x+2)\right]^2dx-\int_{-2}^{2}(x+2)^2dx=-\frac{64}{3}$.

$\Leftrightarrow\int_{-2}^{2}\left[f(x)-(x+2)\right]^2dx=0$

Suy ra $f(x)=x+2$.

Suy ra $I=\int_0^1\frac{x+2}{x^2+1}dx$.

Đặt $x=\tan t\left(t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

Suy ra $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan t+2}{\tan^2 t+1}.\left(1+\tan^2 t\right)dt=\left(-\ln|\cos t|+2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\ln 2+\pi}{2}$.

Câu 45: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(0)=0$. Biết $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\frac{5}{48}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{6}{23}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$

$\Rightarrow\quad\left[xf(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad f(1)-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\quad\Rightarrow$

$f(1)-f(0)-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1(x-1)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$

Ta có: $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int_0^1(x-1)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-2.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=0$

$\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)-(x-1)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=x-1\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}-x+C$

Do $f(0)=0$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=\frac{x^2}{2}-x$

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{48}$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(1)=0$, $f'(x).f(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$, $\forall x\in[1;+\infty)$. Tính $f^2(2)$.

A. 1. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x).f(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x\Leftrightarrow\left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)'=2x$.

Suy ra $\sqrt{f^2(x)+1}=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C\ \ (C\in\mathbb{R})$.

Thay $x=1$ vào ta được $\sqrt{f^2(1)+1}=1^2+C\Rightarrow C=0$.

Suy ra $\sqrt{f^2(x)+1}=x^2$, hay $f^2(x)=x^4-1$.

Vậy $f^2(2)=2^4-1=15$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f\left(x^2+1\right)+\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{\ln x}{x}$. Biết $\int\limits_1^{17}f(x)dx=a\ln 4-b$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(x^2+1\right)+\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{\ln x}{x}\Leftrightarrow 2xf\left(x^2+1\right)+\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}=2\ln x$

$\Leftrightarrow\int\limits_1^4 2xf\left(x^2+1\right)dx+\int\limits_1^4\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}dx=2\int\limits_1^4\ln x dx$ $\Leftrightarrow\int\limits_2^{17}f(u)du+\int\limits_1^2 f(v)dv=2\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^4$

$\Leftrightarrow\int\limits_1^{17}f(x)dx=8\ln 4-6$.

Vậy $a+2b=8+2.6=20$.

Câu 48: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{45}{8}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow 3.f'(x).\mathrm{e}^{f^3(x)-x^2-1}=\dfrac{2x}{f^2(x)}$

$\Rightarrow 3.f'(x).f^2(x).\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}.2x\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^{f^3(x)}\right]'=\left(\mathrm{e}^{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow\mathrm{e}^{f^3(x)}=\mathrm{e}^{x^2+1}+C$.

Do $f(0)=1\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra: $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}}x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\int\limits_0^{\sqrt{7}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^{\sqrt{7}}=\frac{45}{8}$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{khi } 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2x-1 & \text{khi } \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}-4\ln 3+4\ln 2$. **B.** $\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$.

C. $-\frac{3}{2}+4\ln 3+4\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+4\ln 3-4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.\cos x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sin x$ ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.\cos x.f'(\sin x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2t.f'(t)\mathrm{d}t$

Đặt $\begin{cases}u=t\\ dv=f'(t)dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=f(t)\end{cases}$

$I=\int\limits_0^1 2t.f'(t)\mathrm{d}t=2\left(t.f(t)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)=2\left(1-\int\limits_0^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t\right)$

$=2\left(1-\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{t+1}\mathrm{d}t-\int\limits_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)\mathrm{d}t\right)=\frac{3}{2}-4\ln 3+4\ln 2$

Câu 50: Cho hàm số $f(x),f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\pi}{20}$. **B.** $-\frac{\pi}{20}$.**C.** $-\frac{\pi}{10}$. **D.** $\frac{\pi}{10}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}\Rightarrow 2f(-x)+3f(x)=\frac{1}{4+x^2}\Rightarrow\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}\\ 2f(-x)+3f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{5\left(x^2+4\right)}\Rightarrow I=\dfrac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2}\dfrac{1}{x^2+4}dx$

Đặt $x=2\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \text{dx}=2\left(1+\tan^2 t\right)dt$

$\Rightarrow I=\dfrac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\left(1+\tan^2 t\right)}{4\left(1+\tan^2 t\right)}\text{dt}=\dfrac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\text{dt}=\dfrac{1}{10}t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{20}$

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f(1)=e^3$. Biết $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\ge e^{\frac{3}{4}}$. **B.** $0<m<e^{\frac{3}{4}}$. **C.** $1<m<e^{\frac{3}{4}}$. **D.** $m>e^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(2x+1)dx\Rightarrow\ln f(x)=x^2+x+C$

$f(1)=e^3\Rightarrow\ln e^3=2+C\Rightarrow C=1$. Do đó $f(x)=e^{x^2+x+1}$.

Phương trình $f(x)=m\Leftrightarrow e^{x^2+x+1}=m\Leftrightarrow x^2+x+1-\ln m=0\ \ (m>0)$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=1-4(1-\ln m)>0\Leftrightarrow\ln m>\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow m>e^{\frac{3}{4}}$.

Câu 52: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)+2f(x)=x^{10},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\text{dx}$.

A. $I=\dfrac{1}{55}$. **B.** $I=\dfrac{1}{11}$. **C.** $I=55$. **D.** $I=11$.

Lời giải

Chọn A

Thay x bởi $-x$, ta cũng có: $3f(x)+2f(-x)=x^{10},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó, ta sẽ có:

$3f(x)+2f(-x)-\left[3f(-x)+2f(x)\right]=x^{10}-x^{10}\Leftrightarrow f(x)=f(-x)$.

Do vậy nên từ đề, ta có $5f(x)=x^{10}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{5}x^{10}$.

Câu 53: .Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ thỏa $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]dx=-\dfrac{109}{12}$. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{x^2-1}dx$ bằng

A. $\ln\dfrac{7}{9}$. **B.** $\ln\dfrac{5}{9}$. **C.** $\ln\dfrac{2}{9}$. **D.** $\ln\dfrac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]dx=-\frac{109}{12}\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-(3-x)\right]^2dx=-\frac{109}{12}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2dx$$

$$\Rightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-(3-x)\right]^2dx=0\Rightarrow f(x)=3-x$$

Do đó $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-x+3}{x^2-1}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left(-2\ln|x+1|+\ln|x-1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{9}.$

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f^2(x)-xf(x)f'(x)=2x+4,\forall x\in[0;1].$

Biết $f(1)=3.$ Tích phân $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 19. **B.** 13. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$f^2(x)-xf(x)f'(x)=2x+4\Leftrightarrow f^2(x)=xf(x)f'(x)+2x+4$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1(2x+4)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x+5\ (*).$$

Đặt $I=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$, tính tích phân $\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$ bằng phương pháp từng phần:

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx;\ dv=f(x)f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{1}{2}f^2(x)$,

ta có $\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x.f^2(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}.f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f^2(1)-\frac{1}{2}I=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}I$.

Thay vào $(*)$: $I=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}I+5\Leftrightarrow I=\frac{19}{3}$.

Vậy $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{19}{3}$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=2021.$ Tính $I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x$

.

A. $I=2021.$ **B.** $I=1010\pi.$ **C.** $I=\frac{2021\pi}{2}.$ **D.** $I=2021\pi.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$ (1)

Đặt $I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=\pi-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\pi-t\right)f\left[\sin\left(\pi-t\right)\right](-\mathrm{d}t)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi-t\right)f\left(\sin t\right)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow I_1=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra được $I=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=2021\pi.$

Câu 56: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(4\right)=\frac{4}{3}$ và $f\left(x\right)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'\left(x\right)\right)$, $\forall x>0$. Khi đó $\int\limits_1^4 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1283}{30}$. **B.** $-\frac{157}{30}$. **C.** $\frac{157}{30}$. **D.** $-\frac{1283}{30}$.

Lời giải

Chọn B.

$\forall x>0$ ta có: $f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=x+\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(x.f\left(x\right)\right)'=x+\sqrt{x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $x.f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Mà $f\left(4\right)=\frac{4}{3}\Rightarrow C=-8$.

$\Rightarrow xf\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8$.

Vậy $\int\limits_1^4 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8\right)\mathrm{d}x=-\frac{157}{30}.$

Câu 57: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(1\right)=2$ và $\int\limits_0^1 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{3}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4=\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\left(x^2 f(x)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 2xf(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 4=f(1)-2\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 4=2-2\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=-1.$

Xét $\int\limits_1^4\frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=2-\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

Với $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=4\Rightarrow t=0.$

Khi đó $4=\int\limits_1^4\frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0\left[1+3(2-t)\right]f(t)\mathrm{d}t$

$\Leftrightarrow 4=\int\limits_0^1(7-3t)f(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow 4=7\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t-3\int\limits_0^1 tf(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow 4=7\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t-3(-1)\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{7}.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}.$

Câu 58: Cho hàm số $f\ x$ thỏa mãn $\int\limits_0^3\left[2x\ln\ x+1\ +xf'\ x\ \right]dx=0$ và $f\ 3\ =1$. Biết $\int\limits_0^3 f\ x\ dx=\frac{a+b\ln 2}{2}$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ là

A. 35. **B.** 7 . **C.** 11. **D.** 29.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^3\left[2x\ln\ x+1\ +xf'\ x\ \right]dx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^3\ln\ x+1\ d(x^2)+\int\limits_0^3 xf'\ x\ dx=0$

$+I_1=\int\limits_0^3\ln\ x+1\,d\ x^2\ =x^2\ln\ x+1\ \Big|_0^3-\int\limits_0^3\frac{x^2}{x+1}=9\ln 4-\int\limits_0^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$I_1=9\ln 4-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^3-\ln\ x+1\ \Big|_0^3=9\ln 4-\frac{3}{2}-\ln 4$

$I_1=16\ln 2-\frac{3}{2}.(1)$

$I_2=\int\limits_0^3 x\mathrm{d}\left(f(x)\right)=xf(x)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f(x)dx=3f(3)-\int\limits_0^3 f(x)dx=3-\int\limits_0^3 f(x)dx.(2)$

Từ (1),(2) ta có $16\ln 2-\frac{3}{2}+3-\int\limits_0^3 f(x)dx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f(x)dx=16\ln 2+\frac{3}{2}=\frac{32\ln 2+3}{2}$

$\Rightarrow a+b=32+3=35.$

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $\frac{7}{2}.$ **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}.$ **D.** $\frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(4-x)\mathrm{d}x=\frac{3x^3}{3}\Big|_1^2+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2==\frac{7}{2}.$$

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$. Khi đó $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ là:

A. $-\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $-\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)^2}{\left[f(x)\right]^4}=(x-1)^2$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được $\int\frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)^2}{\left[f(x)\right]^4}\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\int\frac{\left(1+2f(x)+\left[f(x)\right]^2\right)f'(x)}{\left[f(x)\right]^4}\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\left(\frac{1}{\left[f(x)\right]^4}+2\frac{1}{\left[f(x)\right]^3}+\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}\right)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{3\left[f(x)\right]^3}-\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}-\frac{1}{f(x)}=\frac{(x-1)^3}{3}+C\Leftrightarrow-\frac{1+3f(x)+3\left[f(x)\right]^2}{3\left[f(x)\right]^3}=\frac{(x-1)^3}{3}+C$$

Mà $f(1)=-1$ nên $-\frac{1-3+3}{-3}=C\Rightarrow C=\frac{1}{3}$.

Suy ra $-\frac{1+3f(x)+3\left[f(x)\right]^2}{3\left[f(x)\right]^3}=\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1+3f(x)+3\left[f(x)\right]^2}{3\left[f(x)\right]^3}+\frac{1}{3}=-\frac{(x-1)^3}{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1+f(x)\right)^3}{\left[f(x)\right]^3}=-(x-1)^3\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^3=(1-x)^3\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x}.$$

Vậy $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_1^3=-\ln 3$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\geq 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\mathrm{e}^x+m\right)=m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$ và $f(0)=m+1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ hay $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} 2x\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}\left(3+x^2\right)+\int\limits_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^{0}+\left(\mathrm{e}^x-x\right)\Big|_{0}^{1}=\mathrm{e}+2\sqrt{3}-\dfrac{22}{3}$.

Suy ra $a=1$, $b=2$, $c=-\dfrac{22}{3}$. Vậy tổng $a+b+3c=-19$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{8}\dfrac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\dfrac{f\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x$

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Xét $I_1=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=6$.

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\sin x.\cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó: $I_1=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{-2\sin x.\cos x}{\cos^2 x}f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{\frac{1}{4}}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{f(t)}{2t}\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{f(x)}{2x}\mathrm{d}x=6$.

Xét $I_2=\int\limits_{1}^{8}\dfrac{f\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=6$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=8\Rightarrow t=2\end{cases}$. Ta có $I_2=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{3t^2 f(t)}{t^3}\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int\limits_{1}^{2}\dfrac{f(x)}{2x}\mathrm{d}x=1$.

Xét tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\dfrac{f\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}\\ x=\sqrt{2}\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2xf\left(x^2\right)}{2x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(t\right)}{2t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{2x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{2x}\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\frac{f\left(x\right)}{2x}\mathrm{d}x=6+1=7$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$ và $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x),\forall x\in[1;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)dx$ bằng

A. $\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{4}$. **C.** $\ln 3$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

- Từ giả thiết, ta có $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x)\Rightarrow\frac{f(x)+xf'(x)}{[xf(x)]^2}=2x+1$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{xf(x)}\right]'=-2x-1\Rightarrow\frac{1}{xf(x)}=\int(-2x-1)dx\Rightarrow\frac{1}{xf(x)}=-x^2-x+C.$$

- $f(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow xf(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$

$$\Rightarrow\int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2\frac{-1}{x(x+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln\frac{x+1}{x}\Big|_1^2=\ln\frac{3}{4}.$$

Câu 64: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1\ khi\ x\geq 2\\ x^2-2x+3\ khi\ x<2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(2sinx+1\right)cosx\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

Đặt $t=2sinx+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos x\mathrm{d}x$, đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=3$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(2sinx+1\right)cosx\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f\left(t\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Mặt khác ta có, $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1\ khi\ x\geq 2\\ x^2-2x+3\ khi\ x<2\end{cases}$ nên

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\limits_1^2\left(x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{23}{6}.$$

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^2-x-2\right)=x+3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $I=\int_{-2}^{0} xf'(x)dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{-10}{3}$. **D.** $\frac{-46}{3}$.

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $f\left(x^2-x-2\right)=x+3\Rightarrow(2x-1)f\left(x^2-x-2\right)=(2x-1)(x+3)$

$\Rightarrow\int_0^2(2x-1)f\left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x=\int_0^2(2x-1)(x+3)\mathrm{d}x$.

+) Ta có $\int_0^2(2x-1)(x+3)dx=\int_0^2\left(2x^2+5x-3\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x\right)\Big|_0^2=\frac{28}{3}$.

+) Xét $\int_0^2(2x-1)f\left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=x^2-x-2\Rightarrow \mathrm{d}t=(2x-1)\mathrm{d}x$.

Với $x=0$ thì $t=-2$, với $x=2$ thì $t=0$.

Suy ra $\int_0^2(2x-1)f\left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\frac{28}{3}$.

Xét $I=\int_{-2}^{0}x.f'(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó $I=xf(x)\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=2f(-2)-\frac{28}{3}=2.3-\frac{28}{3}=-\frac{10}{3}$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+6x & khi\ x\ge 2\\ \frac{2}{2x-5} & khi\ x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx$ bằng

A. $15+\frac{1}{2}\ln 6$. **B.** $15-\frac{1}{5}\ln 6$. **C.** $15+\frac{1}{5}\ln 6$. **D.** $15-\frac{1}{2}\ln 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int_e^{e^2}\frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx$.

Đặt $u=\ln^2 x \Rightarrow du=\dfrac{2\ln x}{x}dx=\dfrac{2\ln^2 x}{x\ln x}dx=\dfrac{2u}{x\ln x}dx\Rightarrow \dfrac{dx}{x\ln x}=\dfrac{du}{2u}$.

Đổi cận : $\begin{cases} x=e\Rightarrow u=1 \\ x=e^2\Rightarrow u=4 \end{cases}$.

Khi đó

$$I=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f(u)}{u}du=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\left(\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx+\int_2^4\frac{f(x)}{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2\frac{2}{x(2x-5)}dx+\int_2^4\frac{3x^2+6x}{x}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\int_1^2\frac{2}{x(2x-5)}dx+\int_2^4(3x+6)dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\int_1^2\left(\frac{1}{2x-5}-\frac{1}{2x}\right)dx+\left(\frac{3x^2}{2}+6x\right)\Big|_2^4\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-5}{2x}\right|\Big|_1^2+30\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}(-\ln 6)+30\right]=15-\frac{1}{5}\ln 6$$

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4)=\dfrac{4}{3}$ và $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\right),\forall x>0$. Khi đó $\int_1^4 xf(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1283}{30}$. **B.** $-\dfrac{157}{30}$. **C.** $\dfrac{157}{30}$. **D.** $-\dfrac{1283}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\dfrac{1}{x}f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{1}{x}f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x+\sqrt{x}\Leftrightarrow (xf(x))'=x+\sqrt{x}$

$\Rightarrow xf(x)=\int\left(x+\sqrt{x}\right)dx=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

Do $f(4)=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 4.\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{2}4^2+\dfrac{2}{3}\sqrt{4^3}+C\Leftrightarrow C=-8$

$\Rightarrow xf(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-8$.

Vì vậy $\int_1^4 xf(x)dx==\int_1^4\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-8\right)dx=-\dfrac{157}{30}$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1)=3$ và $\dfrac{2f^2(x)}{x^2}-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{x^3}\right)f(x)+\dfrac{8}{x^4}=f'(x),\forall x>0$. Tính $\int_2^4 f(x)dx$

A. 6 – 2ln2. **B.** 6 + 4ln2. **C.** 6 + 2ln2. **D.** 8 + 4ln2.

Lời giải

Chọn C

Giả thiết: $\frac{2f^2(x)}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^3}\right)f(x)+\frac{8}{x^4}=f'(x),\forall x>0$

$\Leftrightarrow 2x^2f^2(x)-x^3f(x)-8xf(x)+8=x^4f'(x)$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2f^2(x)-4xf(x)+4\right)=x^3\left[xf'(x)+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2\left[xf(x)-2\right]^2=x^3\left[xf(x)\right]'\Leftrightarrow\frac{2}{x^3}=\frac{\left[xf(x)-2\right]'}{\left[xf(x)-2\right]^2}$

Do đó $\int\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{\left[xf(x)-2\right]'}{\left[xf(x)-2\right]^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}+C=-\frac{1}{xf(x)-2}$ **(*)**

Thay $x=1$ vào hệ thức **(*)**, ta được: $-1+C=-\frac{1}{f(3)-2}\Leftrightarrow C=0$.

$\Rightarrow-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{xf(x)-2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{x}$.

Vậy $\int\limits_2^4 f(x)dx=\int\limits_2^4\frac{x^2+2}{x}dx=\left(\frac{x^2}{2}+2\ln|x|\right)\Big|_2^4=6+2\ln 2$.

DẠNG 8 Tính tích phân bằng phương pháp vi phân

Câu 1: Nếu $\int_3^5 2f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_1^2 f(2x+1)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{7}{45}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$. **D.** $I = \frac{15}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thõa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = x + \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6\mathrm{e}+13}{6}$. **B.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{6}$. **C.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{3}$. **D.** $\frac{6\mathrm{e}+19}{6}$.

Câu 4: Tích phân $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = e^{-x}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2e} + e - 2$. **B.** $\frac{1}{2e} + e - \frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{e} + e - \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2e} + e - 1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1$, $f'(x) - x.f(x) = x.e^{x^2}, \forall x$. Tích phân $\int_0^1 xf\left(\sqrt{x+1}\right)dx$ bằng

A. $e^2 - e$. **B.** $4\sqrt{e} - 2e$. **C.** 1. **D.** e.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = -e$. **B.** $f(1) = \frac{1}{e}$. **C.** $f(1) = -\frac{2}{e}$. **D.** $f(1) = \frac{2}{e}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1) \neq \frac{1}{2}, f(x) \neq 0$ với $\forall x \neq 1$, $(x-1).f'(x) + f(x) = 2f(x).f'(x)$ với $\forall x \in [0;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 9: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x = a\pi^2 + b\ln\frac{\pi}{2} + c$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Tính giá trị biểu thức $T = 8a+b+c$?

A. 8. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoả mãn $f(1)=0$, $f(x)\neq\frac{1}{x}$ và $x^2 f^2(x)-(2x+1)f(x)=xf'(x)-1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln 2-\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $I=-\ln 2+\frac{1}{2}$. **D.** $I=\ln 2+\frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=e^{2020x}$ và $f(0)=\frac{1}{2021}$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{e^{2021}}{2020}$. **B.** $\frac{1}{2}.\frac{e^{2020}}{2020}$. **C.** $\frac{1}{2}.\frac{e^{2020}}{2021}$. **D.** $\frac{e^{2020}}{2021}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn: $x^2.f'(x)+f(x)=2x^3+x^2$, $\forall x>0$. Biết rằng $f(1)=0$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{4}-\mathrm{e}$.

Câu 13: Cho hàm số $F(x)=f(x)\sin x+2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x).\cos x$ với $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)\right]^2(\cos x-\sin x)dx$

A. $\sqrt{e}-1$. **B.** $2e+1$. **C.** $\frac{e^2-2}{4}$. **D.** $\frac{3e-4}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ (a,b\in\mathbb{Z})$. Tính tổng $S=a+b^2$

A. $S=4$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Nếu $\int\limits_3^5 2f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}\left(2x+1\right)=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$

Câu 2: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{45}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}+\frac{9}{20}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos^5 x}=\frac{1}{4\cos^4 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\left(2^4-1\right)=\frac{15}{4}.$

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thõa mãn $f\left(0\right)=4$ và $f'\left(x\right)=x+\mathrm{e}^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6\mathrm{e}+13}{6}$. **B.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{6}$. **C.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{3}$. **D.** $\frac{6\mathrm{e}+19}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$.

Nếu: $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$ và $f\left(0\right)=4$ thì: $1+C=4\Leftrightarrow C=3$.

Vậy: $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+3\right)\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{6}x^3+3x\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{13}{6}=\frac{6\mathrm{e}+13}{6}.$

Câu 4: Tích phân $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_e^{e^2}\ln x\,\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2\Big|_e^{e^2}=\frac{3}{2}.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)-f(x)=e^{-x}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2e}+e-2$. **B.** $\frac{1}{2e}+e-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{e}+e-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2e}+e-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)-f(x)=e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-2x}\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=e^{-2x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\int\left(e^{-x}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int e^{-2x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=\frac{-1}{2}e^{-2x}+C$.

Với $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow e^0 f(0)=\frac{-1}{2}e^0+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=1$ nên $f(x)=\frac{-1}{2}e^{-x}+\frac{1}{e^{-x}}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{-1}{2}e^{-x}+\frac{1}{e^{-x}}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}e^{-x}+e^{x}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2e}+e\right)-\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2e}+e-\frac{3}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1,\ f'(x)-x.f(x)=x.e^{x^2},\forall x.$ Tích phân $\int_0^1 xf\left(\sqrt{x+1}\right)dx$ bằng

A. e^2-e. **B.** $4\sqrt{e}-2e$. **C.** 1. **D.** e.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)-xf(x)=xe^{x^2},\forall x\Leftrightarrow f'(x)e^{-x^2/2}-f(x)xe^{-x^2/2}=xe^{x^2/2},\forall x$

$\Leftrightarrow\left(f(x)e^{-x^2/2}\right)'=xe^{x^2/2},\forall x\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2/2}=\int xe^{x^2/2}\mathrm{d}x,\forall x$

$\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2/2}=e^{x^2/2}+C,\forall x\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}+Ce^{x^2/2},\forall x$

Vì $f(0)=1$ nên ta có $C=0$. Do đó, $f(x)=e^{x^2},\forall x.$

Vì thế $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1})\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}\left(e^{x+1}\right)=xe^{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{x+1}\mathrm{d}x=e.$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=-e.$ **B.** $f(1)=\frac{1}{e}.$ **C.** $f(1)=-\frac{2}{e}.$ **D.** $f(1)=\frac{2}{e}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)+x.f(x)=2x.e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x^2}.f'(x)+x.e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)=2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (ta nhân hai vế cho $e^{\frac{1}{2}x^2}$)

$\Leftrightarrow\left(e^{\frac{1}{2}x^2}.f(x)\right)'=2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)=\int 2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=-2\int e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}.\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2e^{-\frac{1}{2}x^2}+C.$

$f(0)=-2 \Leftrightarrow e^0.f(0)=-2.e^0+C \Rightarrow C=0$.

Khi đó $f(x)=-2e^{-x^2} \Rightarrow f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\frac{1}{2}, f(x)\neq 0$ với $\forall x\neq 1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$, cho $x=1$, ta có

$f(1)=2f(1).f'(1) \Leftrightarrow f(1).\left[1-2f'(1)\right]=0 \Rightarrow f(1)=0$.

Mặt khác, $\forall x\in[0;2]$, ta có

$(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x) \Leftrightarrow \left[(x-1).f(x)\right]'=\left[f^2(x)\right]' \Rightarrow (x-1).f(x)=f^2(x)+C$

Thay $x=1$, ta suy ra $f^2(1)+C=0 \Leftrightarrow C=0$.

Do đó, ta được $(x-1).f(x)=f^2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=x-1. \end{array}\right.$

Vì $f(x)\neq 0, \forall x\neq 1$ nên ta suy ra được $f(x)=x-1$.

Khi đó, $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (x-1)\,dx=\frac{1}{2}$.

Câu 9: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=a\pi^2+b\ln\frac{\pi}{2}+c$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Tính giá trị biểu thức $T=8a+b+c$?

A. 8. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+x\cos x-x\cos x+1-\cos^2 x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x(x+\cos x)-\cos x(x+\cos x)+1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\cos x+\frac{1-\sin x}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\cos x+\frac{1-\sin x}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\cos x+\frac{(x+\cos x)'}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi^2}{8}-1+\ln\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}+\ln\frac{\pi}{2}+(-1)$.

Do đó $a=\frac{1}{8};b=1;c=-1$. Suy ra $T=8a+b+c=8.\left(\frac{1}{8}\right)+1+\left(-1\right)=1$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoả mãn $f\left(1\right)=0$, $f\left(x\right)\neq\frac{1}{x}$ và $x^2f^2\left(x\right)-\left(2x+1\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln 2-\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $I=-\ln 2+\frac{1}{2}$. **D.** $I=\ln 2+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2f^2\left(x\right)-\left(2x+1\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-1$

$\Leftrightarrow\left[xf\left(x\right)\right]^2-2xf\left(x\right)+1=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)$

$\Leftrightarrow\left[xf\left(x\right)-1\right]^2=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=\left[xf\left(x\right)-\right]'$

$\Rightarrow\frac{\left[xf\left(x\right)-1\right]'}{\left[xf\left(x\right)-1\right]^2}=1\Rightarrow\int\mathrm{d}x=\int\frac{d\left[xf\left(x\right)-1\right]}{\left[xf\left(x\right)-1\right]^2}=-\frac{1}{xf\left(x\right)-1}+C$

$\Rightarrow x=\frac{1}{1-xf\left(x\right)}+C$ với $f\left(1\right)=0$, $f\left(x\right)\neq\frac{1}{x}$, suy ra $C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

Khi đó $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=e^{2020x}$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2021}$. Tính $f\left(1\right)$.

A. $\frac{e^{2021}}{2020}$. **B.** $\frac{1}{2}.\frac{e^{2020}}{2020}$. **C.** $\frac{1}{2}.\frac{e^{2020}}{2021}$. **D.** $\frac{e^{2020}}{2021}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=e^{2020x}\Leftrightarrow\left(x+2\right)f\left(x\right)e^x+\left(x+1\right)f'\left(x\right).e^x=e^{2021x}$

$\Leftrightarrow\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)e^x\right]'=e^{2021x}\Leftrightarrow\left(x+1\right)f\left(x\right)e^x=\int e^{2021x}\mathrm{d}x=\frac{e^{2021x}}{2021}+C$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=\frac{1}{2021}+C$ mà $f\left(0\right)=\frac{1}{2021}\Rightarrow C=0$.

Khi đó $\left(x+1\right)f\left(x\right)e^x=\frac{e^{2021x}}{2021}\Rightarrow f\left(1\right)=\frac{1}{2}.\frac{e^{2020}}{2021}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn: $x^2.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=2x^3+x^2$, $\forall x>0$. Biết rằng $f\left(1\right)=0$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{4}-\mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $x^2.f'(x)+f(x)=2x^3+x^2 \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{x}}.f'(x)+\frac{1}{x^2}.e^{\frac{-1}{x}}.f(x)=(2x+1).e^{\frac{-1}{x}}$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{-1}{x}}.f(x)\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x+1).e^{\frac{-1}{x}}dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right).e^x dx=I$

Đặt $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)dx, v=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} \end{cases}$, khi đó: $I=\left(\frac{2}{e}-\frac{3}{4e^2}\right)+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}.e^x dx-\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}.e^x dx$.

Đặt $I'=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}.e^x dx$, đặt $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\frac{1}{x^2}dx, v=\frac{-1}{x^2} \end{cases}$, khi đó: $I'=\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}.e^x dx$.

Suy ra: $I=\frac{1}{e}-\frac{1}{4e^2}=\left(e^{\frac{-1}{x}}.f(x)\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{-1}{e^2}.f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-e$

Câu 13: Cho hàm số $F(x)=f(x)\sin x+2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x).\cos x$ với $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $f(0)=1$. Tính $I=\int_0^{\frac{1}{2}}[f(x)]^2(\cos x-\sin x)dx$

A. $\sqrt{e}-1$. **B.** $2e+1$. **C.** $\frac{e^2-2}{4}$. **D.** $\frac{3e-4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $F(x)=f(x)\sin x+2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x).\cos x$ nên ta có

$F'(x)=[f(x)\sin x+2020]'=f'(x)\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x)\sin x+f(x)\cos x=f'(x)\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x)(\cos x-\sin x)=f(x)\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$

$\Leftrightarrow \ln(|f(x)|)=\int\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x+\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{(\cos x-\sin x)'}{\cos x-\sin x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\ln(|\cos x-\sin x|)\right)+C$

Vì $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ nên $\ln(|f(x)|)=\frac{1}{2}(x-\ln(\cos x-\sin x))+C$.

Do $f(0)=1$ nên $C=0$.

Vậy $\ln(|f(x)|)=\frac{1}{2}[x-\ln(\cos x-\sin x)] \Leftrightarrow \ln[f(x)]^2=x-\ln(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow \left[f\left(x\right)\right]^2 \left(\cos x-\sin x\right)=e^x$.

$I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)\right]^2 \left(\cos x-\sin x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}e^x dx=\sqrt{e}-1$.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$, $f\left(x\right)\neq 0$ với mọi $x\in\left[1;3\right]$, đồng thời $f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2=\left[\left(f\left(x\right)\right)^2\left(x-1\right)\right]^2$ và $f\left(1\right)=-1$. Biết rằng $\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ \left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$. Tính tổng $S=a+b^2$

A. $S=4$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn D

Xét trên đoạn $\left[1;3\right]$, ta có:

$$f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2=\left[\left(f\left(x\right)\right)^2\left(x-1\right)\right]^2\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2}{f^4\left(x\right)}=\left(x-1\right)^2$$

$$\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2}{f^4\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\left(x-1\right)^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\left[\frac{1}{f^4\left(x\right)}+\frac{2}{f^3\left(x\right)}+\frac{1}{f^2\left(x\right)}\right]\mathrm{d}f\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{3f^3\left(x\right)}-\frac{1}{f^2\left(x\right)}-\frac{1}{f\left(x\right)}=\frac{\left(x-1\right)^3}{3}+C$$

Theo giả thiết: $f\left(1\right)=-1$ nên ta có: $-\frac{1}{3f^3\left(1\right)}-\frac{1}{f^2\left(1\right)}-\frac{1}{f\left(1\right)}=\frac{\left(1-1\right)^3}{3}+C\Rightarrow C=\frac{1}{3}$

Khi đó:

$$\Rightarrow-\frac{1}{3f^3\left(x\right)}-\frac{1}{f^2\left(x\right)}-\frac{1}{f\left(x\right)}=\frac{\left(x-1\right)^3}{3}+\frac{1}{3}\Leftrightarrow-\frac{1}{3f^3\left(x\right)}-\frac{1}{f^2\left(x\right)}-\frac{1}{f\left(x\right)}=\frac{x^3}{3}-x^2+x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{f\left(x\right)}\right]^3-\left[-\frac{1}{f\left(x\right)}\right]^2+\left[-\frac{1}{f\left(x\right)}\right]=\frac{x^3}{3}-x^2+x$$

Xét hàm số $g\left(t\right)=\frac{t^3}{3}-t^2+t,t\in\mathbb{R}$ có $g'\left(t\right)=t^2-2t+1=\left(t-1\right)^2\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$.

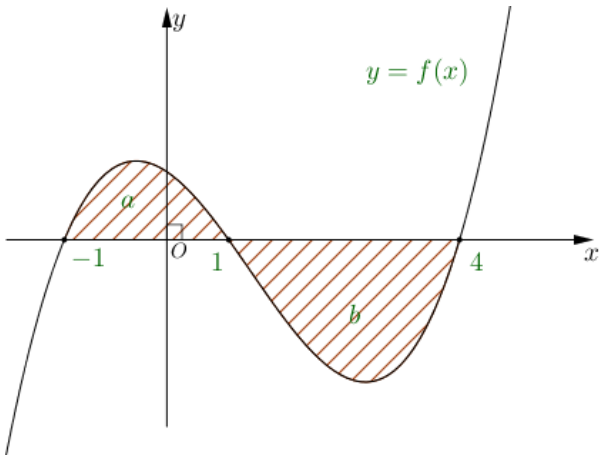
Suy ra $g\left(t\right)$ là hàm số đồng biến $\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\left(**\right)\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{f\left(x\right)}\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow-\frac{1}{f\left(x\right)}=x\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{x}$

$$-\int\limits_1^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln\left|x\right|\Big|_1^3=-\ln 3\Rightarrow a=-1,b=0\Rightarrow S=-1.$$

DẠNG 9 Tính tích phân dựa vào đồ thị

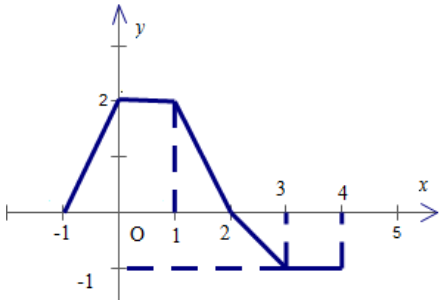
Câu 1: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích các miền phẳng A, B lần lượt bằng a và b. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f\ 5\sin x-1\ dx$.

A. $\frac{a+b}{5}$. **B.** $\frac{-a-b}{5}$. **C.** $\frac{a-b}{5}$. **D.** $\frac{b-a}{5}$.

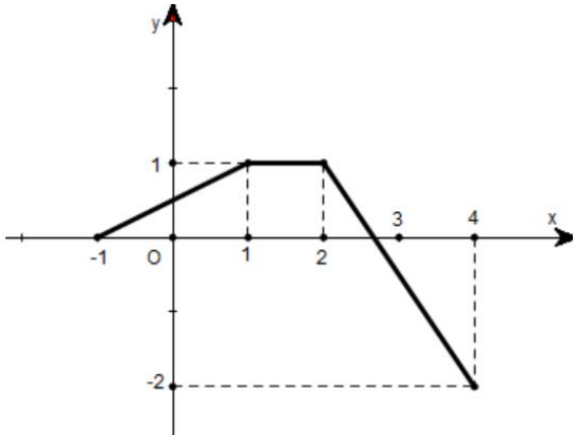
Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ với $-1\le x\le 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I=\int_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $5{,}5$. **D.** $2{,}5$.

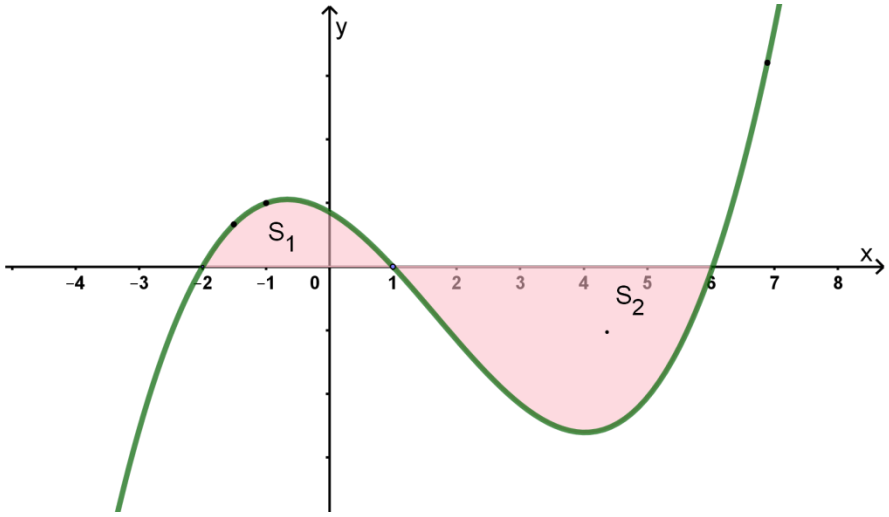
Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường gấp khúc như hình vẽ.



Giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{4}(2f(x)+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 17. **B.** 21. **C.** $\frac{67}{3}$. **D.** 8.

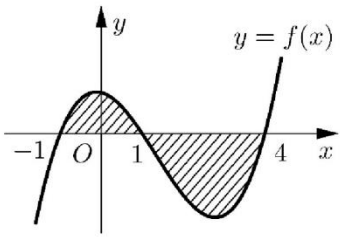
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hai phần tô màu lần lượt là $S_1=\frac{5}{2}, S_2=\frac{13}{2}$



Giá trị của biểu thức $\left|\int_{-2}^{6}f(x)\mathrm{d}x\right|$ bằng

A. $\left|\int_{-2}^{6}f(x)\mathrm{d}x\right|=9$. **B.** $\left|\int_{-2}^{6}f(x)\mathrm{d}x\right|=4$. **C.** $\left|\int_{-2}^{6}f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{17}{2}$. **D.** $\left|\int_{-2}^{6}f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{7}{2}$.

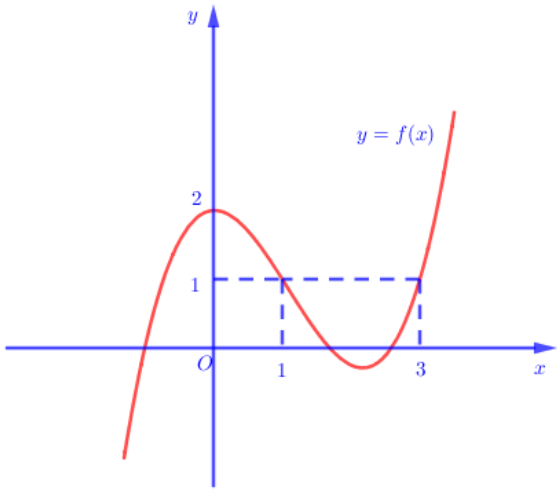
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi s là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

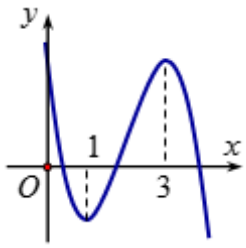
Câu 6: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó $\int_0^1 xf\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

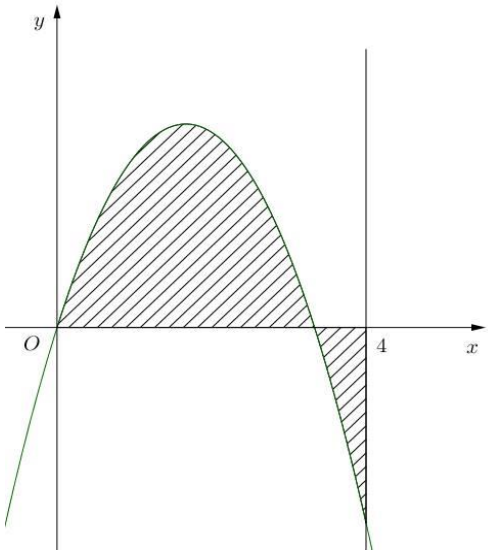
A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\int_{-1}^{4} f''\left(x\right)\mathrm{d}x=60$. Giá trị của $f\left(2\right)-f\left(-3\right)$ là



A. -445. **B.** 445. **C.** -440. **D.** 440.

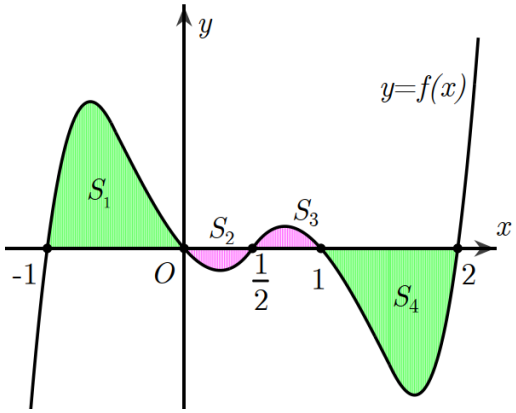
Câu 8: Cho hàm số $y=mx-x^2$ $\left(0<m<4\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi S_1+S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=4$ **(phần tô đậm trong hình vẽ bên)**.



Giá trị của m sao cho $S_1 = S_2$ là

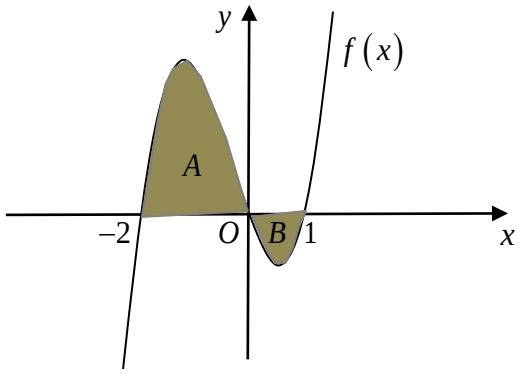
A. $m = \dfrac{10}{3}$. **B.** $m = \dfrac{8}{3}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị tạo với trục hoành các miền có diện tích S_1, S_2, S_3, S_4 (**như hình vẽ**) và $S_1 = S_4 = 10$, $S_2 = S_3 = 8$. Biết tích phân $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{e^4}}^{e^2} \frac{f(3\ln x - 4) + 1}{x}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}; \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tích ab?



A. 31. **B.** 84. **C.** −84. **D.** −24.

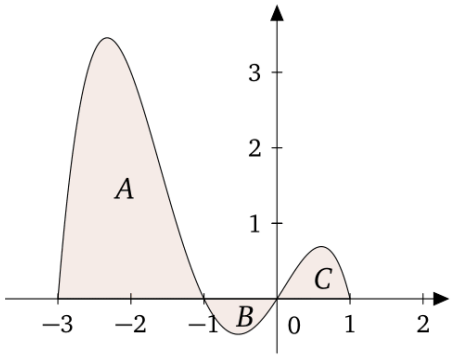
Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 12 và 2.



Giá trị của $I = \displaystyle\int_{-1}^{-\frac{2}{5}} f(5x+3)\mathrm{d}x$ bằng

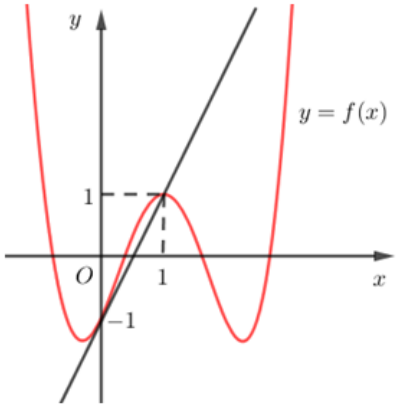
A. 2. **B.** 10. **C.** 50. **D.** $\dfrac{14}{5}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;1]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Biết diện tích các hình A, B, C lần lượt là 27, 2 và 3. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 (x^3 + x) f'(x^2 - 3)\mathrm{d}x$.



A. -14. **B.** -32. **C.** 32. **D.** 28.

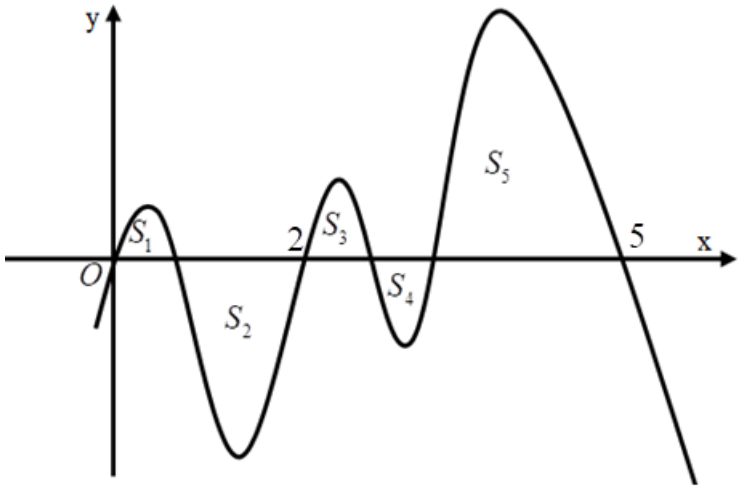
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x\left[f\left(x^3\right)-2\right]+f''\left(x^2\right)=x^3-3x^2-1$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x=0$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

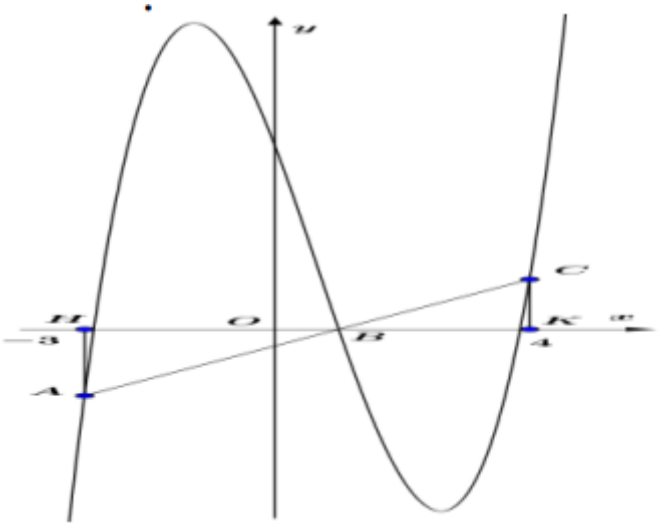
A. $-\frac{17}{30}$. **B.** $-\frac{27}{10}$. **C.** $\frac{37}{20}$. **D.** $\frac{47}{15}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và diện tích các hình phẳng trong hình bên là $S_1=3$, $S_2=10$, $S_3=5$, $S_4=6$, $S_5=16$.tính tích phân $\int_{-3}^{4} f(|x+1|)\mathrm{d}x$.



A. 1. **B.** 53. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 14: Cho đồ thị hàm bậc ba $y=f\left(2x\right)=ax^3+bx^2-10x+d$ và đường thẳng $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại 3 điểm A,B,C. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A và C lên Ox như hình vẽ.

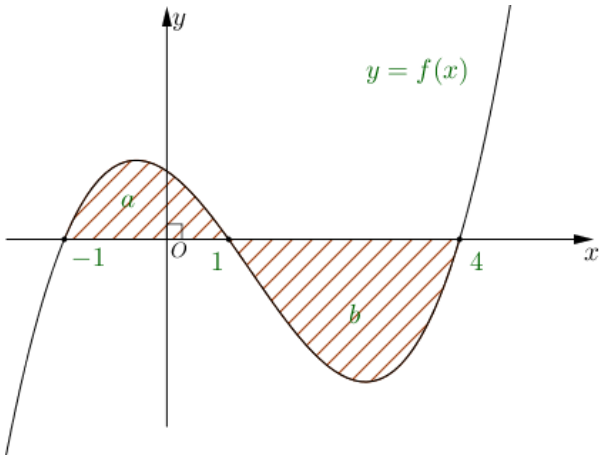


Biết diện tích tam giác ABH và BCK lần lượt là 8 và $\frac{9}{2}$. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f\left(x\right)dx$ bằng

A. 21. **B.** 72. **C.** 57. **D.** 13.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích các miền phẳng A, B lần lượt bằng a và b. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f\ 5\sin x-1\ dx$.

A. $\frac{a+b}{5}$. **B.** $\frac{-a-b}{5}$. **C.** $\frac{a-b}{5}$. **D.** $\frac{b-a}{5}$.

Lời giải

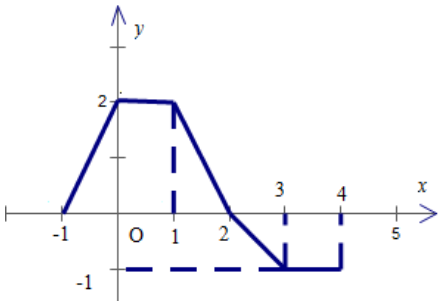
Chọn C

Đặt $t=5\sin x-1\Rightarrow dt=5\cos xdx\Leftrightarrow \cos xdx=\frac{dt}{5}$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-1,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=4$.

Suy ra $I=\int_{-1}^{4}\frac{1}{5}f\ t\ dt=\frac{1}{5}\left(\int_{-1}^{1}f\ t\ dt+\int_{1}^{4}f\ t\ dt\right)=\frac{a-b}{5}$

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ với $-1\le x\le 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



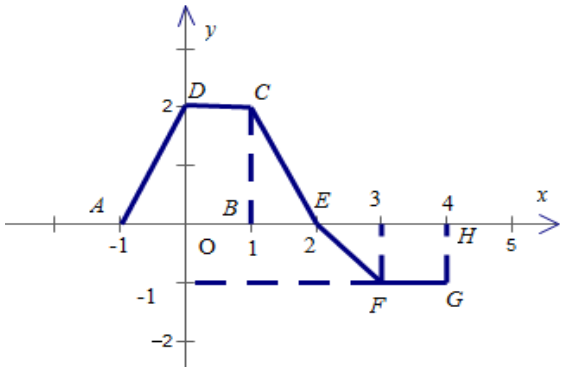
Tích phân $I=\int_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $5{,}5$. **D.** $2{,}5$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Phương Thảo; GVPB: Phạm Hiền

Chọn D



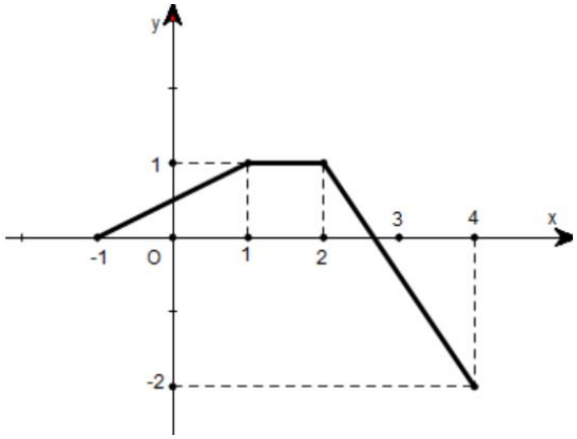
Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Trong đó: $\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=S_{ABCD}=\frac{1}{2}.\left(1+2\right).2=3.$

$\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=S_{BCE}=\frac{1}{2}.1.2=1;\ \int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-S_{EFGH}=-\frac{1}{2}\left(1+2\right).1=-\frac{3}{2}.$

Vậy $I=\int\limits_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+1-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường gấp khúc như hình vẽ.



Giá trị của tích phân $I=\int_{-1}^{4}(2f(x)+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 17. **B.** 21. **C.** $\frac{67}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

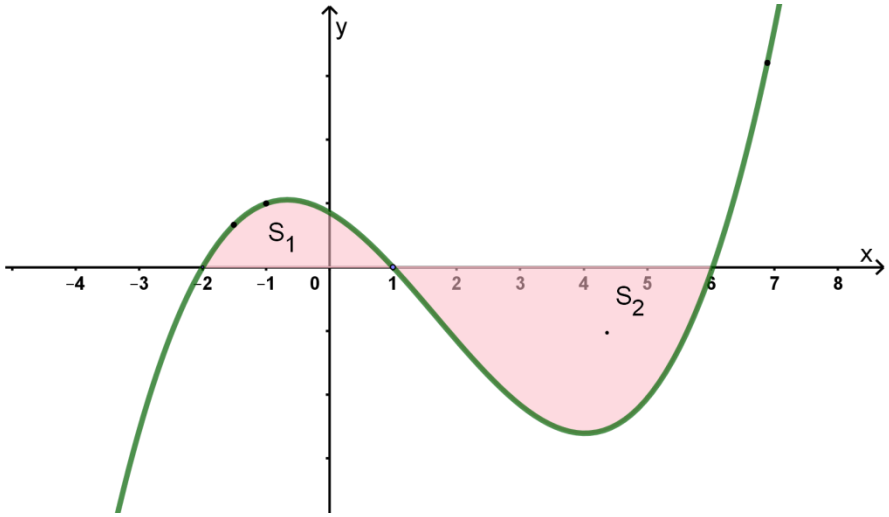
Chọn A

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & \text{khi } -1\le x\le 1\\ 1 & \text{khi } 1<x\le 2\\ -\frac{3}{2}x+4 & \text{khi } 2<x\le 4\end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}1\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}\left(\frac{-3}{2}x+4\right)\mathrm{d}x=1+1-1=1.$

Khi đó $I=\int_{-1}^{4}(2f(x)+3)\mathrm{d}x=2\int\limits_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{4}3\mathrm{d}x=2+15=17$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hai phần tô màu lần lượt là $S_1=\frac{5}{2}$, $S_2=\frac{13}{2}$



Giá trị của biểu thức $\left|\int_{-2}^{6} f(x)\mathrm{d}x\right|$ bằng

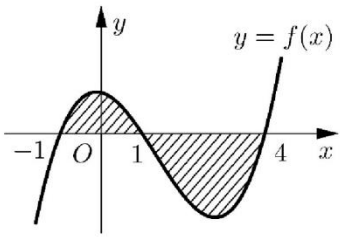
A. $\left|\int_{-2}^{6} f(x)\mathrm{d}x\right|=9$. **B.** $\left|\int_{-2}^{6} f(x)\mathrm{d}x\right|=4$. **C.** $\left|\int_{-2}^{6} f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{17}{2}$. **D.** $\left|\int_{-2}^{6} f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left|\int_{-2}^{6} f(x)\right|=\left|\int_{-2}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{6} f(x)dx\right|=|S_1-S_2|=4$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi s là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

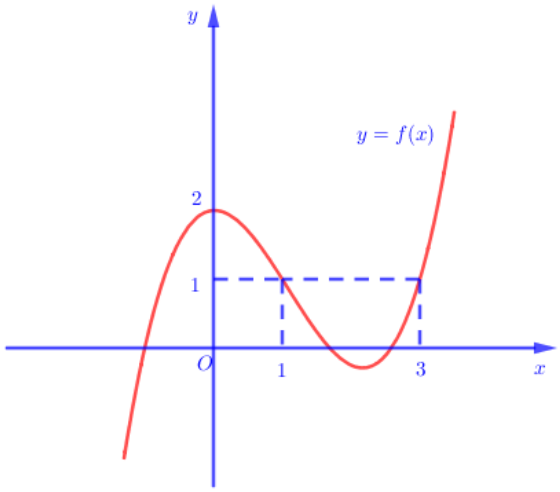
Lời giải

Chọn B

Ta có: hàm số $y=f(x)\geq 0\forall x\in[-1;1]$; $f(x)\leq 0\forall x\in[1;4]$, nên:

$S=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó $\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

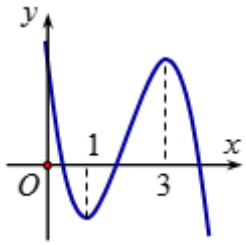
Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2),(1;1)$ và điểm $(3;1)$ nên $\begin{cases} d=2 \\ a+b+c+d=1 \\ 27a+9b+3c+d=1 \end{cases}$.

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, do điểm $x=0$ là cực trị của hàm số nên $f'(0)=0\Rightarrow c=0$.

Giải hệ 4 phương trình 4 ẩn ở trên ta thu được $\begin{cases} a=\frac{4}{9} \\ b=-\frac{13}{9} \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$. Suy ra $f(x)=\frac{4}{9}x^3-\frac{13}{9}x^2+2$.

Khi đó $\int_0^1 xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{13}{9}x^2+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{26}{9}x\right)\mathrm{d}x=-\frac{7442}{8505}\approx -0,875\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\int_{-1}^{4} f''(x)\mathrm{d}x=60$. Giá trị của $f(2)-f(-3)$ là



A. -445. **B.** 445. **C.** -440. **D.** 440.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3, có đồ thị như hình vẽ nên hàm số đạt cực trị tại hai điểm $x=1; x=3$.

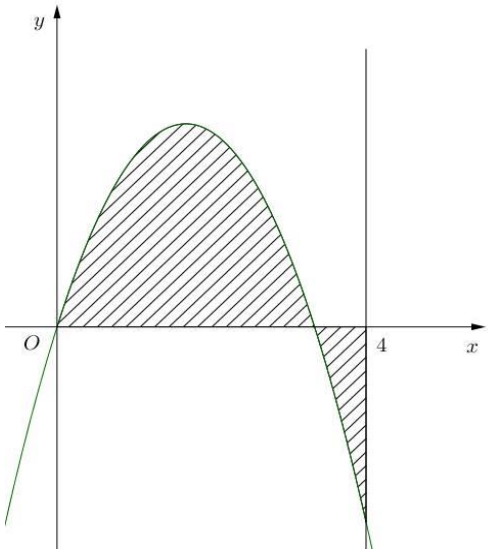
Nên $f'(x)=a(x-1)(x-3)=a\left(x^2-4x+3\right)$.

Lại theo bài ra $\int\limits_{-1}^{4} f''(x)\mathrm{d}x=60 \Rightarrow f'(4)-f'(-1)=60 \Leftrightarrow -5a=60 \Leftrightarrow a=-12$.

Do đó $f'(x)=-12\left(x^2-4x+3\right) \Rightarrow f(x)=-12\int\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x=-4x^3+24x^2-36x+C$.

$\Rightarrow f(2)-f(-3)=(-8+C)-(432+C)=-440$.

Câu 8: Cho hàm số $y=mx-x^2\ (0<m<4)$ có đồ thị là (C). Gọi S_1+S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=4$ **(phần tô đậm trong hình vẽ bên)**.

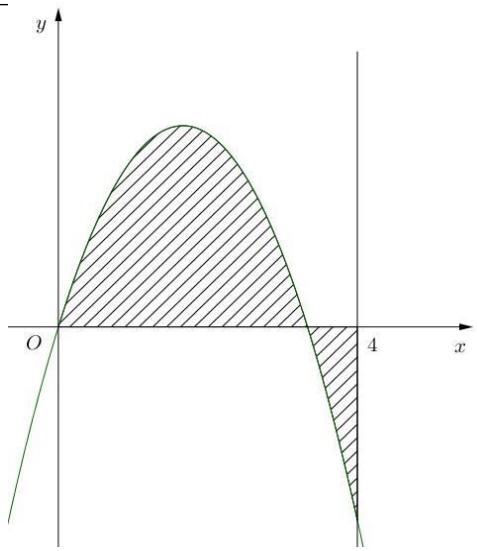


Giá trị của m sao cho $S_1=S_2$ là

A. $m=\dfrac{10}{3}$. **B.** $m=\dfrac{8}{3}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn B



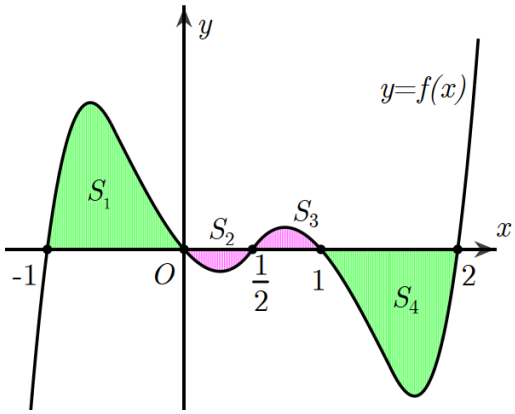
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là: $x^2-mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\end{array}\right.(0<m<4)$.

Ta có $S_1=\int\limits_0^m\left|mx-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^m\left(mx-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(m\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^m=\dfrac{m^3}{6}$.

$S_2=\int\limits_m^4\left|mx-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_m^4\left(x^2-mx\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}-m\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_m^4=\dfrac{64}{3}-8m+\dfrac{m^3}{6}$.

Khi đó: $S_1=S_2\Leftrightarrow\dfrac{m^3}{6}=\dfrac{m^3}{6}-8m+\dfrac{64}{3}=0\Leftrightarrow 8m-\dfrac{64}{3}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{8}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị tạo với trục hoành các miền có diện tích S_1,S_2,S_3,S_4 **(như hình vẽ)** và $S_1=S_4=10$, $S_2=S_3=8$. Biết tích phân $\int\limits_{\sqrt[3]{\mathrm{e}^4}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{f\left(3\ln x-4\right)+1}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z};\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tích ab?



A. 31. **B.** 84. **C.** −84. **D.** −24.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_{\sqrt[3]{\mathrm{e}^4}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{f\left(3\ln x-4\right)+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\sqrt[3]{\mathrm{e}^4}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{f\left(3\ln x-4\right)}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{\sqrt[3]{\mathrm{e}^4}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=J+\dfrac{2}{3}$.

Xét $J=\int\limits_{\sqrt[3]{e^4}}^{e^2}\frac{f\left(3\ln x-4\right)}{x}\mathrm{d}x$

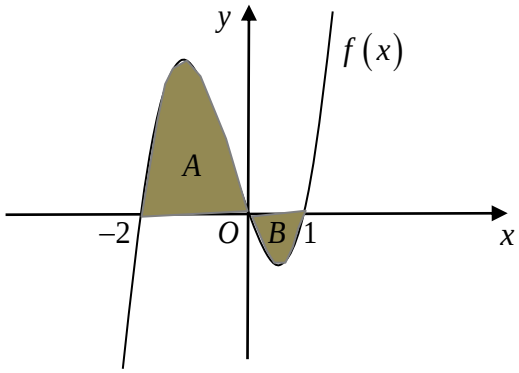
Đặt $t=3\ln x-4\Rightarrow \mathrm{d}t=3\frac{\mathrm{d}x}{x}$; đổi cận $\begin{cases}x=e^2\\ x=\sqrt[3]{e^4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=2\\ t=0\end{cases}$. Khi đó

$$J=\frac{1}{3}\int\limits_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-S_2+S_3-S_4\right)=-\frac{10}{3}.$$

Do đó $I=-\frac{10}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}=\frac{a}{b}\Rightarrow a.b=-24$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A,B lần lượt bằng 12 và 2.



Giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{-\frac{2}{5}} f\left(5x+3\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** 50. **D.** $\frac{14}{5}$.

Lời giải

Chọn B

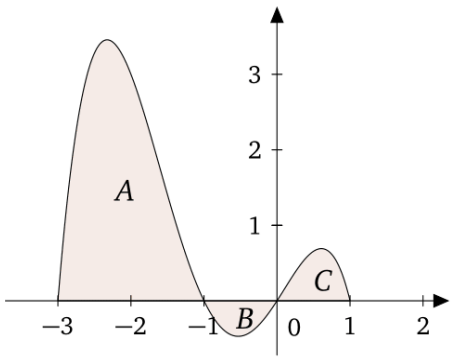
Dựa vào đồ thị ta có: $A=\int\limits_{-2}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=12; B=\int\limits_{0}^{1}-f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\Rightarrow\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2.$

Xét $I=\int\limits_{-1}^{-\frac{2}{5}} f\left(5x+3\right)dx$. Đặt $t=5x+3\Rightarrow dx=\frac{1}{5}dt.$

Ta có $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=-2\\ x=-\frac{2}{5}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_{-2}^{1} f\left(t\right).\frac{1}{5}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left[\int\limits_{-2}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x\right]=2$.

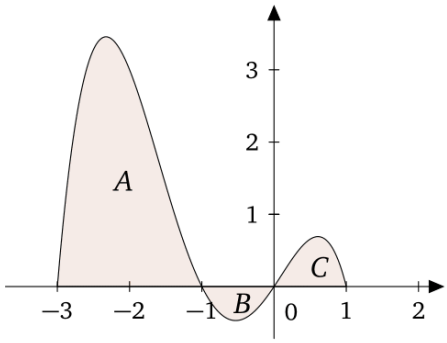
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;1]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Biết diện tích các hình A,B,C lần lượt là 27, 2 và 3. Tính tích phân $I=\int_0^2 (x^3+x)f'(x^2-3)\mathrm{d}x$.



A. -14. **B.** -32. **C.** 32. **D.** 28.

Lời giải

Chọn A



◆ Đặt $t=x^2-3\Rightarrow 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

◆ Suy ra

$I=\int_0^2 (x^3+x)f'(x^2-3)\,\mathrm{d}x \quad =\frac{1}{2}\int_0^2 2x(x^2-3+4)f'(x^2-3)\,\mathrm{d}x \quad =\frac{1}{2}\int_{-3}^1 (t+4)f'(t)\,\mathrm{d}t$

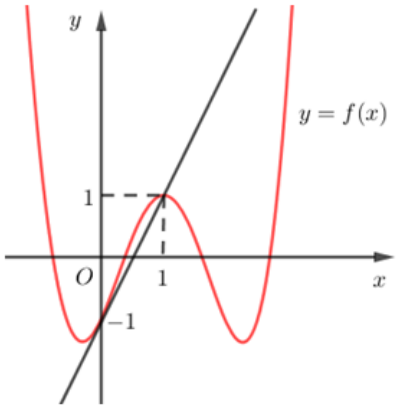
$\Rightarrow 2I=\int_{-3}^1 (x+4)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

◆ Đặt $\begin{cases} u=x+4 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

◆ Ta có $2I=\int_{-3}^1 (x+4)f'(x)\,\mathrm{d}x=(x+4)f(x)\big|_{-3}^1-\int_{-3}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-3}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

$=-\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-27+2-3=-28\Rightarrow I=-14.$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x\left[f(x^3)-2\right]+f''(x^2)=x^3-3x^2-1$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x=0$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{17}{30}$. **B.** $-\frac{27}{10}$. **C.** $\frac{37}{20}$. **D.** $\frac{47}{15}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có:

$x\left[f\left(x^3\right)-2\right]+f''\left(x^2\right)=x^3-3x^2-1$

$\Rightarrow x^2 f\left(x^3\right)-2x^2+xf''\left(x^2\right)=x^4-3x^3-x$

$\Rightarrow x^2 f\left(x^3\right)+xf''\left(x^2\right)=x^4-3x^3+2x^2-x$

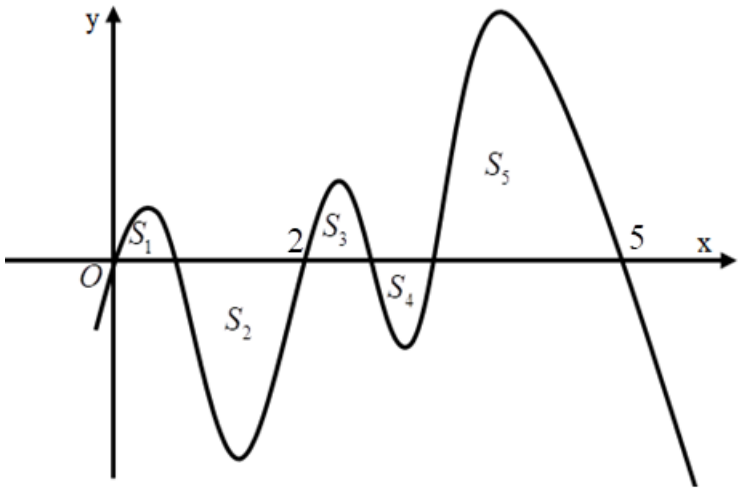
Lấy tích phân hai vế ta được

$\int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf''\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^4-3x^3+2x^2-x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)=-\frac{23}{60}$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{23}{60}-\frac{1}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right)=\frac{37}{60}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{37}{20}$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và diện tích các hình phẳng trong hình bên là $S_1=3$, $S_2=10$, $S_3=5$, $S_4=6$, $S_5=16$.tính tích phân $\int_{-3}^{4} f(|x+1|)\mathrm{d}x$.

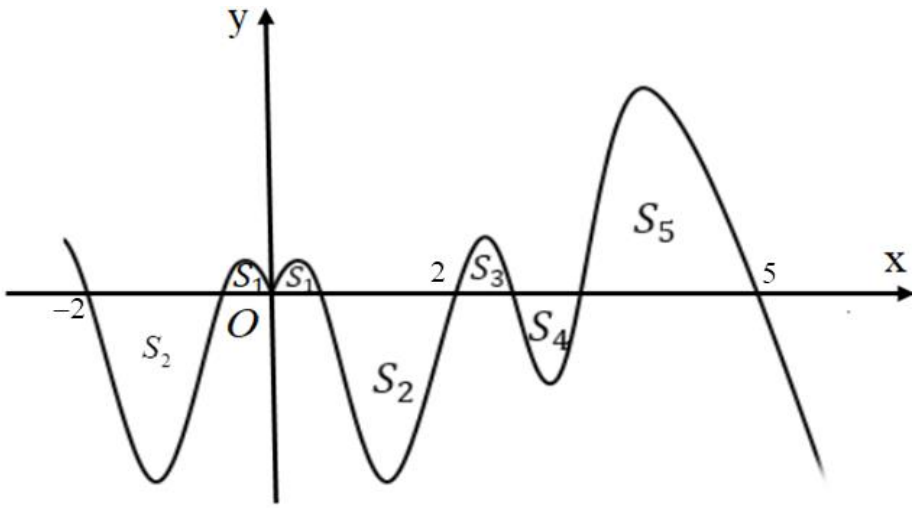


A. 1. **B.** 53. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

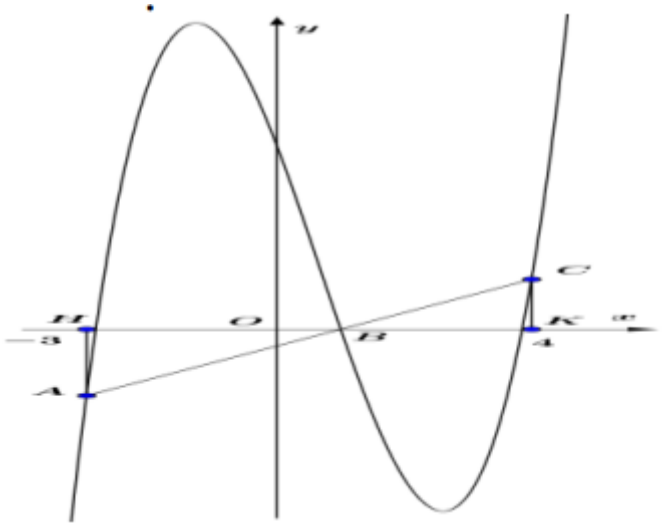
Chọn A

Đặt $t=x+1$, ta có tích phân $\int_{-2}^{5} f(|t|)\mathrm{d}t$. Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ trên $[-2;5]$ (lấy đối xứng phần bên phải Oy qua Oy, vì đây là hàm chẵn)



Vậy: $\int_{-2}^{5} f\left(|t|\right)dt=\int_{-2}^{5} f\left(|x|\right)dx=-S_2+S_1+S_1-S_2+S_3-S_4+S_5=1.$

Câu 14: Cho đồ thị hàm bậc ba $y=f\left(2x\right)=ax^3+bx^2-10x+d$ và đường thẳng $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại 3 điểm A,B,C. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A và C lên Ox như hình vẽ.



Biết diện tích tam giác ABH và BCK lần lượt là 8 và $\frac{9}{2}$. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f\left(x\right)dx$ bằng

A. 21. **B.** 72. **C.** 57. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Gọi $B(b;0)(0<b<4)$. Ta có ΔBCK đồng dạng ΔBAH $(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BCK}}{S_{\Delta BAH}}=\left(\frac{BK}{BH}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{16}=\frac{(4-b)^2}{(b+3)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \ (n) \\ b=25 \ (l) \end{array}\right.$$

Vậy $B(1;0) \Rightarrow BK=3 \Rightarrow CK=\frac{2S_{\Delta BCK}}{BK}=3$

$\Rightarrow$ Hệ số góc của đường thẳng $y=g(x)$ là $k=tanCBK=\dfrac{CK}{BK}=1$ nên $g(x)=x-1$

Ta có:

$$f(2x)-g(x)=a(x+3)(x-1)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \left(ax^3+bx^2-10x+d\right)-(x-1)=a\left(x^3-2x^2-11x+12\right) \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ -11=-11a \\ d+1=12a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ax^3+bx^2-11x+d+1=a\left(x^3-2x^2-11x+12\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ d=11 \end{cases}, \text{ vì thế } f(2x)=x^3-2x^2-10x+11 \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{8}-\frac{x^2}{2}-5x+11.$$

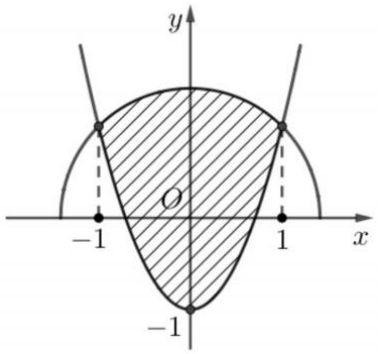
Vậy $\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx=57.$

DẠNG 10.1 Ứng dụng tích phân tích diện tích hình phẳng

Câu 1: Cho đường cong $(C): y = x^3$. Xét điểm A có hoành độ dương thuộc (C), tiếp tuyến của (C) tại A tạo với (C) một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ điểm A thuộc khoảng nào dưới đây?

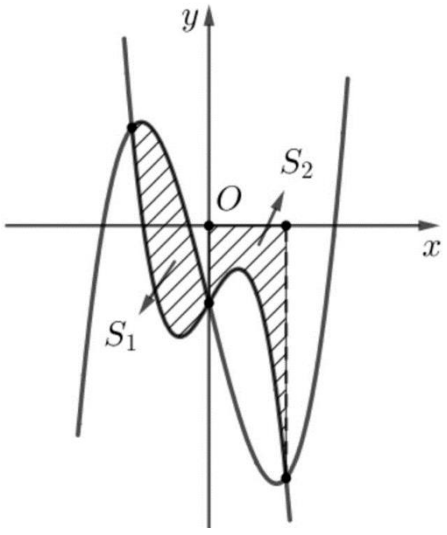
A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$

Câu 2: Hình giới hạn bởi một đường parabol và một nửa đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{2}$ **(phần gạch sọc)** trong hình vẽ bên có diện tích bằng



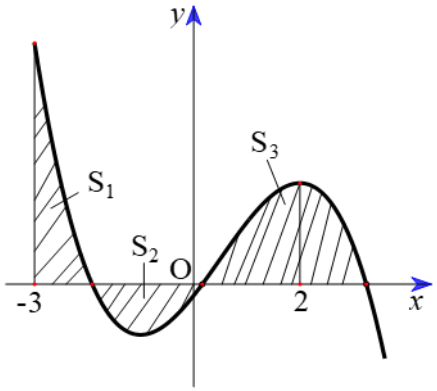
A. $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{7}{3}+\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx+c, g(x)=bx^3+ax+c, (a>0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Khi $S_1+S_2=3$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:



A. 3. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



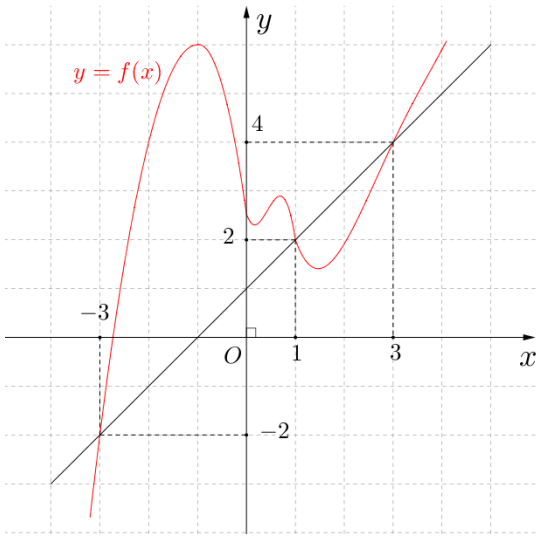
Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các hình phẳng được gạch trong hình. Khi $S_1 = S_3 = 3$, $S_2 = 2$ thì $\int_0^1 f(5x-3)dx$ bằng

A. 40. **B.** 20. **C.** $\frac{8}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn với đồ thị hai hàm số $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ và $y = 3 - x$ bằng

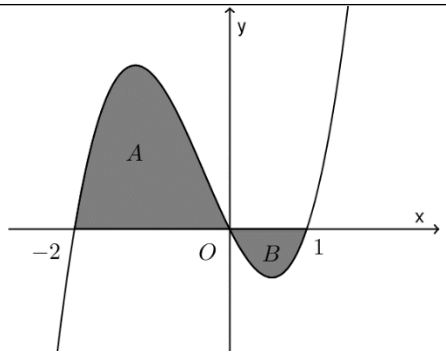
A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x+1, x = -3, x = 1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x+1, x = 1, x = 3$. Tính $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ theo S_1 và S_2.



A. $6 - S_1 + S_2$. **B.** $6 + S_1 - S_2$. **C.** $10 + S_1 - S_2$. **D.** $10 - S_1 + S_2$.

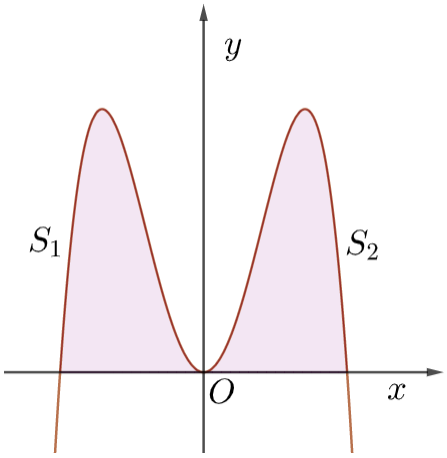
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi A; B là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.



Giá trị của $I=\int\limits_{-1}^{0} f\left(3x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng:

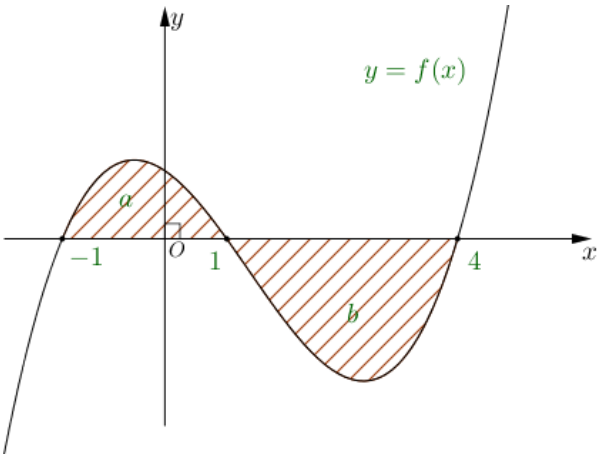
A. 9. **B.** $\dfrac{19}{3}$. **C.** 27. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^4+mx^2$ có đồ thị $\left(C_m\right)$ với tham số $m>0$ được cho như hình vẽ. Giả sử $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi S_1 và S_2 là diện tích các miền được giới hạn bởi đồ thị $\left(C_m\right)$ và trục Ox. Biết m_0 là giá trị để $S_1+S_2=\dfrac{10\sqrt{5}}{3}$, hỏi m_0 thuộc khoảng nào sau đây?



A. $\left(15;30\right)$. **B.** $\left(5;10\right)$. **C.** $\left(0;3\right)$. **D.** $\left(2;6\right)$.

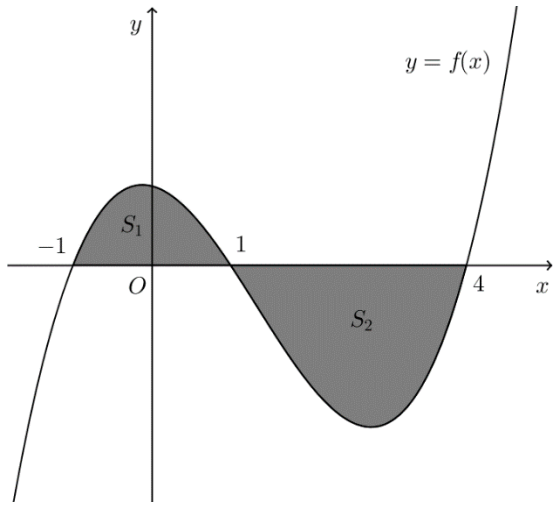
Câu 9: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích các miền phẳng A, B lần lượt bằng a và b. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f\left(5\sin x-1\right)dx$.

A. $\frac{a+b}{5}$. **B.** $\frac{-a-b}{5}$. **C.** $\frac{a-b}{5}$. **D.** $\frac{b-a}{5}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng trong hình, biết $S_1=3$ và $S_2=7$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f\left(5\sin x-1\right)\mathrm{d}x$ bằng:

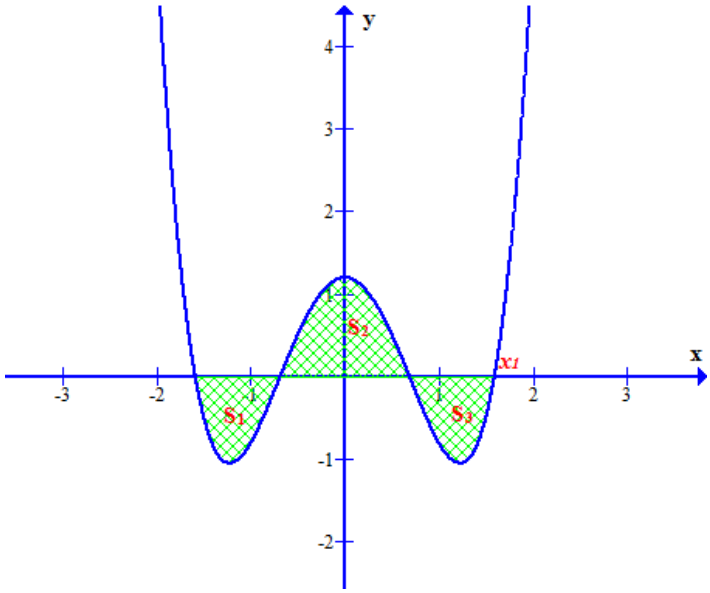


A. $-\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=mx$ với $m\neq 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20 (đơn vị diện tích).

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

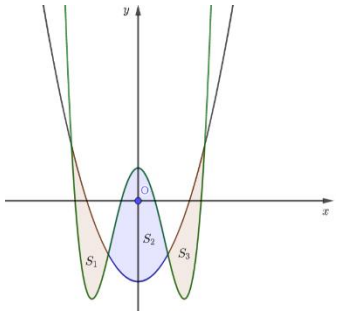
Câu 12: Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1+S_3=S_2$ là

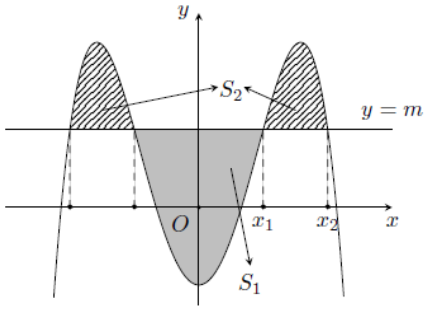
A. $m=\frac{5}{4}$. **B.** $m=-\frac{5}{2}$. **C.** $m=-\frac{5}{4}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y=x^4-4x^2+1$ và parabol $y=x^2-k$, với $k\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Gọi S_1,S_2,S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_2=S_1+S_3$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\frac{3}{7}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{5};\frac{11}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{4};3\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{7};\frac{9}{5}\right)$.

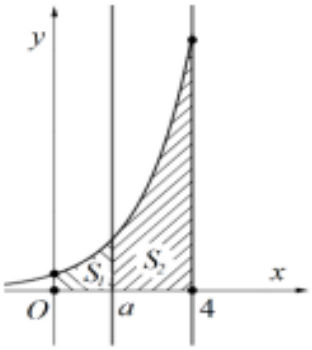
Câu 14: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt **(như hình vẽ)** với $x_2=2x_1$.



Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho. Gọi S_2 là phần diện tích hình phẳng nằm trên đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

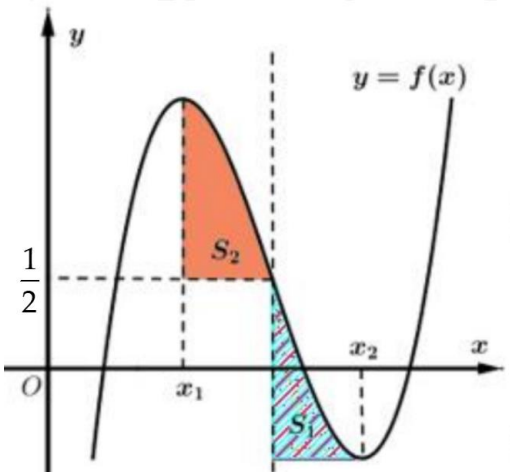
A. $\frac{19}{8}$. **B.** $\frac{30}{11}$. **C.** $\frac{19}{11}$. **D.** $\frac{30}{19}$.

Câu 15: Cho hình thang cong **(*H*)** giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ chia hình **(*H*)** thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm a để $S_2=4S_1$.



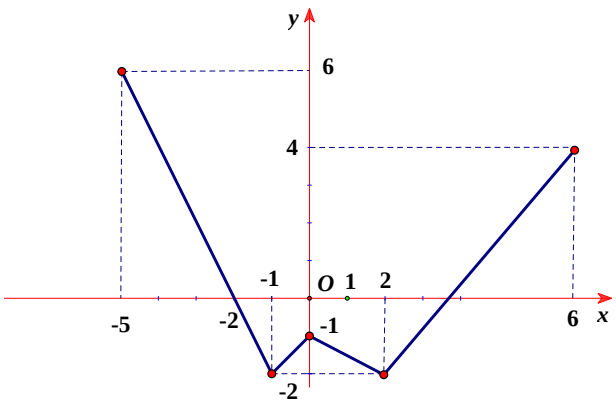
A. $a=3$. **B.** $a=\log_2 13$. **C.** $a=2$. **D.** $a=\log_2\dfrac{16}{5}$.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



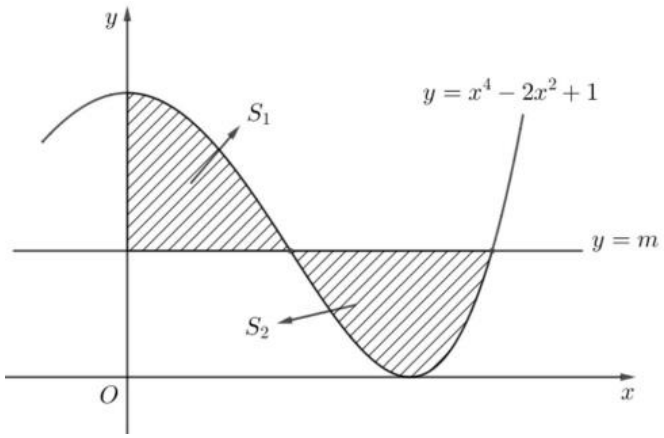
A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^{0} f(x)dx$ bằng.



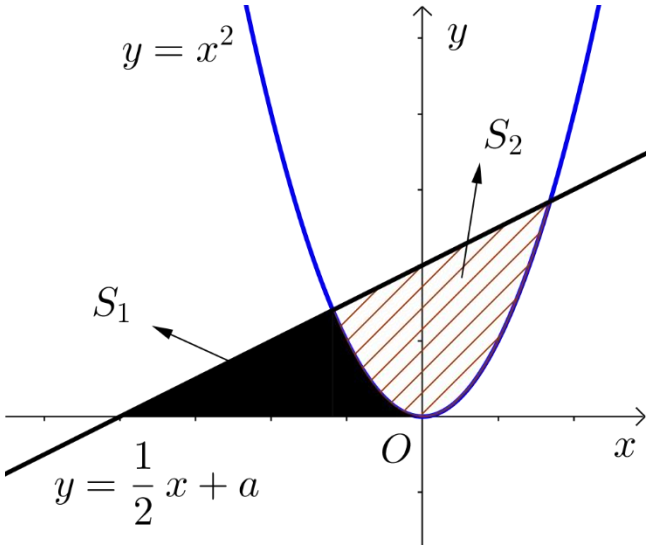
A. $\dfrac{25}{2}$. **B.** $\dfrac{19}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Câu 18: Đường thẳng $y=m\ (0<m<1)$ cắt đường cong $y=x^4-2x^2+1$ tại hai điểm phân biệt thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ. Biết $S_1=S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



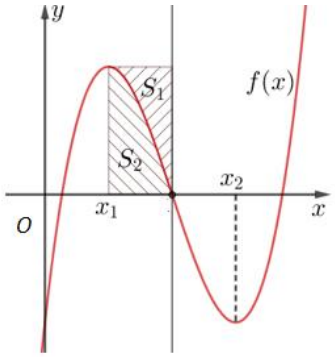
A. $m\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3}{5};1\right)$

Câu 19: Cho đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+a$ và parabol $y=x^2$ (a là tham số thực). Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được tô đậm và gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{16};\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

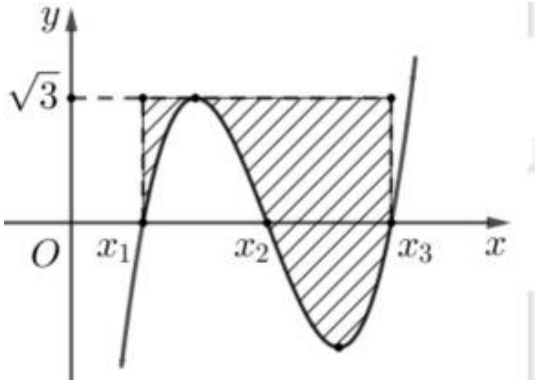
Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ



Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

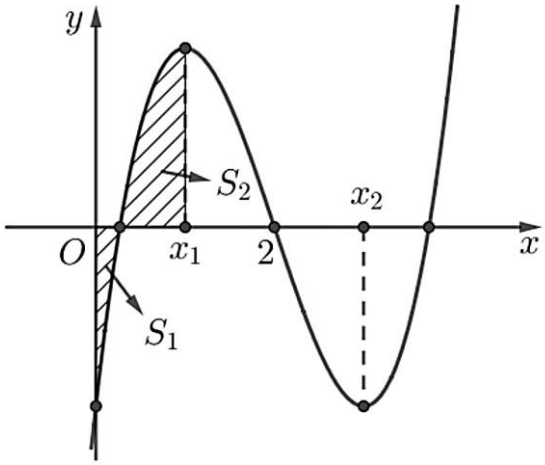
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_3 = x_1 + 2\sqrt{3}$ và x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bằng



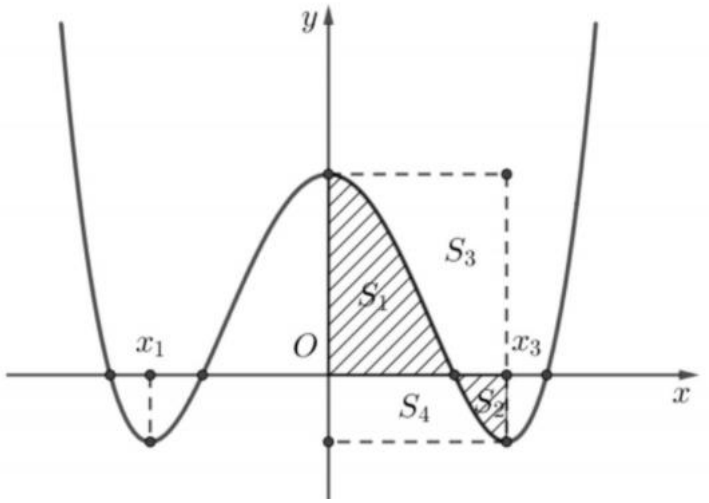
A. $6\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $x_2 - x_1 = 2$ và $f''(2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



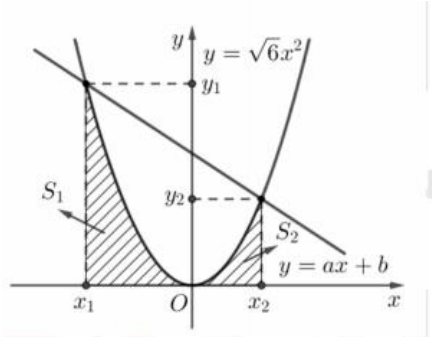
A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x_1;\ x_2;\ x_3$ thỏa mãn $x_3=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



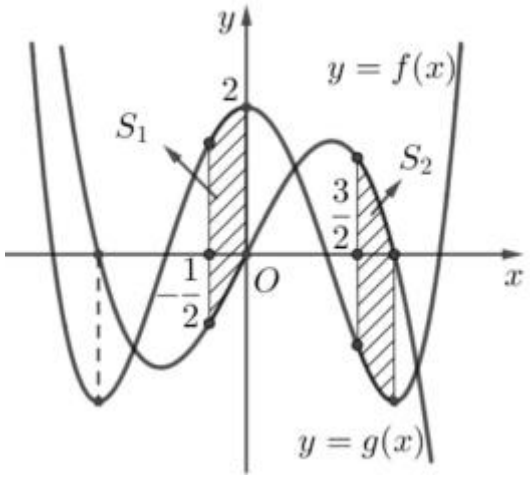
A. $0,65$. **B.** $0,7$. **C.** $0,55$. **D.** $0,6$.

Câu 24: Biết rằng đường thẳng $d: ax+b$ cắt parabol $y=\sqrt{6}x^2$ tại hai điểm $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1+y_2=20\sqrt{6}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) bằng $36\sqrt{6}$ gọi $S_1;S_2$ là diện tích hình phẳng được giới hạn trong hình. Tổng S_1+S_2



A. $30\sqrt{6}$. **B.** $27\sqrt{6}$. **C.** $18\sqrt{6}$. **D.** $24\sqrt{6}$.

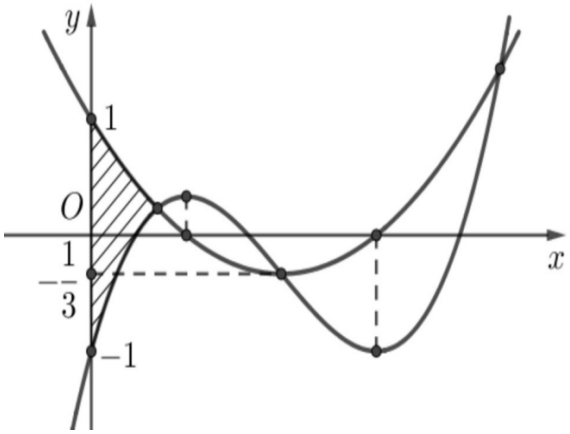
Câu 25: Cho hàm số $f(x)=ax^4-2x^2+2; g(x)=bx^3+cx^2+2x$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ, khi $S_1 = \dfrac{557}{480}$ thì S_2 bằng

A. $\dfrac{299}{240}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{557}{480}$. **D.** $\dfrac{301}{240}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1;\ g(x) = mx^2 + nx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên



Biết rằng $f''(2) = 0$ và hai đồ thị hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Diện tích của hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \dfrac{2}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{5}; 1\right)$.

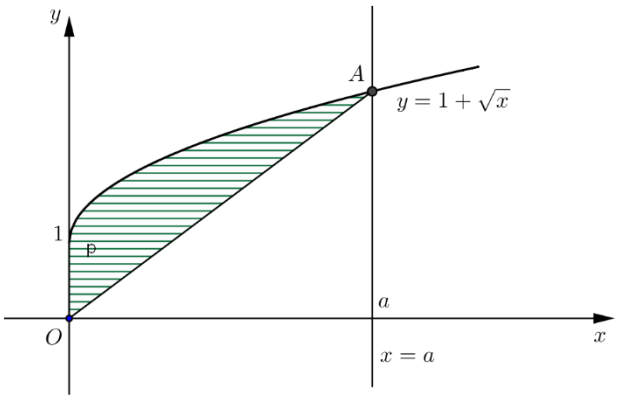
Câu 27: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1; g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘	$-\infty$

Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

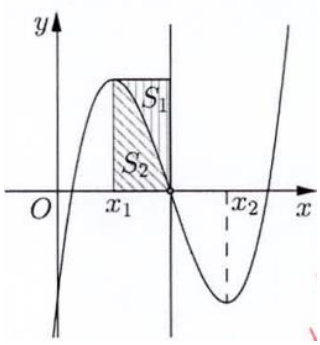
Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét đồ thị $(P): y=1+\sqrt{x}$ và đường thẳng $d: x=a$ cắt nhau tại điểm A.



Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy, (P) và đường thẳng OA; S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy, (P), Ox và d. Giả sử rằng $S=\frac{1}{3}S'$, hỏi giá trị a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(4;8)$. **C.** $(8;16)$. **D.** $(16;+\infty)$.

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thoả mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}, y=0, x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{2}$ là $S=\frac{\pi}{a}+b\ln\sqrt{c}$ với $a\in\mathbb{Z}$ và b,c là các số nguyên tố. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

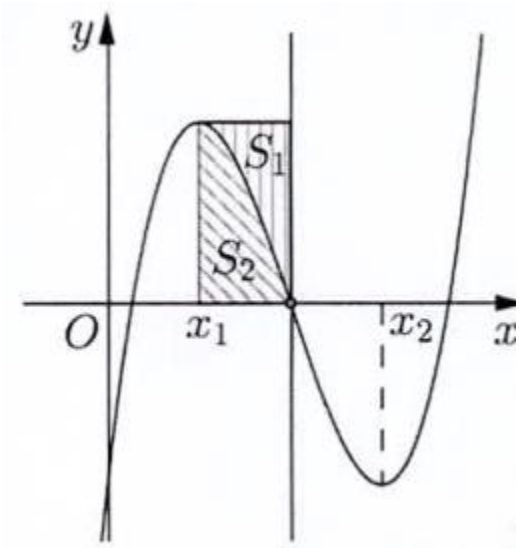
Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, xét tứ giác có diện tích bằng $\ln\frac{91}{90}$; các đỉnh có hoành độ là các số nguyên liên tiếp và nằm trên đồ thị của hàm số $y=\ln x$. Hãy tính tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất:

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 32: Cho hàm số $y=\sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM. Biết $\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{b}$ **(với** $a,b\in\mathbb{N}^*$ **và** $\frac{a}{b}$ **là phân số tối giản)**, giá trị của $a+b$ bằng

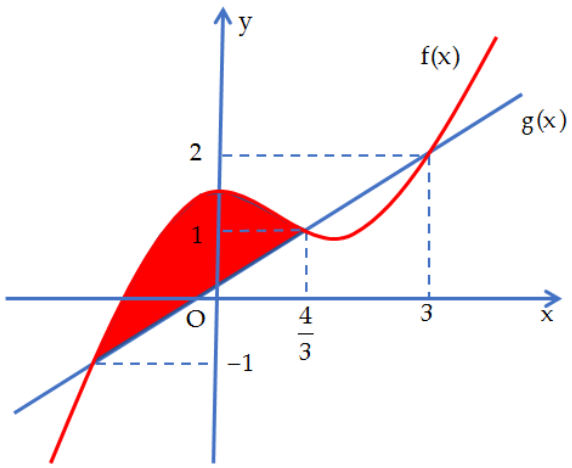
A. 6. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 21.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



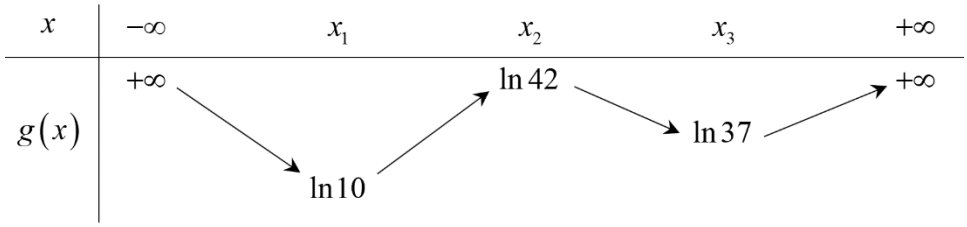
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 34: Cho $f(x),g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình S **(được tô màu)** bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.



A. $\frac{61}{48}$. **B.** $\frac{34}{27}$. **C.** $\frac{17}{15}$. **D.** $\frac{43}{35}$.

Câu 35. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38;39)$. **B.** $(25;26)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(35;36)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho đường cong $(C): y = x^3$. Xét điểm A có hoành độ dương thuộc (C), tiếp tuyến của (C) tại A tạo với (C) một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ điểm A thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2$.

Có $A \in (C) \Rightarrow A\left(a;a^3\right)$, $a > 0$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại A là $d: y = 3a^2(x-a) + a^3$ hay $d: y = 3a^2(x-a) + a^3$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^3 = 3a^2(x-a) + a^3 \Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2a \end{array}\right.$$

Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến d và (C).

Ta có $S = 27 \Leftrightarrow \int\limits_{-2a}^{a} \left|x^3 - 3a^2(x-a) - a^3\right| dx = 27$

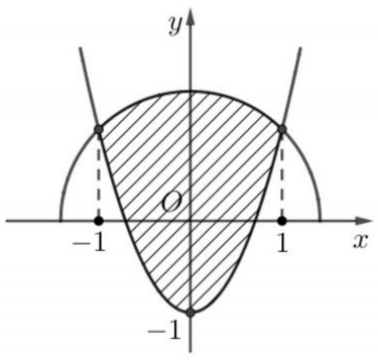
$$\Leftrightarrow \left|\int\limits_{-2a}^{a} \left(x^3 - 3a^2x + 2a^3\right) dx\right| = 27$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^2x^2}{2} + 2a^3x\right)\Big|_{-2a}^{a}\right| = 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{4}a^4 = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2}\ (ktm\ a > 0) \end{array}\right.$$

Vậy $a = \sqrt{2}$.

Câu 2: Hình giới hạn bởi một đường parabol và một nửa đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{2}$ **(phần gạch sọc)** trong hình vẽ bên có diện tích bằng



A. $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{7}{3}+\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$

Lời giải

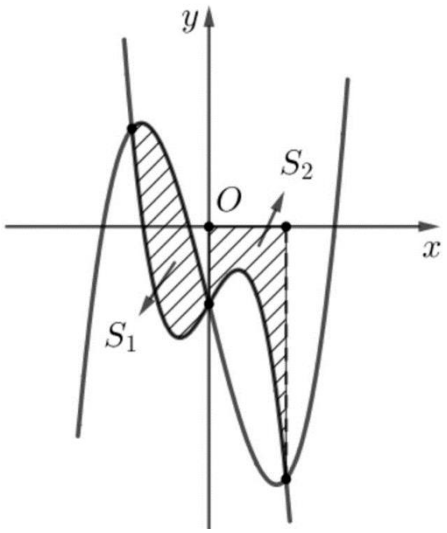
Chọn A

Phương trình nhánh trên đường tròn $y=\sqrt{2-x^2}$. $x=\pm1\Rightarrow y=1$.

Parabol có đỉnh $(0;-1)$ và đi qua hai điểm $(-1;1)$, $(1;1)$ có phương trình : $y=2x^2-1$.

$S=\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{2-x^2}-\left(2x^2-1\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx+c, g(x)=bx^3+ax+c, (a>0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Khi $S_1+S_2=3$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:



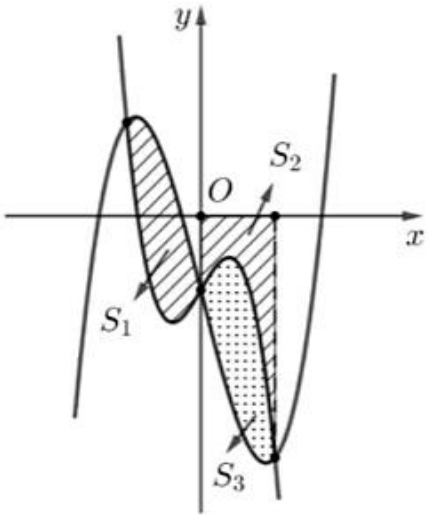
A. 3. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $(a-b)x^3+(b-a)x=0\Leftrightarrow(a-b)\left(x^3-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\end{array}\right.$

Ký hiệu S_3 là diện tích hình phẳng như hình vẽ dưới.



Cách 1: Ta có: $\begin{cases} S_1=\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx=(a-b)\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=\dfrac{1}{4}(a-b) \\ S_3=\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))dx=(a-b)\int_{0}^{1}-\left(x^3-x\right)dx=\dfrac{1}{4}(a-b) \end{cases} \Rightarrow S_1=S_3.$

Vậy $S_1+S_2=3\Leftrightarrow S_3+S_2=3\Leftrightarrow\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))dx+\int_{0}^{1}-g(x)dx=3\Leftrightarrow\int_{0}^{1}f(x)dx=-3.$

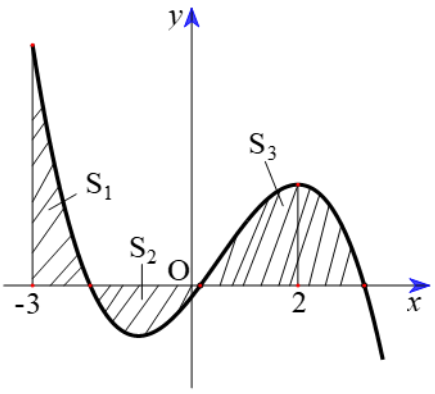
Cách 2: $S_1=\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx=(a-b)\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=\dfrac{1}{4}(a-b)$;

$S_2=-\int_{0}^{1}g(x)dx=-\int_{0}^{1}\left(bx^3+ax+c\right)dx=-\left(\dfrac{b}{4}+\dfrac{a}{2}+c\right)$

Vi vậy $S_1+S_2=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}(a-b)-\dfrac{b}{4}-\dfrac{a}{2}-c=3\Leftrightarrow a+2b+4c=-12.$

Suy ra $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\left(ax^3+bx+c\right)dx=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c=\dfrac{a+2b+4c}{4}=-3.$

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các hình phẳng được gạch trong hình. Khi $S_1=S_3=3$, $S_2=2$ thì $\int_{0}^{1}f(5x-3)dx$ bằng

A. 40. **B.** 20. **C.** $\dfrac{8}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x\in[-3;2]$ ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array}\right.$

Xét $I=\int_{0}^{1}f(5x-3)dx$

Đặt $t=5x-3\Rightarrow dt=5dx\Rightarrow dx=\dfrac{1}{5}dt$

$x=0\Rightarrow t=-3;\ x=1\Rightarrow t=2$

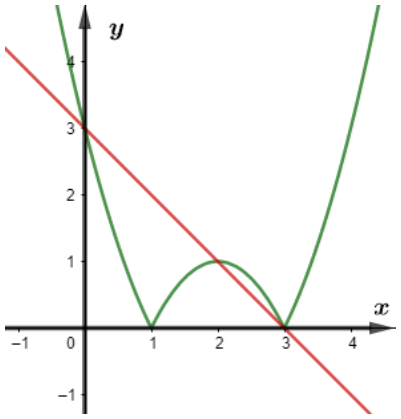
$I=\dfrac{1}{5}\int_{-3}^{2}f(t)dt=\dfrac{1}{5}\int_{-3}^{2}f(x)dx=\dfrac{1}{5}\left(\int_{-3}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{2}f(x)dx\right)=\dfrac{1}{5}(S_1-S_2+S_3)=\dfrac{4}{5}.$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn với đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và $y=3-x$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

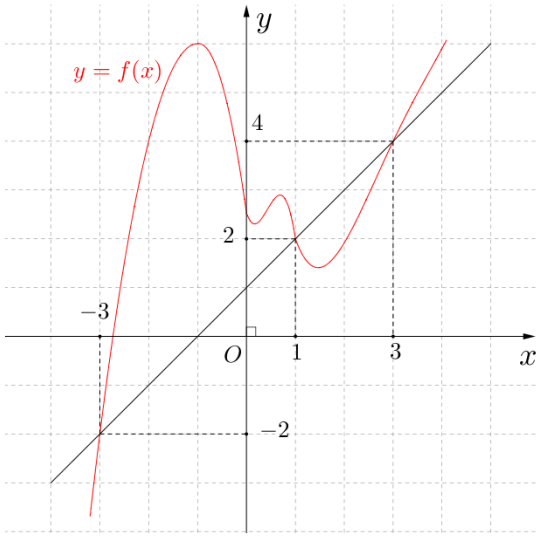


Xét phương trình hoành độ giao điểm: $|x^2-4x+3|=3-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S=\int_0^2\left|(3-x)-\left|x^2-4x+3\right|\right|dx+\int_2^3\left|\left|x^2-4x+3\right|-(3-x)\right|dx=2+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}.$$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, đường thẳng $y=x+1, x=-3, x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, đường thẳng $y=x+1, x=1, x=3$. Tính $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ theo S_1 và S_2.



A. $6-S_1+S_2$. **B.** $6+S_1-S_2$. **C.** $10+S_1-S_2$. **D.** $10-S_1+S_2$.

Lời giải

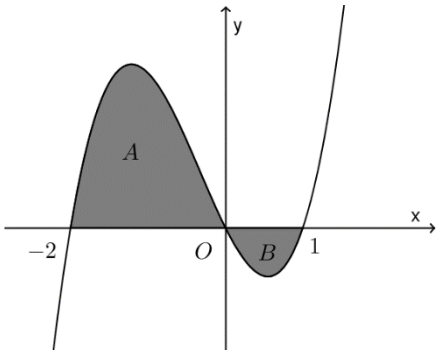
Chọn B

Ta có $S_1=\int_{-3}^{1}\left[f(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-3}^{1}(x+1)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

$S_2=\int\limits_1^3\left[(x+1)-f(x)\right]dx=\int\limits_1^3(x+1)dx-\int\limits_1^3 f(x)dx=6-\int\limits_1^3 f(x)dx\Rightarrow\int\limits_1^3 f(x)dx=6-S_2$

Ta có $\int\limits_{-3}^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=S_1+6-S_2$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi A; B là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.



Giá trị của $I=\int\limits_{-1}^0 f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 9. **B.** $\frac{19}{3}$. **C.** 27. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét $I=\int\limits_{-1}^0 f(3x+1)\mathrm{d}x$

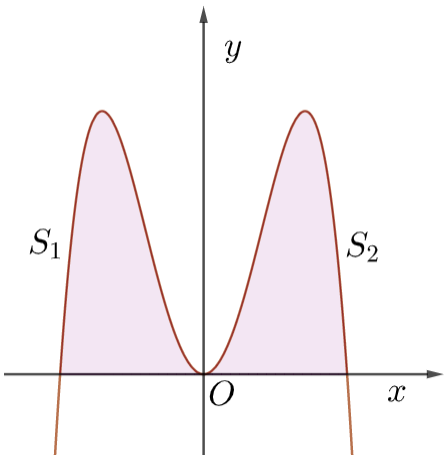
Đặt $3x+1=t\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$

Với $x=-1\Rightarrow t=-2$

$x=0\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow I=\int\limits_{-2}^1 f(t)\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{3}(S_A-S_B)=3$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^4+mx^2$ có đồ thị (C_m) với tham số $m>0$ được cho như hình vẽ. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi S_1 và S_2 là diện tích các miền được giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục Ox. Biết m_0 là giá trị để $S_1+S_2=\frac{10\sqrt{5}}{3}$, hỏi m_0 thuộc khoảng nào sau đây?



A. $(15;30)$. **B.** $(5;10)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(2;6)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $-x^4+mx^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.

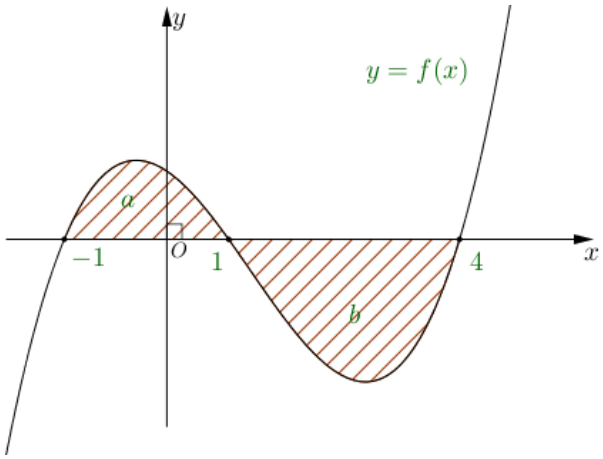
Do đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng nên $S_1=S_2$.

Ta có $S_1+S_2=\dfrac{10\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow 2S_2=\dfrac{10\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow S_2=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Mà $S_2=\int\limits_0^{\sqrt{m}}\left(-x^4+mx^2\right)dx=\dfrac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{mx^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{m}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\left(\sqrt{m}\right)^5}{5}+\dfrac{m\left(\sqrt{m}\right)^3}{3}=\dfrac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}}=\dfrac{25\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{\sqrt[5]{4}}\approx 3,78$.

Câu 9: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích các miền phẳng A, B lần lượt bằng a và b. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f\ \ 5\sin x-1\ dx$.

A. $\frac{a+b}{5}$. **B.** $\frac{-a-b}{5}$. **C.** $\frac{a-b}{5}$. **D.** $\frac{b-a}{5}$.

Lời giải

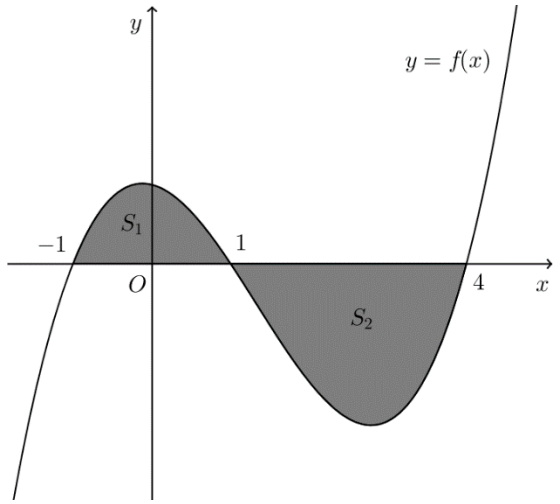
Chọn C

Đặt $t=5\sin x-1\Rightarrow dt=5\cos xdx\Leftrightarrow \cos xdx=\frac{dt}{5}$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-1,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=4$.

Suy ra $I=\int_{-1}^{4}\frac{1}{5}f\ t\ dt=\frac{1}{5}\left(\int_{-1}^{1}f\ t\ dt+\int_{1}^{4}f\ t\ dt\right)=\frac{a-b}{5}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng trong hình, biết $S_1=3$ và $S_2=7$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf\left(5\sin x-1\right)\mathrm{d}x$ bằng:



A. $-\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf\left(5\sin x-1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $5\sin x-1=t\Rightarrow \cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}t$.

Với $x=0\Rightarrow t=-1$

$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=4$

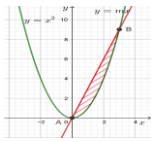
$\Rightarrow I=\int_{-1}^{4}f\left(t\right)\frac{1}{5}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int_{-1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}S_1+\frac{1}{5}\left(-S_2\right)=-\frac{4}{5}$.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=mx$ với $m\neq 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20 (đơn vị diện tích).

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B



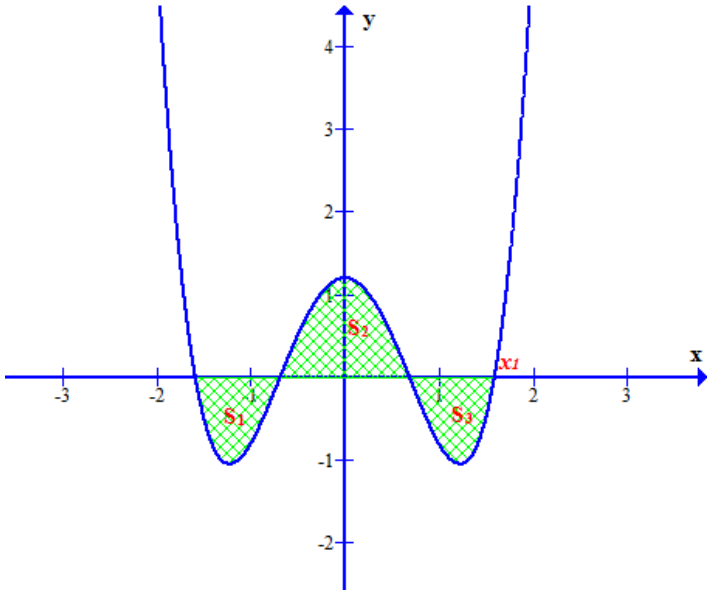
Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^2$ và $y=mx$ là: $x^2=mx \Leftrightarrow x=0, x=m$.

Với $m>0$, diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^m \left(mx-x^2\right)dx=\left(\frac{mx^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^m=\frac{m^3}{6}$.

$S<20 \Leftrightarrow \frac{m^3}{6}<20 \Leftrightarrow m^3<120 \Leftrightarrow m<\sqrt[3]{120}$, mà m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m cần tìm.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1+S_3=S_2$ là

A. $m=\frac{5}{4}$. **B.** $m=-\frac{5}{2}$. **C.** $m=-\frac{5}{4}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4-3x^2+m=0$, ta có $m=-x_1^4+3x_1^2$, (1)

.

Vì $S_1+S_3=S_2$ và $S_1=S_3$ nên $S_2=2S_3$ hay $\int\limits_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=0$.

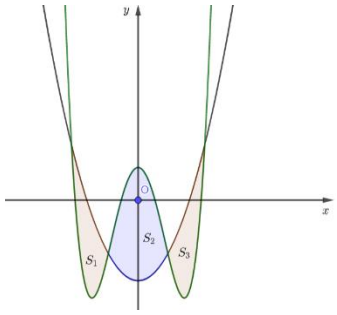
Mà $\int\limits_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}-x^3+mx\right)\Big|_0^{x_1}=\frac{x_1^5}{5}-x_1^3+mx_1=x_1\left(\frac{x_1^4}{5}-x_1^2+m\right)$.

Do đó, $x_1\left(\frac{x_1^4}{5}-x_1^2+m\right)=0\Leftrightarrow\frac{x_1^4}{5}-x_1^2+m=0\ (2)$.

Từ (1) và (2), ta có phương trình $\frac{x_1^4}{5}-x_1^2-x_1^4+3x_1^2=0\Leftrightarrow -4x_1^4+10x_1^2=0\Leftrightarrow x_1^2=\frac{5}{2}$.

Vậy $m=-x_1^4+3x_1^2=\frac{5}{4}$.

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y=x^4-4x^2+1$ và parabol $y=x^2-k$, với $k\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Gọi S_1,S_2,S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_2=S_1+S_3$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\frac{3}{7}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{5};\frac{11}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{4};3\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{7};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Do tính đối xứng của đồ thị hàm số qua trục Oy nên $2S_3=S_2$.

Giả sử nghiệm lớn nhất của phương trình: $x^4-5x^2+1+k=0$ là a.

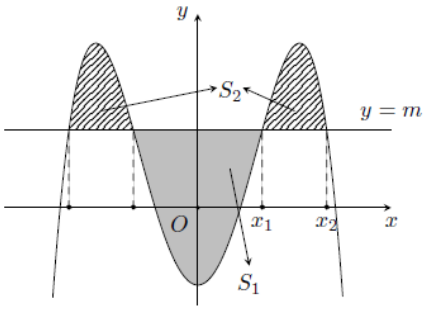
Nên: $\int\limits_0^a\left(x^4-5x^2+1+k\right)dx=0\Rightarrow\frac{a^5}{5}-\frac{5a^3}{3}+(1+k)a=0\ (1)$

Do a là nghiệm của phương trình $x^4-5x^2+1+k=0$ nên: $a^4-5a^2+1+k=0\Rightarrow a^5-5a^3+(1+k)a=0\ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow-\frac{4}{5}a^5+\frac{10}{3}a^3=0\Rightarrow a^2=\frac{25}{6}$

Thay $a^2=\frac{25}{6}$ vào phương trình (1) thì được $k=\frac{89}{36}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt **(như hình vẽ)** với $x_2=2x_1$.



Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho. Gọi S_2 là phần diện tích hình phẳng nằm trên đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{19}{8}$. **B.** $\frac{30}{11}$. **C.** $\frac{19}{11}$. **D.** $\frac{30}{19}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hàm số $y=-x^4+5x^2-1$ và $m=3$. Khi đó ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng là $-x^4+5x^2-1=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=2\end{array}\right.$.

Khi đó $S_2=2\int\limits_1^2\left(-x^4+5x^2-4\right)dx=\frac{44}{15}$ và $S_1=\int\limits_{-1}^1\left(x^4-5x^2+4\right)dx=\frac{76}{15}$. Suy ra $\frac{S_1}{S_2}=\frac{19}{11}$.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ và đường thẳng $y=m$ là $\boxed{ax^4+bx^2+c'=0}\ (1)$, với $c'=c-m$.

Đặt $t=x^2\geq 0$ ta có phương trình $\boxed{at^2+bt+c'=0}\ (2)$

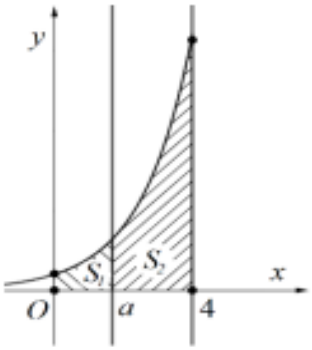
Vì (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_2=2x_1$ nên từ (2) ta phải có $\begin{cases}t_2=4t_1\\t_1+t_2=-\frac{b}{a}\\t_1t_2=\frac{c'}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=-\frac{b}{5a}\\ac'=\frac{4b^2}{25}\end{cases}$.

Khi đó $S_1=-2\int\limits_0^{x_1}\left(ax^4+bx^2+c'\right)\mathrm{d}x=-2\left(\frac{ax_1^5}{5}+\frac{bx_1^3}{3}+c'x_1\right)=-\frac{19c'x_1}{15}$

Và $S_1=2\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(ax^4+bx^2+c'\right)\mathrm{d}x=2\left[\left(\frac{ax_2^5}{5}+\frac{bx_2^3}{3}+c'x_2\right)-\left(\frac{ax_1^5}{5}+\frac{bx_1^3}{3}+c'x_1\right)\right]=-\frac{11c'x_1}{15}$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{19}{11}$.

Câu 15: Cho hình thang cong **(*H*)** giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ chia hình **(*H*)** thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm a để $S_2=4S_1$.



A. $a=3$. **B.** $a=\log_2 13$. **C.** $a=2$. **D.** $a=\log_2\dfrac{16}{5}$.

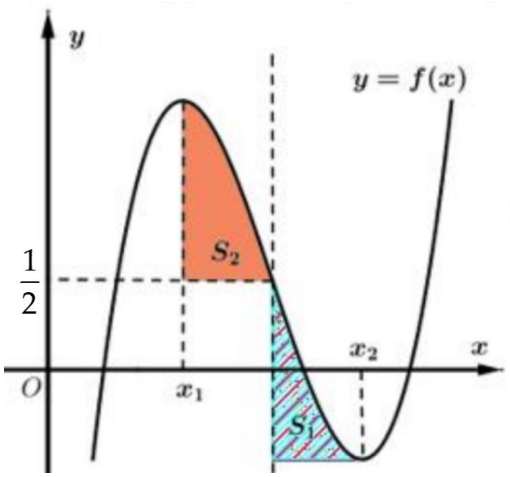
Lời giải

Chọn C

Ta có: $S_1=\int\limits_0^a 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 2}.2^x\Big|_0^a=\dfrac{1}{\ln 2}\left(2^a-1\right)$; $S_2=\int\limits_a^4 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 2}.2^x\Big|_a^4=\dfrac{1}{\ln 2}\left(16-2^a\right)$.

$S_2=4S_1\Leftrightarrow 16-2^a=4\left(2^a-1\right)\Leftrightarrow 2^a=4\Leftrightarrow a=2$.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=1$. Gọi S_1,S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

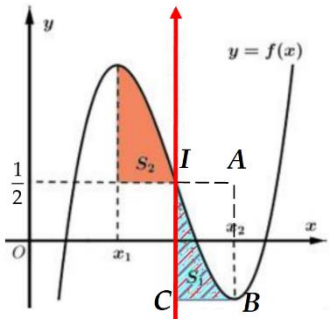
Không mất tính tổng quát, tịnh tiến đồ thị hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ sao cho điểm uốn của đồ thị thuộc trục tung $\Rightarrow x_1+x_2=0$. Lại có $x_2=x_1+2$ nên $x_1=-1,x_2=1$.

Theo giả thiết, ta có $f'\left(x\right)=k\left(x-1\right)\left(x+1\right)=k\left(x^2-1\right)$ với $k>0$.

Suy ra $f\left(x\right)=k\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)+C$.

Do $f\left(-1\right)+f\left(1\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{2k}{3}+C-\dfrac{2k}{3}+C=1\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$

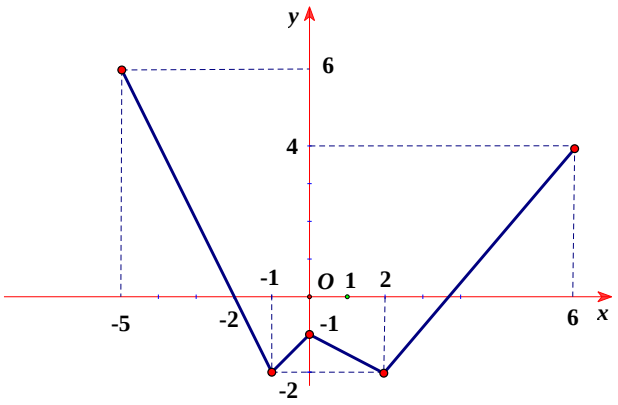
Suy ra $f(x)=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+\frac{1}{2}$ và $f(x_2)=f(1)=-\frac{2k}{3}+\frac{1}{2}$.



Ta có $S_2=\int_{-1}^{0}\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]dx=\int_{-1}^{0}k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dx=\frac{5k}{12}$.

Xét $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{IABC}-S_2}{S_2}=\frac{BC.IC}{S_2}-1=\frac{1.\left|\frac{1}{2}-f(1)\right|}{S_2}-1=\frac{\frac{2k}{3}}{\frac{5k}{12}}-1=\frac{3}{5}$.

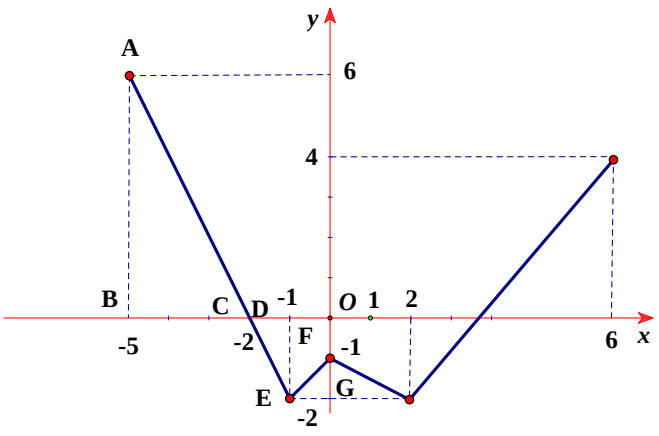
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^{0}f(x)dx$ bằng.



A. $\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{19}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AB=\frac{1}{2}.6.3=9.$

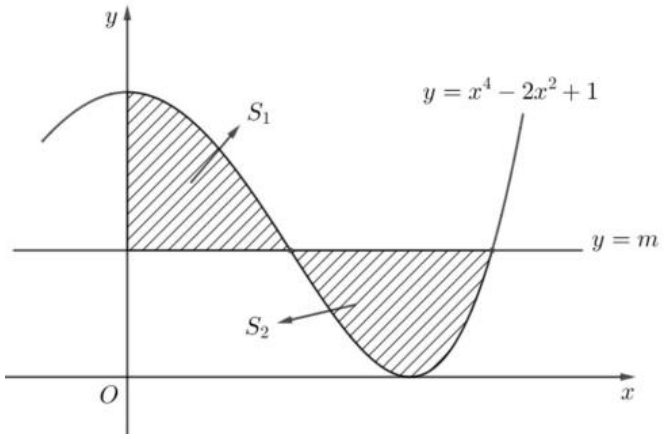
$S_{DEE}=\frac{1}{2}DF.EF=\frac{1}{2}.1.2=1.$

$S_{FEGO}=\frac{1}{2}\left(GO+EF\right)DO=\frac{1}{2}.3.1=\frac{3}{2}.$

Khi đó

$$\int_{-5}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}=\int_{-5}^{-2}f\left(x\right)\mathrm{dx}-\int_{-2}^{-1}f\left(x\right)\mathrm{dx}-\int_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}=S_{ABC}-S_{DEE}-S_{FEGO}=9-1-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}.$$

Câu 18: Đường thẳng $y=m\left(0<m<1\right)$ cắt đường cong $y=x^4-2x^2+1$ tại hai điểm phân biệt thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ. Biết $S_1=S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $m\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3}{5};1\right)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm đường cong và đường thẳng $y=m\left(0<m<1\right)$:

$$x^4-2x^2+1=m\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=\sqrt{m}\\x^2-1=-\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1+\sqrt{m}\\x^2=1-\sqrt{m}\end{array}\right.$$

Hoành độ giao điểm thuộc cung phần tư thứ nhất là: $x_1=\sqrt{1+\sqrt{m}}$ và $x_2=\sqrt{1-\sqrt{m}}$.

Ta có $S_1=S_2\Leftrightarrow\int_{0}^{\sqrt{1-\sqrt{m}}}\left(x^4-2x^2+1-m\right)\mathrm{dx}=\int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}}\left(m-x^4+2x^2-1\right)\mathrm{dx}$

$$\Leftrightarrow\int_{0}^{\sqrt{1-\sqrt{m}}}\left(x^4-2x^2+1-m\right)\mathrm{dx}=-\int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}}\left(x^4-2x^2+1-m\right)\mathrm{dx}$$

$$\Leftrightarrow\int_{0}^{\sqrt{1-\sqrt{m}}}\left(x^4-2x^2+1-m\right)\mathrm{dx}+\int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}}\left(x^4-2x^2+1-m\right)\mathrm{dx}=0$$

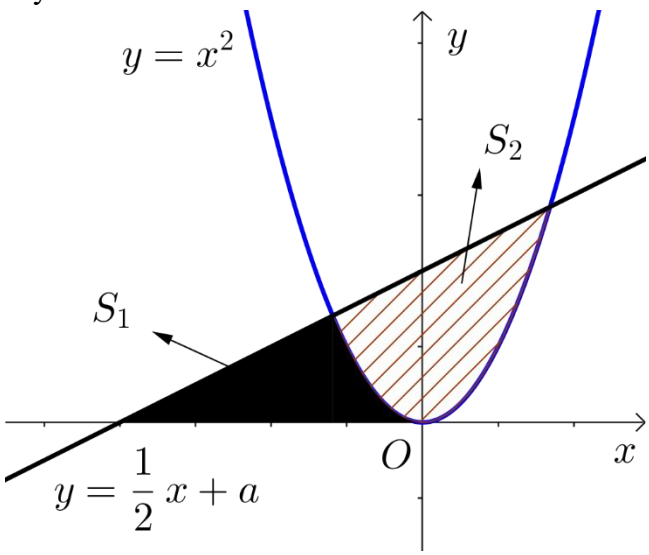
$$\Leftrightarrow\int_{0}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}}\left(x^4-2x^2+1-m\right)\mathrm{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x-mx\right)\Big|_0^{\sqrt{1+\sqrt{m}}}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{m}}\right)^5}{5}-\frac{2\left(\sqrt{1+\sqrt{m}}\right)^3}{3}+\sqrt{1+\sqrt{m}}-m\sqrt{1+\sqrt{m}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{m}}\right)^4}{5}-\frac{2\left(\sqrt{1+\sqrt{m}}\right)^2}{3}+1-m=0 \Leftrightarrow \frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^2}{5}-\frac{2\left(1+\sqrt{m}\right)}{3}+\left(1-\sqrt{m}\right)\left(1+\sqrt{m}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+\sqrt{m}\right)}{5}-\frac{2}{3}+\left(1-\sqrt{m}\right)=0 \ \left(1+\sqrt{m}\neq 0\right) \Leftrightarrow 1+\sqrt{m}=\frac{5}{9} \Leftrightarrow m=\frac{16}{81}\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$$

Câu 19: Cho đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+a$ và parabol $y=x^2$ (a là tham số thực). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được tô đậm và gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{16};\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

* Phương trình hoành độ giao điểm của của hai đồ thị: $\frac{1}{2}x+a=x^2 \Leftrightarrow 2x^2-x-2a=0$

Theo giả thiết, phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1+16a>0 \Leftrightarrow a>-\frac{1}{16}$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$ thỏa: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\frac{1}{2} \\ P=x_1+x_2=-a \end{cases}$

* Diện tích hình phẳng: $S_1=\int_{-2a}^{x_1}\left(\frac{x}{2}+a\right)dx+\int_{x_1}^{0}x^2dx=\left(\frac{x^2}{4}+ax\right)\Big|_{-2a}^{x_1}+\frac{x^3}{3}\Big|_{x_1}^{0}$

$$=\frac{1}{4}x_1^2+ax_1-\frac{1}{4}.4a^2+2a^2-\frac{1}{3}x_1^3=-\frac{1}{3}x_1^3+\frac{1}{4}x_1^2+ax_1+a^2$$

Diện tích hình phẳng $S_2=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}x+a-x^2\right)dx=\frac{\left(x_2-x_1\right)^3}{6}$

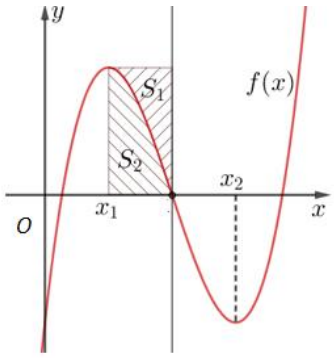
* Theo giả thiết, $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(x_1^2 - 4a^2\right) + a\left(x_1 + 2a\right) - \frac{x_1^3}{3} = \frac{\left(x_2 - x_1\right)^3}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(x_1^3 + x_2^3\right) + \frac{1}{2}x_1.x_2\left(x_2 - x_1\right) + \frac{x_1^2}{4} + a.x_1 + a^2 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8} + \frac{3a}{2}\right) - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 4a} + \frac{\left(1 - \sqrt{1+16a}\right)^2}{64} + a.\frac{1 - \sqrt{1+16a}}{4} + a^2 = 0$

$\Rightarrow a \simeq 3,684$.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ

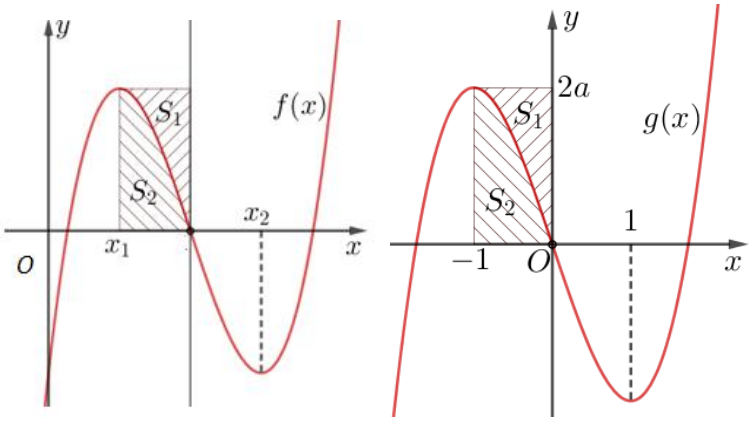


Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) = 0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho đồ thị hàm số $y = g\left(x\right)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

Khi đó $g'\left(x\right)$ là tam thức bậc hai có hai nghiệm ±1 nên $g'\left(x\right) = 3a\left(x+1\right)\left(x-1\right) = 3a\left(x^2 - 1\right)$ với $a \neq 0$.

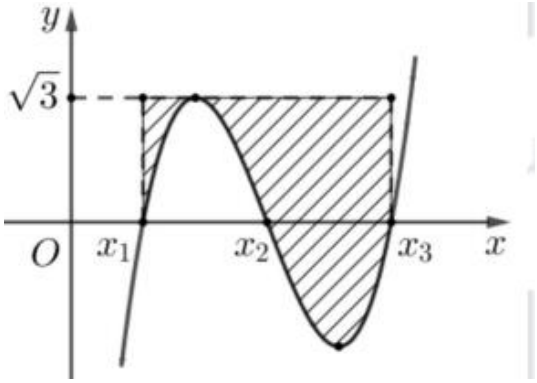
Từ đó ta có $g\left(x\right) = 3a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + b \Leftrightarrow g\left(x\right) = a\left(x^3 - 3x\right) + b$.

Do $g\left(x\right)$ đi qua gốc tọa độ O nên $b = 0$, suy ra $g\left(x\right) = a\left(x^3 - 3x\right)$.

Ta có $S_2 = \int\limits_{-1}^{0} a\left(x^3 - 3x\right)\mathrm{d}x = a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{5a}{4}$.

Lại có $S_1 + S_2$ bằng diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước 1 và $g(-1) = 2a$, suy ra $S_1 + S_2 = 2a$. Do đó $S_1 = 2a - \frac{5a}{4} = \frac{3a}{4}$. Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_3 = x_1 + 2\sqrt{3}$ và x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bằng



A. $6\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Diện tích phần gạch sọc trên hình là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{3}, y = f(x)$, $x = x_1, x = x_3$. Do đó,

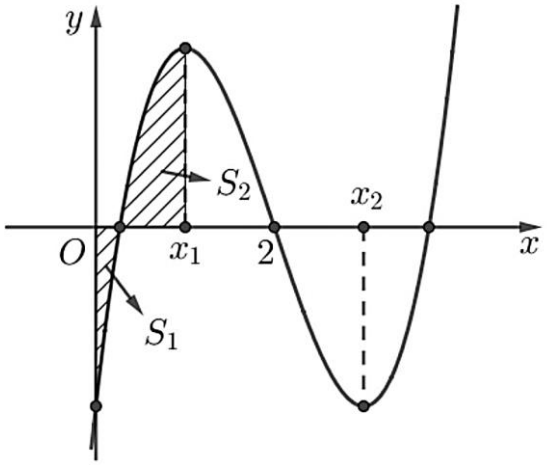
$$S = \int\limits_{x_1}^{x_3}\left(\sqrt{3} - f(x)\right)dx = \int\limits_{x_1}^{x_3}\sqrt{3}dx - \int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \sqrt{3}\left(x_3 - x_1\right) - \int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx = 6 - \int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx$$

Xét $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Theo viet có $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

Mặt khác x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $x_1 + x_2 + x_3 = \left(x_1 + x_3\right) + x_2 = 2x_2 + x_2 = 3x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{3a} \Rightarrow U\left(x_2; 0\right)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho. Vì vậy, trục hoành cùng với đồ thị hàm số $f(x)$ tạo thành hai hình có diện tích bằng nhau tức $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -\int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)dx \Leftrightarrow \int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx = 0.$

Vậy $S = 6$.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $x_2 - x_1 = 2$ và $f''(2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a>0)\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow f''(x)=6ax+2b$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 6ax+2b=0\Leftrightarrow x=\frac{-b}{3a}$. Vì $f''(2)=0$ nên $\frac{-b}{3a}=2\Leftrightarrow b=-6a$.

Mặt khác, theo định lý Viet thì $x_1+x_2=\frac{-2b}{3a}=4$, kết hợp với $x_2-x_1=2$ ta suy ra $x_1=1,\ x_2=3$

Do đó, $x_1.x_2=\frac{c}{3a}=3\Leftrightarrow c=9a$. Từ đó ta có $f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+d$.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(2)=0\Leftrightarrow 8a-24a+18a+d=0\Leftrightarrow d=-2a$.

Suy ra $f(x)=a\left(x^3-6x^2+9x-2\right)$.

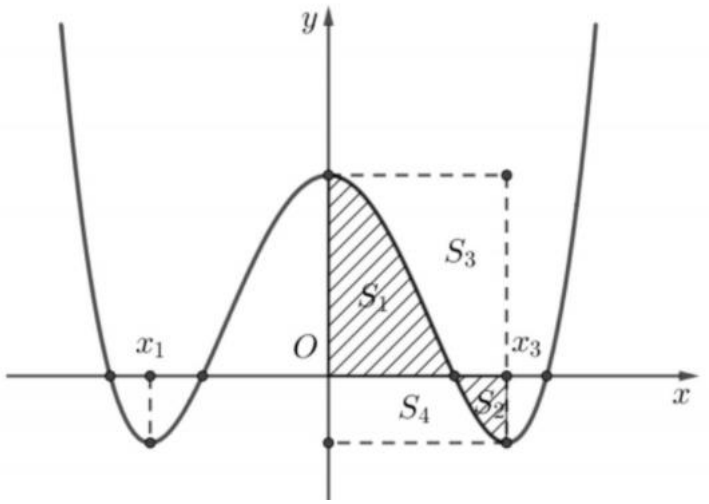
Xét phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2-\sqrt{3}<2\\x=2+\sqrt{3}>2\end{array}\right.$

Từ đây ta tính được $S_1=-a\int\limits_0^{2-\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x-2\right)dx=\frac{a}{4}$,

$S_2=a\int\limits_{2-\sqrt{3}}^{1}\left(x^3-6x^2+9x-2\right)dx=a$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x_1;\ x_2;\ x_3$ thỏa mãn $x_3=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $0,65$. **B.** $0,7$. **C.** $0,55$. **D.** $0,6$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có

$$f'(x)=4ax^3+2bx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\dfrac{b}{2a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} \end{array}\right. \ (ab<0)$$

Do đó hàm số có ba điểm cực trị x_1; $x_2=0$; $x_3=-x_1$ vậy $x_3=x_1+2 \Leftrightarrow -x_1=x_1+2 \Leftrightarrow x_1=-1$ $\Rightarrow x_3=1$.

Suy ra $f'(x)=4a(x+1)x(x-1)=4a(x^3-x)$

$f(x)=\int f'(x)dx=a(x^4-2x^2)+c$

Do $f(x_1)+f(x_3)+\dfrac{2}{3}f(x_2)=0 \Leftrightarrow f(-1)+f(1)+\dfrac{2}{3}f(0)=0 \Leftrightarrow (c-a)+(c-a)+\dfrac{2}{3}c=0$

$\Leftrightarrow c=\dfrac{3}{4}a$.

Vậy $f(x)=a\left(x^4-2x^2+\dfrac{3}{4}\right)$

Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+\dfrac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$

Vậy $S_1=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx=a\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^4-2x^2+\dfrac{3}{4}\right)dx=\dfrac{7\sqrt{2}}{30}a$;

$S_2=-\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} f(x)dx=-a\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(x^4-2x^2+\dfrac{3}{4}\right)dx=\dfrac{14\sqrt{2}-17}{60}a$.

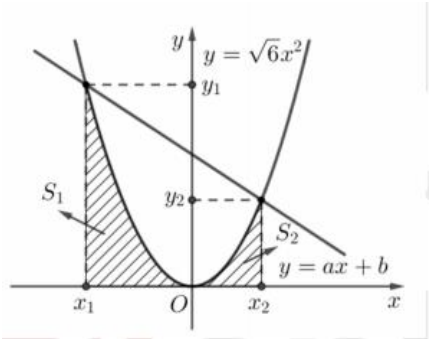
Suy ra $S_1+S_2=\dfrac{28\sqrt{2}-17}{60}a$.

Ta có $S_1+S_2+S_3+S_4$ là diện tích hình chữ nhật có kích thước 1; $f(x_2)-f(x_3)=a$.

Do đó $S_3+S_4=a-\left(S_1+S_2\right)=a-\dfrac{28\sqrt{2}-17}{60}a=\dfrac{7\left(11-4\sqrt{2}\right)}{60}a\Rightarrow\dfrac{S_1+S_2}{S_3+S_4}=\dfrac{28\sqrt{2}-17}{7\left(11-4\sqrt{2}\right)}\approx 0,6$

.

Câu 24: Biết rằng đường thẳng $d:ax+b$ cắt parabol $y=\sqrt{6}x^2$ tại hai điểm $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ sao cho $y_1+y_2=20\sqrt{6}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và $\left(P\right)$ bằng $36\sqrt{6}$ gọi $S_1;S_2$ là diện tích hình phẳng được giới hạn trong hình. Tổng S_1+S_2



A. $30\sqrt{6}$. **B.** $27\sqrt{6}$. **C.** $18\sqrt{6}$. **D.** $24\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

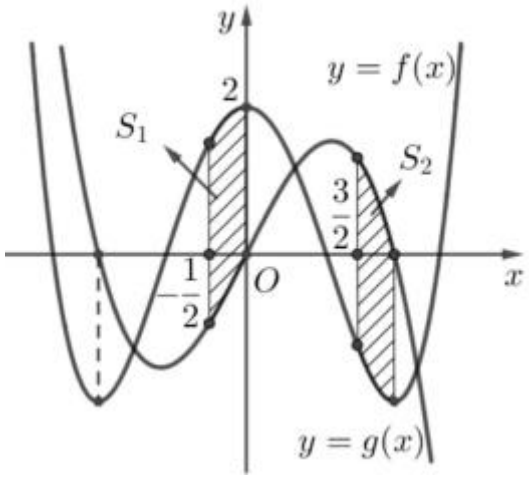
Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{6}.x^2=ax+b\Leftrightarrow\sqrt{6}.x^2-ax-b=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=\dfrac{a}{\sqrt{6}};x_1.x_2=\dfrac{-b}{\sqrt{6}}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng là:

$$S=\frac{\Delta^3}{36a_0^4}=\frac{\left(a^2+4\sqrt{6}b\right)^3}{36\left(\sqrt{6}\right)^4}=\frac{\left(6\left(x_1+x_2\right)^2-24x_1.x_2\right)^3}{36^2}=\frac{\left(x_1-x_2\right)^6}{6}=\left(36\sqrt{6}\right)^2\Leftrightarrow x_2-x_1=6.$$

Mặt khác S_1+S_2+S là diện tích hình thang vuông có chiều cao là $x_2-x_1=6$, tổng hai đáy bằng $20\sqrt{6}\Rightarrow S_1+S_2+S=\dfrac{20\sqrt{6}}{2}.6\Rightarrow S_1+S_2=60\sqrt{6}-36\sqrt{6}=24\sqrt{6}.$

Câu 25: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4-2x^2+2;g\left(x\right)=bx^3+cx^2+2x$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ, khi $S_1 = \frac{557}{480}$ thì S_2 bằng

A. $\frac{299}{240}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{557}{480}$. **D.** $\frac{301}{240}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4ax^3 - 4x$

Do hàm $f(x)$ bậc bốn, hàm $g(x)$ bậc ba và hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nên

$$g(x) = k.f'(x) \Leftrightarrow bx^3 + cx^2 + 2x = k\left(4ax^3 - 4x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4ka \\ c = 0 \\ 2 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $f(x) = ax^4 - 2x^2 + 2; g(x) = -2ax^3 + 2x$

Diện tích hình phẳng S_1 là

$$S_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(ax^4 - 2x^2 + 2 + 2ax^3 - 2x \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}ax^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{2}ax^4 - x^2 \right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{7}{6} - \frac{1}{40}a$$

Ta có $S_1 = \frac{557}{480} \Leftrightarrow \frac{7}{6} - \frac{1}{40}a = \frac{557}{480} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

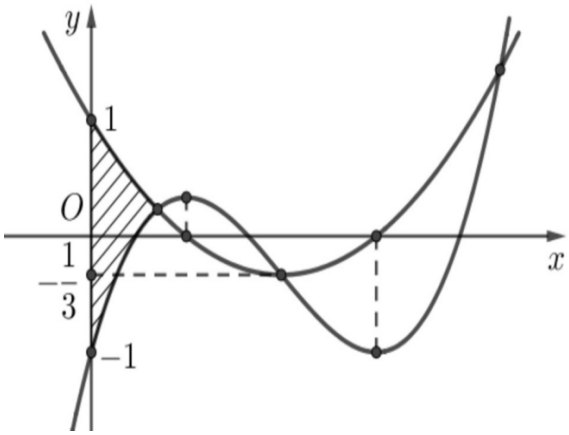
Với $a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2;\ \mathrm{g}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$

Khi đó $\mathrm{g}(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array} \right.$

Vì vậy, diện tích hình phẳng S_2 là

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(g(x) - f(x) \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left[\left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x \right) - \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 \right) \right] dx = \frac{299}{240}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1;\ g(x) = mx^2 + nx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên



Biết rằng $f''(2)=0$ và hai đồ thị hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=7$. Diện tích của hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{5};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c;\ f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(2)=0 \Leftrightarrow 12a+2b=0 \Leftrightarrow b=-2a$

Vậy $f(x)=ax^3-6ax^2+cx-1$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc ba và $g(x)$ là hàm số bậc hai và quan sát đồ thị đã cho tại các điểm cực trị x_0 của $f(x)$ thì $g(x_0)=0$

Do đó:

$$g(x)=k.f'(x) \Leftrightarrow mx^2+nx+1=k\left(3ax^2-12ax+c\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m=3ka \\ n=-12ka \Rightarrow g(x)=3ka\left(x^2-4x\right)+1 \\ 1=kc \end{cases}$$

$$\min_{\mathbb{R}} g(x)=g(2)=1-12ka=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow ka=\frac{1}{9} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right).$$

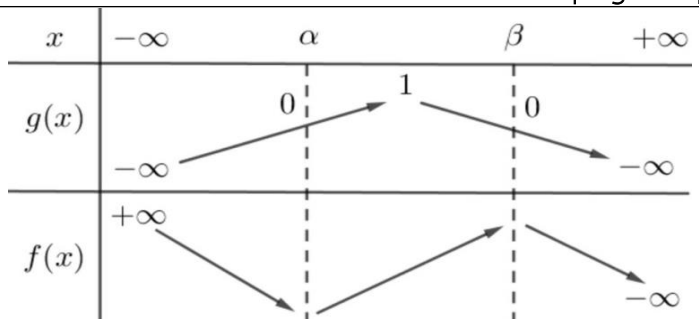
Phương trình hoành độ giao điểm:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1=\frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right) \Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}; x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy diện tích cần tính cần tính là:

$$S=-\int_0^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=-\int_0^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1-\frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right)\right)dx=\frac{89-13\sqrt{13}}{72}\approx 0,5851.$$

Câu 27: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+2x^2+bx+1; g(x)=cx^2+4x+d$ có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tại các điểm cực trị α, β của thì $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ dó đó $g(x) = c(x-\alpha)(x-\beta); f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$

Do đó: $g(x) = k.f'(x) \Leftrightarrow cx^2 + 4x + d = k\left(3ax^2 + 4x + b\right) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3ka \\ 4 = 4k \\ d = kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ c = 3a \\ d = b \end{cases}$.

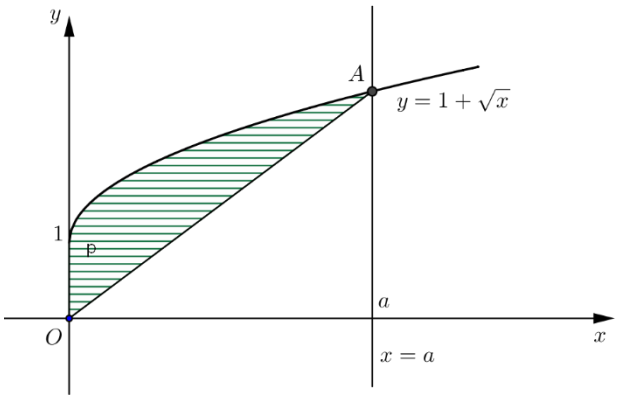
Suy ra: $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1; g(x) = 3ax^2 + 4x + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 3ax^2 + 4x + b \Leftrightarrow ax^3 + (2-3a)x^2 + (b-4)x + 1 - b = 0$

Viet: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3a-2}{a} = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = -x^2 + 4x + b$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = 2$ và giá trị lớn nhất đó bằng $g(2) = 1 \Leftrightarrow b + 4 = 1 \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow c = -1; d = -3$.

Vậy $S = \int_1^2 \left| -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \right| dx = \frac{3}{4}$.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét đồ thị $(P): y = 1 + \sqrt{x}$ và đường thẳng $d: x = a$ cắt nhau tại điểm A.



Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy, (P) và đường thẳng OA; S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy, (P), Ox và d. Giả sử rằng $S=\frac{1}{3}S'$, hỏi giá trị a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(4;8)$. **C.** $(8;16)$. **D.** $(16;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S'=\int_0^a\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left(x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right)\Big|_0^a=a+\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

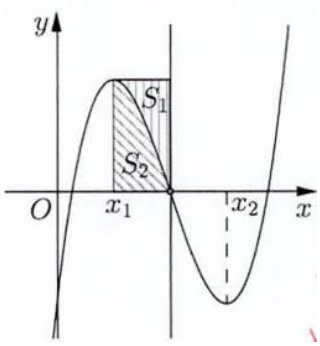
Mặt khác $S=\frac{1}{3}S'$ nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng OA, Ox và d là $S_1=\frac{2}{3}S'$.

Do đó $\frac{1}{2}.a.\left(1+\sqrt{a}\right)=\frac{2}{3}\left(a+\frac{2a\sqrt{a}}{3}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{a}=\frac{2}{3}a+\frac{4}{9}a\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a}=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{18}\sqrt{a}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\sqrt{a}=3\Leftrightarrow a=9$. Vậy $a\in(8;16)$.

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thoả mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

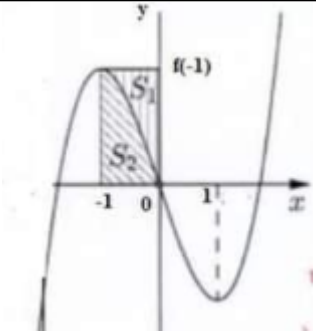


A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị hàm số sang trái theo trục Ox một đoạn x_1, ta sẽ được đồ thị mới như sau



Gọi $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số mới, khi đó dễ thấy $g(x)$ lẻ nên có ngay $b=d=0$ và $g(x)=ax^3+cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1,1,$ cũng là nghiệm của $3ax^2+c=0$. Từ đó dễ dàng có $g(x)=k\left(x^3-3x\right)$ với $k>0$.

Ta có diện tích hình chữ nhật là $S_1+S_2=\left|(-1).g(-1)\right|=2k$. Ngoài ra, $S_2=k\int\limits_{-1}^{0}\left|x^3-3x\right|dx=\dfrac{5k}{4}$.

Vì thế $S_1=2k-S_2=2k-\dfrac{5k}{4}=\dfrac{3k}{4}$,Suy ra $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{5}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\dfrac{\ln\ \sin x+\cos x}{\sin^2 x}, y=0, x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{\pi}{2}$ là $S=\dfrac{\pi}{a}+b\ln\sqrt{c}$ với $a\in\mathbb{Z}$ và b,c là các số nguyên tố. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\ \sin x+\cos x}{\sin^2 x}dx$

$$\begin{cases} u=\ln\ \sin x+\cos x \Rightarrow du=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx \\ dv=\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \Rightarrow v=-\cot x-1=\dfrac{-\ \cos x+\sin x}{\sin x} \end{cases}$$

$$S=\frac{-\ \cos x+\sin x}{\sin x}.\ln\ \sin x+\cos x\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}dx$$

$$S=2\ln\sqrt{2}+\ \ln\left|\sin x\right|-x\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-\pi}{4}+3\ln\sqrt{2}$$

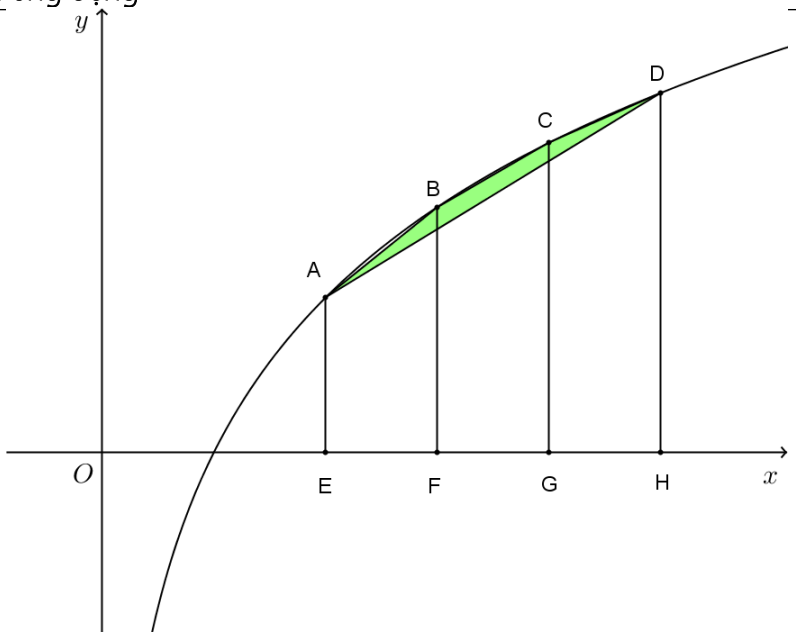
Suy ra $a+b+c=-4+3+2=1$.

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, xét tứ giác có diện tích bằng $\ln\dfrac{91}{90}$; các đỉnh có hoành độ là các số nguyên liên tiếp và nằm trên đồ thị của hàm số $y=\ln x$. Hãy tính tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất:

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A



Giả sử các điểm A; B; C; D thuộc đồ thị của hàm số $y=\ln x$ có hoành độ lần lượt là a; $a+1$; $a+2$; $a+3$ và các điểm E; F; G; H thuộc trục Ox có hoành độ lần lượt là a; $a+1$; $a+2$; $a+3$, trong đó $a\in\mathbb{N}^*$.

Ta có: $S_{ABCD}=S_{ABFE}+S_{BCGF}+S_{CDHG}-S_{ADHE}$

$=\frac{1}{2}\left[\ln a+\ln(a+1)\right]+\frac{1}{2}\left[\ln(a+1)+\ln(a+2)\right]+\frac{1}{2}\left[\ln(a+2)+\ln(a+3)\right]-\frac{3}{2}\left[\ln a+\ln(a+3)\right]$

$\Rightarrow \ln\frac{91}{90}=\ln\frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)}\Leftrightarrow a^2+3a-180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=12\\a=-15\ (loại)\end{array}\right.$

Khi đó hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất là $x_D=15$.

Vậy tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất là $1+5=6$.

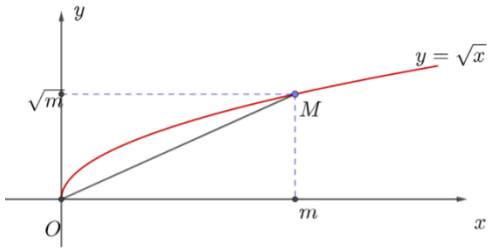
Câu 32: Cho hàm số $y=\sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM. Biết $\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{b}$ **(với** $a,b\in\mathbb{N}^*$ **và** $\frac{a}{b}$ **là phân số tối giản)**, giá trị của $a+b$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

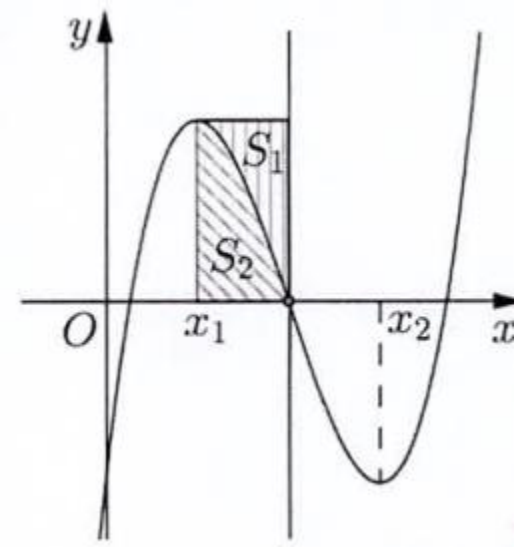
Chọn B

Gọi $M\left(m;\sqrt{m}\right)\in(C)$ với $m>0$. Khi đó, $OM: y=\frac{1}{\sqrt{m}}x$.



Ta có $S_1 = \int_0^m \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{m^3}$ và $S_2 = \int_0^m \left[\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{m}}x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sqrt{m^3}$. Do đó $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$. Vậy $a+b=5$.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$.

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Ta có $f(x_1)+f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)=0 \Rightarrow C+8a-12a+C=0 \Rightarrow C=2a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a=a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]$.

$$f(x)=0 \Rightarrow a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1+1-\sqrt{3} \\ x=x_1+1 \\ x=x_1+1+\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Suy ra $S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}x$

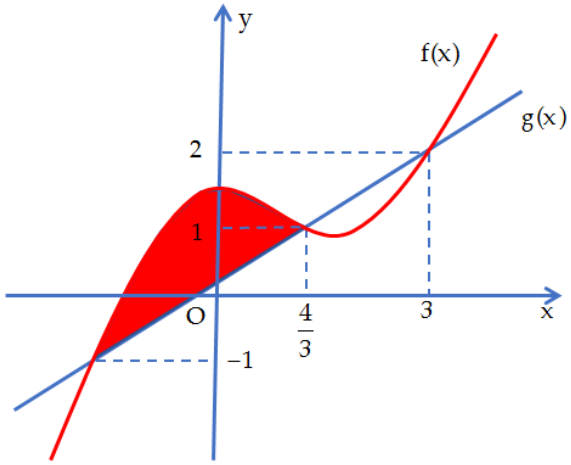
$=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}(x-x_1)$

$=a\left[\frac{(x-x_1)^4}{4}-(x-x_1)^3+2(x-x_1)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\frac{5a}{4}$.

Mặt khác ta có $S_1+S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x_1)\mathrm{d}x=f(x_1)\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\mathrm{d}x=f(x_1)=2a \Rightarrow S_1=2a-S_2=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 34: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình S **(được tô màu)** bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.



A. $\frac{61}{48}$. **B.** $\frac{34}{27}$. **C.** $\frac{17}{15}$. **D.** $\frac{43}{35}$.

Lời giải

Chọn A

◆ Giả sử $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d; g(x)=ex+f$

Do đồ thị hàm số $g(x)=ex+f$ đi qua $(\frac{4}{3};1);(3;2)$ nên suy ra $g(x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$

Và có $\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=-1\Leftrightarrow x=-2$

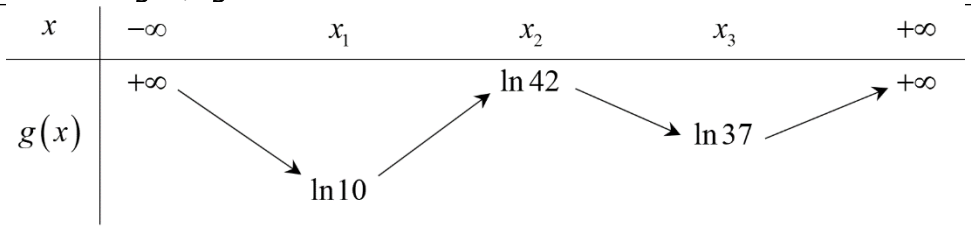
◆ Có pthđ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+d-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}=a(x+2)(x-\frac{4}{3})(x-3)$ (*)

Và $S=\int_{-2}^{\frac{4}{3}} a(x+2)(x-\frac{4}{3})(x-3)dx=a.\frac{5000}{243}=\frac{250}{81}\Leftrightarrow a=\frac{3}{20}$

◆ Từ **(*)** đồng nhất các hệ số tìm được $b=-\frac{7}{20}; c=-\frac{1}{10}; d=\frac{7}{5}$

◆ Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\frac{3}{20}x^3-\frac{7}{20}x^2-\frac{1}{10}x+\frac{7}{5})dx=\frac{61}{48}$.

Câu 35. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38;39)$. **B.** $(25;26)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(35;36)$.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

+ Từ bảng biến thiên ta thấy $g(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{g(x)}>1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

+ Phương trình $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x).f(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x).\left[f(x)-1\right]=0\Leftrightarrow g'(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right..$$

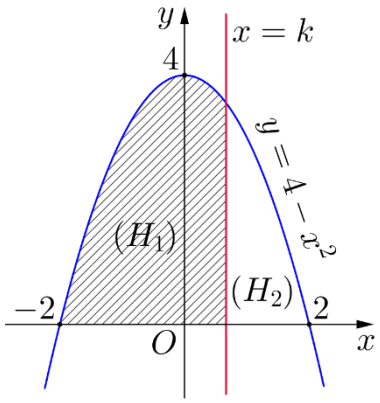
+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\overset{t=f(x)}{=}\left|\int_{10}^{42}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{42}^{37}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\right|\approx 35,438\in(35;36).$$

DẠNG 10.2 Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng

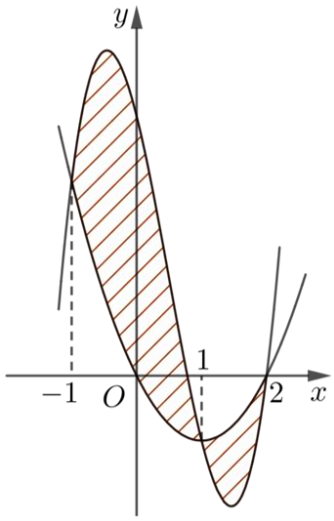
Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=4-x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x=k$ $(-2<k<2)$ chia (H) thành hai phần (H_1), (H_2) như hình vẽ dưới:



Biết rằng diện tích của hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2), hỏi giá trị của k thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

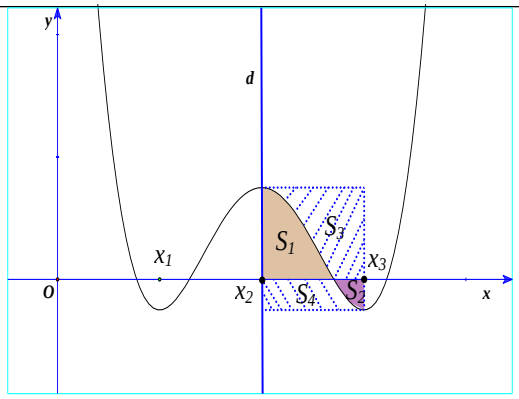
Câu 2: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+4$ và $g(x)=mx^2+nx$ có đồ thị trong hình bên.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

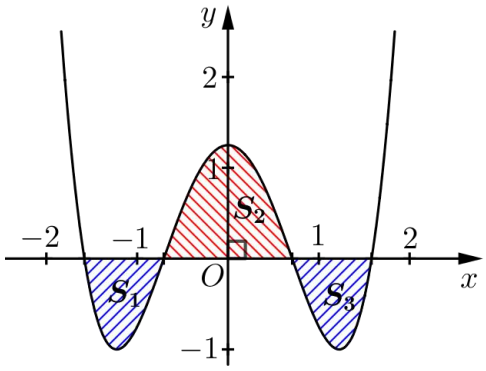
A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{37}{12}$. **D.** $\frac{37}{6}$.

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_3=x_1+2$, $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$ và (C) nhận đường thẳng $d:x=x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1,S_2,S_3,S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$ gần kết quả nào nhất?



A. 1.62. **B.** 1.68. **C.** 1.64. **D.** 1.66.

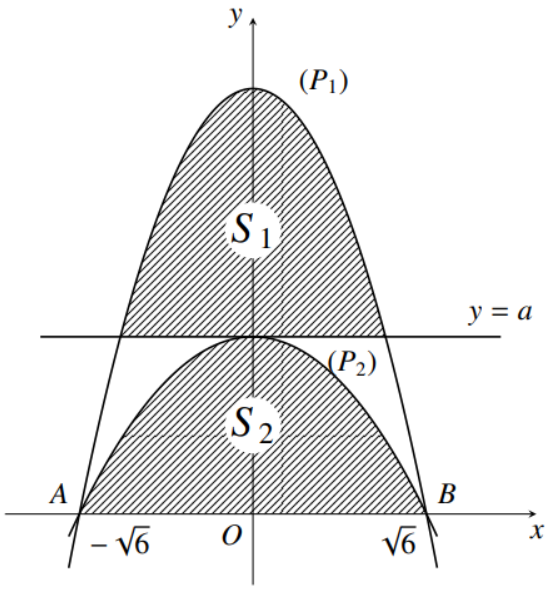
Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ dưới:



Gọi S_1; S_2; S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $m = -\frac{5}{2}$. **B.** $m = \frac{5}{4}$. **C.** $m = -\frac{5}{4}$. **D.** $m = \frac{5}{2}$.

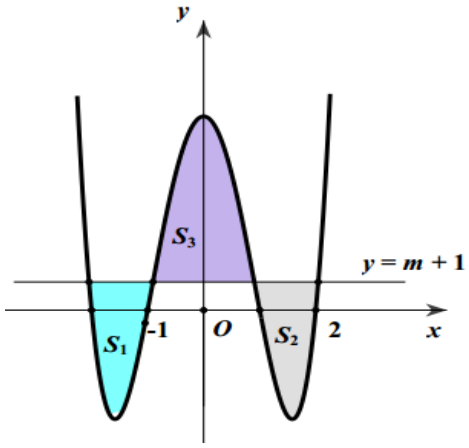
Câu 5: Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d: y = a\ (0 < a < 6)$. Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ).



Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 12a^2 + 108a$.

A. $T = 218$. **B.** $T = 219$. **C.** $T = 216$. **D.** $T = 217$.

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt đường thẳng $d: y = m + 1$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3. Biết rằng khi $S_1 + S_2 = S_3$ thì m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản $m = -\dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của $P = b - a$ bằng



A. 19. **B.** 21. **C.** 53. **D.** 17.

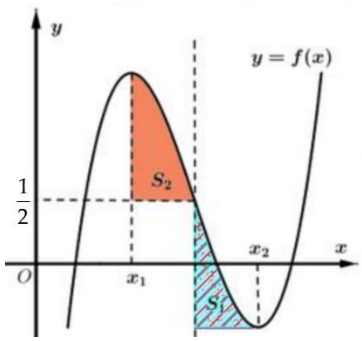
Câu 7: Cho hàm số $y = \sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và đường thẳng đi qua M vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM. Biết $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{a}{b}$, giá trị của $a + b$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 19. **D.** 21.

Câu 8: Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$. $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$?

A. $\dfrac{115}{3}$. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{112}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

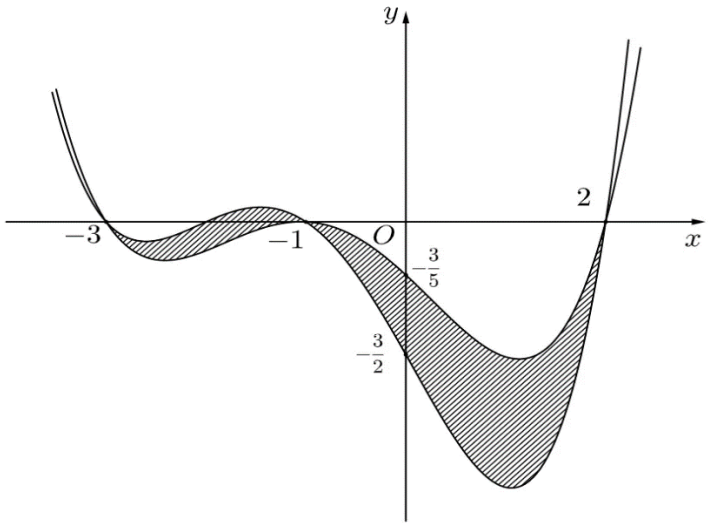


A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 10: Cho parabol $(P): y=-4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB=2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB.

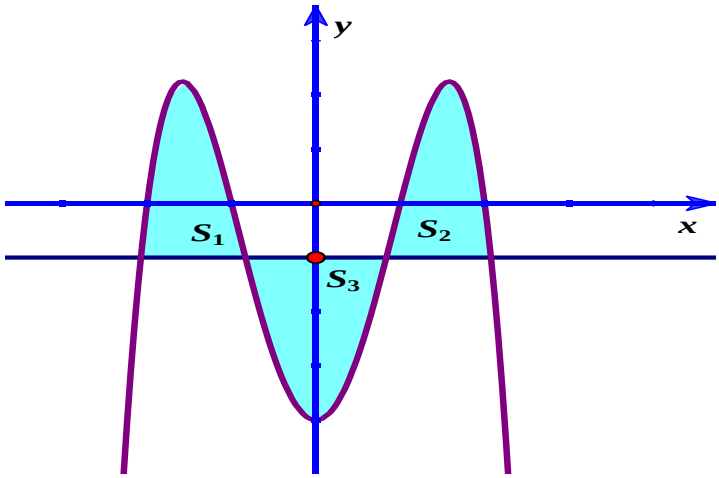
A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 4.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2$ và tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng -3. Diện tích hình phẳng (H) (Phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần với kết quả nào dưới đây?



A. $3,11$. **B.** $2,45$. **C.** $3,21$. **D.** $2,95$.

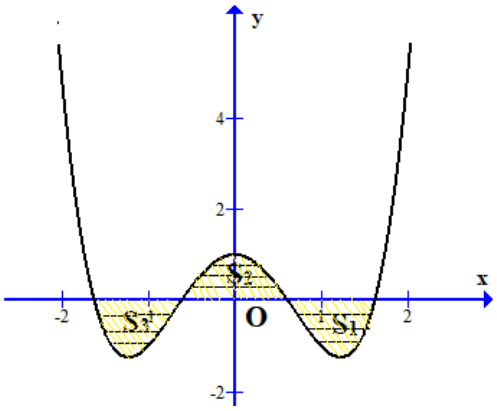
Câu 12: Đồ thị (C) của hàm số $y=-x^4+5x^2-4$ cắt đường thẳng $(d): y=m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 (như hình vẽ).



Biết rằng khi $S_1+S_2=S_3$ thì giá trị của m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{p}{q}$, trong đó $q\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{Z}$. Tính $T=p+q$.

A. $T=55$. **B.** $T=17$. **C.** $T=-55$. **D.** $T=-17$.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



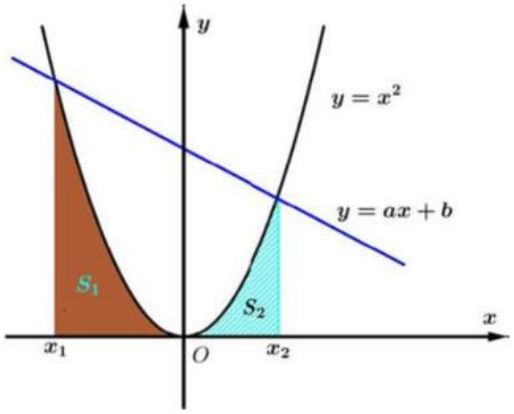
Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các phần gạch được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1+S_3=S_2$ là

A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=\frac{5}{4}$. **C.** $m=-\frac{5}{4}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$ có đồ thị (C). Gọi E là một điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại E cắt (C) tại điểm thứ hai F và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng EF với (C) bằng $\frac{27}{64}$. Tiếp tuyến của (C) tại F cắt (C) tại điểm thứ hai Q. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng FQ với (C) bằng

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{27}{8}$. **C.** $\frac{459}{64}$. **D.** $\frac{135}{64}$.

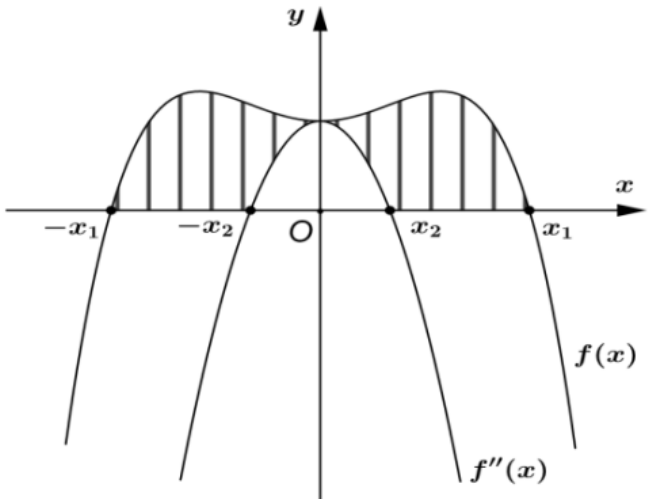
Câu 15: Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=f(x)=ax+b$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+3$ và $f(x_1)+f(x_2)=5$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình. Tổng S_1+S_2 bằng



A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{8}{3}$.

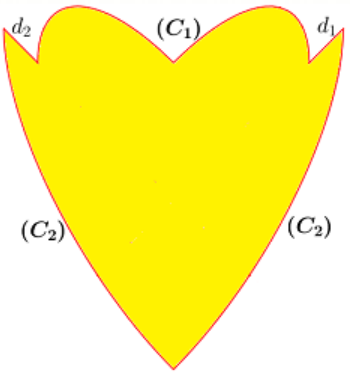
Câu 16: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+1, (a\neq 0, a, b\in\mathbb{R})$ mà đồ thị hàm số $f''(x)$ và đồ thị hàm số $f(x)$ có một điểm chung duy nhất và nằm trên trục Oy (hình vẽ), trong đó $\pm x_1$ là nghiệm của

$f(x)$ và $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x)$, $(x_1, x_2 > 0)$. Biết $x_1 = 3x_2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $f(x)$, $f''(x)$ và trục Ox.



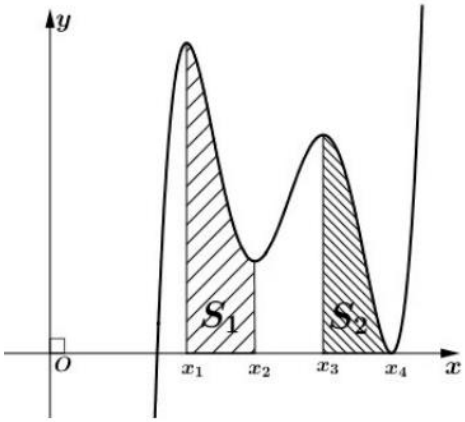
A. $\frac{152}{45}$. **B.** $\frac{73}{15}$. **C.** $\frac{152}{15}$. **D.** $\frac{73}{45}$.

Câu 17: Hình (H) được cho dưới đây là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường $(C_1): y = |x| + \sqrt{16 - x^2}$, $(C_2): y = |x| - \sqrt{25 - x^2}$ và hai đoạn thẳng $(d_1): y = x$ với $x \in [4;5]$, $(d_2): y = -x$ với $x \in [-5;-4]$. Tính diện tích S của hình (H).



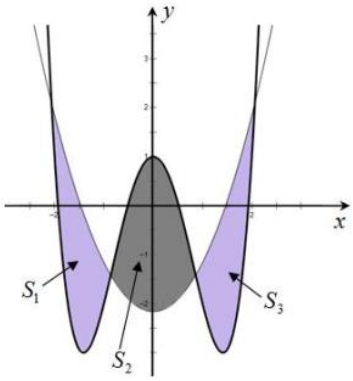
A. $\frac{41\pi}{2}$. **B.** $\frac{41\pi}{4}$. **C.** $\frac{41}{2}$. **D.** $\frac{41}{4}$.

Câu 18: Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Biết x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai $d = 1$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{11}{7}$. **D.** $\frac{17}{11}$.

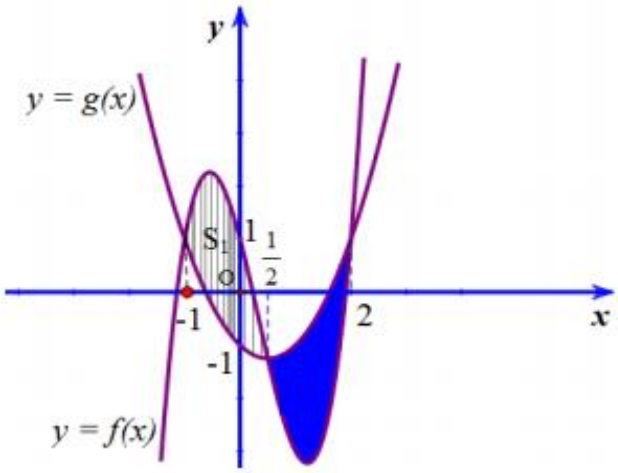
Câu 19: Cho hàm số bậc bốn $y=x^4-4x^2+1$ và parabol $y=x^2-k$, với $k\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_1+S_3=S_2$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{3}{7}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{5};\frac{11}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{4};3\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{7};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 20: Cho hai hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=mx^2+nx+k$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $-1;\frac{1}{2};2$ và có đồ thị như hình vẽ

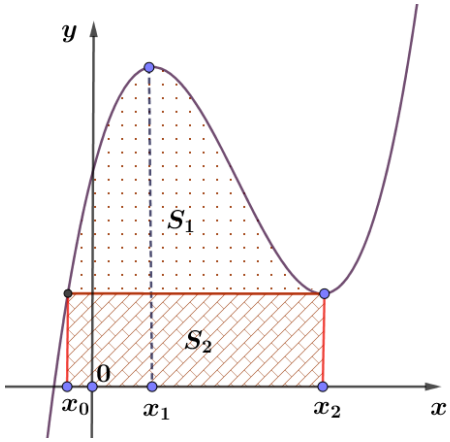


Biết diện tích phần hình kẻ sọc (hình S_1) bằng $\frac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}, x=2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{79}{24}$. **B.** $\frac{243}{96}$. **C.** $\frac{81}{32}$. **D.** $\frac{45}{16}$.

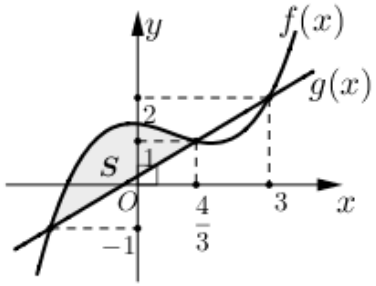
Câu 21: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$. Đường thẳng song song với trục Ox

và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{9}{8}$.

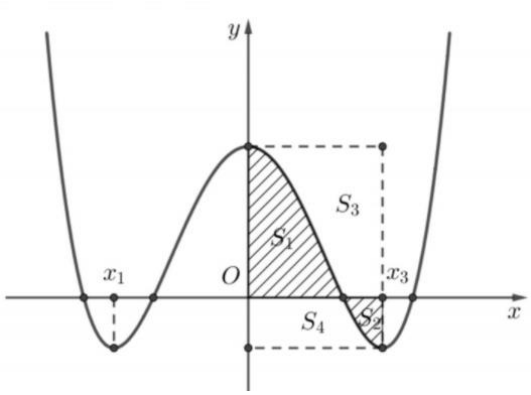
Câu 22: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

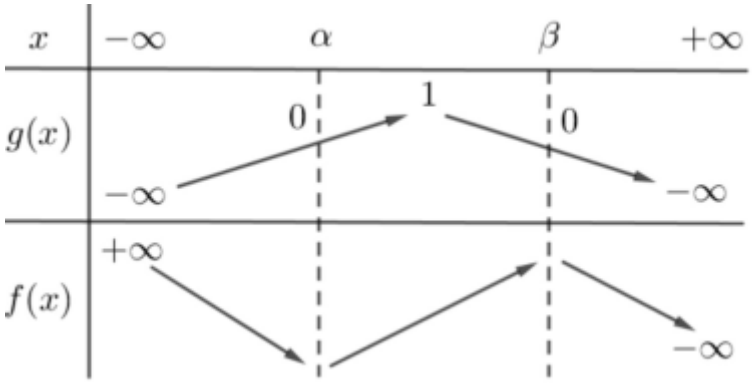
A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{38}{15}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{34}{15}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1; x_2; x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 0,65. **B.** 0,7. **C.** 0,55. **D.** 0,6.

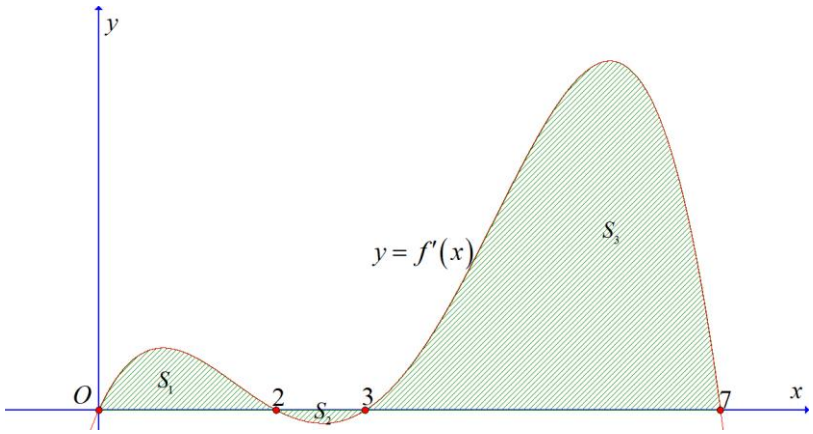
Câu 24: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+2x^2+bx+1$ và $g(x)=cx^2+4x+d$ có bẳng biến thiên như sau



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=9$. Khi đó điện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; $y=g(x)$; $x=1$; $x=2$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

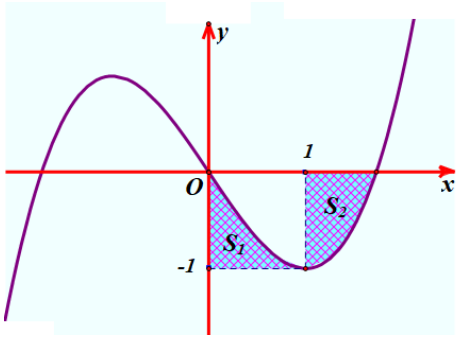
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;7]$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;7]$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(2x-1)$, biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là $S_1=\frac{244}{15}$, $S_2=\frac{28}{15}$, $S_3=\frac{2528}{15}$ và $f(0)=1$, tính $g(4)$.

A. $\frac{2759}{15}$. **B.** $\frac{2744}{15}$. **C.** $\frac{5518}{15}$. **D.** $\frac{563}{3}$.

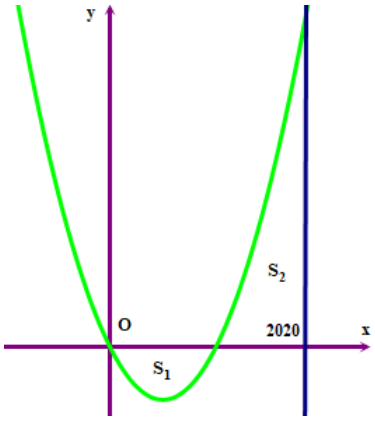
Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên.



Biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$ và $f(x)+1$ và $f(x)-1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính S_1+S_2.

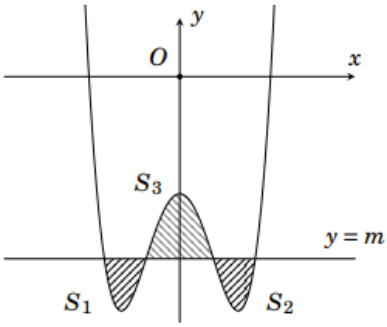
A. $\frac{7}{8}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^2-mx\ (0<m<2020)$ có đồ thị (C). Gọi S_1+S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2020$. Giá trị của m sao cho $S_2=S_1$ là



A. $m=\frac{4040}{3}$ **B.** $m=\frac{4041}{3}$ **C.** $m=\frac{2021}{3}$ **D.** $m=\frac{2020}{3}$

Câu 28: Đồ thị $(C): y=2x^4-4x^2-2$ cắt đường thẳng $d: y=m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết rằng $S_1+S_2=S_3$, khi đó $m=-\frac{a}{b}$ ở dạng tối giản với $a,b\in\mathbb{N}$. Tính giá trị của $T=a+b$.



A. $T=-19$. **B.** $T=19$. **C.** $T=1$. **D.** $T=37$.

$$\int_0^{x_3}(2x^4-4x^2-2-m)\mathrm{d}x=\int_{x_3}^{x_4}(-2x^4+4x^2+2+m)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4}(2x^4-4x^2-2-m)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}-(2+m)x\right)\Big|_0^{x_4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}-(2+m)x_4=0$$

$$\Leftrightarrow 6x_4^4-20x_4^2-15(2+m)=0.$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_4^4-4x_4^2-2-m=0 \\ 6x_4^4-20x_4^2-15(2+m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_4^4-40x_4^2=0 \\ 6x_4^4-20x_4^2-15(2+m)=0 \end{cases}$$

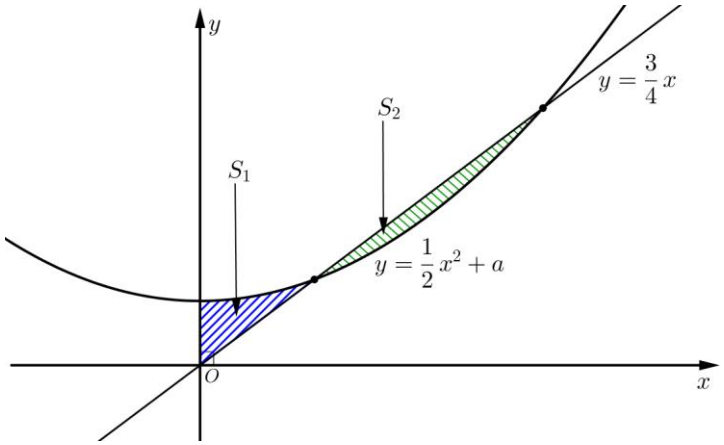
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_4^2=0(l) \\ x_4^2=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ 6x_4^4-20x_4^2-15(2+m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2=\dfrac{5}{3} \\ m=-\dfrac{28}{9}\ (\text{TM}) \end{cases}$$

Vậy $m=-\dfrac{28}{9}$. Do đó $a=28$, $b=9$.

Suy ra $T=a+b=37$.

Câu 29: (Bỏ)

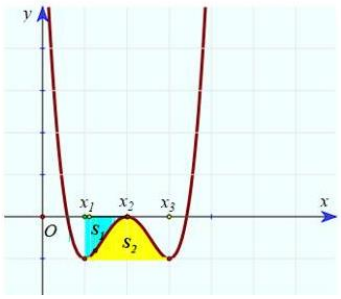
Câu 30: Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{4}x$ và parabol $y=\dfrac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

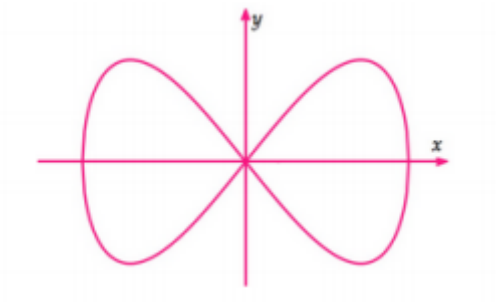
A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{32}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{7}{32};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{16};\dfrac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{3}{16}\right)$.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm $x_1, x_2, x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ thoả mãn $x_1+x_2=4$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được tô màu trong hình. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng?



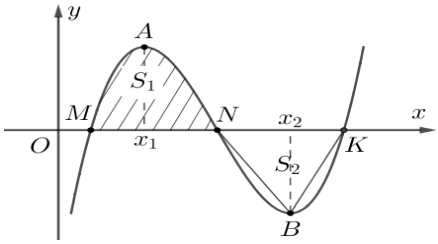
A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{7}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{15}$.

Câu 32: Một hình phẳng được tạo thành từ đường cong lemniscate (đường cong số 8 của Bernoulli) có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $x^4 = a^2\left(x^2 - y^2\right)(a > 0)$ như hình vẽ bên. Biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài $1m$ và hình phẳng này có diện tích là $\frac{49}{3}\left(m^2\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



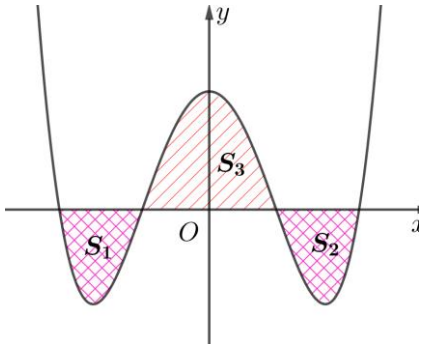
A. $1 < a < 2$. **B.** $2 < a < 3$. **C.** $3 < a < 4$. **D.** $4 < a < 5$.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C); M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK. Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



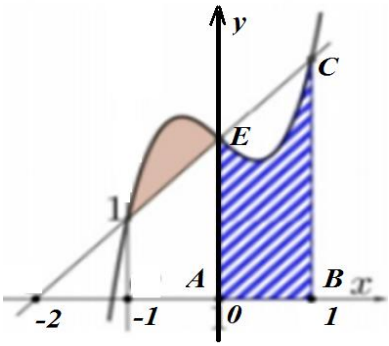
A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng nằm dưới trục Ox và S_3 là diện tích hình phẳng nằm trên trục Ox được tạo bởi (C_m) với trục Ox. Biết rằng tồn tại duy nhất giá trị $m = \frac{a}{b}$ với ($a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) để $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị $2a - b$ bằng:



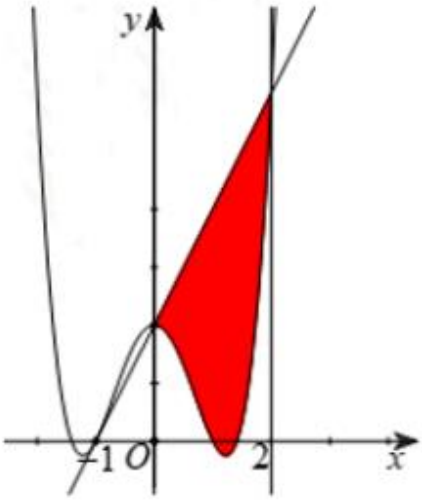
A. 3. **B.** −4. **C.** 6. **D.** −2.

Câu 35: Cho hàm số bậc 3 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và đường thẳng d: $g(x)=mx+n$ có đồ thị như hình vẽ. Nếu phần tô màu đen có diện tích bằng $\frac{1}{2}$, thì phần gạch chéo có diện tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

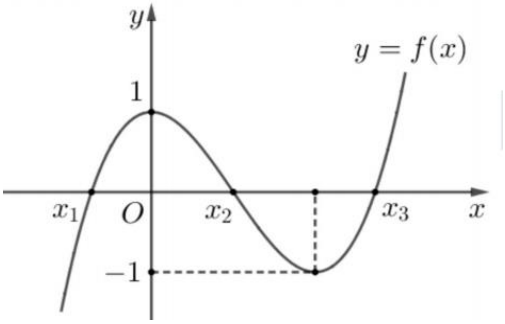
Câu 36: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0;x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), d và hai đường thẳng $x=-1;x=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

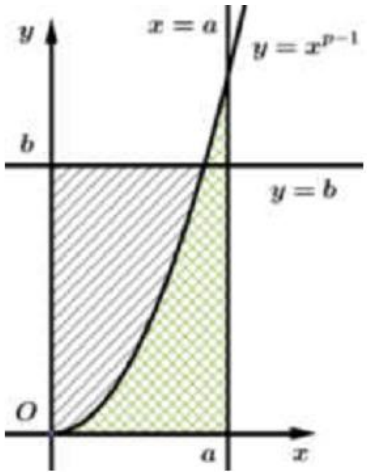
Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S, diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)+1$, $y = -f(x)-1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

A. $S + 2\sqrt{3}$. **B.** $S + 4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

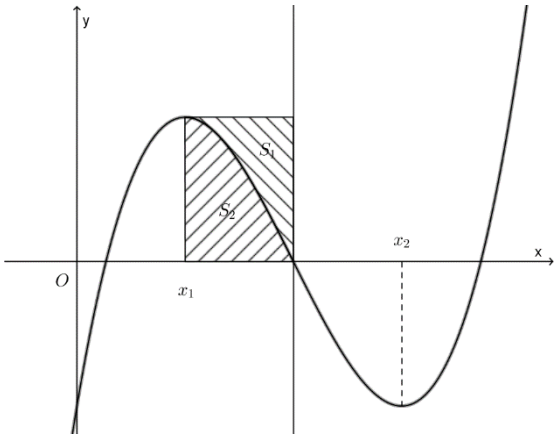
Câu 38: Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số: $y = x^{p-1}\ (x > 0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$.



Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?

A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \ge ab$. **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge ab$.

Câu 39: Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

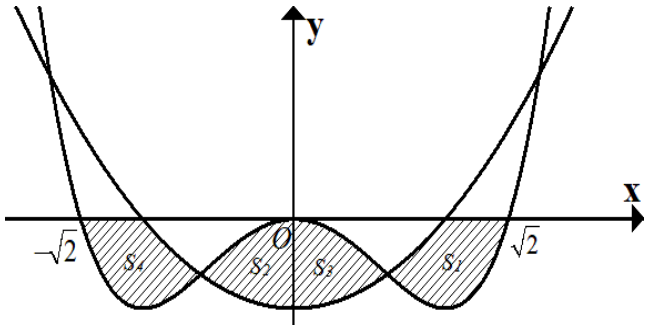
Câu 40: Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị (C), biết rằng tồn tại hai điểm A,B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A,B và đường thẳng vuông góc với hai tiếp tuyến tại A,B tạo thành một hình chữ nhật (H) có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật (H). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{125}{768}$. **D.** $\frac{125}{128}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị (C), biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng pháp tuyến của hai tiếp tuyến đó tạo thành một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các tiếp tuyến và pháp tuyến tại A,B. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

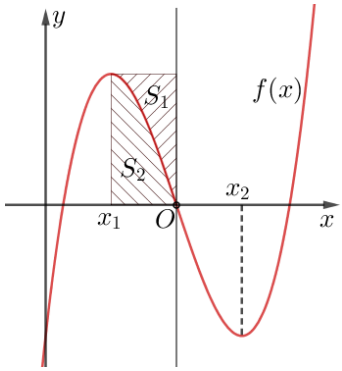
A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{125}{768}$. **D.** $\frac{125}{128}$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2$ và hàm số $y=g(x)=x^2-m^2$, với $0<m<\sqrt{2}$ là tham số thực. Gọi S_1,S_2,S_3,S_4 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Ta có diện tích $S_1+S_4=S_2+S_3$ tại m_0. Chọn mệnh đề đúng.



A. $m_0\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\frac{2}{3};\frac{7}{6}\right)$. **C.** $m_0\in\left(\frac{7}{6};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m_0\in\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

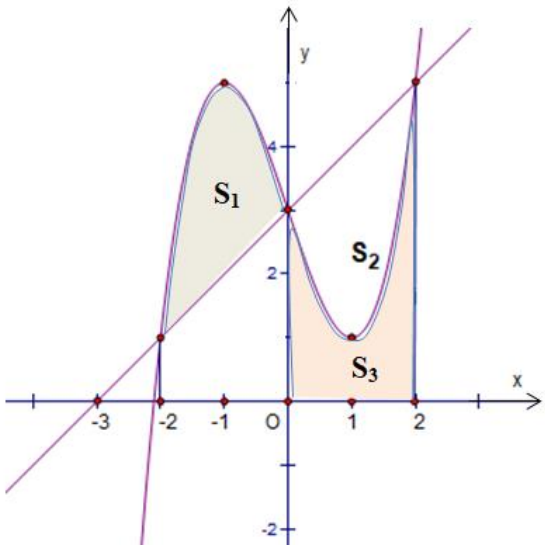
Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

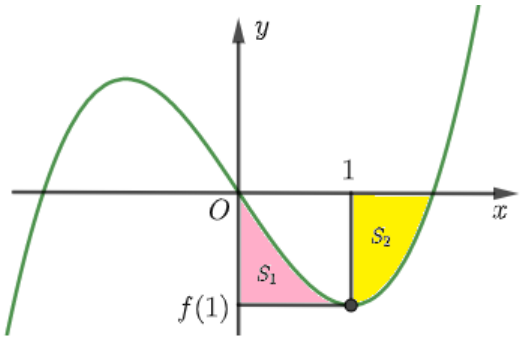
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và đường thẳng $d: g(x)=mx+n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1=4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



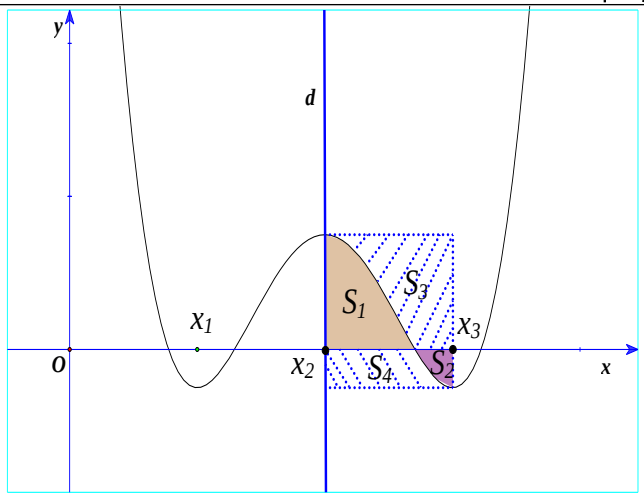
A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $[f(x)+1]$ và $[f(x)-1]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2+8S_1$



A. 4 **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 9

Câu 46: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3=x_1+2$, $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x=x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$ gần kết quả nào nhất

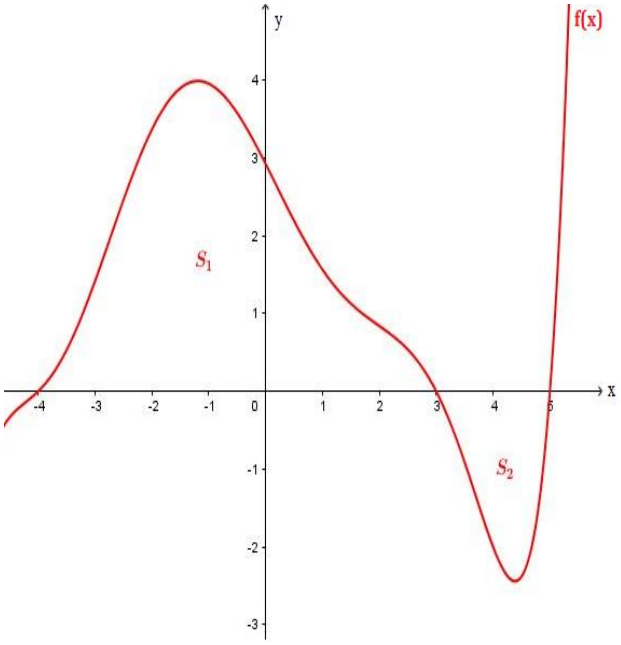


A. $0,60$. **B.** $0,55$. **C.** $0,65$. **D.** $0,70$.

Câu 47: Cho parabol $(P): y=-4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB=2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB.

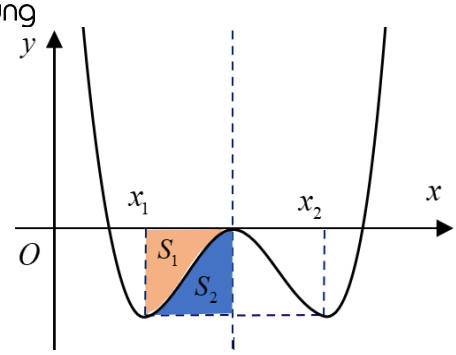
A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 4.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong tạo với trục Ox hai vùng có diện tích S_1, S_2 (như hình vẽ). Biết rằng $S_1=4S_2$ và $\int_{-4}^{5} f(x)\mathrm{d}x=24$. Tính S_1+S_2



A. 24. **B.** 40. **C.** 35. **D.** Không thể xác định

Câu 49: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ thoả mãn $x_2=x_1+2$ và đồ thị nhận đường thẳng $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ làm trục đối xứng. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích của phần hình phẳng được in màu trong hình bên. Biết $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản, $a; b\in\mathbb{Z}$, tính $a+b$.



A. $a+b=13$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=15$. **D.** $a+b=9$.

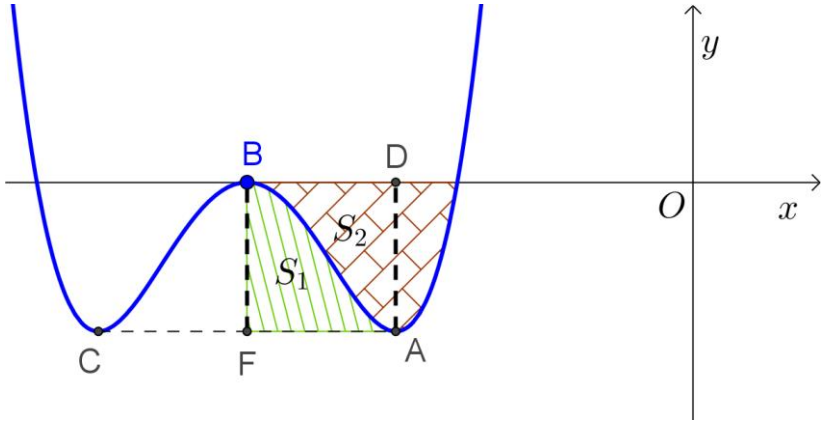
Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x)<0\,\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$, $f(3)=-\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C):y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2-\ln 3-1$. **B.** $8\ln 2-3\ln 3-1$.
C. $4\ln 2-3\ln 3-1$. **D.** $8\ln 2+3\ln 3-1$.

Câu 51: Cho parabol $(P):y=x^2-kx+k-4$, với k là tham số. Gọi S diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành, giá trị nhỏ nhất của S là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** 5.

Câu 52: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Biết đồ thị hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm $C(x_1;y_1), B(x_2;y_2), A(x_3;y_3)$ $(x_1<x_2<x_3)$ thỏa: $x_1=x_3-2$ và hình vuông $BFAD$ có diện tích bằng 1. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch trên hình vẽ bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$

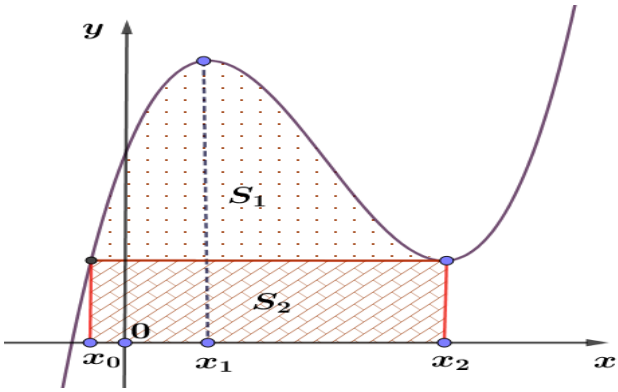
A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{15}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{15}$.

Câu 53: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính k_1-k_2.

A. $\frac{13}{2}$. **B.** 7. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

Câu 54: Hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục và qua điểm cực tiểu của đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$.

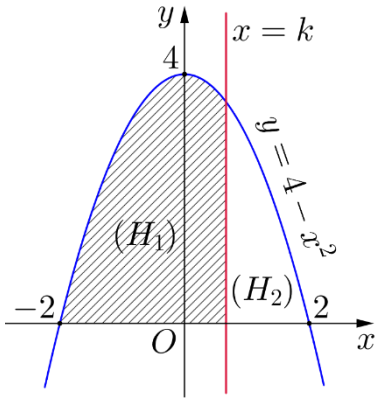
Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=4-x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x=k$ $(-2<k<2)$ chia (H) thành hai phần (H_1), (H_2) như hình vẽ dưới:



Biết rằng diện tích của hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2), hỏi giá trị của k thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4-x^2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2\Rightarrow$parabol $y=4-x^2$ giao với trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là -2 và 2.

Diện tích của hình (H_1) là $S_1=\int\limits_{-2}^{k}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{k}=4k-\frac{k^3}{3}+\frac{16}{3}$.

Diện tích của hình (H_2) là $S_2=\int\limits_{k}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{k}^{2}=\frac{16}{3}-4k+\frac{k^3}{3}$.

Vì diện tích của hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2) nên ta có phương trình:

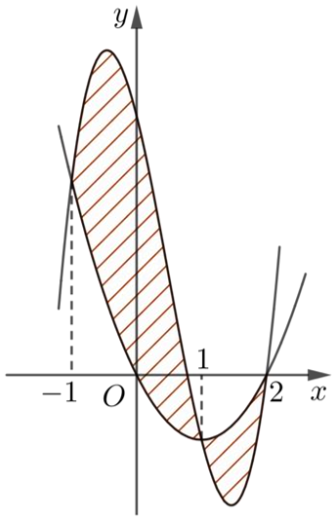
$$4k-\frac{k^3}{3}+\frac{16}{3}=\frac{20}{7}\left(\frac{16}{3}-4k+\frac{k^3}{3}\right)\Leftrightarrow 7\left(4k-\frac{k^3}{3}+\frac{16}{3}\right)=20\left(\frac{16}{3}-4k+\frac{k^3}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9k^3-108k+\frac{208}{3}=0\Leftrightarrow\left(k-\frac{2}{3}\right)\left(9k^2+6k-104\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k-\frac{2}{3}=0\\9k^2+6k-104=0\end{array}\right.$$

- Trường hợp 1: $k-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$ (thỏa mãn).
- Trường hợp 2: $9k^2+6k-104=0\Leftrightarrow k=\frac{\pm\sqrt{105}-1}{3}$ (loại).

Vậy $k\in(0;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+4$ và $g(x)=mx^2+nx$ có đồ thị trong hình bên.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{37}{12}$. **D.** $\frac{37}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là hàm số bậc ba và $g(x)$ là hàm số bậc hai nên $f(x)-g(x)$ là hàm số bậc ba.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra ta có: $f(x)-g(x)=k.(x+1)(x-1)(x-2)$

Mặt khác ta có: $f(0)-g(0)=4 \Rightarrow k=2$.

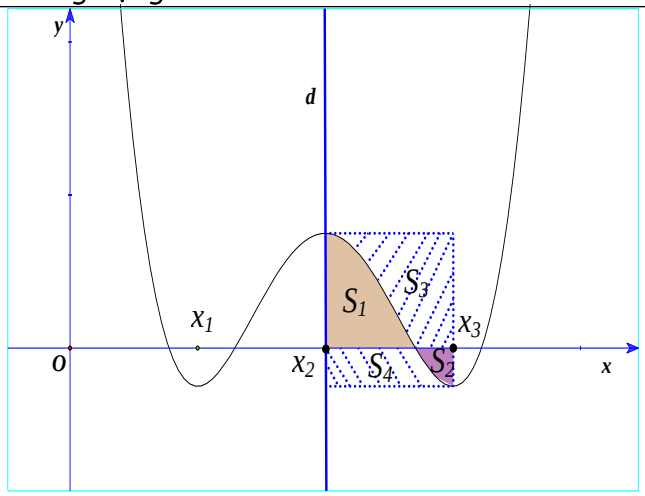
$\Rightarrow f(x)-g(x)=2(x+1)(x-1)(x-2)=2x^3-4x^2-2x+4$

Vậy ta có diện tích phần gạch chéo là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{2}\left|2x^3-4x^2-2x+4\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x^3-4x^2-2x+4)\mathrm{d}x-\int_{1}^{2}(2x^3-4x^2-2x+4)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}+\frac{5}{6}=\frac{37}{6}.$$

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_3=x_1+2$, $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$ và (C) nhận đường thẳng $d: x=x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1,S_2,S_3,S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$ gần kết quả nào nhất?



A. 1.62. **B.** 1.68. **C.** 1.64. **D.** 1.66.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d: x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k\left(x^4 - 2x^2\right) + c \ (k > 0)$

Lại có $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3} f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$

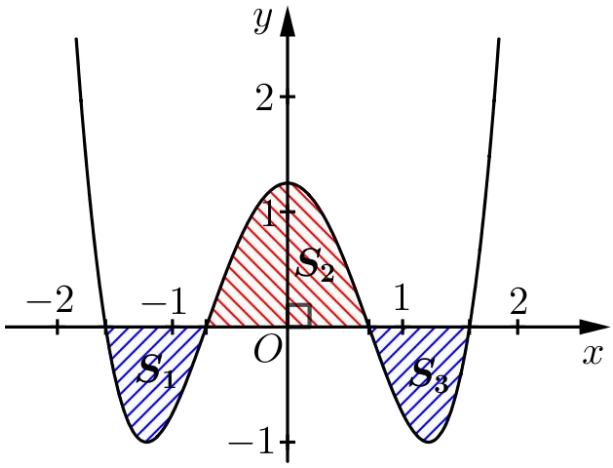
Suy ra: $y = g(x) = k\left(x^4 - 2x^2\right) + \frac{3}{4}k$

Khi đó: $S_1 + S_2 = k\int_0^1 \left|x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right| dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k$.

Ta lại có: $g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k.1 = k$.

Suy ra $S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60}k \Rightarrow \frac{S_3 + S_4}{S_1 + S_2} = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{28\sqrt{2} - 17} = 1.655 \approx 1.66.$

Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ dưới:



Gọi S_1; S_2; S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=\frac{5}{4}$. **C.** $m=-\frac{5}{4}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của (C_m) với trục Ox là nghiệm của phương trình: $x^4-3x^2+m=0\ (1)$.

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$, ta được phương trình: $t^2-3t+m=0\ (2)$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt cùng dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-4m>0\\3>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{9}{4}\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}$.

Khi đó: Gọi k là nghiệm dương lớn nhất của phương trình (1). Ta có: $k^4-3k^2+m=0\ (3)$.

Theo đề bài: $S_1+S_3=S_2$ và $S_1=S_3\Rightarrow S_2=2S_3\Rightarrow\int\limits_0^k f(x)\mathrm{d}x=0$.

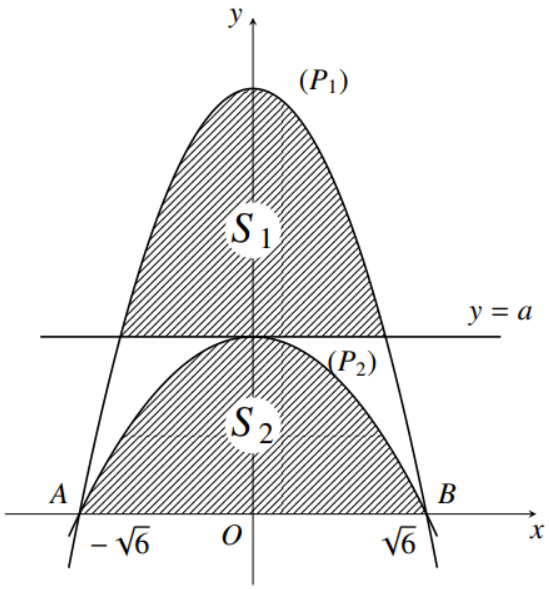
Mà $\int\limits_0^k f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^k\left(x^4-3x^2+m\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}-x^3+mx\right)\Big|_0^k=\frac{k^5}{5}-k^3+mk=k\left(\frac{k^4}{5}-k^2+m\right)$.

Suy ra $k\left(\frac{k^4}{5}-k^2+m\right)=0\Leftrightarrow\frac{k^4}{5}-k^2+m=0$ (do $k>0$) (4).

Từ (3) và (4) suy ra $k^4-3k^2-\frac{k^4}{5}+k^2=0\Leftrightarrow 2k^4-5k^2=0\Leftrightarrow 2k^2-5=0\Leftrightarrow k^2=\frac{5}{2}$.

Thay $k^2=\frac{5}{2}$ vào (3), ta được: $\left(\frac{5}{2}\right)^2-3\cdot\frac{5}{2}+m=0\Leftrightarrow-\frac{5}{4}+m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{4}$ (thỏa mãn).

Câu 5: Cho parabol $(P_1):y=-x^2+6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B và đường thẳng $d:y=a\ (0<a<6)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ).



Biết $S_1=S_2$, tính $T=a^3-12a^2+108a$.

A. $T=218$. **B.** $T=219$. **C.** $T=216$. **D.** $T=217$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+6=a$

$\Leftrightarrow x^2=6-a$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6-a}$.

Khi đó $S_1=2\int\limits_0^{\sqrt{6-a}}\left(-x^2+6-a\right)=2\left(-\frac{x^3}{3}+6x-ax\right)\Big|_0^{\sqrt{6-a}}=\frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a}$.

Tọa độ giao điểm A,B là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=-x^2+6\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{6}\Rightarrow y=0\\x=-\sqrt{6}\Rightarrow y=0\end{array}\right.$.

Vậy $A\left(-\sqrt{6};0\right),B\left(\sqrt{6};0\right)$.

Gọi $(P_2):y=mx^2+nx+p$.

Vì parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$ nên

$$\begin{cases}6m+\sqrt{6}n+p=0\\6m-\sqrt{6}n+p=0\\p=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0\\p=a\\m=-\frac{a}{6}\end{cases}\Rightarrow(P_2):y=-\frac{a}{6}x^2+a.$$

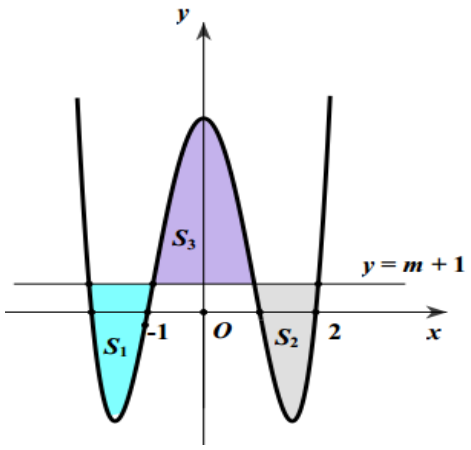
Do đó $S_2=2\int\limits_0^{\sqrt{6}}\left(-\frac{a}{6}x^2+a\right)dx=2\left(-\frac{ax^3}{18}+ax\right)\Big|_0^{\sqrt{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{6}a}{3}+\sqrt{6}a\right)=\frac{4\sqrt{6}a}{3}$.

Theo đề bài

$S_1=S_2\Leftrightarrow\frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a}=\frac{4\sqrt{6}a}{3}\Leftrightarrow(6-a)^3=6a^2\Leftrightarrow216-108a+18a^2-a^3=6a^2$

$\Leftrightarrow a^3-12a^2+108a=216$.

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y=x^4-5x^2+4$ cắt đường thẳng $d:y=m+1$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1,S_2,S_3. Biết rằng khi $S_1+S_2=S_3$ thì m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản $m=-\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Giá trị của $P=b-a$ bằng



A. 19. **B.** 21. **C.** 53. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Để d cắt tại bốn điểm phân biệt thì $-\frac{13}{4}<m<3$.

Giả sử PT có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<0<x_3<x_4$.

Do tính đối xứng của đồ thị nên từ giả thiết $S_1+S_2=S_3$ nên $S_2=\frac{S_3}{2}$

$$\int_0^{x_3}\left(x^4-5x^2+3-m\right)\mathrm{d}x=-\int_{x_3}^{x_4}\left(x^4-5x^2+3-m\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^{x_4}\left(x^4-5x^2+3-m\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+(3-m)x\right)\Big|_0^{x_4}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_4^5-\frac{5}{3}x_4^3+(3-m)x_4=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x_4^4-\frac{5}{3}x_4^2+3-m=0$$

Mà x_4 là nghiệm của PT nên ta có $\begin{cases}x_4^4-5x_4^2+3-m=0\\ \frac{1}{5}x_4^4-\frac{5}{3}x_4^2+3-m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_4^2=\frac{25}{6}\\ m=-\frac{17}{36}\end{cases}$.

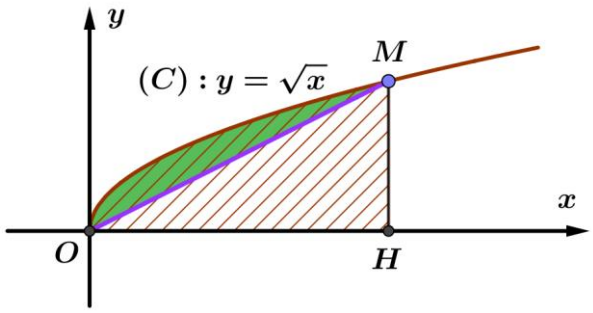
Vậy $P=b-a=36-17=19$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và đường thẳng đi qua M vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM. Biết $\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{b}$, giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;\sqrt{a})\in(C)$, $a>0$. Ta có: $S_1=\int_0^a\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}a\sqrt{a}$;

$S_2=S_1-S_{\Delta OMH}=\frac{2}{3}a\sqrt{a}-\frac{1}{2}a\sqrt{a}=\frac{1}{6}a\sqrt{a}$ với H là hình chiếu của M lên trục Ox.

Suy ra $\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{4}$. Vậy $a+b=5$.

Câu 8: Hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; hàm số bậc hai $y=g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$. $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2;3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1),(C_2)$?

A. $\frac{115}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{112}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2;3$ nên đa thức bậc ba $f(x)-g(x)$ có ba nghiệm $-1;2;3$. Do đó, $f(x)-g(x)=a(x+1)(x-2)(x-3)$, với $a\neq 0$.

Mặt khác vì (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$ nên $f(1)=0, g(1)=-4$.

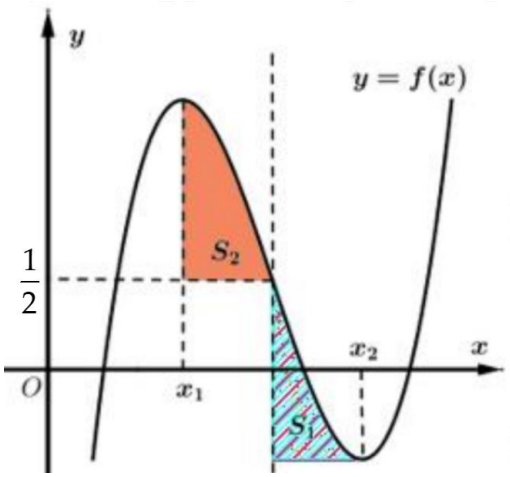
Do đó, $f(1)-g(1)=4$

Suy ra $a(1+1)(1-2)(1-3)=4$ hay $a=1$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1),(C_2)$ là

$\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\left|(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{6}$ (đvdt).

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

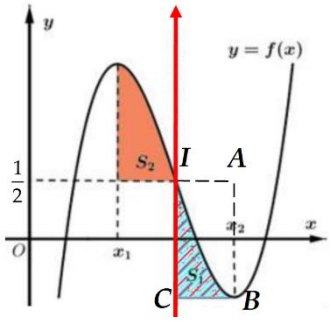
Không mất tính tổng quát, tịnh tiến đồ thị hàm bậc ba $y=f(x)$ sao cho điểm uốn của đồ thị thuộc trục tung $\Rightarrow x_1+x_2=0$. Lại có $x_2=x_1+2$ nên $x_1=-1, x_2=1$.

Theo giả thiết, ta có $f'(x)=k(x-1)(x+1)=k(x^2-1)$ với $k>0$.

Suy ra $f(x)=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C$.

Do $f(-1)+f(1)=1\Leftrightarrow \frac{2k}{3}+C-\frac{2k}{3}+C=1\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$

Suy ra $f(x)=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+\frac{1}{2}$ và $f(x_2)=f(1)=-\frac{2k}{3}+\frac{1}{2}$.



Ta có $S_2=\int\limits_{-1}^{0}\left[f\left(x\right)-\frac{1}{2}\right]dx=\int\limits_{-1}^{0}k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dx=\frac{5k}{12}$.

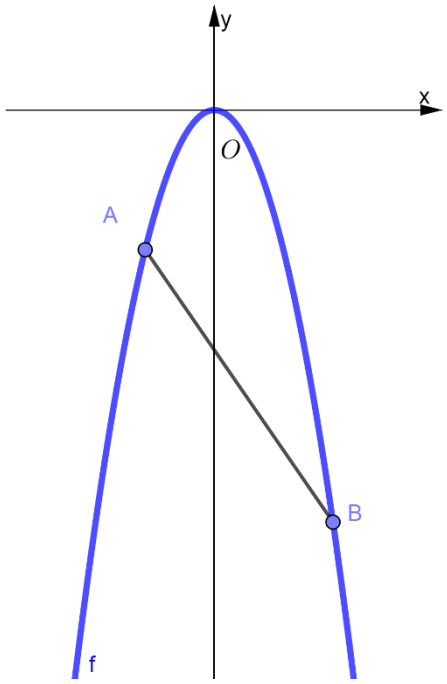
Xét $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{IABC}-S_2}{S_2}=\frac{BC.IC}{S_2}-1=\frac{1.\left|\frac{1}{2}-f\left(1\right)\right|}{S_2}-1=\frac{\frac{2k}{3}}{\frac{5k}{12}}-1=\frac{3}{5}$.

Câu 10: Cho parabol $\left(P\right):y=-4x^2$ và hai điểm A,B trên $\left(P\right)$ sao cho đoạn $AB=2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và đường thẳng AB.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



+) Giả sử $A\left(a;-4a^2\right)\in\left(P\right)$, $B\left(b;-4b^2\right)\in\left(P\right)$ và $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$

+) Phương trình đường thẳng AB là $y=-4\left(b+a\right)\left(x-a\right)-4a^2$

$y=-4\left(b+a\right)x+4ab$

+) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và đường thẳng AB là

$S=\int\limits_{a}^{b}\left[-4x^2+4\left(a+b\right)x-4ab\right]dx=\left(-\frac{4x^3}{3}+2\left(a+b\right)x^2-4abx\right)\Big|_a^b=\frac{2}{3}b^3-\frac{2}{3}a^3+2a^2b-2ab^2$

$=\frac{2}{3}\left(b^3-a^3+3a^2b-3ab^2\right)=\frac{2}{3}(b-a)^3$

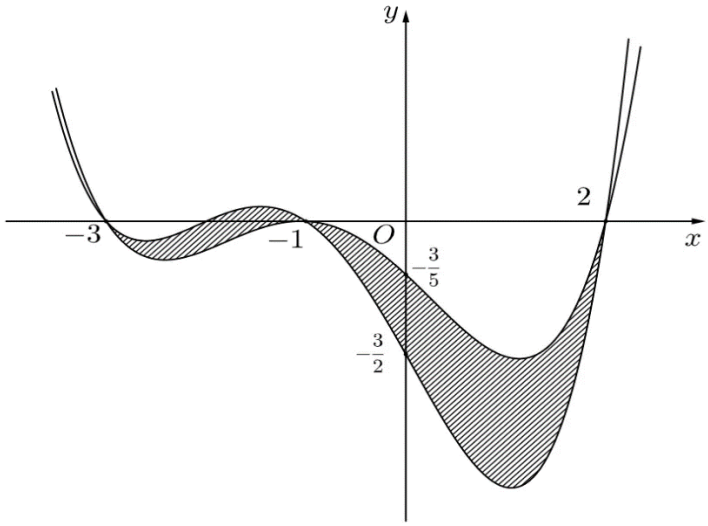
+) Mà $AB=2\Rightarrow(b-a)^2+16\left(b^2-a^2\right)^2=4\Leftrightarrow(b-a)^2=\frac{4}{1+16(b+a)^2}\le 4\Rightarrow -2\le b-a\le 2$

Do đó $S\le\frac{16}{3}$.

Dấu bằng khi $\begin{cases}a+b=0\\ \left[\begin{array}{l}b-a=2\\ b-a=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$..

Vậy GTLN của S là $\frac{16}{3}$.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2$ và tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng -3. Diện tích hình phẳng (H) (Phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần với kết quả nào dưới đây?



A. $3{,}11$. **B.** $2{,}45$. **C.** $3{,}21$. **D.** $2{,}95$.

Lời giải

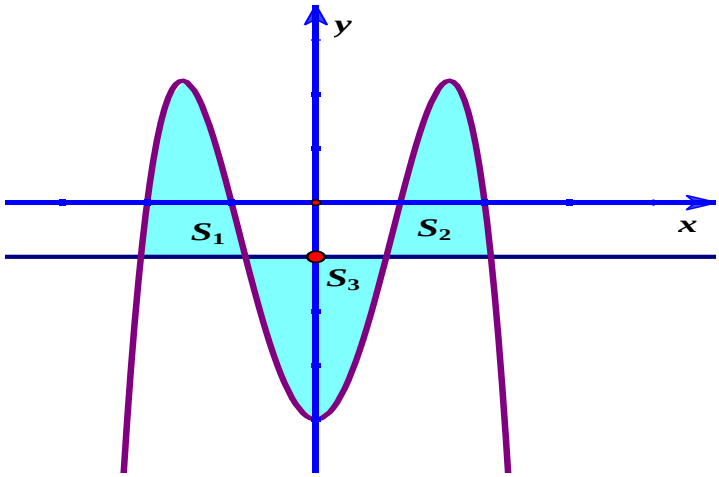
Chọn A

Theo giả thiết tại điểm có hoành độ $x=-3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc nhau nên ta có: $f(x)-g(x)=\frac{1}{-18}\left(-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right)(x+3)^2(x+1)(x-2)$.

Khi đó, Diện tích hình phẳng (H) (Phần gạch sọc trên hình vẽ) là:

$S_{(H)}=\int_{-3}^{2}\left[\frac{1}{-18}\left(-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right)(x+3)^2(x+1)(x-2)\right]dx=\frac{3733}{1200}\approx 3{,}11$.

Câu 12: Đồ thị (C) của hàm số $y=-x^4+5x^2-4$ cắt đường thẳng $(d):y=m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1,S_2,S_3 (như hình vẽ).



Biết rằng khi $S_1+S_2=S_3$ thì giá trị của m là một số hữu tỉ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{p}{q}$, trong đó $q\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{Z}$. Tính $T=p+q$.

A. $T=55$. **B.** $T=17$. **C.** $T=-55$. **D.** $T=-17$.

Lời giải

Chọn B

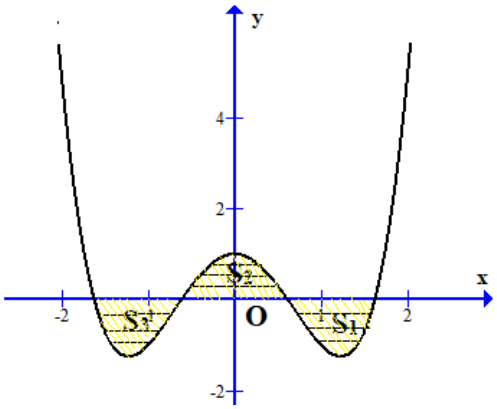
Giả sử (C_m) cắt (d) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là $-x_2;\ -x_1;\ x_1;\ x_2\ (0<x_1<x_2)$

Do (C_m) đối xứng nhau qua trục Oy nên $S_1=S_2=\frac{1}{2}S_3$

$$\Rightarrow -\int_0^{x_1}\left(f(x)-m\right)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-m\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^{x_2}\left(f(x)-m\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow-\frac{x_2^5}{5}+\frac{5x_2^3}{3}-(4+m)x_2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{x_2^4}{5}+\frac{5x_2^2}{3}-4-m=0\ (\text{do } x_2\neq 0).$$

Câu 13: Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1,S_2,S_3 là diện tích các phần gạch được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1+S_3=S_2$ là

A. $\mathrm{m}=-\frac{5}{2}$. **B.** $\mathrm{m}=\frac{5}{4}$. **C.** $\mathrm{m}=-\frac{5}{4}$. **D.** $\mathrm{m}=\frac{5}{2}$.

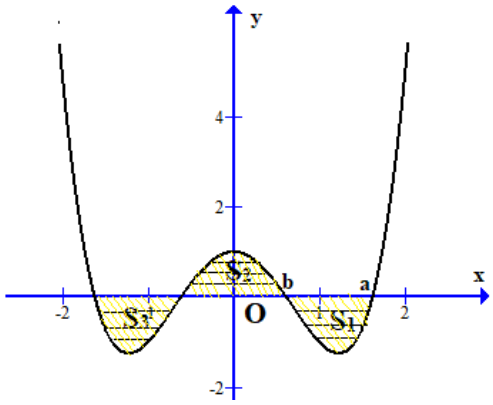
Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox là $x^4-3x^2+m=0\ (*)$

(C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2-3t+m=0$, với $(t=x^2, t\ge 0)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=9-4m>0\\ P=m>0\\ S=3>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\dfrac{9}{4}$

Gọi $x=a, x=b$ $(b<a)$ là hai nghiệm dương của phương trình $(*)$, suy ra $a^4-3a^2+m=0$ (1)



Do $\begin{cases}S_1=S_3\\ S_1+S_3=S_2\end{cases}$ ta có $\dfrac{1}{2}S_2=S_1 \Leftrightarrow \int\limits_0^b |f(x)|dx=\int\limits_b^a |f(x)|dx \Leftrightarrow \int\limits_0^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^a f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^a (x^4-3x^2+m)dx=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}a^5-a^3+ma=0 \Leftrightarrow a^4-5a^2+5m=0\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}a^4-3a^2+m=0\\ a^4-5a^2+5m=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^4-3a^2+m=0\\ 4a^4-10a^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{5}{4}\\ a^2=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

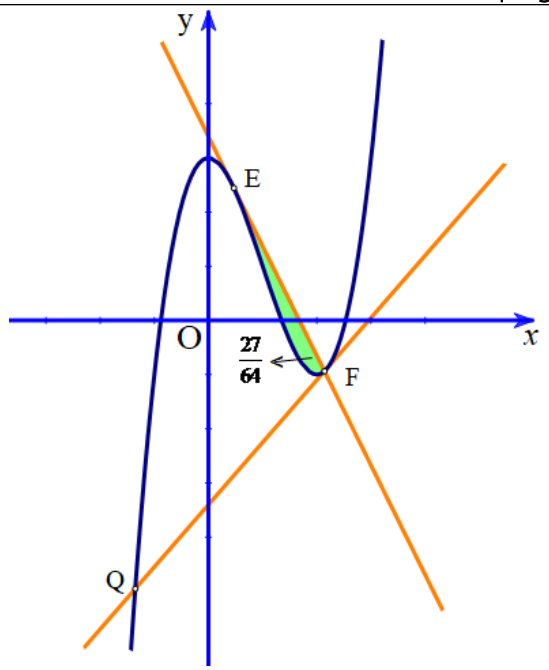
Kết hợp điều kiện có nghiệm, vậy $m=\dfrac{5}{4}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3$ có đồ thị (C). Gọi E là một điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại E cắt (C) tại điểm thứ hai F và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng EF với (C) bằng $\dfrac{27}{64}$. Tiếp tuyến của (C) tại F cắt (C) tại điểm thứ hai Q. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng FQ với (C) bằng

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** $\dfrac{27}{8}$. **C.** $\dfrac{459}{64}$. **D.** $\dfrac{135}{64}$.

Lời giải

Chọn A



Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là $(C), M\left(x_M;y_M\right)\in(C)$ bất kỳ và không trùng với điểm uốn của đồ thị. Khi đó

Bổ đề 1: Tiếp tuyến của (C) tại điểm M sẽ cắt đồ thị tại điểm thứ hai $N\left(x_N;y_N\right)$ và

$$x_N+\frac{b}{3a}=-2\left(x_M+\frac{b}{3a}\right)$$

Bổ đề 2: Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M với đồ thị (C). Ta có

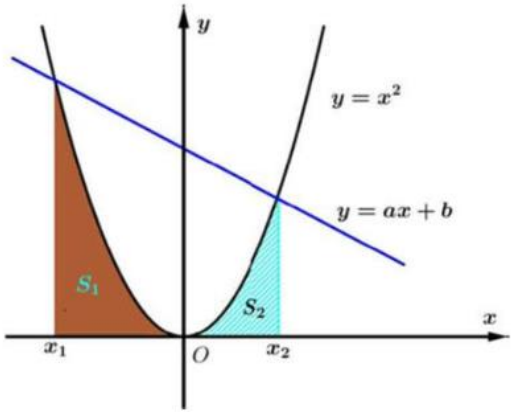
$$S=\left|\frac{27}{4}a\left(x_M+\frac{b}{3a}\right)^4\right|$$

Áp dụng **(E ≡ M,N ≡ F)**

ta có $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{27}{4}|a|\left(x_M+\frac{b}{3a}\right)^4}{\frac{27}{4}|a|\left(x_N+\frac{b}{3a}\right)^4}=\left(\frac{x_M+\frac{b}{3a}}{x_N+\frac{b}{3a}}\right)^4=\left(\frac{x_M+\frac{b}{3a}}{-2\left(x_M+\frac{b}{3a}\right)}\right)^4=\frac{1}{16}$

Vậy $S_2=16S_1=16.\frac{27}{64}=\frac{27}{4}$.

Câu 15: Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=f(x)=ax+b$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+3$ và $f(x_1)+f(x_2)=5$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình. Tổng S_1+S_2 bằng



A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 = ax+b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$

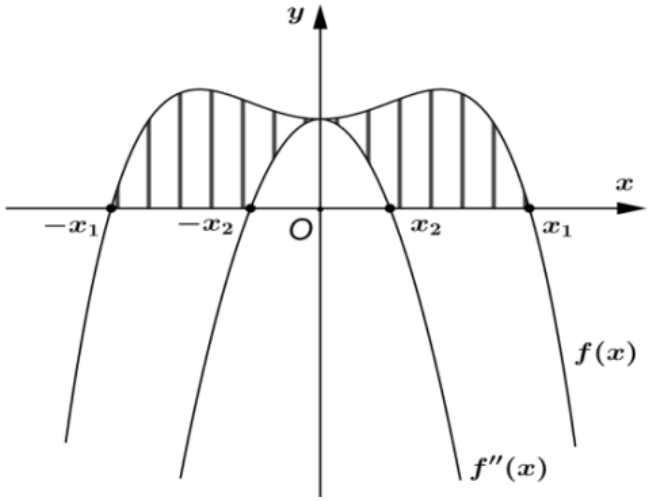
Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên $x_1 + x_2 = a;\ x_1x_2 = -b$.

Ta có $\begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ f(x_1) + f(x_2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ 5 = x_1^2 + x_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + 2x_1x_2 = 9 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

Từ đồ thị ta có

$$S_1 + S_2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} = \frac{(x_2 - x_1)^3 + 3x_1x_2(x_2 - x_1)}{3} = \frac{3^3 + 9(-b)}{3} = 3.$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1, (a \neq 0, a, b \in \mathbb{R})$ mà đồ thị hàm số $f''(x)$ và đồ thị hàm số $f(x)$ có một điểm chung duy nhất và nằm trên trục Oy (hình vẽ), trong đó $\pm x_1$ là nghiệm của $f(x)$ và $\pm x_2$ là nghiệm của $f''(x)$, $(x_1, x_2 > 0)$. Biết $x_1 = 3x_2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $f(x)$, $f''(x)$ và trục Ox.



A. $\frac{152}{45}$. **B.** $\frac{73}{15}$. **C.** $\frac{152}{15}$. **D.** $\frac{73}{45}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1 \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 2b, (a \neq 0, a, b \in \mathbb{R})$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $f''(x)$ là $ax^4+bx^2+1=12ax^2+2b$.

Theo bài ra ta có $x=0$ là nghiệm của phương trình nên $2b=1\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$. Do đó $f(x)=ax^4+\frac{1}{2}x^2+1,\ f''(x)=12ax^2+1$.

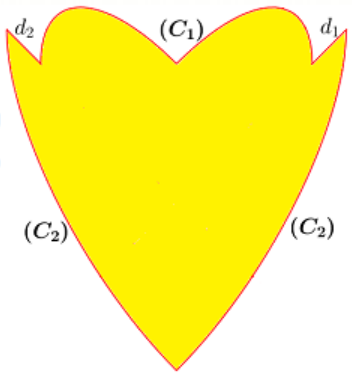
Ta có $f''(x)=0\Leftrightarrow 12ax^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{12a}$, có nghiệm khi $a<0$ nên $x_2^2=-\frac{1}{12a}$ với $a<0$.

Do $a<0$ nên $\frac{-1-\sqrt{1-16a}}{4a}>0, \frac{-1+\sqrt{1-16a}}{4a}<0$ do đó $x_1^2=\frac{-1-\sqrt{1-16a}}{4a}$.

Ta có $x_1=3x_2$ nên $x_1^2=9x_2^2\Leftrightarrow\frac{-1-\sqrt{1-16a}}{4a}=-\frac{9}{12a}\Leftrightarrow 1+\sqrt{1-16a}=3\Leftrightarrow a=-\frac{3}{16}$

Do vậy $f(x)=-\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{2}x^2+1, f''(x)=-\frac{9}{4}x^2+1$, $x_1^2=4, x_2^2=\frac{4}{9}$ nên diện tích hình phẳng cần tính là $\int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{2}x^2+1\right)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{9}{4}x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{152}{45}$.

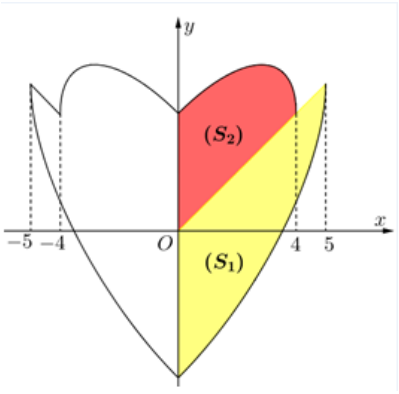
Câu 17: Hình (H) được cho dưới đây là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường $(C_1): y=|x|+\sqrt{16-x^2}$, $(C_2): y=|x|-\sqrt{25-x^2}$ và hai đoạn thẳng $(d_1): y=x$ với $x\in[4;5], (d_2): y=-x$ với $x\in[-5;-4]$. Tính diện tích S của hình (H).



A. $\frac{41\pi}{2}$. **B.** $\frac{41\pi}{4}$. **C.** $\frac{41}{2}$. **D.** $\frac{41}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Xét phương trình

$|x|+\sqrt{16-x^2}=x,\ x\in[4;5]\Leftrightarrow x+\sqrt{16-x^2}=x,\ x\in[4;5]$

$\Leftrightarrow\sqrt{16-x^2}=0,\ x\in[4;5]\Leftrightarrow x=4$

Xét phương trình

$|x|+\sqrt{25-x^2}=x,\ x\in[4;5]\Leftrightarrow x+\sqrt{25-x^2}=x,\ x\in[4;5]$

$\Leftrightarrow\sqrt{25-x^2}=0,\ x\in[4;5]\Leftrightarrow x=5$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x-\sqrt{25-x^2}, y=x, x=0, x=5$ được tô màu trong hình bên, suy ra $S_1=\int_0^5\left(x-\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)\right)dx=\int_0^5\sqrt{25-x^2}dx$.

Đặt $x=5\cos t\Rightarrow dx=-5\sin t dt$. Với $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};\ x=5\Rightarrow t=0$.

Vậy:

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{25-25\cos^2 t}\left(-5\sin t\right)dt=25\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=\frac{25}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{25}{4}\pi$$

Gọi S_2 là điện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{16-x^2}, y=x, x=0, x=4$ được tô màu trong hình bên, suy ra $S_2=\int_0^4\left(\left(x+\sqrt{16-x^2}\right)-x\right)dx=\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx$.

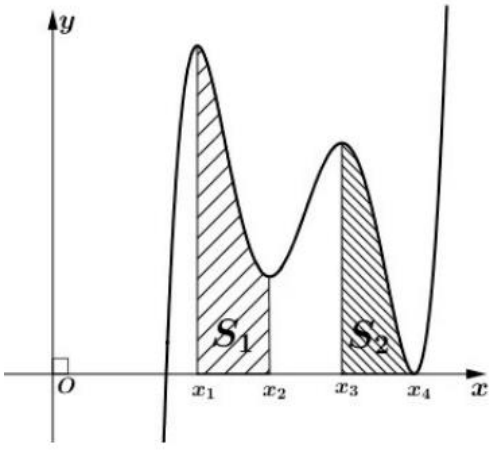
Đặt $x=4\cos t\Rightarrow dx=-4\sin t dt$. Với $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};\ x=4\Rightarrow t=0$.

Vậy:

$$S_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{16-16\cos^2 t}\left(-4\sin t\right)dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=8\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi$$

Diện tích cần tính bằng $S=2\left(S_1+S_2\right)=\frac{41}{2}\pi$.

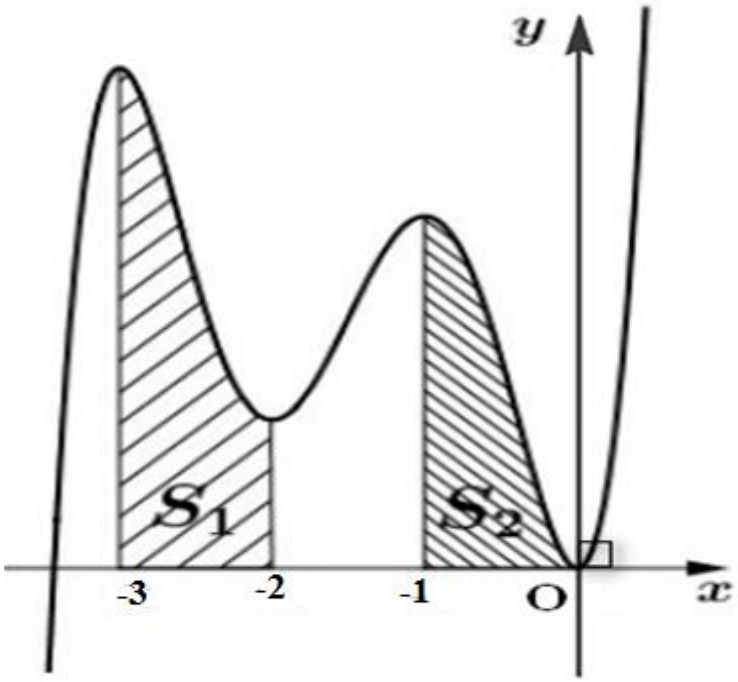
Câu 18: Cho hàm đa thức bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Biết x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai $d=1$. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{11}{7}$. **D.** $\frac{17}{11}$.

Lời giải

Chọn C



Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái x_4 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=g(x)$

Ta thấy x_1,x_2,x_3,x_4 là cực trị của hàm số $y=f(x)$ mà x_1,x_2,x_3,x_4 lập thành cấp số cộng có công sai

$d=1\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ có bốn điểm cực trị là $0;-1;-2;-3$

$g'(x)=kx(x+1)(x+2)(x+3)=k\left(x^4+6x^3+11x^2+6x\right)$

$g(x)=\int k\left(x^4+6x^3+11x^2+6x\right)dx=k\left(\frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3+3x^2\right)+C$

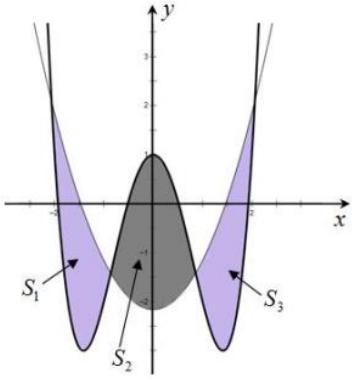
$g(0)=0\Rightarrow C=0\quad g(x)=k\left(\frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3+3x^2\right)$

$\Rightarrow S_1=\int\limits_{-3}^{-2}\left|g(x)\right|dx=k\int\limits_{-3}^{-2}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3+3x^2\right)dx=\frac{11k}{20}$

$\Rightarrow S_2=\int\limits_{-1}^{0}\left|g(x)\right|dx=k\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+\frac{11}{3}x^3+3x^2\right)dx=\frac{7k}{20}$

$\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{11}{7}$

Câu 19: Cho hàm số bậc bốn $y=x^4-4x^2+1$ và parabol $y=x^2-k$, với $k\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_1 + S_3 = S_2$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{3}{7}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{5};\frac{11}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{4};3\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{7};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

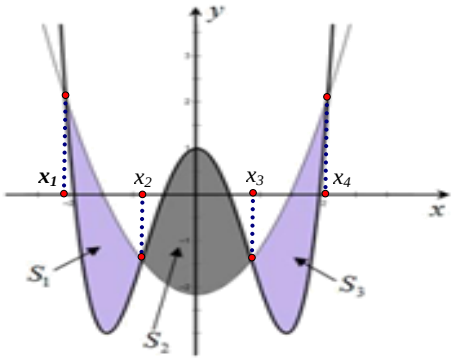
$x^4 - 4x^2 + 1 = x^2 - k \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 1 + k = 0\ (1)$.

Đặt $t = x^2$, $t > 0$ phương trình (1) trở thành $t^2 - 5t + 1 + k = 0\ (2)$.

Theo bài ra thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt $t > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4(1+k) > 0 \\ 5 > 0 \\ 1 + k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \frac{21}{4} \\ k > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{21}{4}\ (*)$$

Khi đó hai đồ thị giao nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, với x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình (1)



Do $S_1 = S_3$ và $S_1 + S_3 = S_2$ nên $S_2 = 2S_1$.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + (1+k)$

Diện tích $S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left|x^4 - 5x^2 + (1+k)\right| dx = -F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = -\left[F(x_2) - F(x_1)\right]$.

Diện tích $S_2 = \int_{x_2}^{x_3} \left|x^4 - 5x^2 + (1+k)\right| dx = F(x)\Big|_{x_2}^{x_3} = F(x_3) - F(x_2)$

Ta có

$2S_1 = S_2 \Leftrightarrow -2\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$

$\Leftrightarrow -2\left[F(x_2)-F(x_1)\right] = F(x_3)-F(x_2) \Leftrightarrow 2F(x_1) = F(x_2)+F(x_3)$ (3)

Do $F(x)$ là hàm số lẻ và $x_2 = -x_3$ nên từ (3) suy ra $F(x_1) = 0$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ F(x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4 - 5x_1^2 + 1 + k = 0 \\ \dfrac{x_1^5}{5} - \dfrac{5}{3}x_1^3 + (1+k)x_1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^4 + 5x_1^2 + 1 + k = 0 \\ \dfrac{x_1^4}{5} - \dfrac{5}{3}x_1^2 + 1 + k = 0 \ (x_1 \neq 0) \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5}x_1^4 - \frac{100}{3}x_1^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1^2 = \dfrac{25}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{25}{6}$ (Vì $x_1 \neq 0$).

Thay vào (1) ta được $\left(\frac{25}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{25}{6}\right) + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{89}{36} \approx 2,42$.

Cách 2

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $x^4 - 4x^2 + 1 = x^2 - k \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 1 + k = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$, $t > 0$ phương trình (1) trở thành $t^2 - 5t + 1 + k = 0$ (2).

Theo bài ra thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm $t > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4(1+k) > 0 \\ 5 > 0 \\ 1 + k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \dfrac{21}{4} \\ k > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{21}{4}$ $(*)$

Khi đó hai đồ thị giao nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, với x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình (1)

Giả sử (2) có 2 nghiêm $t_1; t_2 \ (0 < t_1 < t_2)$ thì (1) có 4 nghiệm viết theo thứ tự từ bé đến lớn là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Áp dung định lí Vi-et cho phương trình (2) ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 t_2 = k + 1 \end{cases}$.

Ta có

$S_1 + S_3 = = \int_{-\sqrt{t_2}}^{-\sqrt{t_1}} \left(-x^4 + 5x^2 - k - 1\right)dx + \int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} \left(-x^4 + 5x^2 - k - 1\right)dx = 2\int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}} \left(-x^4 + 5x^2 - k - 1\right)dx$

$= 2\left(-\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} - kx - x\right)\Bigg|_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}}$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{t_2^5}}{5} + \frac{5\sqrt{t_2^3}}{3} - k\sqrt{t_2} - \sqrt{t_2}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{t_1^5}}{5} + \frac{5\sqrt{t_1^3}}{3} - k\sqrt{t_1} - \sqrt{t_1}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{t_1^5}}{5} - \frac{5\sqrt{t_1^3}}{3} + k\sqrt{t_1} + \sqrt{t_1}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{t_2^5}}{5} + \frac{5\sqrt{t_2^3}}{3} - k\sqrt{t_2} - \sqrt{t_2}\right)$

Lại có: $\int\limits_{-\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_1}}\left(x^4-5x^2+k+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+kx+x\right)\Big|_{-\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_1}}=2\left(\frac{\sqrt{t_1^5}}{5}-\frac{5\sqrt{t_1^3}}{3}+k\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}\right)$

$S_1+S_3=S_2$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{t_1^5}}{5}-\frac{5\sqrt{t_1^3}}{3}+k\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}\right)+2\left(-\frac{\sqrt{t_2^5}}{5}+\frac{5\sqrt{t_2^3}}{3}-k\sqrt{t_2}-\sqrt{t_2}\right)=2\left(\frac{\sqrt{t_1^5}}{5}-\frac{5\sqrt{t_1^3}}{3}+k\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}\right)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{t_2^5}}{5}-\frac{5\sqrt{t_2^3}}{3}+k\sqrt{t_2}+\sqrt{t_2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{t_2^2}{5}-\frac{5}{3}t_2+k+1\right)=0\ (**)\quad\left(do\ t_2>0\right).$

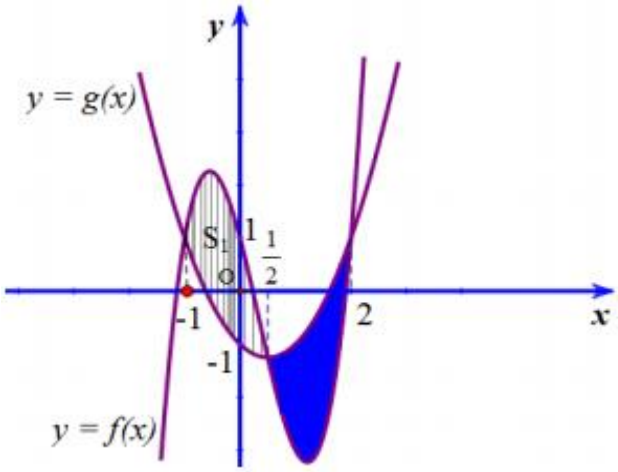
Mặt khác t_2 là nghiệm của phương trình $(2)\Rightarrow t_2^2=5t_2-k-1$. Thế vào (**) ta được

$\frac{5t_2-k-1}{5}-\frac{5}{3}t_2+k+1=0\Leftrightarrow\frac{-2}{3}t_2=\frac{-4}{5}(k+1)\Leftrightarrow t_2=\frac{6}{5}(k+1)\Rightarrow t_1=5-t_2=\frac{19}{5}-\frac{6}{5}k$

Ta có $t_1t_2=k+1\Leftrightarrow\left(\frac{19}{5}-\frac{6}{5}k\right)\cdot\frac{6}{5}(k+1)=k+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1(l)\\k=\frac{89}{36}(tm)\end{array}\right.$.

Vậy khi $S_1+S_3=S_2$ thì k thuộc khoảng $\left(\frac{9}{5};\frac{11}{4}\right)$.

Câu 20: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $g\left(x\right)=mx^2+nx+k$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $-1;\frac{1}{2};2$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết diện tích phần hình kẻ sọc (hình S_1) bằng $\frac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=\frac{1}{2},x=2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{79}{24}$. **B.** $\frac{243}{96}$. **C.** $\frac{81}{32}$. **D.** $\frac{45}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)=0.$

Đặt $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$, phương trình trở thành $h\left(x\right)=0\ \left(1\right).$

Vì đồ thị của hai hàm số $y=(x)$, $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ $x=-1$; $x=\frac{1}{2}$; $x=2$, nên $x=-1$; $x=\frac{1}{2}$; $x=2$ cũng là 3 nghiệm của phương trình (1).

Do đó $h(x)=a.(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right).(x-2)$.

Mà $S_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|h(x)\right|dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|a(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\right|dx$

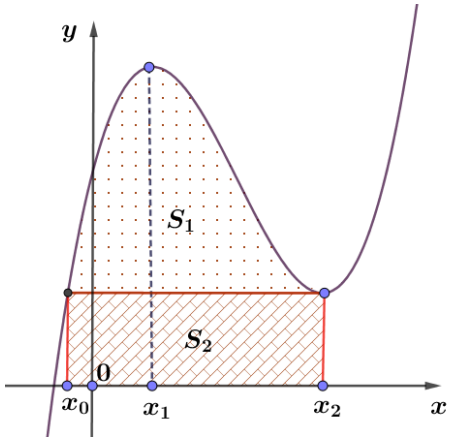
$=|a|\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\right|dx=\frac{81}{32}$. Nên $|a|=2$

Vậy $S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|h(x)\right|dx=|a|\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\right|dx=\frac{81}{32}$.

Nhận xét: có thể tính a bằng cách thứ 2 như sau:

Dựa vào đồ thị ta có $f(0)=1, g(0)=-1$, nên $h(0)=f(0)-g(0)=2\Leftrightarrow a=2$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1=x_0+1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{9}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái x_1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Khi đó $g'(x)=ax.(x-2)$ $(a>0)$. Suy ra $y=g(x)=a\frac{x^3}{3}-ax^2+C$.

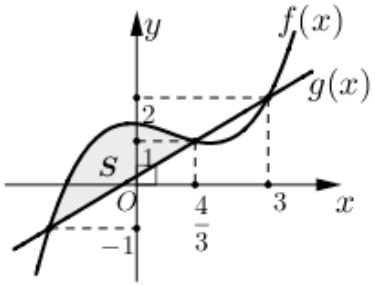
Vì $f(x_1)-3f(x_2)=0\Rightarrow g(0)=3g(2)\Leftrightarrow C=3a\left(\frac{8}{3}-4\right)+3C\Leftrightarrow C=2a$.

Do đó $y=g(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2\right)$.

Khi đó $S_1+S_2=\int_{-1}^{2}a\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2\right)dx=a\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{17}{4}a$.

$S_2=\int_{-1}^{2}f(x_2)dx=3f(2)=C=2a\Rightarrow S_1=\frac{17}{4}a-2a=\frac{9}{4}a\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{8}$.

Câu 22: Cho $f(x),g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{38}{15}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{34}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3};1\right)$ và $B(3;2)$ nên $g(x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Với $y=-1\Rightarrow\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=-1\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow C(-2;-1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

Do đó $f(x)-g(x)=a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)$.

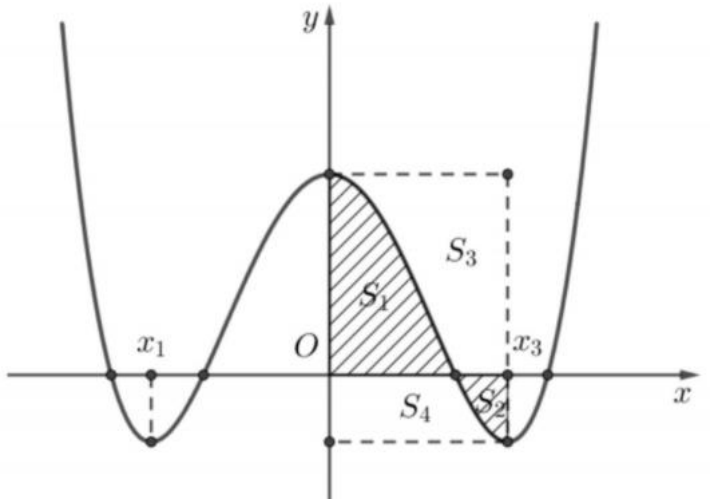
Lại có $S=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{250}{81}=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)\right]\mathrm{d}x\Leftrightarrow a=\frac{3}{20}$.

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\right]dx=\frac{34}{15}$.

------ HẾT ------

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1; x_2; x_3 thỏa mãn $x_3=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $0,65$. **B.** $0,7$. **C.** $0,55$. **D.** $0,6$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có

$$f'(x)=4ax^3+2bx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\frac{b}{2a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{array}\right. \quad (ab<0)$$

Do đó hàm số có ba điểm cực trị x_1; $x_2=0$; $x_3=-x_1$ vậy $x_3=x_1+2 \Leftrightarrow -x_1=x_1+2 \Leftrightarrow x_1=-1$ $\Rightarrow x_3=1$.

Suy ra $f'(x)=4a(x+1)x(x-1)=4a(x^3-x)$

$f(x)=\int f'(x)dx=a(x^4-2x^2)+c$

Do $f(x_1)+f(x_3)+\frac{2}{3}f(x_2)=0 \Leftrightarrow f(-1)+f(1)+\frac{2}{3}f(0)=0 \Leftrightarrow (c-a)+(c-a)+\frac{2}{3}c=0$

$\Leftrightarrow c=\frac{3}{4}a$.

Vậy $f(x)=a\left(x^4-2x^2+\frac{3}{4}\right)$

Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$.

Vậy $S_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}f(x)dx=a\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^4-2x^2+\frac{3}{4}\right)dx=\frac{7\sqrt{2}}{30}a$.

$S_2 = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left| f(x) \right| dx = -\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} f(x)dx = -a\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} \right) dx = \frac{14\sqrt{2}-17}{60} a$.

Suy ra $S_1 + S_2 = \frac{7\sqrt{2}}{30} a + \frac{14\sqrt{2}-17}{60} a = \frac{28\sqrt{2}-17}{60} a$.

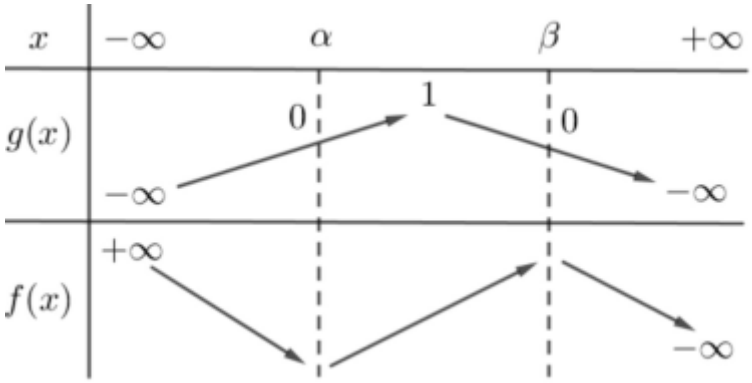
Ta có $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ là diện tích hình chữ nhật có các kích thước 1; $f(x_2) - f(x_3) = a$.

Khi đó $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = a$.

Do đó $S_3 + S_4 = a - (S_1 + S_2) = a - \frac{28\sqrt{2}-17}{60} a = \frac{7(11-4\sqrt{2})}{60} a$.

$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2}-17}{7(11-4\sqrt{2})} \approx 0,6$.

Câu 24: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ và $g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bẳng biến thiên như sau



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó điện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; $y = g(x)$; $x = 1$; $x = 2$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tại các điểm cực trị α, β của $f(x)$ thì $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, do đó

$g(x) = c(x-\alpha)(x-\beta)$ và $f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Do đó $g(x) = kf'(x) \Leftrightarrow cx^2 + 4x + d = k(3ax^2 + 4x + b) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3ka \\ 4 = 4k \\ d = kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ c = 3a \\ d = b \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ và $g(x) = 3ax^2 + 4x + b$.

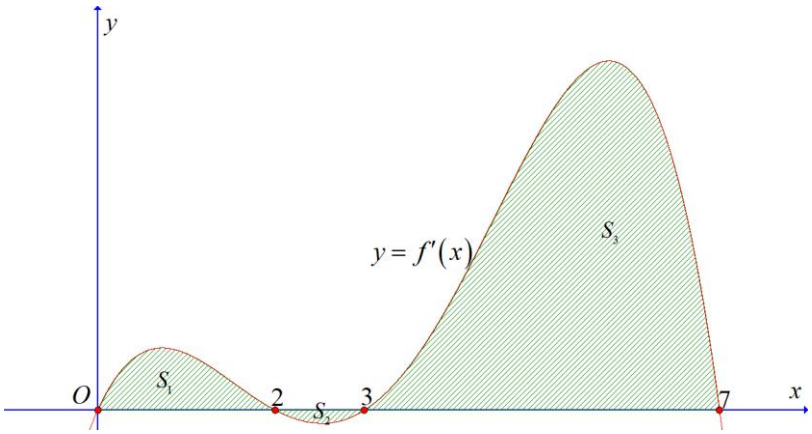
Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 3ax^2 + 4x + b$

$\Leftrightarrow ax^3 + (2-3a)x^2 + (b-4)x + 1 - b = 0$.

Theo Vi-et $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3a-2}{a} = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = -x^2 + 4x + b$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$ và giá trị lớn nhất bằng $g(2) = 1 \Leftrightarrow b + 4 = 1 \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow d = -3$.

Vậy $S=\int_1^2\left|-\frac{1}{3}x^3+3x^2-7x+4\right|\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;7]$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;7]$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(2x-1)$, biết rằng diện tích các hình phẳng trong hình vẽ lần lượt là $S_1=\frac{244}{15}$, $S_2=\frac{28}{15}$, $S_3=\frac{2528}{15}$ và $f(0)=1$, tính $g(4)$.

A. $\frac{2759}{15}$. **B.** $\frac{2744}{15}$. **C.** $\frac{5518}{15}$. **D.** $\frac{563}{3}$.

Lời giải

Chọn A

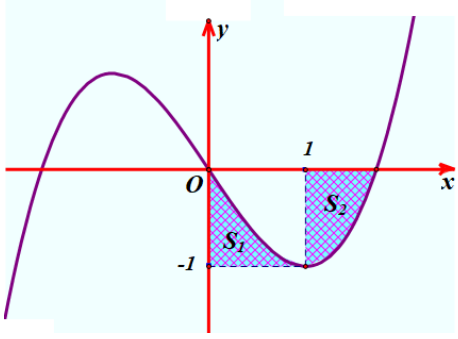
Xét tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{4}g'(x)\mathrm{d}x=g(4)-g\left(\frac{1}{2}\right)=g(4)-f(0)$.

Ta có $g'(x)=2f'(2x-1)$ nên $\int_{\frac{1}{2}}^{4}g'(x)\mathrm{d}x=2\int_{\frac{1}{2}}^{4}f'(2x-1)\mathrm{d}x=\int_0^7 f'(t)\mathrm{d}t$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\int_0^7 f'(t)\mathrm{d}t=S_1-S_2+S_3=\frac{2744}{15}$.

Từ đó ta có $g(4)=\int_{\frac{1}{2}}^{4}g'(x)\mathrm{d}x+f(0)=\frac{2759}{15}$.

Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên.



Biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$ và $f(x)+1$ và $f(x)-1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính S_1+S_2.

A. $\frac{7}{8}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Theo bài ra $f(x)+1$ và $f(x)-1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$ nên ta có thể phân tích thành nhân tử như sau:

$$\begin{cases} f(x)+1=a(x-1)^2(x-m) \\ f(x)-1=a(x+1)^2(x-n) \end{cases}$$

Kết hợp với bài ra ta có :

$$\begin{cases} f(1)+1=0 \\ f(-1)-1=0 \\ f(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d+1=0 \\ -a+b-c+d-1=0 \\ d=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=-\frac{3}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Do đó : $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$.

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

S_1 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị $y=f(x); y=-1; x=0; x=1$

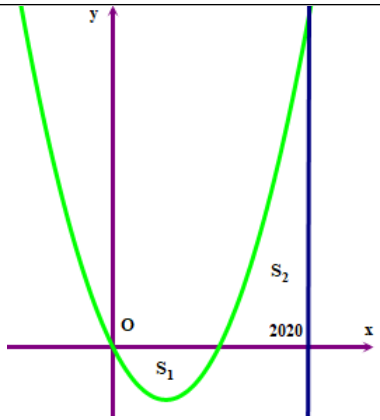
Nên $S_1=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+1\right)dx=\frac{3}{8}$.

S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị $y=f(x); y=0; x=1; x=\sqrt{3}$

Nên $S_2=\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)dx=\frac{1}{2}$.

Vậy $S_1+S_2=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$(đvdt).

Câu 27: Cho hàm số $y=x^2-mx\ (0<m<2020)$ có đồ thị (C). Gọi S_1+S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2020$. Giá trị của m sao cho $S_2=S_1$ là



A. $m=\dfrac{4040}{3}$ **B.** $m=\dfrac{4041}{3}$ **C.** $m=\dfrac{2021}{3}$ **D.** $m=\dfrac{2020}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

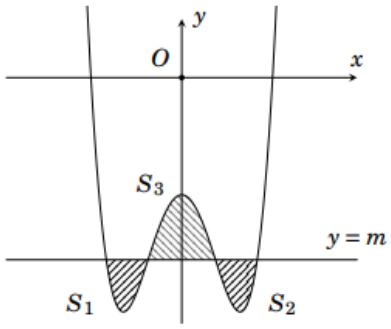
$$S_2=\int_0^m\left(x^2-mx\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}\right)\Big|_m^{2020}=\left(\frac{2020^3}{3}-\frac{m2020^2}{2}\right)+\frac{m^3}{6}.$$

$$S_1=-\int_0^m\left(x^2-mx\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}\right)\Big|_0^m=\frac{m^3}{6}.$$

$$S_2=2020S_1\Leftrightarrow\left(\frac{2020^3}{3}-\frac{m2020^2}{2}\right)+\frac{m^3}{6}=\frac{m^3}{6}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{2020^3}{3}-\frac{m2020^2}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{4040}{3}.$$

Câu 28: Đồ thị $(C):y=2x^4-4x^2-2$ cắt đường thẳng $d:y=m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết rằng $S_1+S_2=S_3$, khi đó $m=-\dfrac{a}{b}$ ở dạng tối giản với $a,b\in\mathbb{N}$. Tính giá trị của $T=a+b$.



A. $T=-19$. **B.** $T=19$. **C.** $T=1$. **D.** $T=37$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$2x^4-4x^2-2-m=0.\quad(1)$$

Đặt $t=x^2$, phương trình (1) trở thành

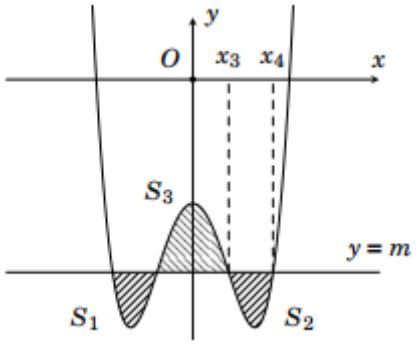
$$2t^2-4t-2-m=0\quad(2)$$

Đồ thị (C) cắt d tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2(-2-m) > 0 \\ 2 > 0 \\ -1-\dfrac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -2.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1 < t_2$.

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1 = -\sqrt{t_1}$, $x_2 = -\sqrt{t_2}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.



Do tính đối xứng qua trục Oy của (C) nên yêu cầu của bài toán trở thành

$$\int_0^{x_3} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m)\mathrm{d}x = \int_{x_3}^{x_4} (-2x^4 + 4x^2 + 2 + m)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_4} (2x^4 - 4x^2 - 2 - m)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} - (2+m)x \right)\Big|_0^{x_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} - (2+m)x_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0.$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_4^4 - 4x_4^2 - 2 - m = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases}$$

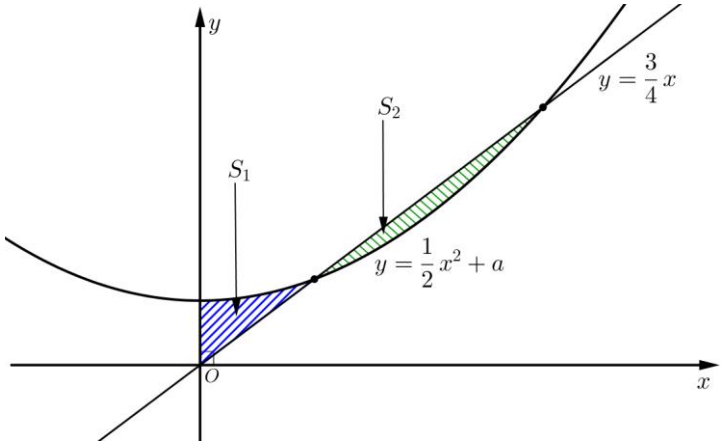
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_4^2 = 0 (l) \\ x_4^2 = \dfrac{5}{3} \end{array} \right. \\ 6x_4^4 - 20x_4^2 - 15(2+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^2 = \dfrac{5}{3} \\ m = -\dfrac{28}{9} \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy $m = -\dfrac{28}{9}$. Do đó $a = 28$, $b = 9$.

Suy ra $T = a + b = 37$.

Câu 29: (Bỏ)

Câu 30: Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2+a=\frac{3}{4}x\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0\ (*)$.

Do đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ cắt parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $0<x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{9}{16}-2a>0\\2a>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{32}.$$

Ta có:

$$S_1=\int_0^{x_1}\left(\frac{1}{2}x^2+a-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x;\ S_2=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^2+a\right)\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}x^2+a-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x.$$

$$S_1=S_2\Leftrightarrow S_1-S_2=0\Leftrightarrow\int_0^{x_1}\left(\frac{1}{2}x^2+a-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}x^2+a-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{x_2}\left(\frac{1}{2}x^2+a-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^3}{6}+ax-\frac{3}{8}x^2\right)\Big|_0^{x_2}=0$$

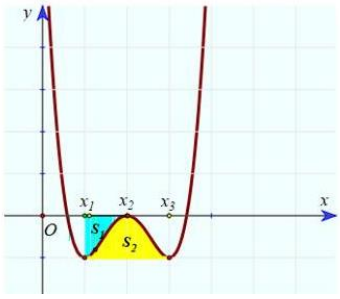
$$\Leftrightarrow\frac{1}{6}x_2^3+ax_2-\frac{3}{8}x_2^2=0\Leftrightarrow\frac{1}{6}x_2^2+a-\frac{3}{8}x_2=0.$$

Mà x_2 là nghiệm phương trình $(*)$ nên $\frac{1}{2}x_2^2-\frac{3}{4}x_2+a=0$.

Trừ vế với vế hai phương trình được: $-\frac{1}{3}x_2^2+\frac{3}{8}x_2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=0\ (L)\\x_2=\frac{9}{8}\ (TM)\end{array}\right.$.

Với $x_2=\frac{9}{8}\Rightarrow a=\frac{27}{128}$ (tm). Vậy $a=\frac{27}{128}\in\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm $x_1,x_2,x_3\,(x_1<x_2<x_3)$ thoả mãn $x_1+x_2=4$. Gọi S_1,S_2 là diện tích của hai hình phẳng được tô màu trong hình. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng?

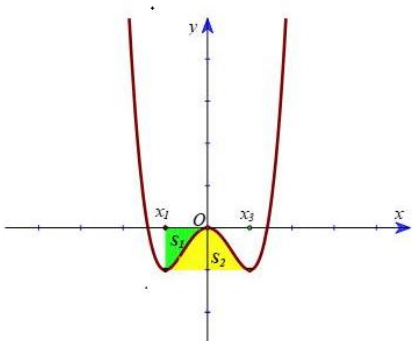


A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{7}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S_1,S_2 không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị thoả $x_2=0$



Gọi $g(x)=ax^4+bx^2+c$, ta có $g(x)$ là hàm chẵn và ba điểm cực trị tương ứng là $-2;0;2$ là các nghiệm của phương trình $4ax^3+2bx=0$.

Dựa vào đồ thị $g(x)$, ta có $g(0)=0$. Từ đó suy ra $g(x)=a\left(x^4-16x^2\right)$ với $a>0$.

Do tính đối xứng của hàm trùng phương nên diện tích hình chữ nhật bằng

$2S_1+S_2=\left|g(2)\right|.4=64a$

Ta có S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=2,x=0$.

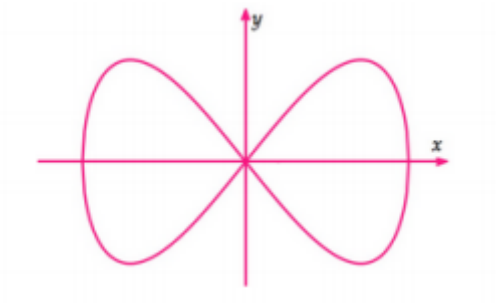
$$S_1=\int_{-2}^{0}g(x)\mathrm{d}x=a\int_{-2}^{0}\left|x^4-8x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{224a}{15}$$

Suy ra $S_2=64a-2\cdot\dfrac{224a}{15}=\dfrac{512a}{15}$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{224}{512}=\dfrac{7}{16}$.

Câu 32: Một hình phẳng được tạo thành từ đường cong lemniscate (đường cong số 8 của Bernoulli) có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $x^4=a^2\left(x^2-y^2\right)(a>0)$ như hình vẽ bên. Biết rằng mỗi

đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài $1m$ và hình phẳng này có diện tích là $\frac{49}{3}\left(m^2\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $1<a<2$. **B.** $2<a<3$. **C.** $3<a<4$. **D.** $4<a<5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^4=a^2\left(x^2-y^2\right)\Leftrightarrow a^2y^2=a^2x^2-x^4\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$.

Vì tính đối xứng của hình trên nên diện tích của hình phẳng bằng 4 lần diện tích của miền hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy.

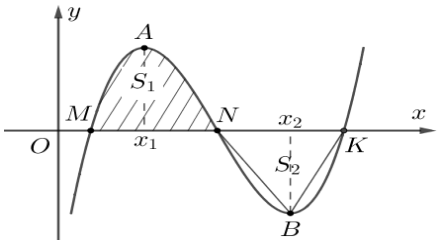
Do đó $S=4\left(\int\limits_0^a\frac{1}{a}x\sqrt{a^2-x^2}dx\right)$.Đặt $t=\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow t^2=a^2-x^2\Rightarrow tdt=-xdx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a;x=a\Rightarrow t=0$.

$$S=4\left(\int\limits_0^a\frac{1}{a}x\sqrt{a^2-x^2}dx\right)=\frac{4}{a}\left(\int\limits_0^a t^2dt\right)=\frac{4}{a}.\frac{t^3}{3}\Big|_0^a=\frac{4a^2}{3}.$$

Đề cho $S=\frac{49}{3}$ nên $a=\frac{7}{2}\Rightarrow 3<a<4$.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong $\left(C\right)$ trong hình bên. Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị $\left(C\right)$; M, N, K là giao điểm của $\left(C\right)$ với trục hoành; S là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK. Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

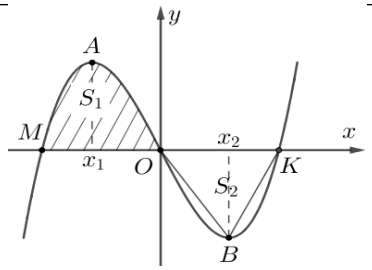


A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị đồ thị $\left(C\right)$ sang trái sao cho điểm uốn trùng với gốc tọa độ O. (như hình dưới)



Do $f(x)$ là hàm số bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng $(O \equiv N)$.

Đặt $x_1 = -a,\ x_2 = a$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = k\left(x^2 - a^2\right)$ với $k > 0$

$\Rightarrow f(x) = k\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2 x\right) \Rightarrow x_M = -a\sqrt{3},\ x_K = a\sqrt{3}$

Có $MAKB$ nội tiếp đường tròn tâm $O \Rightarrow OA = OM = a\sqrt{3}$

Có $f(x_1) = \sqrt{OA^2 - x_1^2} \Leftrightarrow f(-a) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k\left(-\frac{1}{3}a^3 + a^3\right) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}$

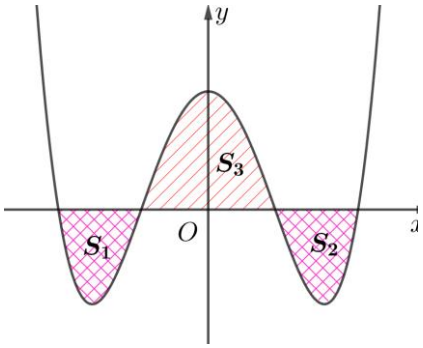
$\Rightarrow f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{3}x^3 - a^2 x\right)$

$S_1 = \int\limits_{-a\sqrt{3}}^{0} f(x)\,dx = \frac{3\sqrt{2}}{2a^2}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2\right)\Big|_{-a\sqrt{3}}^{0} = \frac{9\sqrt{2}}{8}a^2$

$S_2 = S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2}f(-a).MO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng nằm dưới trục Ox và S_3 là diện tích hình phẳng nằm trên trục Ox được tạo bởi (C_m) với trục Ox. Biết rằng tồn tại duy nhất giá trị $m = \frac{a}{b}$ với ($a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) để $S_1 + S_2 = S_3$. Giá trị $2a - b$ bằng:



A. 3. **B.** −4. **C.** 6. **D.** −2.

Lời giải

Chọn C

◆Giả sử u là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$

hay $u^4 - 3u^2 + m = 0 \Leftrightarrow u^4 - 3u^2 = -m$ (1)

◆để $S_1+S_2=S_3$ thì $\int_0^u\left(x^4-3x^2+m\right)dx=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^5}{5}-x^3+mx\right)\Big|_0^u=0$

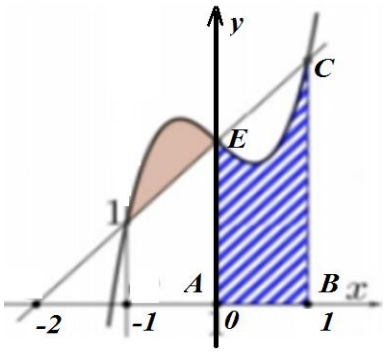
$\Leftrightarrow\frac{u^5}{5}-u^3+mu=0\Leftrightarrow\frac{u^4}{5}-u^2+m=0(do\ u>0)\Leftrightarrow\frac{u^4}{5}-u^2=-m\quad(2)$

◆Từ $(1);(2)$ suy ra $u^4-3u^2=\frac{u^4}{5}-u^2\Leftrightarrow5u^4-15u^2=u^4-5u^2\Leftrightarrow4u^4-10u^2=0$

$\Leftrightarrow2u^2\left(2u^2-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u^2=0\ (L)\\u^2=\frac{5}{2}\ (tm)\end{array}\right.\Rightarrow m=\frac{5}{4}$ và theo giả thiết thì giá trị này là duy nhất

◆Vậy $a=5;b=4\Leftrightarrow2a-b=6$

Câu 35: Cho hàm số bậc 3 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và đường thẳng d: $g(x)=mx+n$ có đồ thị như hình vẽ. Nếu phần tô màu đen có diện tích bằng $\frac{1}{2}$, thì phần gạch chéo có diện tích bằng bao nhiêu?

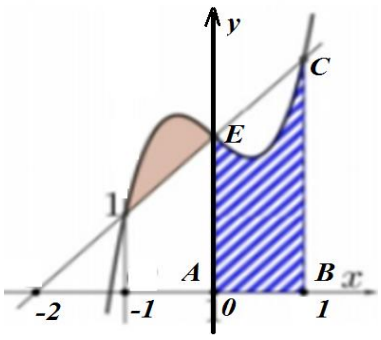


A. $\frac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Không mất tính tổng quát, ta tịnh tiến đồ thị sang bên trái 1 đơn vị thì có đồ thị như hình dưới



Ta vẫn gọi đường cong và đường thẳng có phương trình dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $g(x)=mx+n$.

+ Quan sát đường thẳng đi qua điểm $M(-2;0)$ và $N(-1;1)$ nên đường thẳng có phương trình $y=x+2$.

+ Quan sát đường cong thấy hai điểm cực trị có hoành độ là $-1;1$, kết hợp với đạo hàm $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ suy ra $b=0$ và $c=-3a$.

+ Quan sát giao điểm đồ thị với Oy ta thấy d=2 ; vậy $f\left(x\right)=ax^3-3ax+2$

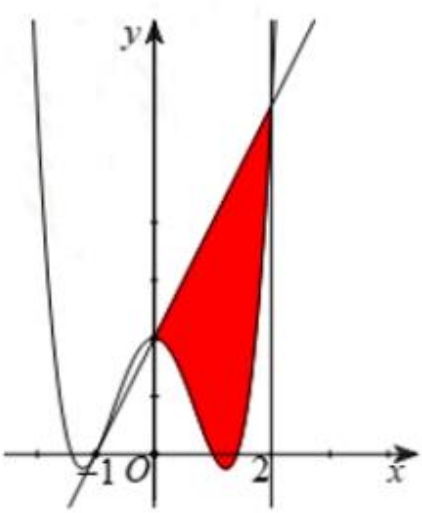
+ Từ giả thiết về diện tích phần tô đen ta có

$$\int_{-1}^{0}\left(ax^3-3ax-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{4}.a-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{4}{5}$$

Vậy ta có hai đường có phương trình: $f\left(x\right)=\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x+2$.

+ Diện tích hình gạch chéo bằng $S=\int_{0}^{1}\left(\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x+2\right)\mathrm{d}x=1$.

Câu 36: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $\left(C\right)$, biết rằng $\left(C\right)$ đi qua điểm $A\left(-1;0\right)$, tiếp tuyến d tại A của $\left(C\right)$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị $\left(C\right)$ và hai đường thẳng $x=0;x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, d và hai đường thẳng $x=-1;x=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $y=mx+n$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right),d$ và hai đường thẳng $x=0,x=2$ là

$$\int_{0}^{2}|\,a\,x^4+bx^2+c-mx-n\,|\,\mathrm{d}x=\frac{28}{5}\Leftrightarrow-\int_{0}^{2}\left(a\,x^4+bx^2+c-mx-n\right)\mathrm{d}x=\frac{28}{5}\,(*)$$

Vì $\left(C\right)$ và d tiếp xúc tại điểm $x=-1$ và giao nhau tại các điểm có hoành độ $x=0;x=2$ nên ta có $ax^4+bx^2+c-mx-n=a\left(x-2\right)x\left(x+1\right)^2=a\left(x^4-3x^2-2x\right)$.

Khi đó:

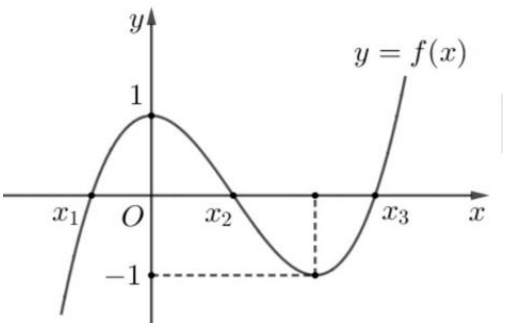
$$(*)\Leftrightarrow-a\int_{0}^{2}\left(x^4-3x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{28}{5}\Leftrightarrow-a.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-x^2\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{28}{5}\Leftrightarrow\frac{28}{5}a=\frac{28}{5}\Leftrightarrow a=1.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C), d$ và hai đường thẳng $x=-1, x=0$ là

$S=\int_{-1}^{0}|x^4-3x^2-2x|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$.

Lưu ý: *Đề bài trên đã bổ sung thêm yếu tố giới hạn bởi đồ thị (C) với đường thẳng d vào câu hỏi so với đề bài gốc vì nếu đề bài gốc là tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1; x=0$ là không hợp lí vì hình phẳng hở nên không tính được diện tích, nếu chọn bổ sung giới hạn với trục Ox thì đáp án là $\frac{6}{5}$ không có trong 4 đáp án.*

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3-x_1=2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S, diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)+1$, $y=-f(x)-1$, $x=x_1$ và $x=x_3$ bằng

A. $S+2\sqrt{3}$. **B.** $S+4\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: "x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng" $\Rightarrow x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$

Ta có: "Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S"

Vây dựa vào hình ảnh, ta có: $S=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx-\int_{x_2}^{x_3}f(x)dx$

Do $f(x)$ làm hàm số bậc 3 nên ta có: $\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=-\int_{x_2}^{x_3}f(x)dx$ (1)

Ta có: "diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)+1$, $y=-f(x)-1$, $x=x_1$ và $x=x_3$"

$\Rightarrow S_1=\int_{x_1}^{x_3}\left|f(x)+1-\left(-f(x)-1\right)\right|dx=\int_{x_1}^{x_3}\left|2f(x)+2\right|dx=2.\int_{x_1}^{x_3}\left|f(x)+1\right|dx=2.\int_{x_1}^{x_3}\left|f(x)-(-1)\right|dx$

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy rằng, khi $x\in(x_1;x_3)$ thì đồ thị $y=f(x)$ nằm phía trên đồ thị $y=-1$

$\Rightarrow S_1=2.\int_{x_1}^{x_3}\left|f(x)-(-1)\right|dx=2.\int_{x_1}^{x_3}\left[f(x)-(-1)\right]dx=2\left[\int_{x_1}^{x_3}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_3}1.dx\right]$

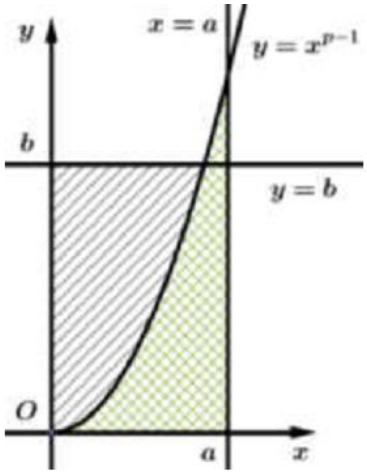
Trong đó: $\int\limits_{x_1}^{x_3} 1.dx = x\Big|_{x_1}^{x_3} = x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$

Trong đó: $\int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)dx$

Mà theo (1) thì ta có: $\int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx = -\int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)dx = 0$

Vậy ta có: $S_1 = 2\left[\int\limits_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_3} 1.dx\right] = 2.\left(0 + 2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho các số p,q thỏa mãn các điều kiện: $p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ và các số dương a,b. Xét hàm số: $y = x^{p-1}\ (x>0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x=a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y=b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x=a,\ y=b$.



Khi so sánh S_1+S_2 và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?

A. $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$. **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Lời giải

Chọn D

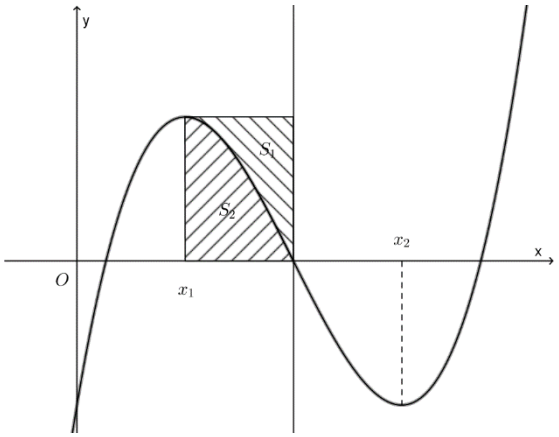
Ta có: $S\le S_1+S_2$.

$$S_1 = \int\limits_0^a \left(x^{p-1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^p}{p}\right)\Big|_0^a = \frac{a^p}{p};\ S_2 = \int\limits_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)\mathrm{d}y = \left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right)\Bigg|_0^b = \left(\frac{y^q}{q}\right)\Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\frac{1}{p-1}+1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q$.

Vậy $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

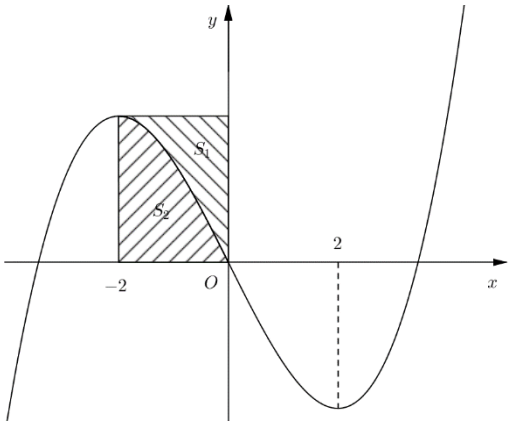
Câu 39: Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là điểm uốn của đồ thị hàm số

Tịnh tiến đồ thị theo vector $\overrightarrow{IO}$ ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3 = -2$, $x_4 = 1$. $\Rightarrow g'(x) = 3a(x+2)(x-2) = 3a(x^2-4)$ với $a \neq 0$.

Từ đó ta có $g(x) = a(x^3 - 12x) + d$.

Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0 \Rightarrow g(x) = a(x^3 - 12x)$.

Ta có $S_2 = \int_{-2}^{0} a(x^3 - 12x)\mathrm{d}x = a\left(\frac{x^4}{4} - 6x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = 20a$.

Lại có: $S_1 + S_2$ bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh là 2 và $g(-2) = 16a$

$\Rightarrow S_1 + S_2 = 32a$. Do đó $S_1 = 32a - 20a = 12a$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{12a}{20a} = \frac{3}{5}$.

Câu 40: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C), biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng vuông góc với hai tiếp tuyến tại A, B tạo thành một hình chữ nhật

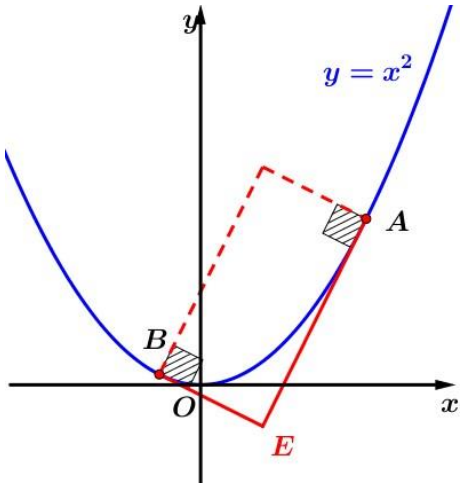
(H) có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật (H). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{125}{768}$. **D.** $\frac{125}{128}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $A(a;a^2)$ và $B(b;b^2)$. Không mất tính tổng quát, ta xét $a>0$ và $b<0$



Gọi: (d_1) là đường tiếp tuyến với (C) tại A, (d_2) là đường tiếp tuyến với (C) tại B.

$\Rightarrow \begin{cases}(d_1): y=2ax-a^2\\(d_2): y=2bx-b^2\end{cases}$.

Do $(d_1)\perp(d_2)$ nên

$k_{(d_1)}.k_{(d_2)}=-1\Leftrightarrow(2a).(2b)=-1\Rightarrow b=\frac{-1}{4a}\Rightarrow B\left(\frac{-1}{4a};\frac{1}{16a^2}\right)\Rightarrow(d_2): y=\frac{-x}{2a}-\frac{1}{16a^2}$.

$d_1\cap d_2$ tại $E\left(\frac{4a^2-1}{8a};\frac{-1}{4}\right)\Rightarrow$ chiều dài $D=\frac{\sqrt{\left(4a^2+1\right)^3}}{8a}$ và chiều rộng $R=\frac{\sqrt{\left(4a^2+1\right)^3}}{16a^2}$.

Mà $D=2.R\Rightarrow a=1\Rightarrow S_2=\frac{\left(4a^2+1\right)^3}{128a^3}=\frac{125}{128}$ và suy ra $\Rightarrow \begin{cases}(d_1): y=2x-1\\(d_2): y=\frac{-x}{2}-\frac{1}{16}\end{cases}$ và $E\left(\frac{3}{8};\frac{-1}{4}\right)$.

Suy ra $S_1=\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}}\left[x^2-\left(\frac{-x}{2}-\frac{1}{16}\right)\right]dx+\int\limits_{\frac{3}{8}}^{1}\left[x^2-(2x-1)\right]dx=\frac{125}{768}$.

Như vậy tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{125}{768}.\frac{128}{125}=\frac{128}{768}=\frac{1}{6}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị (C), biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và đường thẳng pháp tuyến của hai tiếp tuyến đó tạo thành một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến, S_2 là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các tiếp tuyến và pháp tuyến tại A, B. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{125}{768}$. **D.** $\frac{125}{128}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $A\left(a;a^2\right)$ và $B\left(b;b^2\right)$. Không mất tính tổng quát, ta xét $a>0$ và $b<0$

$\left(d_1\right)$ là đường tiếp tuyến với (C) tại A và $\left(d_2\right)$ là đường tiếp tuyến với (C) tại B

$$\Rightarrow \begin{cases}\left(d_1\right): y=2ax-a^2\\ \left(d_2\right): y=2bx-b^2\end{cases}$$

Do $\left(d_1\right)\perp\left(d_2\right)$ nên

$$k_{(d_1)}.k_{(d_2)}=-1\Leftrightarrow (2a).(2b)=-1\Rightarrow b=\frac{-1}{4a}\Rightarrow B\left(\frac{-1}{4a};\frac{1}{16a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(d_2\right): y=\frac{-x}{2a}-\frac{1}{16a^2}$$

$d_1\cap d_2$ tại $E\left(\frac{4a^2-1}{8a};\frac{-1}{4}\right)$

$\Rightarrow$ chiều dài $D=\frac{\sqrt{\left(4a^2+1\right)^3}}{8a}$ và chiều rộng $R=\frac{\sqrt{\left(4a^2+1\right)^3}}{16a^2}$

Mà $D=2.R\Rightarrow a=1\Rightarrow S_2=\frac{\left(4a^2+1\right)^3}{128a^3}=\frac{125}{128}$ và suy ra $\Rightarrow \begin{cases}\left(d_1\right): y=2x-1\\ \left(d_2\right): y=\frac{-x}{2}-\frac{1}{16}\end{cases}$

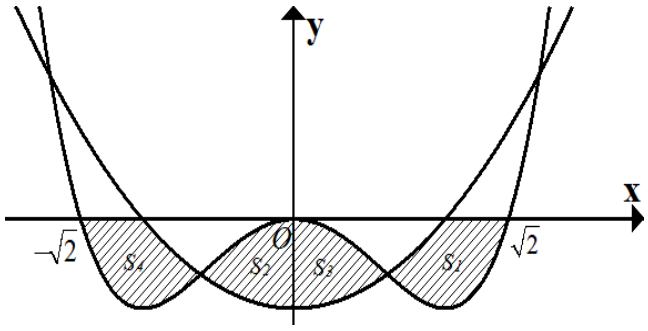
Với $a=1$ suy ra $E\left(\frac{4a^2-1}{8a};\frac{-1}{4}\right)$ có tọa độ $E\left(\frac{3}{8};-\frac{1}{4}\right)$.

Suy ra $S_1=\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}}\left[x^2-\left(\frac{-x}{2}-\frac{1}{16}\right)\right]dx+\int\limits_{\frac{3}{8}}^{1}\left[x^2-(2x-1)\right]dx=\frac{125}{768}$

Như vậy tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{125}{768}.\frac{128}{125}=\frac{128}{768}=\frac{1}{6}$

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2$ và hàm số $y=g(x)=x^2-m^2$, với $0<m<\sqrt{2}$ là tham số thự

C. Gọi S_1,S_2,S_3,S_4 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Ta có diện tích $S_1+S_4=S_2+S_3$ tại m_0. Chọn mệnh đề đúng.



A. $m_0\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\frac{2}{3};\frac{7}{6}\right)$. **C.** $m_0\in\left(\frac{7}{6};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $m_0\in\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

◆ Để ý, hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị đối xứng qua trục tung. Do đó diện tích $\begin{cases} S_1 = S_4 \\ S_2 = S_3 \end{cases}$.

◆ Vì vậy, yêu cầu bài toán trở thành tìm m_0 để $S_1 = S_3$ (1).

◆ Gọi a là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$, với điều kiện: $0 < a < m < \sqrt{2}$.

◆ Dựa vào đồ thị, ta có:

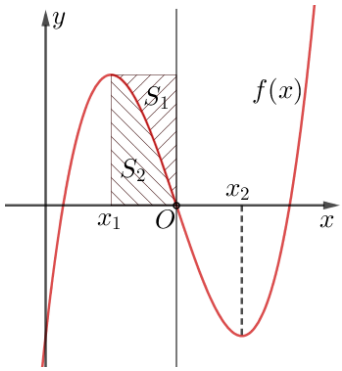
$$S_3 = \int_0^a \left(x^4 - 3x^2 + m^2\right)\mathrm{d}x = \frac{a^5}{5} - a^3 + am^2 \ (2).$$

◆ $S_1 = \int_a^m \left(-x^4 + 3x^2 - m^2\right)\mathrm{d}x + \int_m^{\sqrt{2}} \left(-x^4 + 2x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{a^5}{5} - a^3 + am^2 - \frac{2m^3}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$ (3).

◆ Từ (1), (2), (3) ta có:

$$S_3 = S_1 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{2}{3}m^3 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{2}}{5}} \approx 1.04 \in \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}\right).$$

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



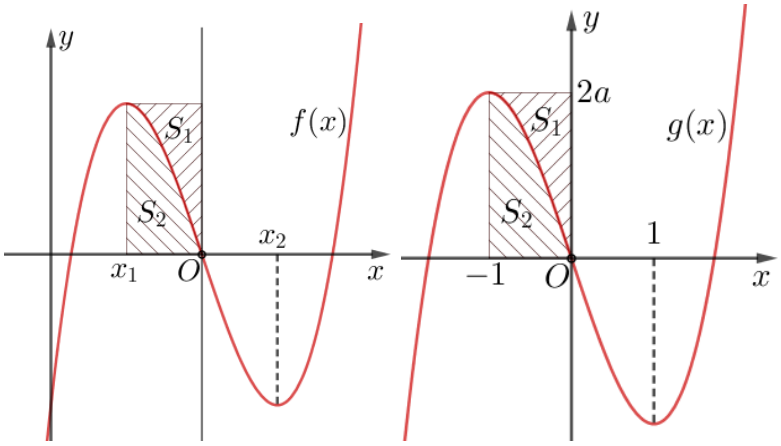
Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$.

Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết của bài toán ta có điểm uốn I của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành.

Tịnh tiến đồ thị theo vectơ $\overrightarrow{IO}$, ta thu được đồ thị hàm số $y=g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3=-1$, $x_4=1$.

Khi đó $g'(x)$ là tam thức bậc hai có hai nghiệm ± 1 nên $g'(x)=3a(x+1)(x-1)=3a(x^2-1)$ với $a\neq 0$.

Từ đó ta có $g(x)=3a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+b \Leftrightarrow g(x)=a(x^3-3x)+b$.

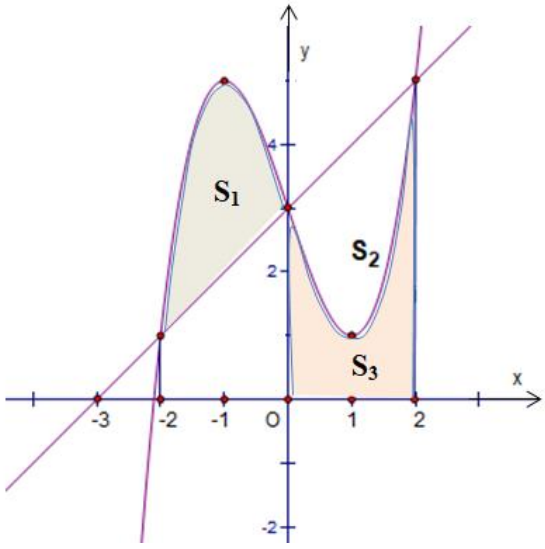
Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $b=0$, suy ra $g(x)=a(x^3-3x)$.

Ta có $S_2=\int_{-1}^{0} a(x^3-3x)\mathrm{d}x=a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5a}{4}$.

Lại có S_1+S_2 bằng diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước 1 và $g(-1)=2a$, suy ra $S_1+S_2=2a$. Do đó $S_1=2a-\frac{5a}{4}=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và đường thẳng $d: g(x)=mx+n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1=4$ thì tỷ số $\frac{S_2}{S_3}$ bằng.



A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

• Dựa vào đồ thị như hình vẽ, ta có: $f(x)-g(x)=k.x(x+2)(x-2)$.

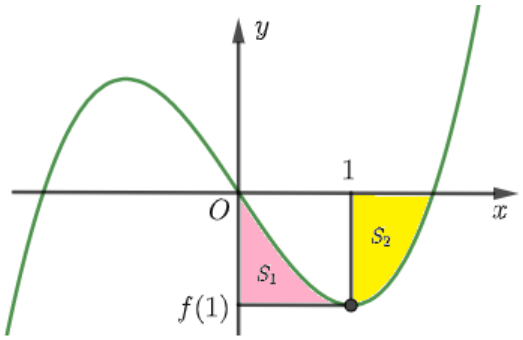
$g(x)=x+3$

$S_1=S_2=\int_{-2}^{0} kx(x+2)(x-2)dx=4k$

$S_2+S_3=\dfrac{\left(\left|g(0)\right|+\left|g(2)\right|\right).2}{2}=\dfrac{(3+5).2}{2}=8$

Vì $S_1=4\Rightarrow S_2=4\ \Rightarrow S_3=8-4=4$. Vậy $\dfrac{S_2}{S_3}=1$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $\left[f(x)+1\right]$ và $\left[f(x)-1\right]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2+8S_1$



A. 4 **B.** $\dfrac{3}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ theo giả thiết có $\begin{cases}f(x)+1=a(x-1)^2(x+m)\\f(x)-1=a(x+1)^2(x+n)\end{cases}$.

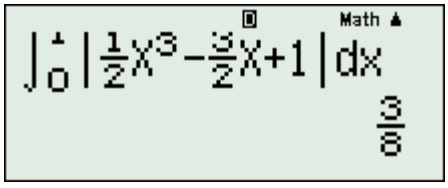
Do đó $\begin{cases}f(1)+1=0\\f(-1)-1=0\\f(0)=0\\f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c+d+1=0\\-a+b-c+d-1=0\\d=0\\3a+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=0\\c=-\dfrac{3}{2}\\d=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x$.

Với $x=1\Rightarrow f(1)=-1$

Ta có: $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

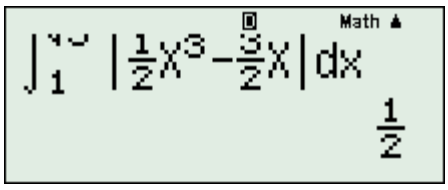
S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x, y=-1,\ x=0, x=1$

$\Rightarrow S_1=\displaystyle\int_0^1\left|\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+1\right|=\frac{3}{8}$ (1)



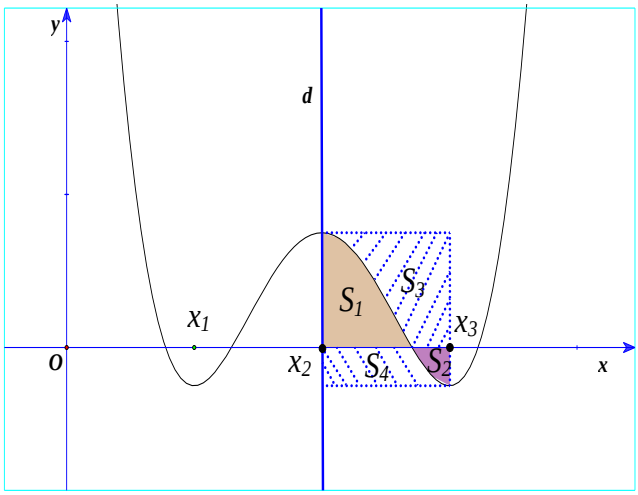
S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{3}{2}x,\ y=0, x=1, x=\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right| = \frac{1}{2}\,(2)$



Từ $(1),(2) \Rightarrow 2S_2 + 8S_1 = 2.\frac{1}{2} + 8.\frac{3}{8} = 4$.

Câu 46: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$, $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3} f(x_2) = 0$ và (C) nhận đường thẳng $d : x = x_2$ làm trục đối xứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích của các miền hình phẳng được đánh dấu như hình bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần kết quả nào nhất



A. $0,60$. **B.** $0,55$. **C.** $0,65$. **D.** $0,70$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) sang bên trái sao cho đường thẳng $d : x = x_2$ trùng với trục tung khi đó (C) là đồ thị của hàm trùng phương $y = g(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Suy ra $y = g(x) = k\left(x^4 - 2x^2\right) + c \ (k > 0)$

Lại có $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3} f(x_2) = 0 \Rightarrow -2k + 2c + \frac{2}{3}c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}k$

Suy ra: $y = g(x) = k\left(x^4 - 2x^2\right) + \frac{3}{4}k$

Khi đó: $S_1 + S_2 = k\int_0^1 \left| x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} \right| dx = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k$.

Ta lại có: $g(0) - g(1) = k \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = k.1 = k$.

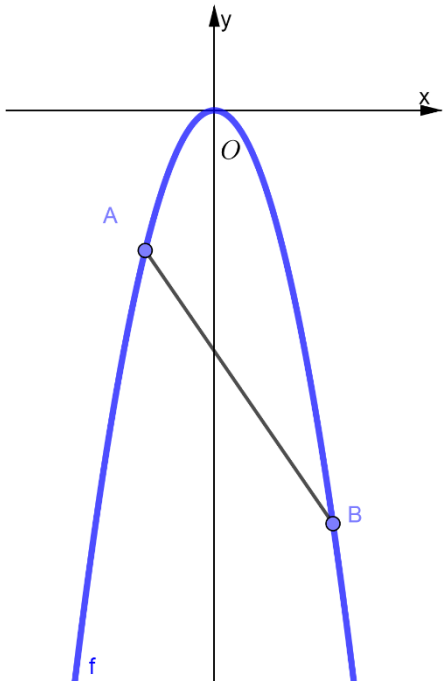
Suy ra $S_3 + S_4 = k - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}k = \frac{77 - 28\sqrt{2}}{60}k \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{77 - 28\sqrt{2}} \approx 0,604$

Câu 47: Cho parabol $(P): y=-4x^2$ và hai điểm A, B trên (P) sao cho đoạn $AB=2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



+) Giả sử $A\left(a;-4a^2\right)\in(P)$, $B\left(b;-4b^2\right)\in(P)$ và $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$

+) Phương trình đường thẳng AB là $y=-4(b+a)(x-a)-4a^2$

$y=-4(b+a)x+4ab$

+) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

$$S=\int_a^b\left[-4x^2+4(a+b)x-4ab\right]\mathrm{d}x=\left(-\frac{4x^3}{3}+2(a+b)x^2-4abx\right)\Big|_a^b=\frac{2}{3}b^3-\frac{2}{3}a^3+2a^2b-2ab^2$$

$$=\frac{2}{3}\left(b^3-a^3+3a^2b-3ab^2\right)=\frac{2}{3}(b-a)^3$$

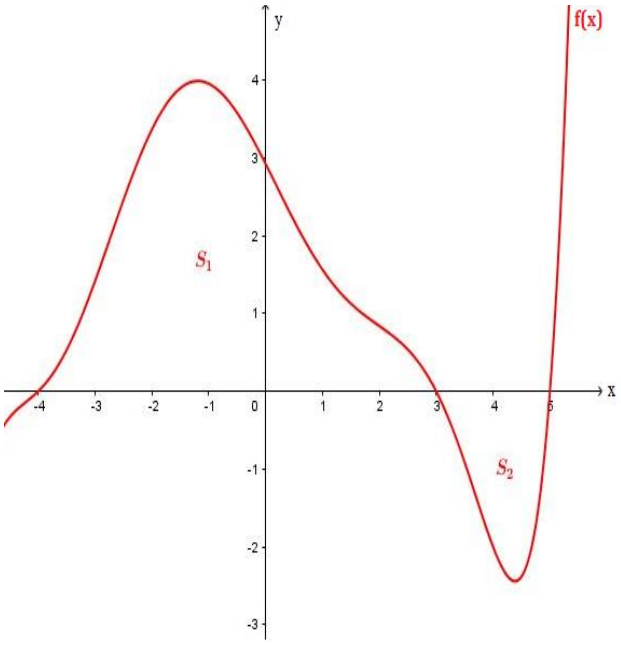
+) Mà $AB=2\Rightarrow(b-a)^2+16\left(b^2-a^2\right)^2=4\Leftrightarrow(b-a)^2=\frac{4}{1+16(b+a)^2}\le 4\Rightarrow -2\le b-a\le 2$

Do đó $S\le\frac{16}{3}$.

Dấu bằng khi $\begin{cases}a+b=0\\ \left[\begin{array}{l}b-a=2\\ b-a=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$.

Vậy GTLN của S là $\frac{16}{3}$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong tạo với trục Ox hai vùng có diện tích S_1, S_2 (như hình vẽ). Biết rằng $S_1=4S_2$ và $\int_{-4}^{5} f(x)\mathrm{d}x=24$. Tính S_1+S_2



A. 24. **B.** 40. **C.** 35. **D.** Không thể xác định

Lời giải

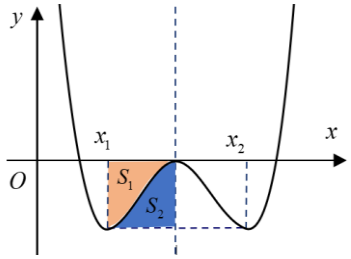
Chọn B

Ta có: $S_1=\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ và $S_2=-\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy: $S_1-S_2=\int_{-4}^{5} f(x)\mathrm{d}x=24$ và $S_1=4S_2$

$\Rightarrow S_1=32$ và $S_2=8$. $\Rightarrow S_1+S_2=40$.

Câu 49: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ thoả mãn $x_2=x_1+2$ và đồ thị nhận đường thẳng $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ làm trục đối xứng. Gọi $S_1;S_2$ là diện tích của phần hình phẳng được in màu trong hình bên. Biết $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{a}{b}$, phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản, $a;b\in\mathbb{Z}$, tính $a+b$.

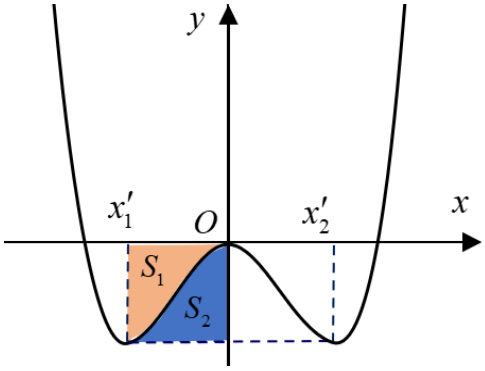


A. $a+b=13$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=15$. **D.** $a+b=9$.

Lời giải

Chọn C

Kết quả bài toán không đổi khi ta tịnh tiến theo trục Ox sang trái $\frac{x_1+x_2}{2}$ đơn vị, ta sẽ được đồ thị mới như hình vẽ dưới đây



Gọi hàm số mới là $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e, a\neq 0$; do đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ làm trục đối xứng nên đồ thị hàm $y=g(x)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng vì vậy $y=g(x)$ làm hàm số chẵn suy ra $b=d=0$; mặt khác $g(0)=e=0$ từ đó $g(x)=ax^4+cx^2$

Do $x_2=x_1+2$ nên $x_2'=x_1'+2$ mà $x_2'+x_1'=0$ suy ra $x_1'=-1; x_2'=1$ từ đó ta có $g'(1)=g'(-1)=0 \Leftrightarrow 4a+2c=0 \Leftrightarrow c=-2a$ ta được $g(x)=ax^4-2ax^2, a>0$ (1)

Ta có diện tích hình chữ nhật là $S_1+S_2=1.a=a$; mà $S_1=\int\limits_{-1}^{0}\left|ax^4-2ax^2\right|dx=a\int\limits_{-1}^{0}\left|x^4-2x^2\right|dx=\frac{7a}{15}$ suy ra $S_2=a=S_1=\frac{8a}{15}$ từ đó tỷ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{7}{8}=\frac{a}{b}$ suy ra $a+b=15$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x)<0\,\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$, $f(3)=-\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2-\ln 3-1$.
B. $8\ln 2-3\ln 3-1$.
C. $4\ln 2-3\ln 3-1$.
D. $8\ln 2+3\ln 3-1$.

Lời giải

Chọn B

Với $x\in(-1;+\infty)$, ta có: $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)\Leftrightarrow -1=-\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\Leftrightarrow -1=\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow -x+C_1=\frac{1}{f'(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{-x+C_1}$.

Mà $f'(0)=-1$ nên $C_1=-1$.

Vậy $f'(x)=\frac{1}{-x-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{-x-1}dx=-\ln|x+1|+C_2$

Có: $f(3)=-\ln 4\Rightarrow -\ln(4)+C=-\ln(4)\Rightarrow C_2=0$

Vậy: $f(x)=-\ln(x+1)$.

Khi đó: $S=\int_2^3\left|-\ln(x+1)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_2^3\ln(x+1)\mathrm{d}x\right|=8\ln 2-3\ln 3-1$.

Câu 51: Cho parabol $(P): y=x^2-kx+k-4$, với k là tham số. Gọi S diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành, giá trị nhỏ nhất của S là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và trục hoành là: $x^2-kx+k-4=0$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$(-k)^2-4(k-4)>0\Leftrightarrow k^2-4k+16>0$ đúng với mọi $k\in\mathbb{R}$.

Vậy (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Giả sử $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ là các hoành độ giao điểm. Ta có: $x_1+x_2=k, x_1x_2=k-4$, $x_2-x_1=\sqrt{k^2-4k+16}$.

+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành là:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|x^2-kx+k-4\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{kx^2}{2}+kx-4x\right)\right|_{x_1}^{x_2}$$

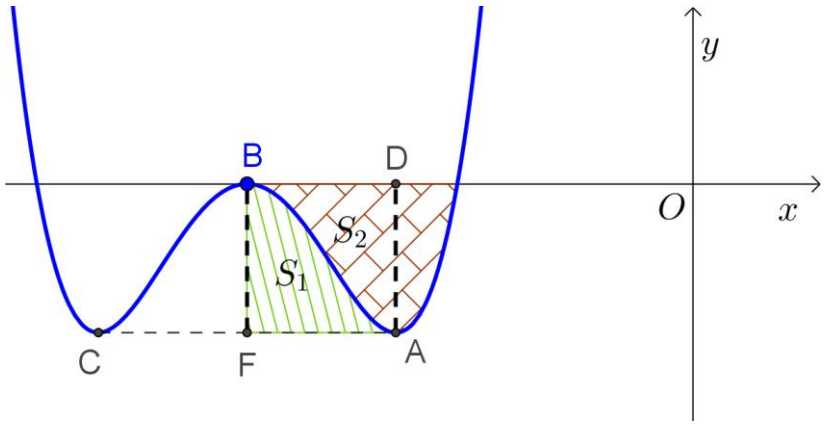
$$=\left|\left(\frac{x_2^3}{3}-\frac{kx_2^2}{2}+kx_2-4x_2\right)-\left(\frac{x_1^3}{3}-\frac{kx_1^2}{2}+kx_1-4x_1\right)\right|$$

$$=\left|(x_2-x_1)\left[\frac{(x_2+x_1)^2-x_2x_1}{3}-\frac{k(x_2+x_1)}{2}+k-4\right]\right|$$

$$=\frac{\left(\sqrt{k^2-4k+16}\right)^3}{6}=\frac{\left(\sqrt{(k-2)^2+12}\right)^3}{6}\geq 4\sqrt{3}$$

Do đó: $\min S=4\sqrt{3}$ khi $k=2$.

Câu 52: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

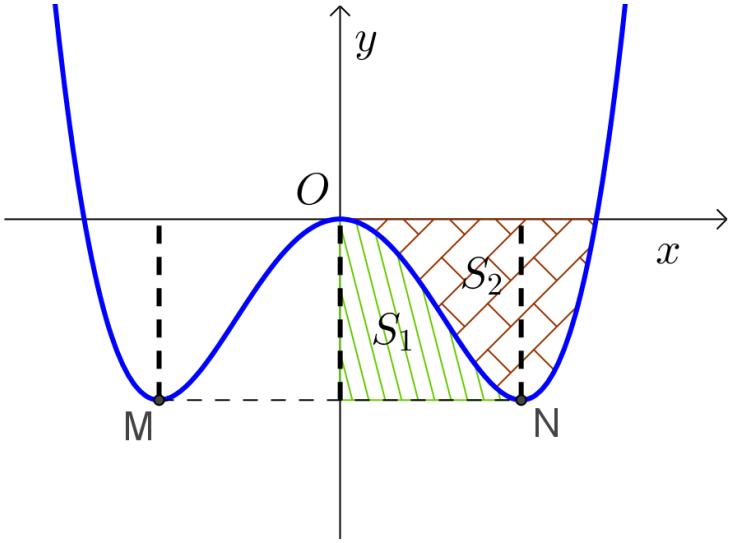


Biết đồ thị hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại ba điểm $C(x_1;y_1), B(x_2;y_2), A(x_3;y_3)$ $(x_1<x_2<x_3)$ thỏa: $x_1=x_3-2$ và hình vuông $BFAD$ có diện tích bằng 1. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch trên hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải

Chọn C



$S_{BFAD}=1\Leftrightarrow BD^2=1\Leftrightarrow BD=1\Rightarrow x_3-x_2=1$ (1)

Ta lại có: $x_1=x_3-2\Leftrightarrow x_1+1=x_3-1$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow x_1+1=x_2=x_3-1$

Tịnh tiến đồ thị sang bên phải trục hoành sao cho $B\equiv O(0;0)$

Khi đó: đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lần lượt là $M(-1;-1);O(0;0);N(1;-1)$

* Phương trình $f(x)$ có dạng: $f(x)=a.(x^4-2x^2)\ (a>0)$

Phương trình hoành độ giao điểm với trục hoành: $a(x^4-2x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

* $S_1=\int_0^1 a(x^4-2x^2+1)dx=\frac{8a}{15}$

$S_2=-\int_0^{\sqrt{2}} a(x^4-2x^2)dx=\frac{8a\sqrt{2}}{15}$

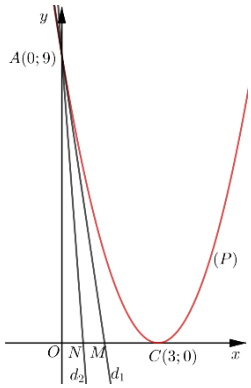
Và $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 53: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính k_1-k_2.

A. $\frac{13}{2}$. **B.** 7. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $d_1: y = k_1 x + 9$, $d_2: y = k_2 x + 9$ $(k_1 > k_2)$.

Gọi $M = d_1 \cap Ox \Rightarrow M\left(-\frac{9}{k_1};0\right)$; $N = d_2 \cap Ox \Rightarrow N\left(-\frac{9}{k_2};0\right)$ $\left(-\frac{9}{k_2} < -\frac{9}{k_1}\right)$

Giao điểm của $(P): y = (x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3;0)$, $A(0;9)$.

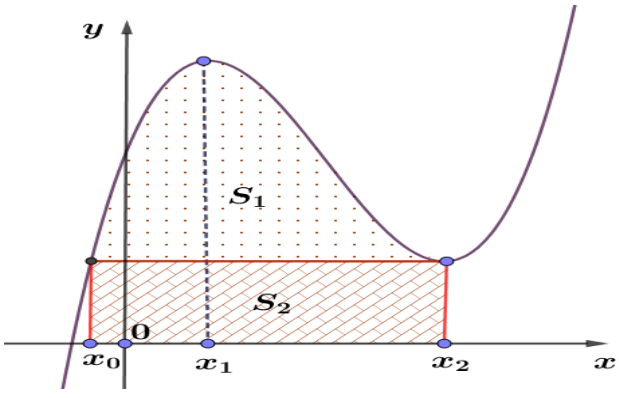
Theo giả thiết ta có $S_{\Delta AON} = S_{\Delta ANM} \Leftrightarrow OM = 2ON \Leftrightarrow -\frac{9}{k_1} = -\frac{18}{k_2} \Leftrightarrow k_2 = 2k_1$.

Lại có $S_{(H)} = 3S_{\Delta AON} \Leftrightarrow \int_0^3 (x-3)^2 \,dx = 3.\frac{1}{2}.OA.ON \Leftrightarrow 9 = -\frac{243}{2k_2} \Leftrightarrow k_2 = -\frac{27}{2}$.

Suy ra $k_1 = -\frac{27}{4} \Rightarrow k_1 - k_2 = \frac{27}{4}$.

Câu 54: Hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục và qua điểm cực tiểu của đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a>0$.

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c.$

+) Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

$f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$

$=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$

+) Ta có

$f(x_1)-3f(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_1)-3f(x_1+2)=0$

$\Leftrightarrow C-3(8a-12a+C)=0\Leftrightarrow -2C+12a=0\Leftrightarrow C=6a$

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a.$

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh là $x_2-x_0=3$ và $f(x_2)=8a-12a+6a=2a$ nên $S_2=6a$.

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=x_0=x_1-1, x=x_2=x_1+2, y=f(x_2)=2a$ và $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a$.

Nên suy ra

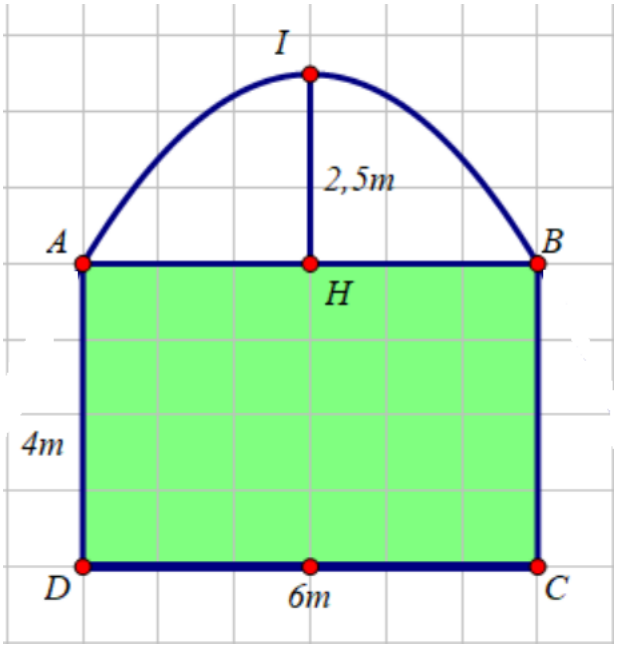
$$S_1=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[f(x)-2a\right]\mathrm{d}x=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+4a\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{4}a(x-x_1)^4-a(x-x_1)^3+4ax\right]\Bigg|_{x_1-1}^{x_1+2}=\frac{27a}{4}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27a}{4.6a}=\frac{9}{8}.$

DẠNG 11 Toán thực tế liên quan đến diện tích hình phẳng

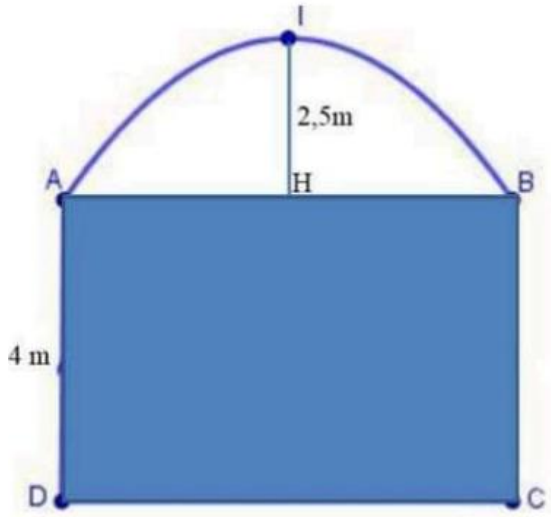
Câu 1: Một gia đình muốn làm cái cổng (như hình vẽ).



Phần phía trên cổng có hình dạng là một parabol với $IH = 2,5m$, phần phía dưới là một hình chữ nhật có kích thước $AD = 4m, AB = 6m$. Giả sử giá để làm phần cổng được tô màu là 1.000.000 đ/m^2 và giá để làm phần cổng phía trên là 1.200.000 đ/m^2. Số tiền gia đình đó phải trả là:

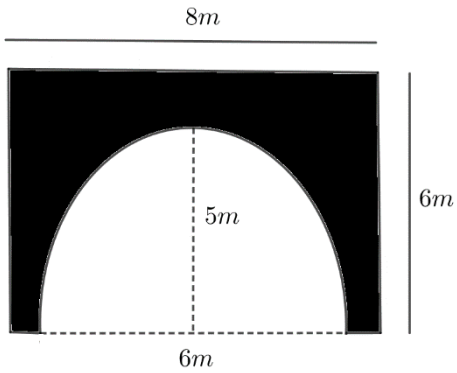
A. 24.400.000 đ. **B.** 36.000.000 đ. **C.** 38.000.000 đ. **D.** 38.800.000 đ.

Câu 2: Một gia đình muốn làm cánh cổng (như hình vẽ). Phần phía trên cổng có hình dạng là một parabol với $IH = 2,5\,\text{m}$, phần phía dưới là một hình chữ nhật kích thước cạnh là $AD = 4\,\text{m}$, $AB = 6\,\text{m}$. Giả sử giá để làm phần cổng được tô màu là $1.000.000\left(\text{đ/m}^2\right)$ và giá để làm phần cổng phía trên là $1.200.000\left(\text{đ/m}^2\right)$. Số tiền gia đình đó phải trả là



A. 24.400.000 đ. **B.** 36.000.000 đ. **C.** 38.000.000 đ. **D.** 38.800.000 đ.

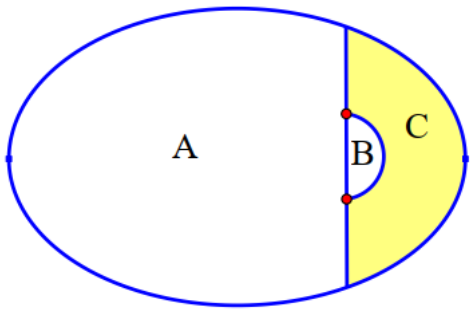
Câu 3: Một cái cổng có dạng như hình vẽ, chiều cao của cổng là $6m$ và chiều rộng là $8m$. Mái vòm của cổng có hình nửa elip với chiều rộng là $6m$, điểm cao nhất của mái vòm là $5m$. Người ta muốn lát gạch hoa để trang trí cho cổng với chi phí là 360.000 đồng$/m^2$.



Hỏi chi phí để trang trí cho cổng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 8.481.600 đồng. **B.** 13.029.300 đồng. **C.** 4.240.800 đồng. **D.** 8.798.400 đồng.

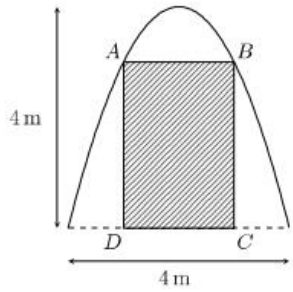
Câu 4: Một bể bơi hình elip, có độ dài trục lớn bằng 10m và trục nhỏ bằng 8m. Khu vực A là chứa nước, khu vực B là bậc thang lên xuống bể bơi, là nửa đường tròn có tâm là một tiêu điểm của elip, bán kính bằng 1m. Phần còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch (như hình vẽ).



Nếu chi phí lát gạch cho mỗi mét vuông là 400 nghìn đồng thì chi phí lát gạch ở khu vực C là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng nghìn)

A. 2.950.000 đồng. **B.** 3.578.000 đồng. **C.** 1.360.000 đồng. **D.** 680.000 đồng.

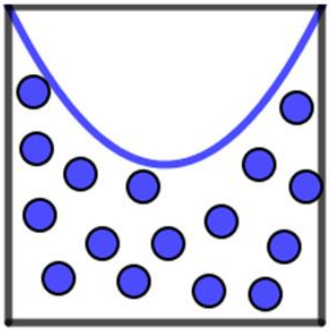
Câu 5: Trong đợt hội trại tổ chức kỷ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bầy trên một pano có dạng Parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vựhình chữ nhật $ABCD$. Phần còn lại sẽ trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano gần giá trị nào nhất?



A. 900.000 đồng. **B.** 1.232.000 đồng. **C.** 902.000 đồng. **D.** 1.230.000 đồng.

Câu 6: Ông An có mảnh vườn hình vuông cạnh 12m, ông đào một hố nước tưới rau trên mảnh vườn đó có dạng parabol có đỉnh tại tâm hình vuông, parabol này đi qua hai đỉnh của hình vuông. Phần

còn lại ông trồng rau để bán, mỗi lần thu hoạch rau ông bán được 35.000 đồng trên $1\,m^2$. Giả sử năng suất rau trên mảnh vườn là như nhau, thu hoạch cả mảnh vườn ông An thu được số tiền là

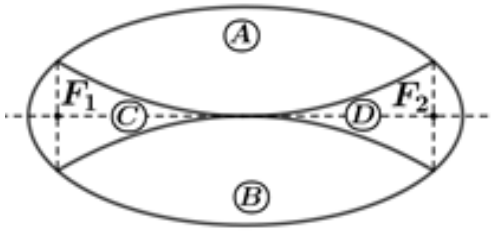


A. 3.000.000 đồng. **B.** 3.630.000 đồng. **C.** 1.680.000 đồng. **D.** 3.360.000 đồng.

Câu 7: Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa. Phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ. Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m^2, giá trồng cỏ là 100.000 đ/m^2, mỗi cây cọ giá 150.000đ. Hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó?

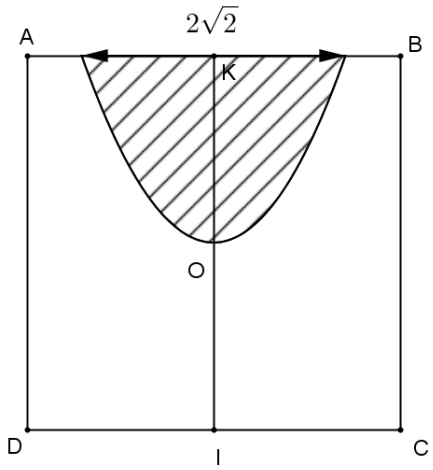
A. 12.218.000 đồng. **B.** 14.865.000 đồng. **C.** 14.465.000 đồng. **D.** 13.265.000 đồng.

Câu 8: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình Elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường Parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của Elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của Elip lần lượt là $8m$ và $4m$; $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Phần A, B dùng để trồng hoa; phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông trồng hoa và trồng cỏ lần lượt là 250.000 đồng và 150.000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



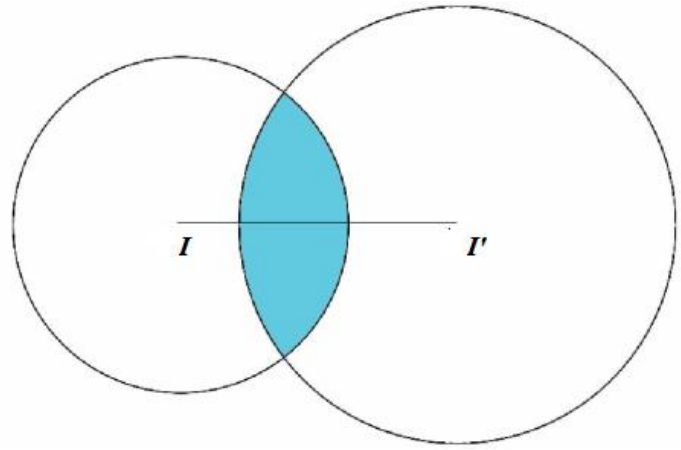
A. 5.676.000 đồng. **B.** 4.656.000 đồng. **C.** 5.455.000 đồng. **D.** 4.766.000 đồng.

Câu 9: Ông An có một mảnh đất nhỏ hình vuông cạnh bằng $4\,m$ ở trước sân. Ông muốn trồng hoa và cỏ để trang trí mảnh vườn của mình như sau: Ông sẽ trồng hoa trên phần diện tích có dạng Parabol (P) nhận trục đối xứng KI của hình vuông làm trục đối xứng của (P) và đỉnh của (P) là trung điểm của KI như hình vẽ, phần cỏ sẽ trồng ở phần còn lại của hình vuông. Biết rằng loại hoa ông muốn trồng có giá $200\,000$ đồng/$1m^2$, cỏ có giá $50\,000$ đồng/$1m^2$. Hỏi số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)?



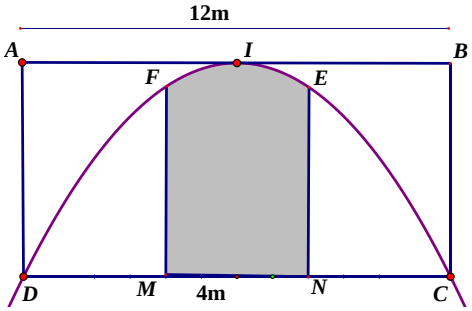
A. 1365685,4 đ. **B.** 2634314,6 đ. **C.** 138642,5 đ. **D.** Đáp án khác.

Câu 10: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau (tham khảo hình vẽ). Bán kính của hai hình tròn là $30m$ và $40m$. Khoảng cách giữa hai tâm của hình tròn là $50m$. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là $50.000đ$ và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là $20.000đ$. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?



A. 235 triệu. **B.** 196 triệu. **C.** 164 triệu. **D.** 177 triệu.

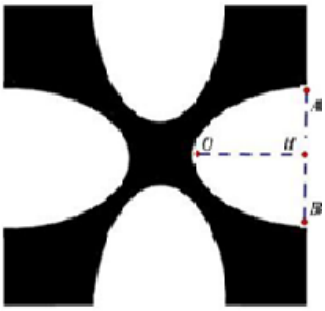
Câu 11: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6m$, chiều dài $CD = 12m$. Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4m$, cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua 2 điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



A. 21.200.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng. **C.** 20.800.000 đồng. **D.** 20.400.000 đồng.

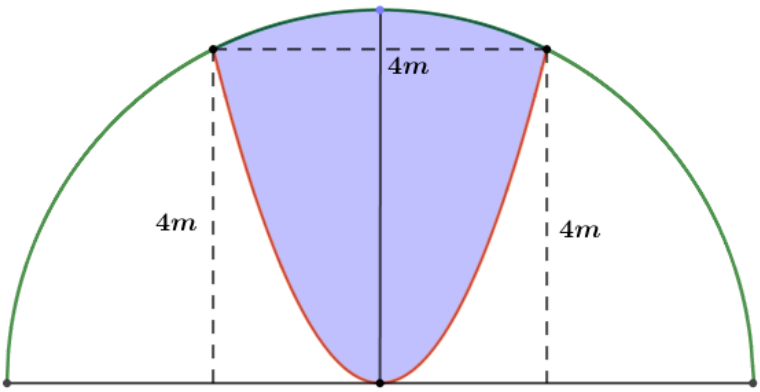
Câu 12: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$

cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $50\ \text{cm}^2$. **B.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **D.** $\frac{160}{3}\text{cm}^2$.

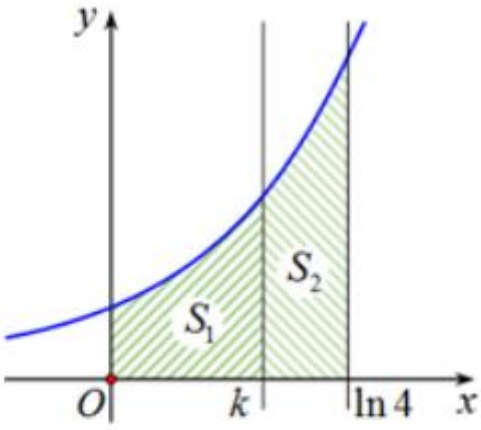
Câu 13: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn.



Hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4m$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên gần nhất với số nào sau đây?

A. 6.739.000 đồng. **B.** 1.948.000 đồng. **C.** 3.926.000 đồng. **D.** 4.115.000 đồng.

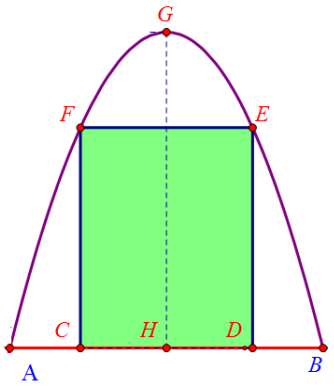
Câu 14: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(k\in\mathbb{R}, 0<k<\ln 4)$ chia hình phẳng (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ.



Tìm k để $S_2=2S_1$.

A. $k=\ln 3$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **D.** $k=\ln 2$.

Câu 15: Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH=4\text{m}$, chiều rộng $AB=4\text{m}$, $AC=BD=0,9\text{m}$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm giá là 1200000 đồng/m^2, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/m^2.



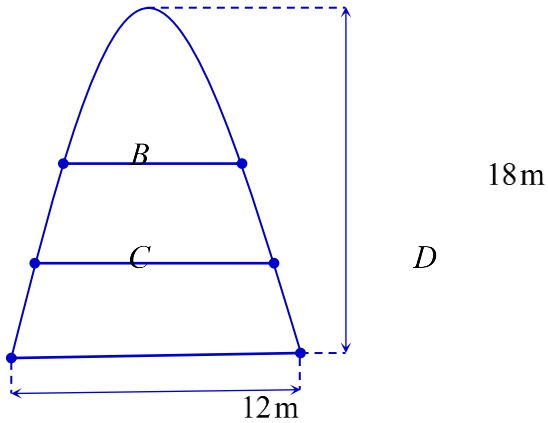
Hỏi tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 (đồng). **B.** 7368000 (đồng). **C.** 4077000 (đồng). **D.** 11370000 (đồng)

Câu 16: Ông Toàn có một mảnh đất hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục nhỏ là 10 m. Ông để một dải đất rộng 8 m làm sân, lối đi và dải đất này nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng đồng thời ông muốn trồng hoa hai bên mảnh đất còn lại. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng /m^2. Hỏi ông Toàn cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần đất đó? (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

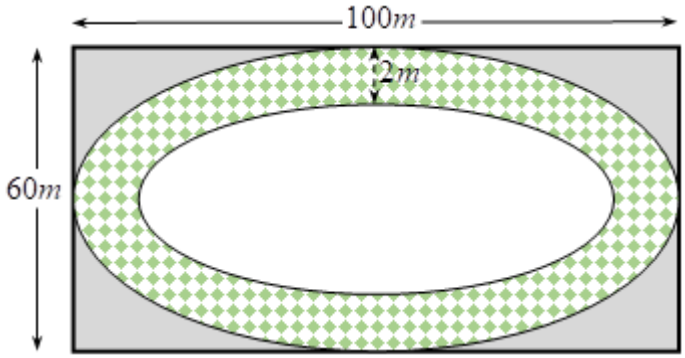
A. 7.652.000 đồng. **B.** 4.913.000 đồng. **C.** 4.914.000 đồng. **D.** 7.653.000 đồng.

Câu 17: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



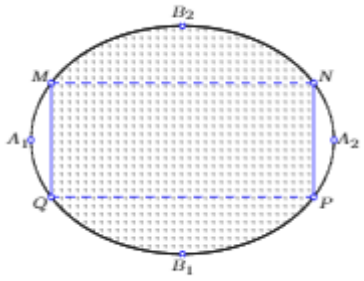
A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 18: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng là 60 m người ta làm một con đường nằm trong sân (tham khảo hình bên). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) làm con đường đó.



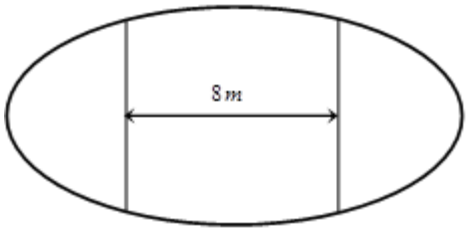
A. 294.053.000 đồng. **B.** 283.904.000 đồng. **C.** 293.804.000 đồng. **D.** 283.604.000 đồng.

Câu 19: Một biển cảnh báo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ dưới phần tô đậm được sơn màu đỏ chi phí là 150.000 đồng trên một mét vuông, phần còn lại sơn màu trắng chi phí là 100.000 đồng trên một mét vuông. Hỏi số tiền (tính theo đồng) để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 10m, B_1B_2 = 8m$, và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4m$?



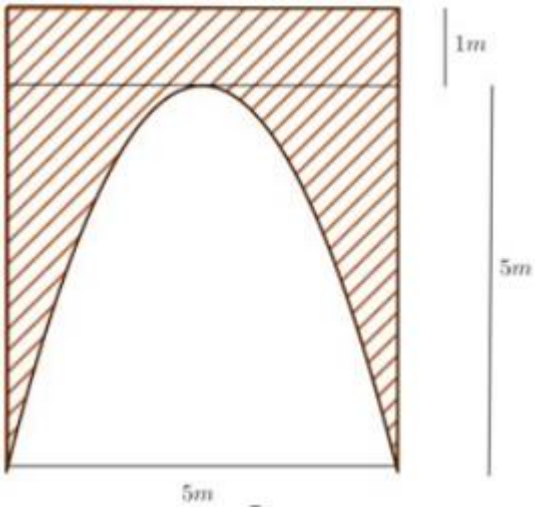
A. 9.243.000. **B.** 9.620.000. **C.** 7.330.000 **D.** 8.756.000.

Câu 20: Ông Toàn có một mảnh đất phẳng hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông để một dải đất rộng $8m$ làm sân, lối đi và dải đất này nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ) đồng thời ông muốn trồng hoa hai bên mảnh đất còn lại. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông Toàn cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



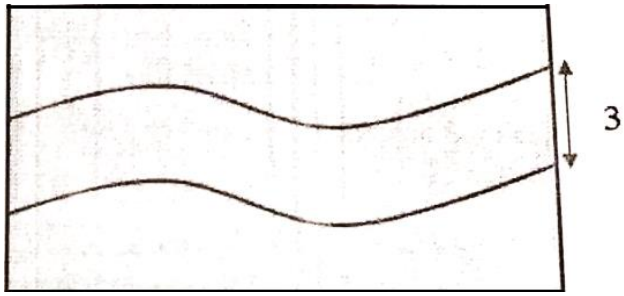
A. 7.652.000 đồng. **B.** 4.913.000 đồng. **C.** 4.914.000 đồng. **D.** 7.653.000 đồng.

Câu 21: Ông A có một cái cổng hình chữ nhật, lối vào cổng có dạng parabol có kích thước như hình vẽ. Ông A cần trang trí bề mặt **(phần gạch chéo)** của cổng. Ông A cần bao nhiêu tiền để trang trí, biết giá thành trang trí là 1.200.000 đồng /$1m^2$?



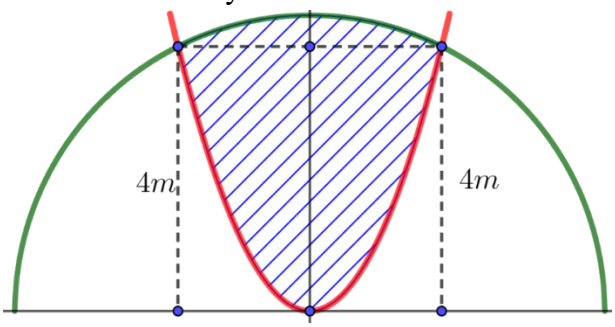
A. 20 triệu đồng. **B.** 16 triệu đồng. **C.** 10 triệu đồng. **D.** 8 triệu đồng.

Câu 22: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $18m$, chiều rộng $10m$. Người ta đổ ở giữa. Biết bề dày lớp bê tông là $10cm$. Tính thể tích lượng bê tông cần dùng?



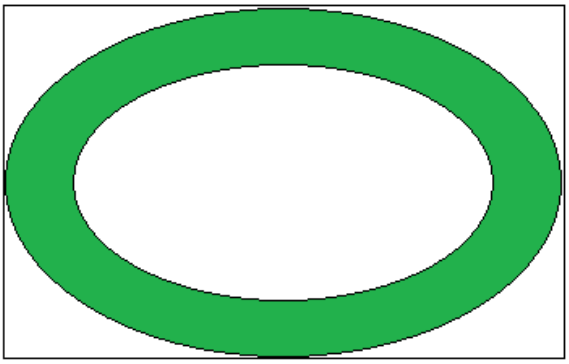
A. $60m^3$. **B.** $6m^3$. **C.** $54m^3$. **D.** $5,4m^3$.

Câu 23: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn **(phần tô màu)** và cách nhau một khoảng bằng 4m. Phần còn lại của khuôn viên **(phần không tô màu)** dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/ m^2 và 100.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây?



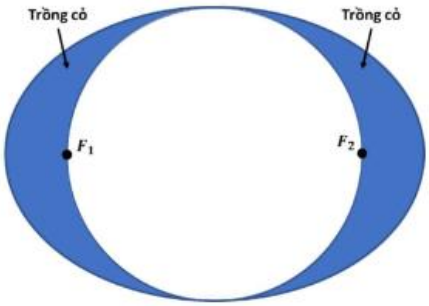
A. 3.739.000 **(đồng)**. **B.** 1.948.000 **(đồng)**. **C.** 3.926.000 **(đồng)**. **D.** 4.115.000 **(đồng)**.

Câu 24: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $100m$ và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân **(như hình vẽ)**. Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường Elip, Elip của viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường là 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó **(Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)**



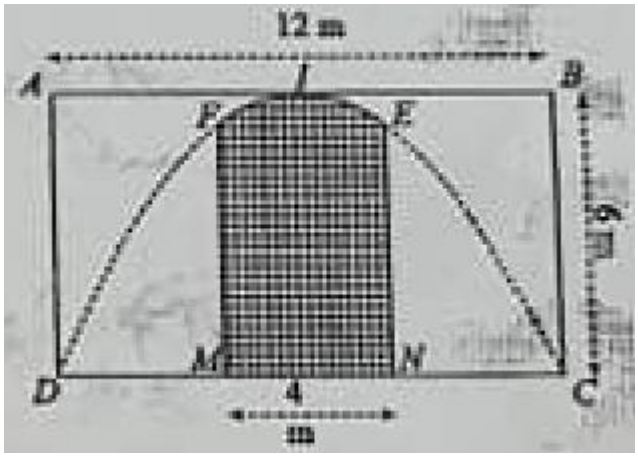
A. 293904000 . **B.** 283604000 . **C.** 293804000 . **D.** 283904000 .

Câu 25: Ông A đã cải tạo một miếng đất thành hình elip. Elip này có độ dài trục lớn là 12 mét. Trong elip có một đường tròn đi qua các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm F_1, F_2 .Ông A muốn trồng cỏ May Mắn cho mảnh đất là phần bên trong Elip và bên ngoài đường tròn. Biết rằng chi phí cho việc trồng cỏ May Mắn là 60 nghìn đồng trên một mét vuông. Hỏi tổng chi phí trồng cỏ May Mắn gần nhất với số tiền nào sau đây?



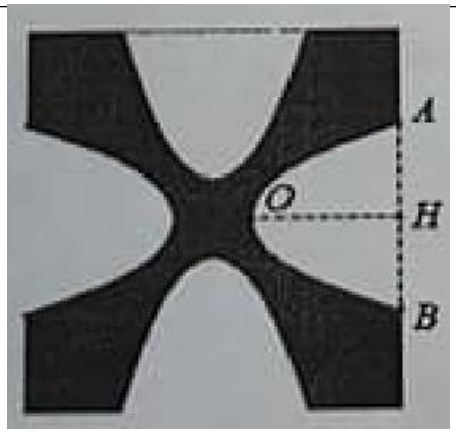
A. 2811 nghìn đồng. **B.** 1405 nghìn đồng. **C.** 447 nghìn đồng. **D.** 895 nghìn đồng.

Câu 26: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIF ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật ABCD có chiều cao BC = 6 m, chiều dài CD = 12 m (hình vẽ bên). Cho biết MNEF là hình chữ nhật có MN = 4 m, cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D . Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



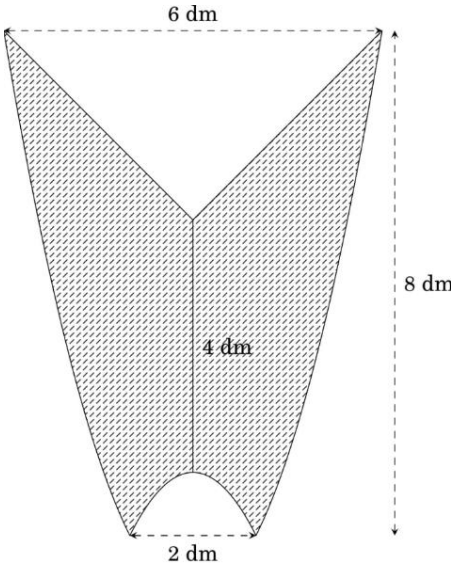
A. 21200000 đồng. **B.** 20600000 đồng. **C.** 20800000 đồng. **D.** 20400000 đồng.

Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết AB = 5 cm, OH = 4cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.

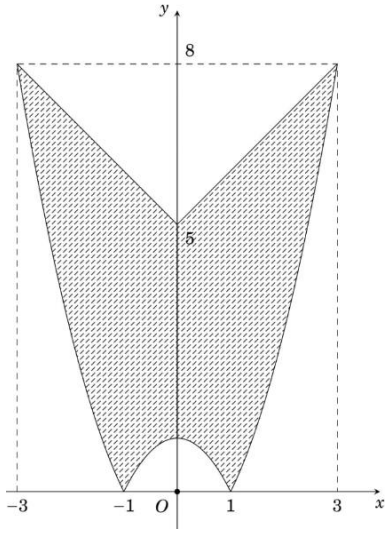


A. $50\ cm^2$. **B.** $\frac{14}{3}\ cm^2$. **C.** $\frac{140}{3}\ cm^2$. **D.** $\frac{160}{3}\ cm^2$.

Câu 28: Ông T làm logo bằng một tấm nhựa phẳng, có hình dạng là một hình trục đối xứng. Biết đường viền hai bên là hai nhánh của một pharabol và lõm phía dưới đáy cũng có dạng là một parabol, hai nhánh phía trên là hai đoạn thẳng, như hình bên dưới. Tính diện tích của logo đó.



Lời giải



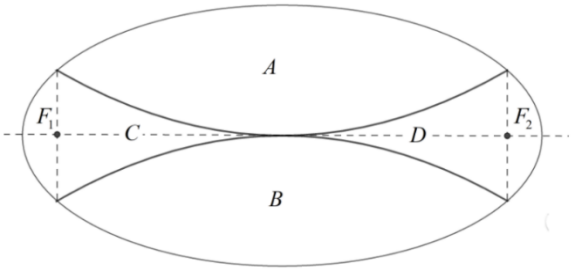
Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó nửa bên phải trục tung là hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1, y = x + 5; y = -x^2 + 1; x = 0$.

Diện tích hình phẳng (H)

$$S_{(H)}=\int_0^1\left(x+5-\left(1-x^2\right)\right)dx+\int_1^3\left(x+5-\left(x^2-1\right)\right)dx=\frac{73}{6}\left(dm^2\right)$$

Vậy diện tích cần tìm là $S=2S_{(H)}=\frac{73}{3}\left(dm^2\right)$

Câu 29: Ông An dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ dưới. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là $16m$ và $8m$, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 200.000 và 100.000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 17.679.000 đồng. **B.** 19.526.000 đồng. **C.** 19.526.000 đồng. **D.** 13.547.000 đồng.

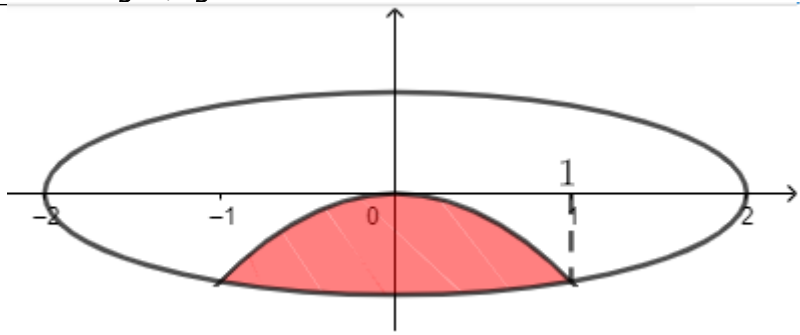
Câu 30: Một khu công viên hình chữ nhật có chiều dài là $100m$ và chiều rộng là $60m$. Người ta làm một con đường nằm trong sân (tham khảo hình dưới). BIết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, đường elip viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật, chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường là 600.000 đồng. Tính tổng số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) để làm con đường đó.

A. 293.804.000 đồng. **B.** 283.604.000 đồng. **C.** 294.053.000 đồng. **D.** 283.904.000 đồng.

Câu 31: Chuẩn bị đón hè 2021, nhà bác Hoa mời thợ về làm mái vòm chống nắng cho khoảng sân trước nhà bằng loại nhựa thông minh polycacnonat màu trắng trong với đơn giá $1m^2$ là 655.000 đồng. Mái vòm là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ phủ kín sân có chiều dài $10\,\text{m}$, khi đặt thước dây vào 3 điểm A,B,C đo được $AB=2,8\,\text{m};BC=3,6\,\text{m};AC=6,2\,\text{m}$ (hình minh họa bên dưới). Hỏi số tiền (đơn vị đồng, làm tròn đến hàng nghìn) mua mái nhựa gần nhất với số nào dưới đây?

A. 263514000. **B.** 42387000. **C.** 40387000. **D.** 4238700.

Câu 32: Bác An có sân vườn hình Elip độ dài cạnh lớn là $2m$ và cạnh bé là $\frac{1}{\sqrt{3}}m$, bác xây ao cá là phần tô đậm trong hình vẽ, đường viền biên của ao cá trong sân là một đường Parabol. Phần không xây ao cá, Bác An mua thêm hoa về trồng. Biết rằng $1m^2$ ao cá có giá 250000 đồng và $1m^2$ trồng hoa có giá 50000 đồng. Hỏi bác An tốn bao nhiêu tiền để hoàn thành khu vườn?



A. 257056,872 đồng. **B.** 335633,2274 đồng.

C. 725519,7457 đồng. **D.** 362759,8728 đồng.

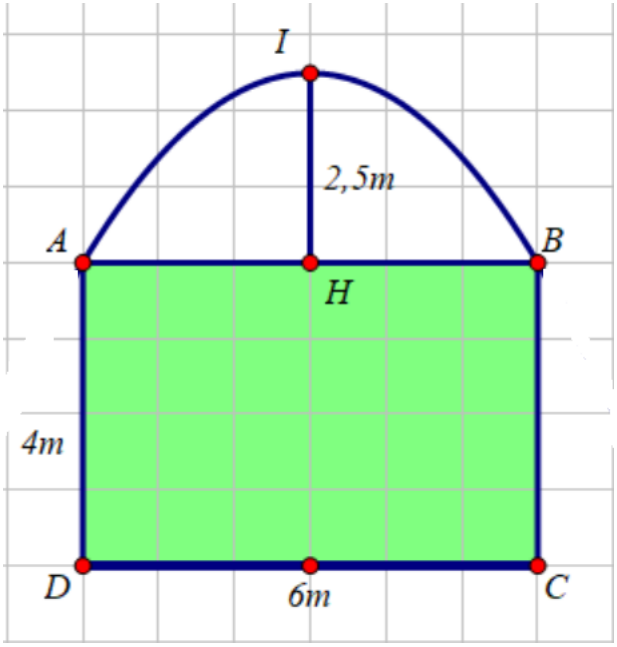
Câu 33: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



A. $V=1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\text{m}^3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Một gia đình muốn làm cái cổng (như hình vẽ).

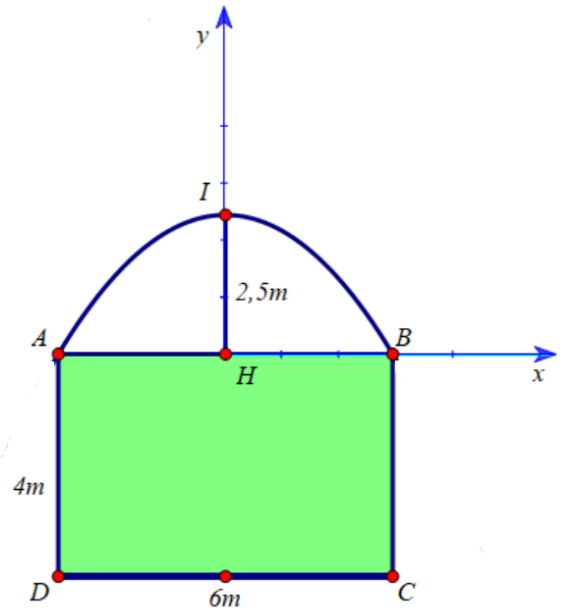


Phần phía trên cổng có hình dạng là một parabol với $IH = 2,5m$, phần phía dưới là một hình chữ nhật có kích thước $AD = 4m, AB = 6m$. Giả sử giá để làm phần cổng được tô màu là 1.000.000 đ/m^2 và giá để làm phần cổng phía trên là 1.200.000 đ/m^2. Số tiền gia đình đó phải trả là:

A. 24.400.000 đ. **B.** 36.000.000 đ. **C.** 38.000.000 đ. **D.** 38.800.000 đ.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

+) $S_{ABCD} = 4.6 = 24(m^2)$ nên số tiền làm phần cổng hình chữ nhật $ABCD$ là: 24.000.000 đ.

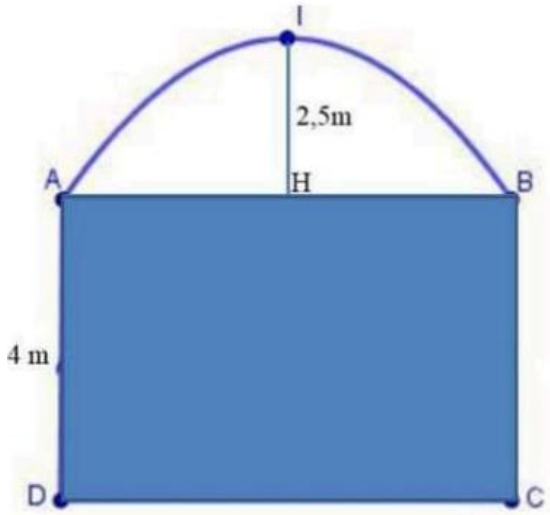
+) Gắn hệ trục tọa độ Hxy như hình vẽ. Khi đó, parabol có dạng: $y=ax^2+b\left(P\right)$. Parabol đi qua điểm $I\left(0;2,5\right)$ và $B(3;0)$ nên: $\begin{cases}b=2,5\\9a+2,5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{18}\\b=\dfrac{5}{2}\end{cases}$. Vậy $y=-\dfrac{5}{18}x^2+\dfrac{5}{2}$.

Suy ra, diện tích phía trên của cổng là: $S=\int\limits_{-3}^{3}\left(-\dfrac{5}{18}x^2+\dfrac{5}{2}\right)dx=10\left(m^2\right)$.

Số tiền làm phần cổng phía trên là: $12.000.000$ đ.

Vậy số tiền gia đình phải trả là: $24.000.000+12.000.000=36.000.000$ đ.

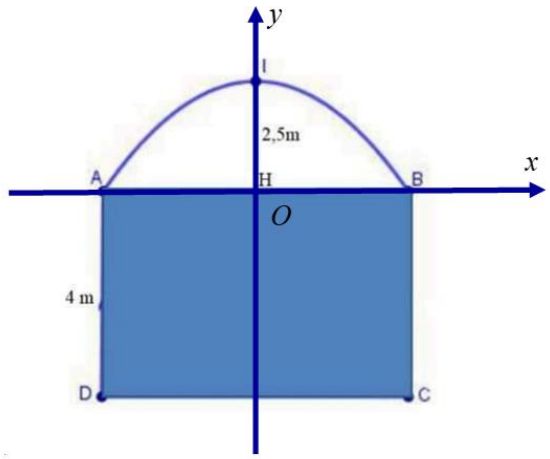
Câu 2: Một gia đình muốn làm cánh cổng (như hình vẽ). Phần phía trên cổng có hình dạng là một parabol với $IH=2,5\text{m}$, phần phía dưới là một hình chữ nhật kích thước cạnh là $AD=4\text{m}$, $AB=6\text{m}$. Giả sử giá để làm phần cổng được tô màu là $1.000.000\left(\text{đ/m}^2\right)$ và giá để làm phần cổng phía trên là $1.200.000\left(\text{đ/m}^2\right)$. Số tiền gia đình đó phải trả là



A. 24.400.000 đ. **B.** 36.000.000 đ. **C.** 38.000.000 đ. **D.** 38.800.000 đ.

Lời giải

Chọn B



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ: Gốc tọa độ O trùng điểm H, A và B thuộc trục Ox, H thuộc trục Oy.

Khi đó $H(0;0)$, $I(0;2,5)$, $B(3;0)$, $A(-3;0)$.

Gọi parabol cần tìm có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Do A, B, I thuộc (P) nên ta có hệ $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{18} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Do đó parabol là $(P): y = -\dfrac{5}{18}x^2 + \dfrac{5}{2}$.

Diện tích phần phía trên cổng có hình dạng là một parabol là

$$\int_{-3}^{3}\left(-\frac{5}{18}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{5}{18}.\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 10.$$

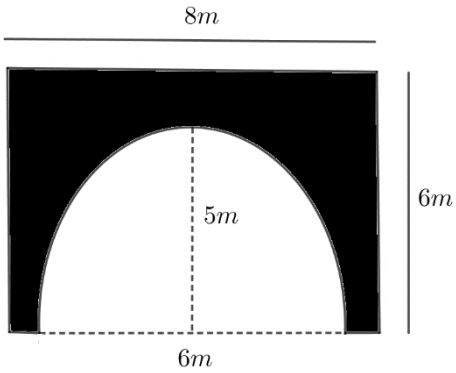
Giá tiền để làm phần cổng phía trên là $10\text{x}1.200.000 = 12.000.000$.

Diện tích phần phía dưới là một hình chữ nhật là $4.6 = 24$.

Giá tiền để làm phần cổng được tô màu là $24\text{x}1.000.000 = 24.000.000$.

Số tiền gia đình đó phải trả là $12.000.000 + 24.000.000 = 36.000.000$.

Câu 3: Một cái cổng có dạng như hình vẽ, chiều cao của cổng là $6m$ và chiều rộng là $8m$. Mái vòm của cổng có hình nửa elip với chiều rộng là $6m$, điểm cao nhất của mái vòm là $5m$. Người ta muốn lát gạch hoa để trang trí cho cổng với chi phí là 360.000 đồng$/m^2$.



Hỏi chi phí để trang trí cho cổng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 8.481.600 đồng. **B.** 13.029.300 đồng. **C.** 4.240.800 đồng. **D.** 8.798.400 đồng.

Lời giải

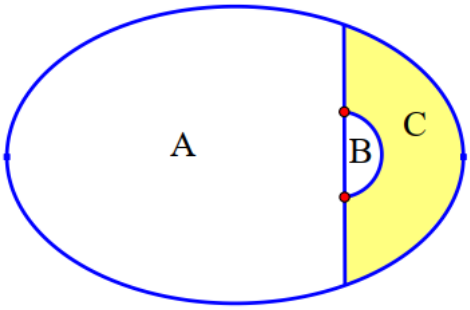
Chọn D

Diện tích nữa elip là $S = \dfrac{1}{2}.\pi.5.3 = \dfrac{15\pi}{2}m^2$.

Diện tích cần lát gạch hoa là $S_1 = S_{hcn} - S = 8.6 - \dfrac{15}{2}\pi\left(m^2\right)$.

Số tiền cần dùng để trang trí cổng là $T = S_1.360000 = 8798400$.

Câu 4: Một bể bơi hình elip, có độ dài trục lớn bằng 10m và trục nhỏ bằng 8m. Khu vực A là chứa nước, khu vực B là bậc thang lên xuống bể bơi, là nửa đường tròn có tâm là một tiêu điểm của elip, bán kính bằng 1m. Phần còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch (như hình vẽ).



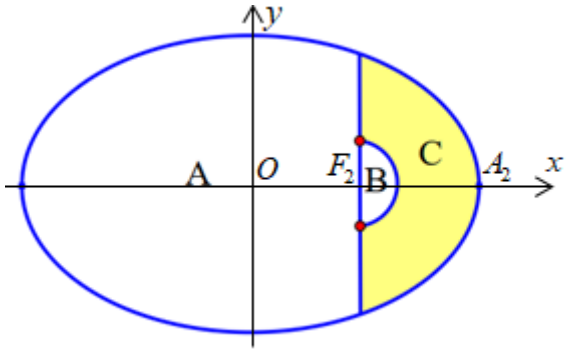
Nếu chi phí lát gạch cho mỗi mét vuông là 400 nghìn đồng thì chi phí lát gạch ở khu vực C là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng nghìn)

A. 2.950.000 đồng. **B.** 3.578.000 đồng. **C.** 1.360.000 đồng. **D.** 680.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ



Độ dài trục lớn là 10, trục nhỏ là 8 $\Rightarrow a=5, b=4 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=3$

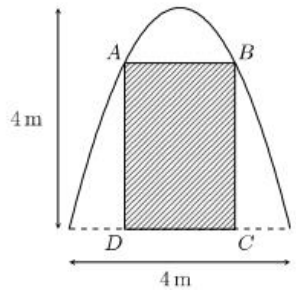
Ta có phương trình elip là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y=4.\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$

Gọi S_1 là phần diện tích lát gạch phía trên trục Ox

$S_1=\int_3^5 4.\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}dx-\frac{1}{4}.\pi.1^2=I-\frac{\pi}{4}$ với $I=\int_3^5 4.\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}dx$ (có thể bấm máy)

Diện tích phần là gạch là $2S_1$, suy ra số tiền lát gạch là $2S_1.400\,000 \simeq 2.950.000$ đồng.

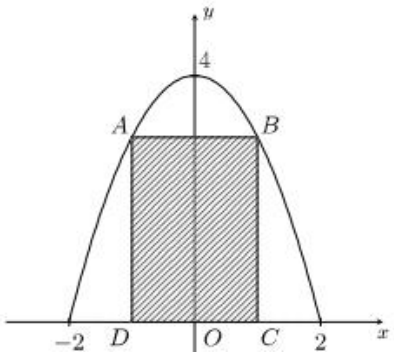
Câu 5: Trong đợt hội trại tổ chức kỷ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bầy trên một pano có dạng Parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vựhình chữ nhật $ABCD$. Phần còn lại sẽ trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano gần giá trị nào nhất?



A. 900.000 đồng. **B.** 1.232.000 đồng. **C.** 902.000 đồng. **D.** 1.230.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Xét hệ trụtọa đnhư hình vẽ. Parabol của pano có dạng $y = ax^2 + c\left(a < 0\right)$. Vì $\left(P\right)$ cắt Oy tại điểm có tung đ 4 nên $c = 4$. Mà $\left(P\right)$ đi qua điểm $\left(2;0\right)$ nên $a = -1$. Như vậy Parabol của pano có phương trình $y = 4 - x^2$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

Giả sử $CD = 2x$ với $0 \le x \le 2$. Khi đó diện tích của hình chữ nhật là $S_{ABCD} = 2x\left(4 - x^2\right)$.

Diện tích phần trang trí của hoa văn là

$$S\left(x\right) = \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x - 2x\left(4 - x^2\right) = 2x^3 - 8x + \frac{32}{3}$$

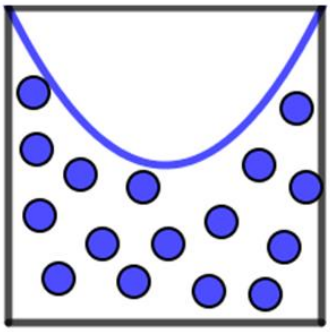
Hàm số $S\left(x\right)$ có $S'\left(x\right) = 6x^2 - 8$ và $S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Trên đoạn $\left[-2;2\right]$ ta có $S\left(\pm 2\right) = \frac{32}{3}$; $S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{96 - 32\sqrt{3}}{9}$; $S\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{96 + 32\sqrt{3}}{9}$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $S\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ là $\frac{96 - 32\sqrt{3}}{9}$

Chi phí cho họa tiết văn hoa lúđó là $\frac{96 - 32\sqrt{3}}{9} \times 200.000 \approx 902.000$ đồng.

Câu 6: Ông An có mảnh vườn hình vuông cạnh 12m, ông đào một hố nước tưới rau trên mảnh vườn đó có dạng parabol có đỉnh tại tâm hình vuông, parabol này đi qua hai đỉnh của hình vuông. Phần còn lại ông trồng rau để bán, mỗi lần thu hoạch rau ông bán được 35.000 đồng trên $1\,m^2$. Giả sử năng suất rau trên mảnh vườn là như nhau, thu hoạch cả mảnh vườn ông An thu được số tiền là

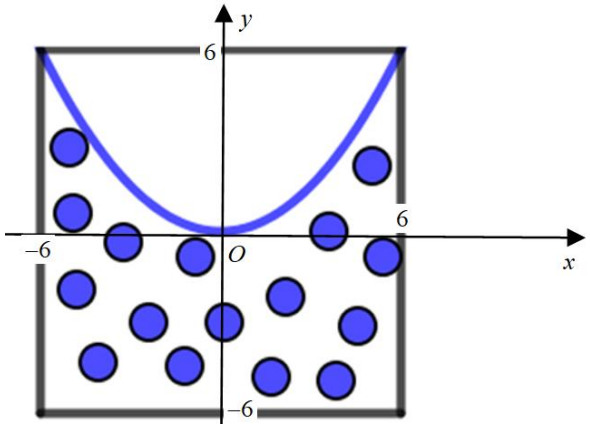


A. 3.000.000 đồng. **B.** 3.630.000 đồng. **C.** 1.680.000 đồng. **D.** 3.360.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ (O là giao điểm hai đường chéo hình vuông).



Vì parabol đi qua gốc tọa độ O và qua điểm $(6;6),(-6;6)$ nên parabol có phương trình là $(P): y=\frac{1}{6}x^2$.

Khi đó, diện tích phần không trồng rau là phần hình giới hạn bởi $\begin{cases} y=\frac{1}{6}x^2 \\ y=6 \\ x=6 \\ x=-6 \end{cases}$ nên diện tích của nó là $\int_{-6}^{6}\left|6-\frac{1}{6}x^2\right|\mathrm{d}x=\int_{-6}^{6}\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)\mathrm{d}x=48m^2$.

Suy ra diện tích phần trồng rau là: $12^2-48=96m^2$.

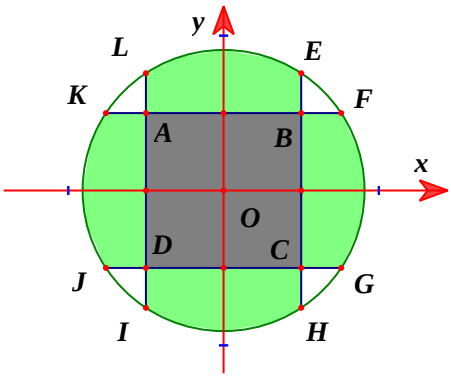
Số tiền thu được do trồng rau là $96.35000=3.360.000$ đồng.

Câu 7: Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa. Phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ. Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB=4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m^2, giá trồng cỏ là 100.000 đ/m^2, mỗi cây cọ giá 150.000đ. Hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó?

A. 12.218.000 đồng. **B.** 14.865.000 đồng. **C.** 14.465.000 đồng. **D.** 13.265.000 đồng.

Lời giải

Chọn D



Giả sử phương trình đường tròn của bồn hoa là: $x^2+y^2=64$; $AB: y=2$; $BC: x=2$.

Suy ra $F\ 2\sqrt{15};2$, diện tích hình tròn là 64π m^2; Diện tích hình vuông $ABCD$ là 16 m^2.

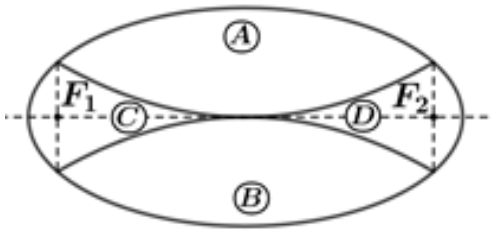
Diện tích tam giác cong BEF là $S=\int_2^{2\sqrt{15}}\sqrt{64-x^2}-2\ dx\approx 22,602$ m^2.

Suy ra diện tích phần trồng cỏ là $\approx 64\pi-16-22,604\text{x}4\approx 94,645$ m^2.

Do đó số tiền cần để trang trí bồn hoa là:

$\approx 16\text{x}150.000+94,645\text{x}100.000+150.000\text{x}4\approx 13.265.000$.

Câu 8: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình Elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường Parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của Elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của Elip lần lượt là $8m$ và $4m$; $F_1;F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Phần A,B dùng để trồng hoa; phần C,D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông trồng hoa và trồng cỏ lần lượt là 250.000 đồng và 150.000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



A. 5.676.000 đồng. **B.** 4.656.000 đồng. **C.** 5.455.000 đồng. **D.** 4.766.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và tiêu điểm $F_2(c;0)$ với $a>b>0;\ c^2=a^2-b^2$.

Theo giả thiết bài toán ta có $\begin{cases}2a=8\\2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}\Rightarrow c=2\sqrt{3}.$

Phương trình Elip: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$, tọa độ giao điểm của đường thẳng $x=2\sqrt{3}$ và Elip: $M\left(2\sqrt{3};1\right)$ và $M'\left(2\sqrt{3};-1\right)$.

Diện tích Elip: $\pi ab=\pi.4.2=8\pi$.

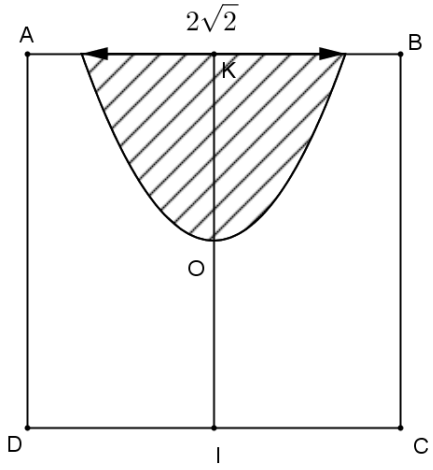
Diện tích giới hạn bởi parabol phía trên trục hoành, trục hoành và hai đường thẳng $x=\pm 2\sqrt{3}$ là:

$\frac{1}{3}F_1F_2.F_2M=\frac{1}{3}.4\sqrt{3}.1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng tiền để hoàn thành vườn hoa (diện tích vườn x 150.000 + diện tích hoa x 100.000) là:

$8\pi.150000+2.\left(\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}2\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\mathrm{d}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right).100000\approx 5.676.000$ đồng.

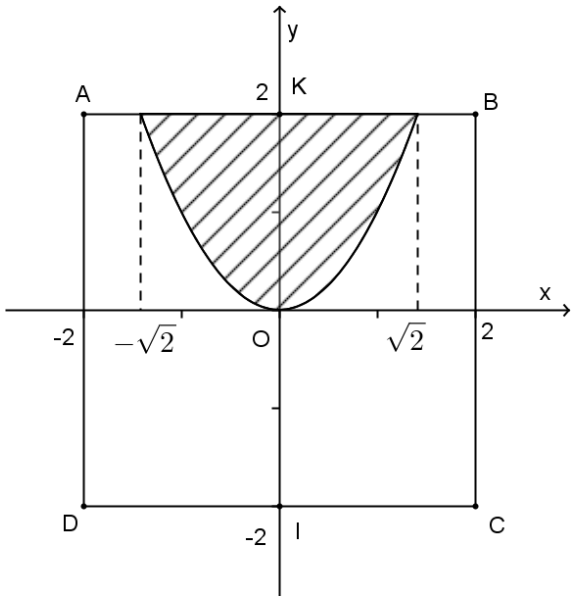
Câu 9: Ông An có một mảnh đất nhỏ hình vuông cạnh bằng $4m$ ở trước sân. Ông muốn trồng hoa và cỏ để trang trí mảnh vườn của mình như sau: Ông sẽ trồng hoa trên phần diện tích có dạng Parabol (P) nhận trục đối xứng KI của hình vuông làm trục đối xứng của (P) và đỉnh của (P) là trung điểm của KI như hình vẽ, phần cỏ sẽ trồng ở phần còn lại của hình vuông. Biết rằng loại hoa ông muốn trồng có giá 200000 đồng/$1m^2$, cỏ có giá 50000 đồng/$1m^2$. Hỏi số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)?



A. 1365685,4 đ. **B.** 2634314,6 đ. **C.** 138642,5 đ. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

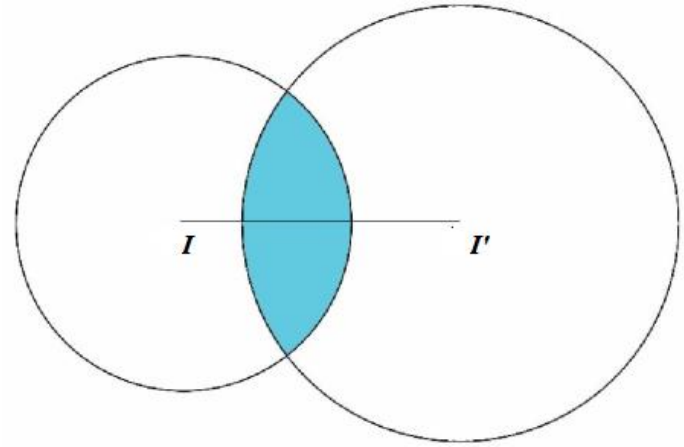
Phương trình của (P) là $y=x^2$; phương trình của AB là $y=2$

$\Rightarrow$Diện tích phần trồng hoa là: $S_1=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Diện tích phần trồng cỏ là: $S_2=S_{ABCD}-S_1=4^2-\frac{8\sqrt{2}}{3}=\frac{48-8\sqrt{2}}{3}$.

Vậy số tiền ông An bỏ ra để làm mảnh vườn là: $200\,000.S_1+50\,000.S_2\approx 1365685,4$ đồng.

Câu 10: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau (tham khảo hình vẽ). Bán kính của hai hình tròn là $30m$ và $40m$. Khoảng cách giữa hai tâm của hình tròn là $50m$. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là $50.000đ$ và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là $20.000đ$. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

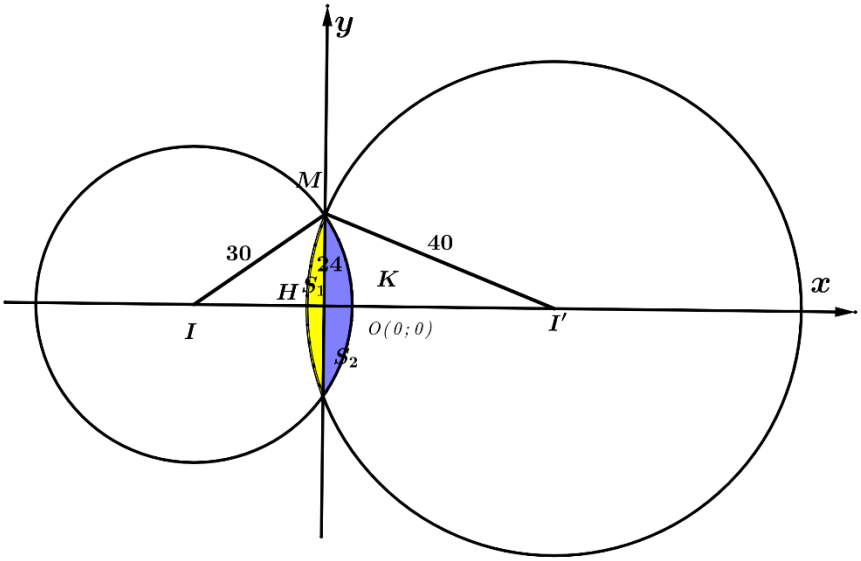


A. 235 triệu. **B.** 196 triệu. **C.** 164 triệu. **D.** 177 triệu.

Lời giải

Chọn C

Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Ta có: $O(0;0), H(-8;0), K(12;0), I(-18;0), I'(32;0)$

Phương trình đường tròn tâm I, bán kính bằng $30m$ là: $(x+18)^2+y^2=900$

Suy ra: $y=\sqrt{900-(x+18)^2}$

Phương trình đường tròn tâm I', bán kính bằng $40m$ là: $(x-32)^2+y^2=1600$

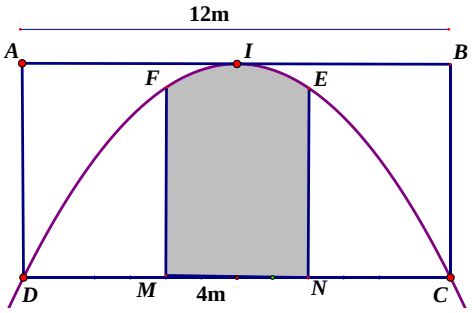
Suy ra: $y=\sqrt{1600-(x-32)^2}$

$$S_1+S_2=2.\left[\int_{-8}^{0}\sqrt{1600-(x-32)^2}dx+\int_{0}^{12}\sqrt{900-(x+18)^2}dx\right]\approx 664,17$$

Vậy tổng số tiền làm mặt sân khấu là:

$$T=50000.(S_1+S_2)+20000.\left[\pi(30^2+40^2)-2(S_1+S_2)\right]\approx 163,7.10^6.$$

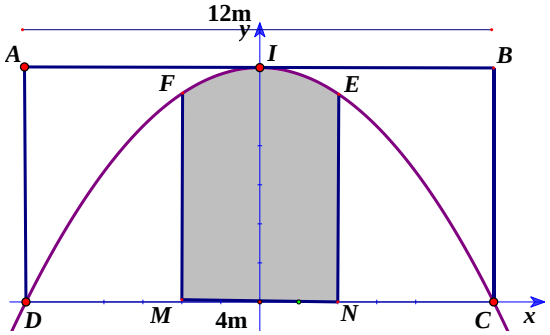
Câu 11: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC=6m$, chiều dài $CD=12m$. Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN=4m$, cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua 2 điểm C,D. Kinh phí làm bức tranh là 900000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



A. 21.200.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng. **C.** 20.800.000 đồng. **D.** 20.400.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



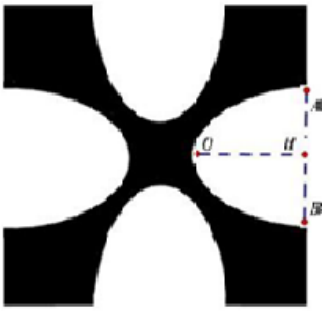
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ trên, đồ thị hàm số parabol $y=ax^2+bx+c$ qua 3 điểm $C(6;0);D(-6;0);I(0;6)$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}36a+6b+c=0\\36a-6b+c=0\\c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{6}\\b=0\\c=6\end{cases}$$ Suy ra hàm số parabol là: $y=f(x)=-\dfrac{1}{6}x^2+6$.

Diện tích MNEF là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=-\frac{1}{6}x^2+6$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2;x=2$. Suy ra $S_{MNEF}=S=\int\limits_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)dx=\frac{208}{9}m^2$

Vậy số tiền để làm bức tranh đó là: $\frac{208}{9}.900000=20.800.000$ đồng.

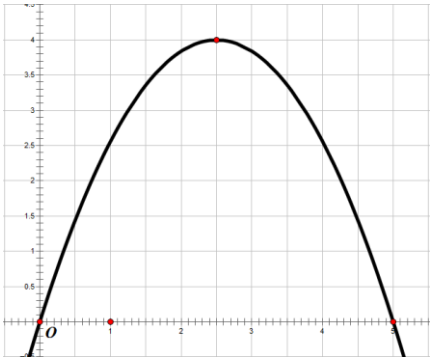
Câu 12: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5$ cm, $OH=4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. 50 cm^2. **B.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **D.** $\frac{160}{3}\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn C



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $\left(P\right):y=-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x$.

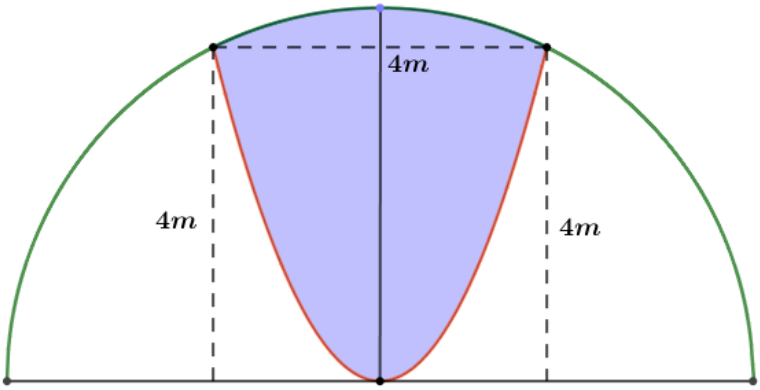
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right):y=-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=5$ là: $S=\int\limits_{0}^{5}\left(-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x\right)dx=\frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1=4S=\frac{160}{3}$ cm^2.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv}=100$ cm^2.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2=S_{hv}-S_1=100-\frac{160}{3}=\frac{140}{3}$ cm^2.

Câu 13: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn.

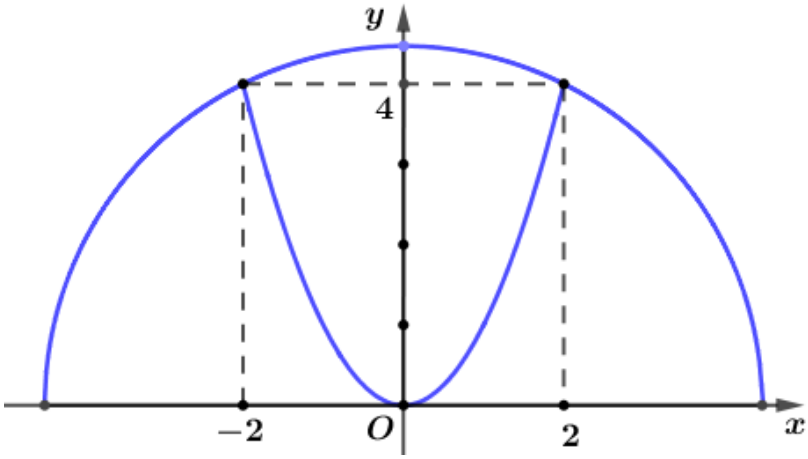


Hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4m$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên gần nhất với số nào sau đây?

A. 6.739.000 đồng. **B.** 1.948.000 đồng. **C.** 3.926.000 đồng. **D.** 4.115.000 đồng.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó parabol có đỉnh O, đi qua $(2;4)$ và $(-2;4)$ có phương trình $y=x^2$.

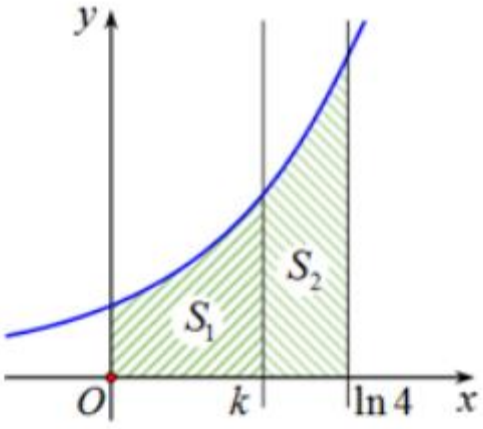
Nửa đường tròn có tâm O, bán kính $\sqrt{20}$ có phương trình $y=\sqrt{20-x^2}$.

Phần diện tích trồng hoa là $S=\int_{-2}^{2}\left|\sqrt{20-x^2}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x\approx 11,94$.

Phần diện tích trồng cỏ là $\frac{1}{2}\pi\cdot 20-S=19,48$.

Số tiền trồng hoa và cỏ gần bằng $11,94\times 150.000+19,48\times 100.000\approx 3.739.000$ đồng.

Câu 14: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(k\in\mathbb{R}, 0<k<\ln 4)$ chia hình phẳng (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ.



Tìm k để $S_2 = 2S_1$.

A. $k = \ln 3$. **B.** $k = \ln \frac{8}{3}$. **C.** $k = \frac{2}{3}\ln 4$. **D.** $k = \ln 2$.

Lời giải

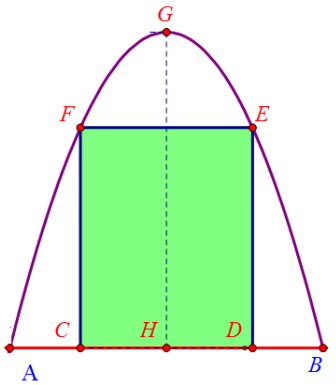
Chọn D

Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^k - 1$.

$S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^{\ln 4} - e^k = 4 - e^k$.

Vì $S_2 = 2S_1 \Rightarrow 4 - e^k = 2e^k - 2 \Leftrightarrow e^k = 2 \Leftrightarrow k = \ln 2$.

Câu 15: Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH = 4\text{m}$, chiều rộng $AB = 4\text{m}$, $AC = BD = 0,9\text{m}$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm giá là 1200000 đồng/m^2, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/m^2.



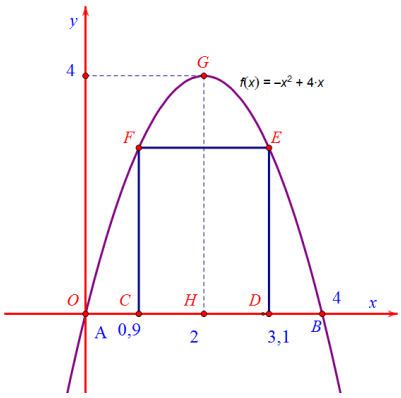
Hỏi tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 (đồng). **B.** 7368000 (đồng). **C.** 4077000 (đồng). **D.** 11370000 (đồng)

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Gọi phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$.

Do đó ta có $\begin{cases} c = 0 \\ \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 2^2 a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$.

Nên phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3} \approx 10,67(\text{m}^2)$.

Do vậy chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\text{m})$.

$CD = 4 - 2.0,9 = 2,2(m)$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \approx 6,14(m^2)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = 10,67 - 6,14 \approx 4,53(\text{m}^2)$.

Nên tiền là hai cánh cổng xấp xỉ là $6,14.1200000 = 7368000(\text{đ})$.

và tiền làm phần xiên hoa xấp xỉ là $4,53.900000 = 4077000(\text{đ})$.

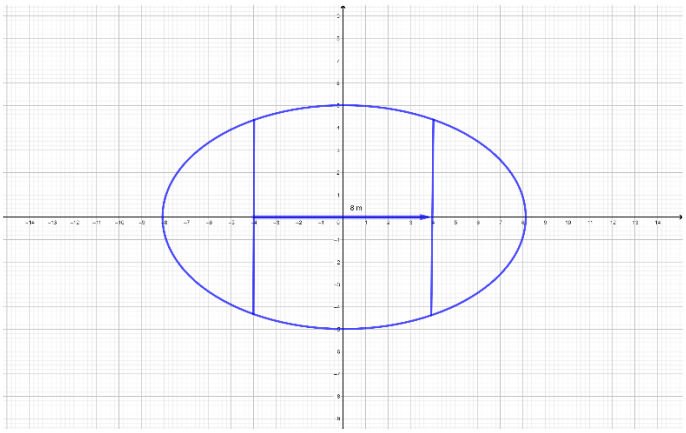
Vậy tổng chi phí là xấp xỉ 11445000 đồng.

Câu 16: Ông Toàn có một mảnh đất hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục nhỏ là 10 m. Ông để một dải đất rộng 8 m làm sân, lối đi và dải đất này nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng đồng thời ông muốn trồng hoa hai bên mảnh đất còn lại. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng /m^2. Hỏi ông Toàn cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần đất đó? (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 7.652.000 đồng. **B.** 4.913.000 đồng. **C.** 4.914.000 đồng. **D.** 7.653.000 đồng.

Lời giải

Chọn B



Giả sử Elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$. Khi đó Elip có phương trình:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} \quad (E_1)\\ y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} \quad (E_2)\end{array}\right.$$

Mảnh đất trồng hoa nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng, nên diện tích của mảnh đất trồng hoa bằng bốn lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (E_1), trục Ox, đường thẳng $x=4; x=8$

$$S=4\int_4^8\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x$$

Đặt $x=8\sin t; t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $\mathrm{d}x=8\cos t\mathrm{d}t$

Đổi cận:

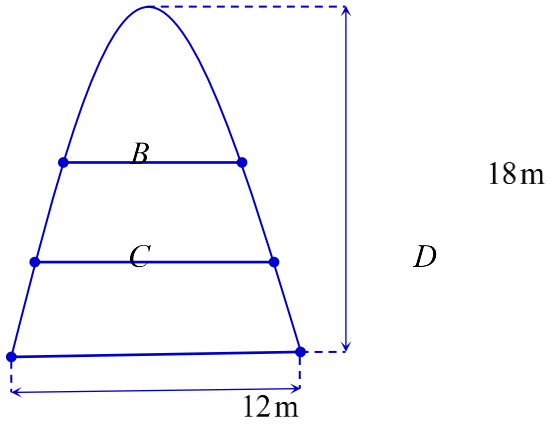
x	4	8
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

Do đó: $S=\frac{5}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{64-64\sin^2 t}.8\cos t\mathrm{d}t=160\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$

$$=80\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{80\pi}{3}-20\sqrt{3}\quad (m^2)$$

Vậy số tiền ông An cần để trồng hoa là: $T=S.100000\approx 4.913.000$ đồng.

Câu 17: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng

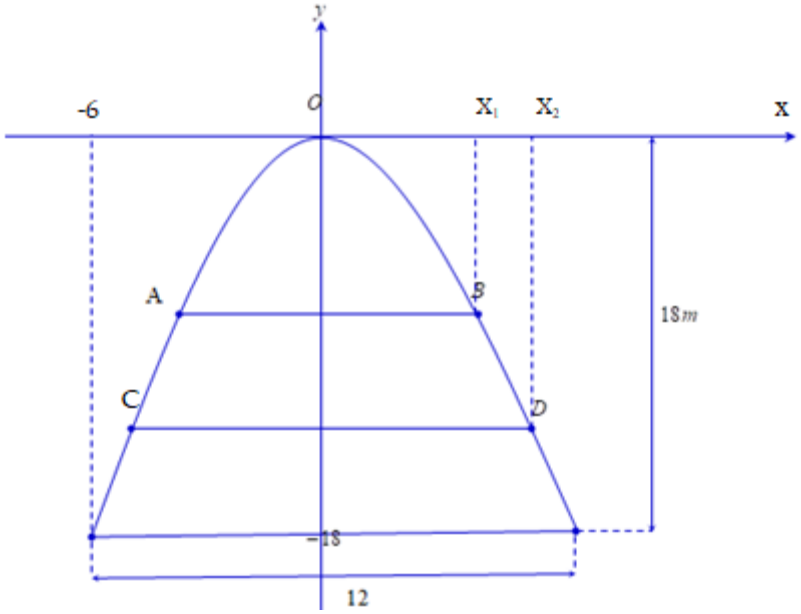


A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = ax^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Vậy (P) có phương trình $(P) = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

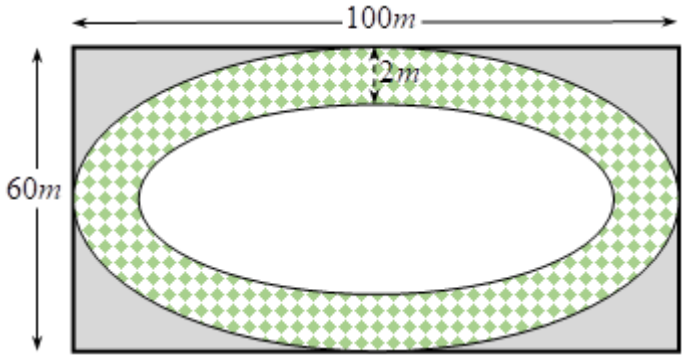
$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 18: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng là 60 m người ta làm một con đường nằm trong sân (tham khảo hình bên). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) làm con đường đó.



A. 294.053.000 đồng. **B.** 283.904.000 đồng. **C.** 293.804.000 đồng. **D.** 283.604.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy: đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình elip và hai trục tọa độ song song với các cạnh của hình chữ nhật.

+ Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

+ Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

+Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và S_2 là diện tích của (E_2).

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$S=S_1-S_2=2\int\limits_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}\mathrm{d}x-2\int\limits_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}\mathrm{d}x$.

Tính tích phân $I=2\int\limits_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x,(a,b\in\mathbb{R}^+)$.

Đặt $x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,\mathrm{d}t=2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$

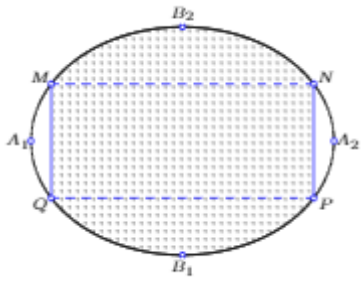
$=ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=ab\pi$.

Do đó $S=S_1-S_2=50.30\pi-48.28\pi=156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S=600000.156\pi\approx 294053000$ đồng.

Câu 19: Một biển cảnh báo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ dưới phần tô đậm được sơn màu đỏ chi phí là 150.000 đồng trên một mét vuông, phần còn lại sơn màu trắng chi

phí là 100.000 đồng trên một mét vuông. Hỏi số tiền (tính theo đồng) để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=10m, B_1B_2=8m$, và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=4m$?



A. 9.243.000. **B.** 9.620.000. **C.** 7.330.000 **D.** 8.756.000.

Lời giải

Chọn A

Giả sử phương trình elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} A_1A_2=10 \\ B_1B_2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$.

Suy ra $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$

Diện tích của elip (E) là: $S_E=\pi ab=20\pi\left(m^2\right)$ mà $MQ=4 \Rightarrow \begin{cases} M=d\cap(E) \\ N=d\cap(E) \end{cases}$ với:

$d: y=2 \Rightarrow M(-\frac{5\sqrt{3}}{2};2), N(\frac{5\sqrt{3}}{2};2)$

Khi đó diện tích phần không tô màu là: $S=4\int\limits_{\frac{5\sqrt{3}}{2}}^{5}\left(\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}\right)dx=\frac{20}{3}\pi-10\sqrt{3}(m^2)$

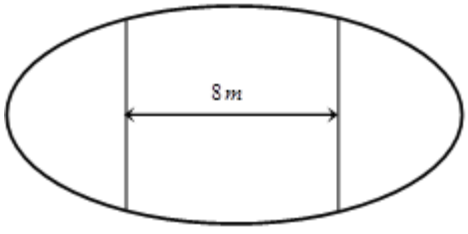
Vậy diện tích phần tô màu là: $S'=S_E-S=20\pi-\frac{20}{3}\pi+10\sqrt{3}=\frac{40}{3}\pi+10\sqrt{3}(m^2)$

Nên tổng chi phí để sơn biển là

$T=150000\times(\frac{40}{3}\pi+10\sqrt{3})+100000\times(\frac{20}{3}\pi-10\sqrt{3})\approx 9.243.000$

Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 20: Ông Toàn có một mảnh đất phẳng hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông để một dải đất rộng $8m$ làm sân, lối đi và dải đất này nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ) đồng thời ông muốn trồng hoa hai bên mảnh đất còn lại. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông Toàn cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.652.000 đồng. **B.** 4.913.000 đồng. **C.** 4.914.000 đồng. **D.** 7.653.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

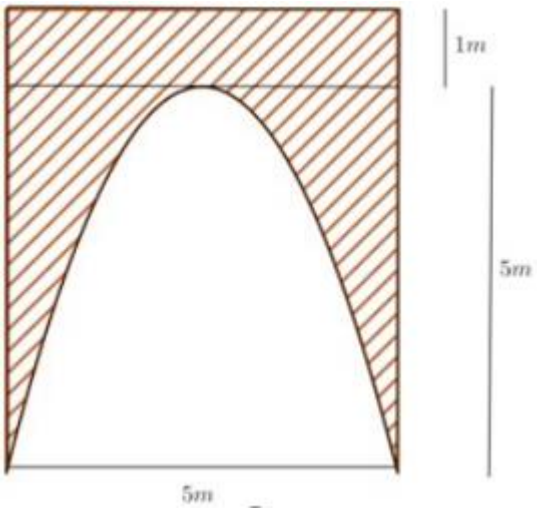
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \\ y=\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1)\end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

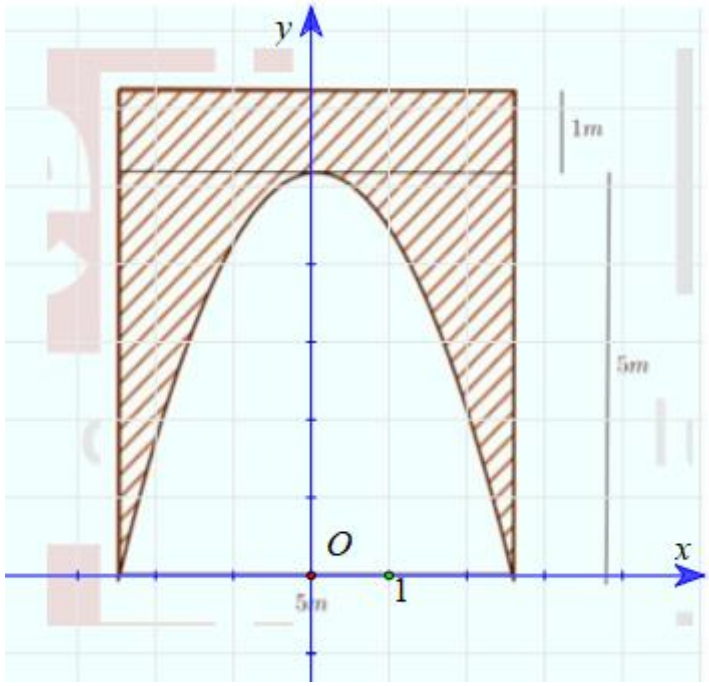
Câu 21: Ông A có một cái cổng hình chữ nhật, lối vào cổng có dạng parabol có kích thước như hình vẽ. Ông A cần trang trí bề mặt **(phần gạch chéo)** của cổng. Ông A cần bao nhiêu tiền để trang trí, biết giá thành trang trí là $1.200.000$ đồng $/1m^2$?



A. 20 triệu đồng. **B.** 16 triệu đồng. **C.** 10 triệu đồng. **D.** 8 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó (P) có phương trình dạng: $y = ax^2 + b$.

Khi đó: $A(2,5;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = a.2,5^2 + b$. **(1)**

$B(0;5) \in (P) \Leftrightarrow 5 = a.0^2 + b$ **(2)**

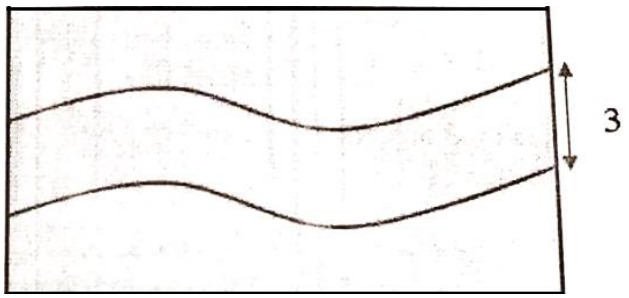
Giải hệ **(1)** và **(2)** ta được: $a = -\frac{4}{5}; b = 5$ hay $(P): y = -\frac{4}{5}x^2 + 5$.

Khi đó diện tích phần cổng (P) là: $S_1 = \int\limits_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{4}{5}x^2 + 5 \right) dx = \frac{50}{3}$.

Suy ra diện tích phần cần trang trí là: $S_2 = 5.6 - \frac{50}{3} = \frac{40}{3}$.

Vậy số tiền cần dùng để trang trí là: $T = 1.200.000 * \frac{40}{3} = 16.000.000$ **(đồng)**.

Câu 22: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $18m$, chiều rộng $10m$. Người ta đổ ở giữa. Biết bề dày lớp bê tông là $10cm$. Tính thể tích lượng bê tông cần dùng?



A. $60\,m^3$. **B.** $6\,m^3$. **C.** $54\,m^3$. **D.** $5,4\,m^3$.

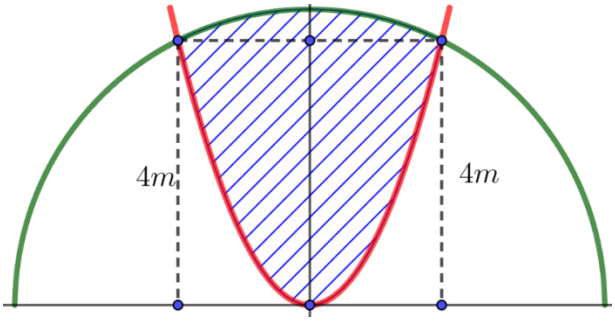
Lời giải

Chọn D

Ta có diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường giống nhau và luôn chênh nhau một đoạn bằng 3 bằng $\int\limits_0^{18} 3dx = 3x\Big|_0^{18} = 54\,m^3$.

Vì bề dày là $10cm = 0,1m$ nên thể tích lượng bê tông cần đổ vào là $V = S.h = 54.0,1 = 5,4m^3$

Câu 23: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn **(phần tô màu)** và cách nhau một khoảng bằng 4m. Phần còn lại của khuôn viên **(phần không tô màu)** dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/ m^2 và 100.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền cần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây?

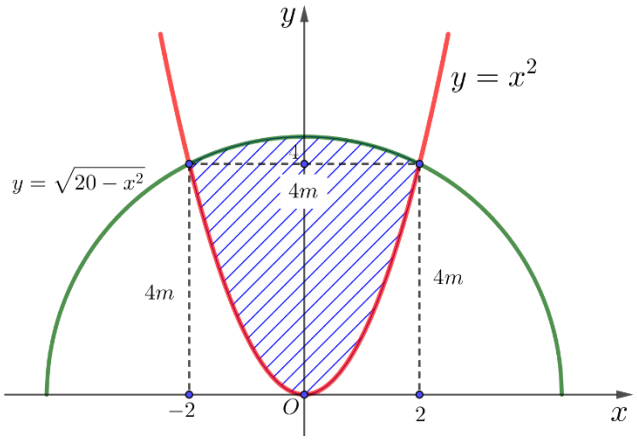


A. 3.739.000 **(đồng).** **B.** 1.948.000 **(đồng).** **C.** 3.926.000 **(đồng).** **D.** 4.115.000 **(đồng).**

Lời giải

Chọn A

Kết hợp vào hệ trục tọa độ, ta được:



Gọi parabol là $(P): y = ax^2$. Do $F(2;4) \in (P)$ nên $(P): y = x^2$.

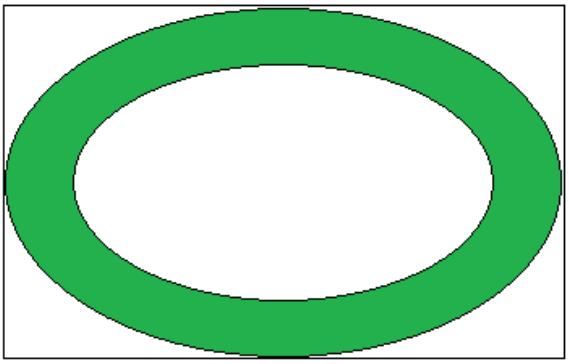
Gọi đường tròn có tâm ở gốc tọa độ là $(C): x^2 + y^2 = R^2$. Do $F(2;4) \in (C)$ nên nửa đường tròn trên là $y = \sqrt{20 - x^2}$.

Đặt S_1 là diện tích phần tô đậm. Khi đó: $S_1 = 2.\int_0^2 \left(\sqrt{20 - x^2} - x^2\right) dx = 20 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{8}{3}$.

Đặt S_2 là diện tích phần không tô đậm. Khi đó: $S_2 = \frac{1}{2}.\pi.R^2 - S_1 = 10\pi - 20 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{8}{3}$.

Vậy: Số tiền cần để trồng hoa và cỏ Nhật Bản là: $T = 150000.S_1 + 100000.S_2 \approx 3738574$ **(đồng).**

Câu 24: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $100m$ và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân **(như hình vẽ)**. Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường Elip, Elip của viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường là 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó **(Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)**

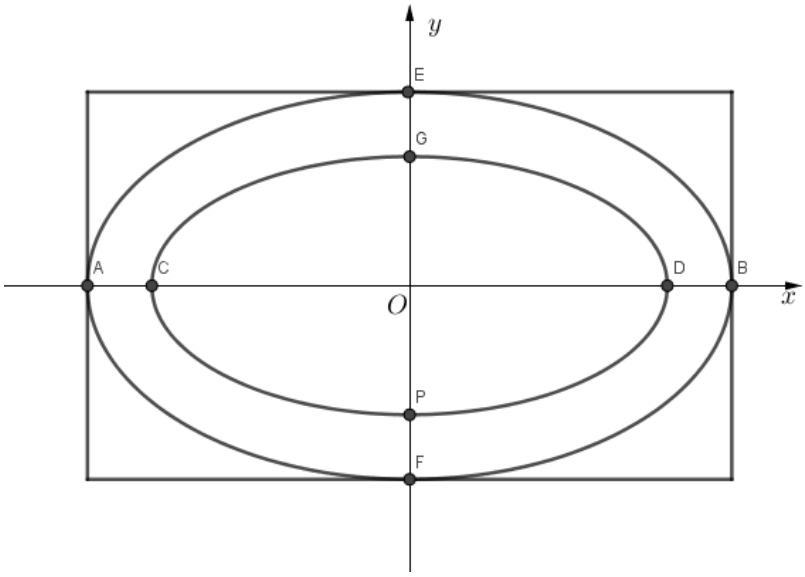


A. 293904000 . **B.** 283604000 . **C.** 293804000 . **D.** 283904000 .

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ và các điểm như hình vẽ



Gọi Elip viền ngoài có dạng: $(E_1): \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$

Ta có: $2a_1=100 \Leftrightarrow a_1=50$ và $2b_1=60 \Leftrightarrow b_1=30$.

Diện tích (E_1) là: $S_1=\pi a_1 b_1=\pi.50.30=1500\pi\left(m^2\right)$.

Vì chiều rộng của mặt đường là $2m$ nên ta có:

$CD=AB-AC-BD=100-2-2=96$.

Và $GP=EF-EG-PF=60-2-2=56$.

Gọi Elip viền trong có dạng: $(E_2): \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$.

Ta có: $2a_2=96 \Leftrightarrow a_1=48$ và $2b_2=56 \Leftrightarrow b_2=28$.

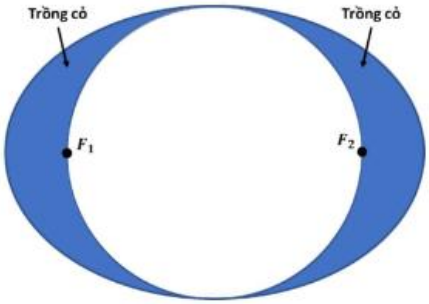
Diện tích (E_2) là: $S_2=\pi a_2 b_2=\pi.48.28=1344\pi\left(m^2\right)$.

Khi đó diện tích mặt đường là: $S=S_1-S_2=1500\pi-1344\pi=156\pi\left(m^2\right)$.

Lấy $\pi \approx 3{,}14$ ta được tổng tiền làm đường là: $T=S.600.000 \approx 156.3{,}14.600.000 \approx 293904000$ **(đồng)**.

Câu 25: Ông A đã cải tạo một miếng đất thành hình elip. Elip này có độ dài trục lớn là 12 mét. Trong elip có một đường tròn đi qua các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm F_1, F_2 .Ông A muốn trồng

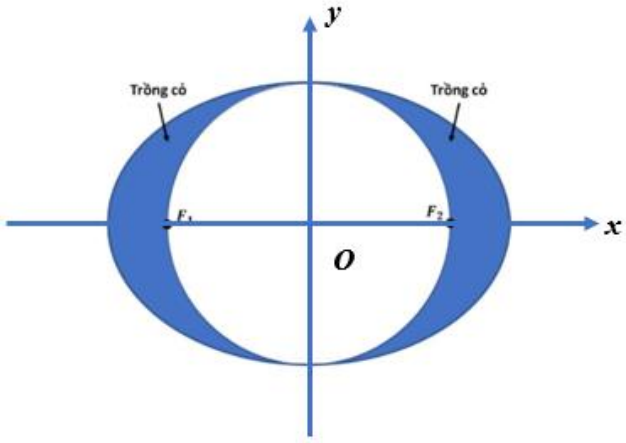
cỏ May Mắn cho mảnh đất là phần bên trong Elip và bên ngoài đường tròn. Biết rằng chi phí cho việc trồng cỏ May Mắn là 60 nghìn đồng trên một mét vuông. Hỏi tổng chi phí trồng cỏ May Mắn gần nhất với số tiền nào sau đây?



A. 2811 nghìn đồng. **B.** 1405 nghìn đồng. **C.** 447 nghìn đồng. **D.** 895 nghìn đồng.

Lời giải

Chọn B



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$ và phương trình đường tròn $x^2+y^2=R^2$.

Độ dài trục lớn là 12 mét, suy ra $a=6$.

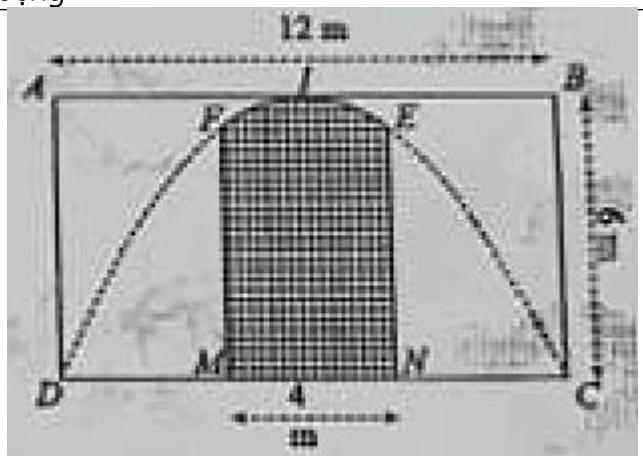
Vì đường tròn đi qua các đỉnh trên trục nhỏ và tiêu điểm của elip nên $b=c=R$.

Do đó $c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow 2c^2=a^2 \Leftrightarrow 2c^2=36 \Rightarrow c=3\sqrt{2}$

Tổng chi phí để trồng cỏ May Mắn là

$$T=4.\left(3\sqrt{2}\int_0^6\sqrt{1-\frac{x^2}{36}}\,dx-\int_0^{3\sqrt{2}}\sqrt{18-x^2}\,dx\right).60000\approx 1405 \text{ nghìn đồng.}$$

Câu 26: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình MNEIF ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật ABCD có chiều cao BC = 6 m, chiều dài CD = 12 m (hình vẽ bên). Cho biết MNEF là hình chữ nhật có MN = 4 m, cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?



A. 21200000 đồng. **B.** 20600000 đồng. **C.** 20800000 đồng. **D.** 20400000 đồng.

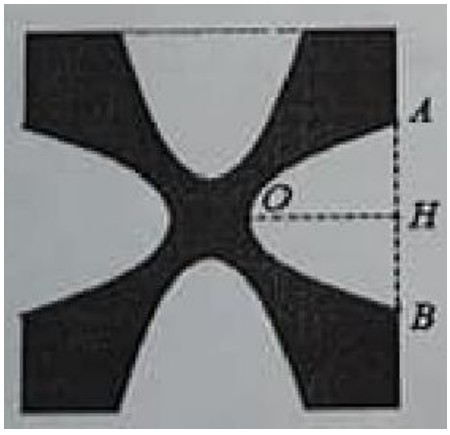
Lời giải

Chọn C

Lập hệ tọa độ Oxy sao cho O trùng với I, tia Ox trùng tia IB, tia Oy trùng với tia IJ (J là trung điểm CD). Khi đó, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2$. Vì parabol đi qua điểm C**(6; 6)** nên $a = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^2$.

Số tiền cần sử dụng tính bởi công thức $T = 900000\int_{-2}^{2}\left(6 - \frac{1}{6}x^2\right)dx = 20800000$.

Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết AB = 5 cm, OH = 4cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $50\ cm^2$. **B.** $\frac{14}{3}\ cm^2$. **C.** $\frac{140}{3}\ cm^2$. **D.** $\frac{160}{3}\ cm^2$.

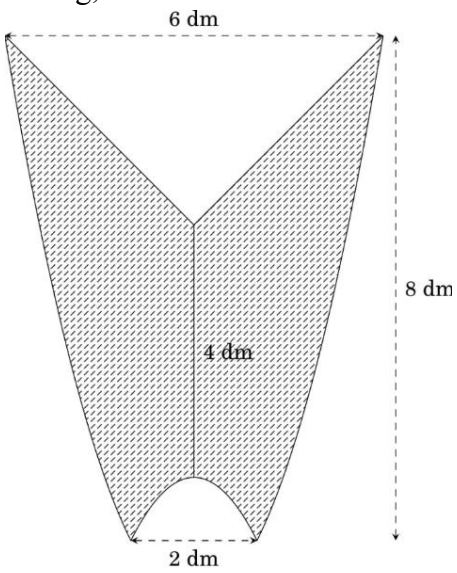
Lời giải

Chọn C

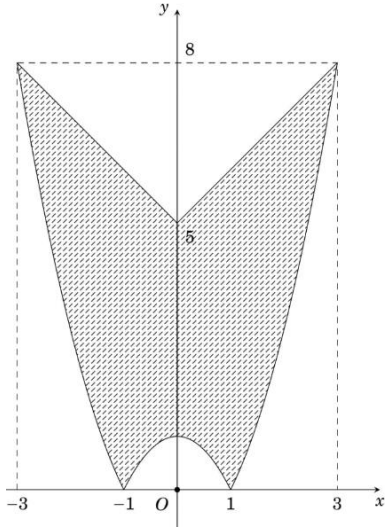
Chọn hệ tọa độ HAO trùng với hệ tọa độ Oxy. Khi đó phương trình parabol có dạng $y = ax^2 + 4$. Vì parabol đi qua điểm $A\left(\frac{5}{2};0\right) \Rightarrow 0 = \frac{25}{4}a + 4 \Rightarrow a = -\frac{16}{25} \Rightarrow y = -\frac{16}{25}x^2 + 4$

Diện tích bề mặt hoa văn tính bởi công thức $S = 100 - 8\int_{0}^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right)dx = \frac{140}{3}$.

Câu 28: Ông T làm logo bằng một tấm nhựa phẳng, có hình dạng là một hình trục đối xứng. Biết đường viền hai bên là hai nhánh của một pharabol và lõm phía dưới đáy cũng có dạng là một parabol, hai nhánh phía trên là hai đoạn thẳng, như hình bên dưới. Tính diện tích của logo đó.



Lời giải



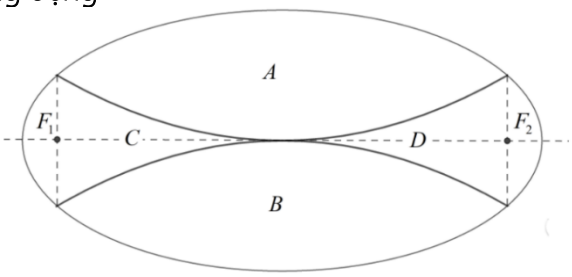
Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó nửa bên phải trục tung là hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1, y = x + 5; y = -x^2 + 1; x = 0$.

Diện tích hình phẳng (H)

$$S_{(H)} = \int_0^1 \left(x + 5 - \left(1 - x^2\right)\right) dx + \int_1^3 \left(x + 5 - \left(x^2 - 1\right)\right) dx = \frac{73}{6}\left(dm^2\right)$$

Vậy diện tích cần tìm là $S = 2S_{(H)} = \frac{73}{3}\left(dm^2\right)$

Câu 29: Ông An dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ dưới. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là $16m$ và $8m$, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 200.000 và 100.000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

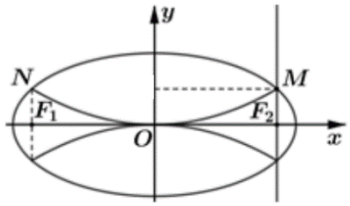


A. 17.679.000 đồng. **B.** 19.526.000 đồng. **C.** 19.526.000 đồng. **D.** 13.547.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Độ dài của trục lớn là $16m$ nên $2a=16\Rightarrow a=8$.

Độ dài của trục bé là $8m$ nên $2b=8\Rightarrow b=4$.

Vậy $(E):\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Khi đó, $c^2=a^2-b^2=8^2-4^2=48\Rightarrow c=4\sqrt{3}$.

Vậy $F_2\left(4\sqrt{3};0\right),\ F_1\left(-4\sqrt{3};0\right)$

Hơn nữa, diện tích elip là $S=\pi ab=32\pi$.

Xét phần elip nằm ở bên trên trục hoành. Khi đó $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1\Rightarrow\dfrac{y^2}{16}=1-\dfrac{x^2}{64}\Rightarrow y^2=16\left(1-\dfrac{x^2}{64}\right)\Rightarrow y=4\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{64}\right)}$.

Vậy $(E_1):y=4\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{64}\right)}$.

Xét phần parabol nằm ở phía trên trục hoành. Khi đó vì parabol có đỉnh là gốc tọa độ nên $(P):y=ex^2$ với $e\neq 0$.

Gọi M là giao điểm của đường thẳng $x=4\sqrt{3}$ với phần trên elip. Khi đó $M\left(4\sqrt{3};2\right)$ thuộc (P) nên ta có $e=\dfrac{1}{24}$ hay $(P):y=\dfrac{x^2}{24}$.

Diện tích phần A: $S_A=\displaystyle\int_{-4\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}}\left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}-\frac{x^2}{24}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$.

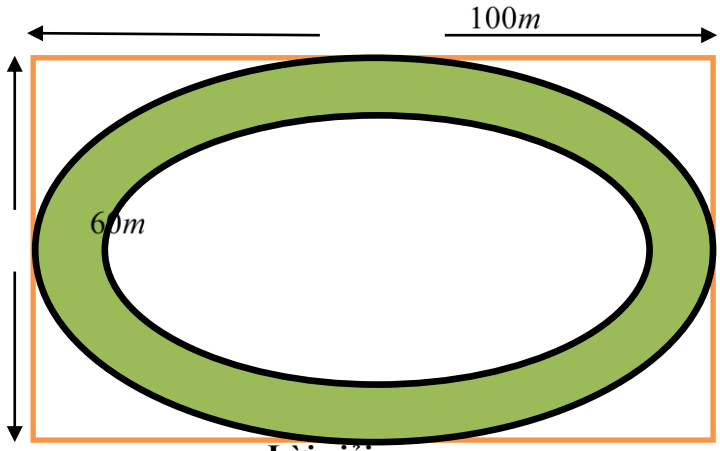
Khi đó $S_B=\dfrac{8}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$.

Suy ra diện tích trồng cỏ là $32\pi-\dfrac{16}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)=\dfrac{32}{3}\pi-\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra phần tiền để hoàn thành vườn hoa: $\left(\dfrac{32}{3}\pi-\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\right)100.000+\dfrac{16}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)200.000\approx 17.679.000$ đồng.

Câu 30: Một khu công viên hình chữ nhật có chiều dài là $100m$ và chiều rộng là $60m$. Người ta làm một con đường nằm trong sân (tham khảo hình dưới). BIết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, đường elip viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật, chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường là 600.000 đồng. Tính tổng số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) để làm con đường đó.

A. 293.804.000 đồng. **B.** 283.604.000 đồng. **C.** 294.053.000 đồng. **D.** 283.904.000 đồng.



Lời giải

Chọn C

Gọi diện tích hình elip phía ngoài có diện tích là S_1 khi đó ta có:

- Độ dài trục lớn là $2a_1 = 100 \Leftrightarrow a_1 = 50$.

- Độ dài trục nhỏ là $2b_1 = 60 \Leftrightarrow b_1 = 30$.

- Diện tích $S_1 = \pi a_1 b_1 = 1500\pi \left(m^2\right)$.

Gọi diện tích hình elip phía trong có diện tích là S_2 khi đó ta có:

- Độ dài trục lớn là $2a_2 = 100 - 2.2 = 96 \Leftrightarrow a_2 = 48$.

- Độ dài trục nhỏ là $2b_2 = 60 - 2.2 = 56 \Leftrightarrow b_2 = 28$.

- Diện tích $S_2 = \pi a_2 b_2 = 1344\pi \left(m^2\right)$.

Vậy diện tích con đường là: $S = S_1 - S_2 = 156\pi\left(m^2\right)$.

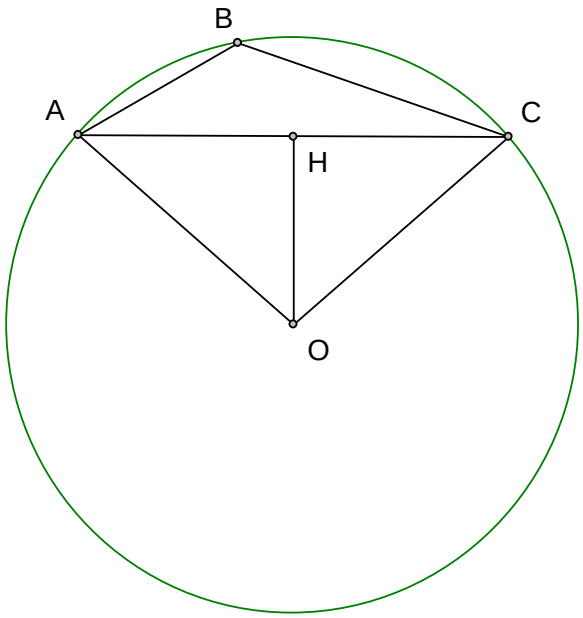
Tổng số tiền làm đường là $T = 600.000S \approx 294.053.000$ đồng.

Câu 31: Chuẩn bị đón hè 2021, nhà bác Hoa mời thợ về làm mái vòm chống nắng cho khoảng sân trước nhà bằng loại nhựa thông minh polycacnonat màu trắng trong với đơn giá $1m^2$ là 655.000 đồng. Mái vòm là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ phủ kín sân có chiều dài $10\,\text{m}$, khi đặt thước dây vào 3 điểm A, B, C đo được $AB = 2,8\,\text{m}; BC = 3,6\,\text{m}; AC = 6,2\,\text{m}$ (hình minh họa bên dưới). Hỏi số tiền (đơn vị đồng, làm tròn đến hàng nghìn) mua mái nhựa gần nhất với số nào dưới đây?

A. 263514000. **B.** 42387000. **C.** 40387000. **D.** 4238700.



Lời giải



Gọi R là bán kính đáy của hình trụ.

Xét tam giác ABC có $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{abc}{4R}$.

$p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{2,8+3,6+6,2}{2}=6,3.$

$S=\sqrt{6,3(6,3-2,8)(6,3-3,6)(6,3-6,2)}=\sqrt{5,9535}$

$R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{3,6.2,8.6,2}{4\sqrt{5,9535}}\approx 6,403$ m.

Chu vi đường tròn đáy là $2\pi R=2\pi.6,403=\dfrac{6403}{500}\pi$.

Gọi H là trung điểm của AC ta có $OH\perp AC$ nên

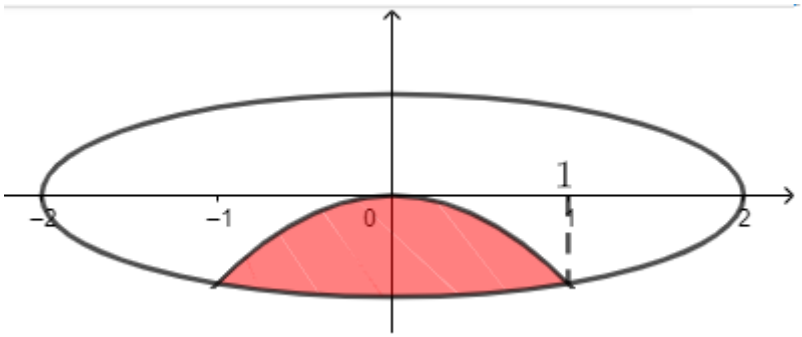
$\sin AOH=\dfrac{AH}{OA}=\dfrac{6,2}{2.6,403}=\dfrac{3100}{6403}\Rightarrow AOC\approx 57,913^0$.

Vậy góc ở tâm của cung ABC có số đo $57,913^0$.

Vì số đo của cung ABC bằng $\frac{57,913}{360} \approx 0,161$ chu vi đường tròn đáy nên diện tích mái vòm là $\frac{57,913}{360}.2\pi Rh = \frac{57,913}{360}.\ 2\pi.6,403.10 \approx 6,4712\,\text{m}^2$.

Vậy số tiền mua tấm nhựa làm mái vòm là $6,4712.\ 655000 = 4238636$ (đồng).

Câu 32: Bác An có sân vườn hình Elip độ dài cạnh lớn là $2m$ và cạnh bé là $\frac{1}{\sqrt{3}}m$, bác xây ao cá là phần tô đậm trong hình vẽ, đường viền biên của ao cá trong sân là một đường Parabol. Phần không xây ao cá, Bác An mua thêm hoa về trồng. Biết rằng $1m^2$ ao cá có giá 250000 đồng và $1m^2$ trồng hoa có giá 50000 đồng. Hỏi bác An tốn bao nhiêu tiền để hoàn thành khu vườn?

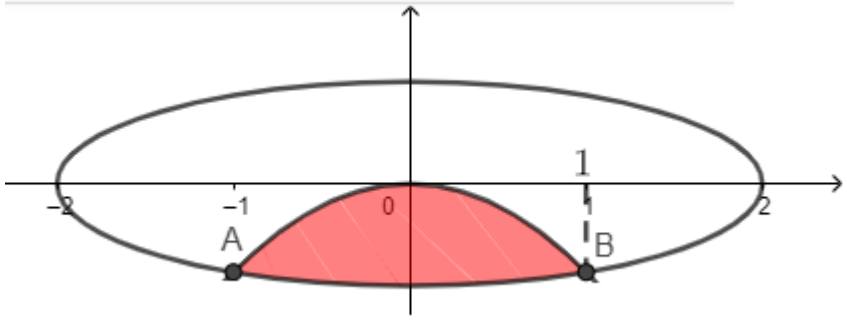


A. $257056,872$ đồng. **B.** $335633,2274$ đồng.

C. $725519,7457$ đồng. **D.** $362759,8728$ đồng.

Lời giải

Chọn B



Phương trình Elip (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow x^2 + 12y^2 = 4. \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{4-x^2}{12}}$

Điểm A và $B \in (E)$ suy ra $B\left(1;-\frac{1}{2}\right), \text{A}\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Giả sử phương trình Parabol (P) là: $y = ax^2 + bx + c$.

Vì $A, B, O \in (P)$, suy ra $a = \frac{-1}{2}, b = 0, c = 0$.

Vậy $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$.

Xét phần hình phẳng (H) bị giới hạn bởi đường $y = -\sqrt{\frac{4-x^2}{12}}$, $y = \frac{-1}{2}x^2$, $x = 1$, $x = -1$.

Diện tích phần hình phẳng (H) là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\frac{-1}{2}x^2+\sqrt{\frac{4-x^2}{12}}\right)dx=\frac{-x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Đặt $x=2\sin t$ với $t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó:

$$S=\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2 t\,dt=\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Diện tích cả sân vườn là: $S_{sv}=\pi.2.\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

Tổng chi phí là: $S.250000+(S_{SV}-S).50000=335633,2274$ đồng.

Câu 33: Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0,8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

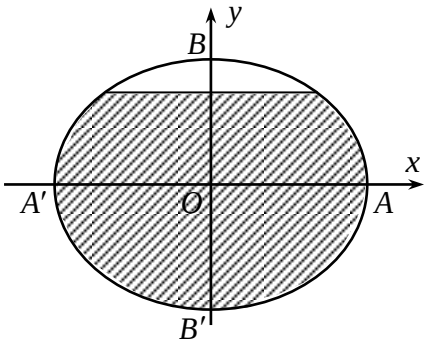


A. $V=1,52\text{m}^3$. **B.** $V=1,31\text{m}^3$. **C.** $V=1,27\text{m}^3$. **D.** $V=1,19\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\frac{1}{2}.\frac{2}{5}=\frac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN (phần không bị gạch trong hình).

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6\text{m}$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$ do đồ thị hàm số ở trên trục hoành.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\mathrm{d}x$. Đặt $x=\frac{1}{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=\frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$; Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $S_2=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

DẠNG 12 Ứng dụng tích phân vào bài toán chuyển động

Câu 1: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t(\text{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(\text{m/s})$. **B.** $16(\text{m/s})$. **C.** $13(\text{m/s})$. **D.** $15(\text{m/s})$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16m$. **B.** $55m$. **C.** $25m$. **D.** $50m$.

Câu 3: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ (m/s^2)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\ m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200m$. **B.** $1014m$. **C.** $966m$. **D.** $36m$.

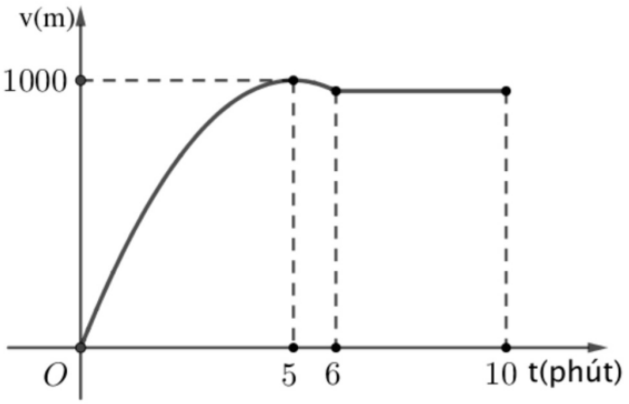
Câu 4: Một xe máy đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $30m$. **B.** $20m$. **C.** $50m$. **D.** $25m$.

Câu 5: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \text{m/s}^2$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17t\ \text{m/s}$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là.

A. 966 m. **B.** 36 m. **C.** 1200 m. **D.** 1014 m.

Câu 6: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều **(tham khảo hình vẽ)**.



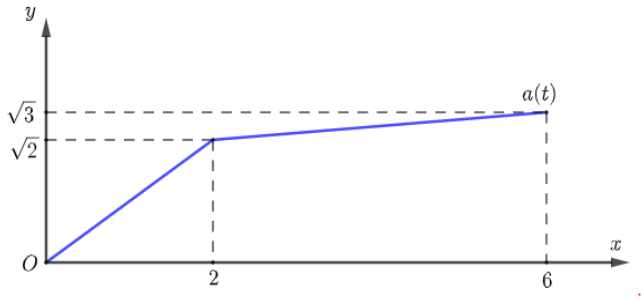
Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?

A. 8160 m. **B.** 8610 m. **C.** 10000 m. **D.** 8320 m.

Câu 7: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=12t-t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v=x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?

A. 15 mét/phút. **B.** 18 mét/phút. **C.** 27 mét/phút. **D.** 48 mét/phút.

Câu 8: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ **m/s1aa**

Từ đồ thị ta có $a(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}t & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Mà $v(0)=1(m/s)$ nên $v(t)=\int a(t)\,dt=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

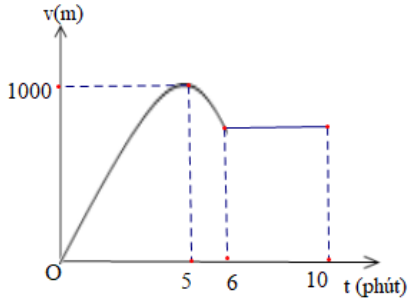
$$\lim_{t\to 2^-}v(t)=\lim_{x\to 2^+}v(t)\Leftrightarrow\sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\ \ (m/s)$.

Câu 9: Một chiếc máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc $v\ t=t^2+2t\ \ m/s$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $120\ \ m/s$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $1200(m)$. **B.** $1100(m)$. **C.** $430(m)$. **D.** $330(m)$.

Câu 10: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất $1000\,\text{m/phút}$ và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều **(hình vẽ)**.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong 10 phút đầu tiên kể từ lúc bắt đầu là bao nhiêu mét?

A. $8160\,(m)$. **B.** $8610\,(m)$. **C.** $10000\,(m)$. **D.** $8320\,(m)$.

Câu 11: Một ô tô đang chạy với vận tốc $15\,(m/s)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a=3t-8\,(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tố **C.** Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 150. **B.** 180. **C.** 246. **D.** 250.

Câu 12: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\,(\text{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\,(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20\,(\text{m/s})$. **B.** $16\,(\text{m/s})$. **C.** $13\,(\text{m/s})$. **D.** $15\,(\text{m/s})$.

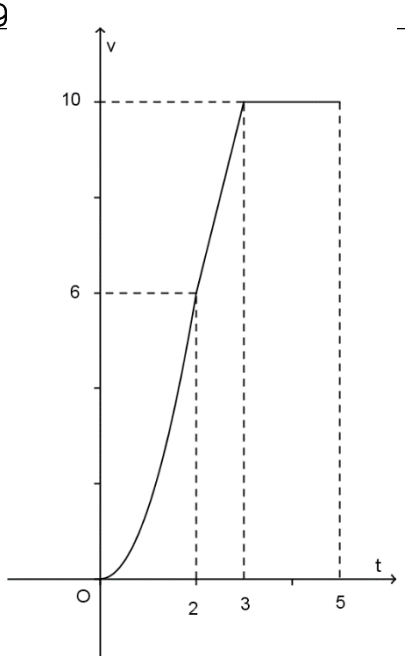
Câu 13: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16\,m$. **B.** $55\,m$. **C.** $25\,m$. **D.** $50\,m$.

Câu 14: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ (m/s^2)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\,m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200\,m$. **B.** $1014\,m$. **C.** $966\,m$. **D.** $36\,m$.

Câu 15: Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là $360\,km/h$. Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu tiên là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O, giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng 3 giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị $10\,m/s$ và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?



A. 340 **(mét)**. **B.** 420 **(mét)**. **C.** 400 **(mét)**. **D.** 320 **(mét)**.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t(\text{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(\text{m/s})$. **B.** $16(\text{m/s})$. **C.** $13(\text{m/s})$. **D.** $15(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường chất điểm A đi từ O đến lúc gặp B là: $S_1=\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)\text{d}t=96(\text{m})$.

Vận tốc của chất điểm B là: $V_B(t)=\int a\text{d}t=at+C$.

Tại thời điểm $t=0\Rightarrow V_B=0\Rightarrow C=0\Rightarrow V_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm B đi từ O đến lúc gặp A là: $S_2=\int_0^{12}(at)\text{d}t=\left(\frac{at^2}{2}\right)\Big|_0^{12}=72a(\text{m})$.

Khi A và B gặp nhau quãng đường đi được là như nhau, ta có: $S_1=S_2\Leftrightarrow 72a=96\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}(\text{m/s}^2)$.

Vận tốc của B khi đuổi kịp A là: $V_B(t)=\frac{4}{3}t$, với $t=12\Rightarrow V_B(12)=16(\text{m/s})$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16\,m$. **B.** $55\,m$. **C.** $25\,m$. **D.** $50\,m$.

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng bánh, ta có: $v=0\Leftrightarrow -2t+10=0\Leftrightarrow t=5$.

Do đó, ta có quãng đường xe đi được trong 8 giây cuối cùng (3 giây đi với vận tốc $10\ m/s$, 5 giây sau khi đạp phanh) là:

$$S=3.10+\int_0^5(-2t+10)\,dt=30+\left(-t^2+10t\right)\Big|_0^5=30-5^2+10.5=55\ (m).$$

Câu 3: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ (m/s^2)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\,m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200\,m$. **B.** $1014\,m$. **C.** $966\,m$. **D.** $36\,m$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 6t\mathrm{d}t=3t^2+C$.

Theo giả thiết ta $v(2)=17\Rightarrow 3.2^2+C=17\Rightarrow C=5$. Suy ra $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là: $s=\int_4^{10} v(t)\,dt=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)dt=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=966\,m$.

Câu 4: Một xe máy đang chạy với vận tốc $10\,m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $30m$. **B.** $20m$. **C.** $50m$. **D.** $25m$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $-2t+10=0\Leftrightarrow t=5$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau $5s$ ô tô dừng hẳn.

Quãng đường xe máy đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi xe máy dừng hẳn là

$$s=\int_0^5\left(-2t+10\right)dt=\left(-t^2+10t\right)\Big|_0^5=25m.$$

Câu 5: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \mathrm{m/s^2}$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17t\ \mathrm{m/s}$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là.

A. 966 m. **B.** 36 m. **C.** 1200 m. **D.** 1014 m.

Lời giải

Chọn A

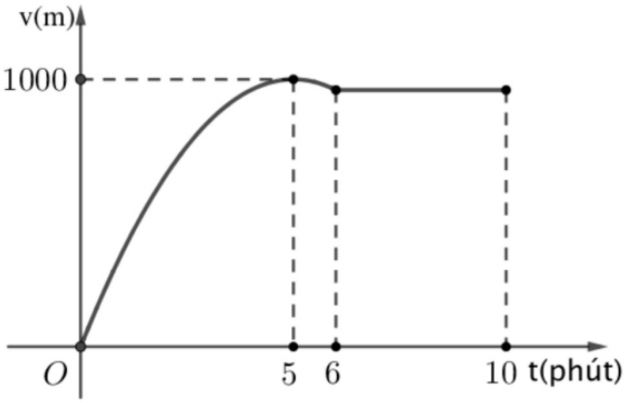
Từ giả thiết suy ra $v'(t)=a(t)\Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 6t\mathrm{d}t=3t^2+C$.

Mặt khác $v(2)=17$ nên $3.2^2+C=17\Rightarrow C=5$. Do đó $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là

$$s=\int_4^{10} v(t)\mathrm{d}t=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)\mathrm{d}t=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=1050-84=966\ \mathrm{m}.$$

Câu 6: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều **(tham khảo hình vẽ)**.



Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?

A. 8160 m. **B.** 8610 m. **C.** 10000 m. **D.** 8320 m.

Lời giải

Chọn A

Phương trình vận tốc của ô tô là: $v(t)=\begin{cases} at^2+bt+c & \text{khi } 0\le t\le 6 \\ v(6) & \text{khi } 6<t\le 10 \end{cases}$.

Trong khoảng thời gian 6 phút đầu đồ thị của vận tốc là một đường parabol đi qua điểm $(0;0)$, $(5;1000)$ và có hoành độ đỉnh bằng 5, do đó:

$$\begin{cases} c=0 \\ 25a+5b+c=1000 \\ -\dfrac{b}{2a}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 5a+b=200 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-40 \\ b=400 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t)=\begin{cases} -40t^2+400t & \text{khi } 0\le t\le 6 \\ 960 & \text{khi } 6<t\le 10 \end{cases}.$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là:

$$S=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{6}\left(-40t^2+400t\right)\mathrm{d}t+\int_6^{10} 960\,\mathrm{d}t=8160 \text{ m}.$$

Câu 7: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=12t-t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v=x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?

A. 15 mét/phút. **B.** 18 mét/phút. **C.** 27 mét/phút. **D.** 48 mét/phút.

Lời giải

Chọn C

Gọi thời điểm khinh khí cầu bắt đầu chuyển động là $t=0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1.

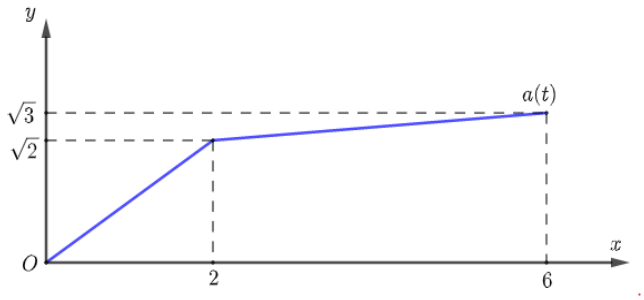
Quãng đường khinh khí cầu đã di chuyển được từ lúc chuyển động tới khi tiếp đất là

$$\int_0^{t_1}(12t-t^2)\mathrm{d}t=243 \Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3}+6t_1^2-243=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1\approx -5,56 \\ t_1\approx 14,56 \\ t_1=9 \end{cases}$$

Vì $v(t)\ge 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 12$ nên $t_1=9$.

Vận tốc của khinh khí cầu lúc tiếp đất là: $v(9)=27$ mét/phút.

Câu 8: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ **m/s1aa**

Từ đồ thị ta có $a(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}t & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Mà $v(0)=1(m/s)$ nên $v(t)=\int a(t)\,dt=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$\lim\limits_{t\to 2^-}v(t)=\lim\limits_{x\to 2^+}v(t)\Leftrightarrow\sqrt{2}+1=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}$.

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\ \ (m/s)$.

Câu 9: Một chiếc máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc $v\ t=t^2+2t\ \ m/s$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $120\ \ m/s$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $1200(m)$. **B.** $1100(m)$. **C.** $430(m)$. **D.** $330(m)$.

Lời giải

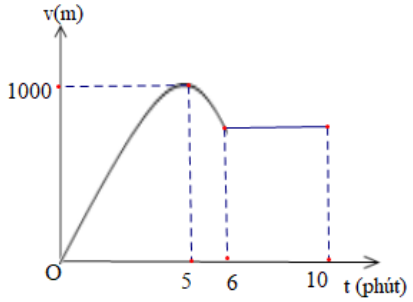
Chọn C

Giả sử $t>0$ là thời gian máy bay di chuyển trên đường băng. Ta có phương trình:

$t^2+2t-120=0\Leftrightarrow t=10\ \ s$ do $t>0$. Quãng đường máy bay di chuyển trên đường băng là

$S=\int\limits_0^{10}t^2+2t\ dt=\dfrac{1300}{3}\ \ m$ .Suy ra đáp án đúng**C.**

Câu 10: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều **(hình vẽ)**.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong 10 phút đầu tiên kể từ lúc bắt đầu là bao nhiêu mét?

A. $8160\,(m)$. **B.** $8610\,(m)$. **C.** $10000\,(m)$. **D.** $8320\,(m)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử trong 5 phút đầu vận tốc của ô tô được biểu diễn bởi phương trình $v(t)=at^2+bt+c$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} c=0 \\ \dfrac{-b}{2a}=5 \\ 25a+5b+c=1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a+b=0 \\ 25a+5b=1000 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-40 \\ b=400 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-40t^2+400t.$$

Khi $t=6$ ta có $v(6)=960$ m/phút. Suy ra trong 10 phút đầu xe ô tô chuyển động được quãng đường là $S=\int_0^6 (-40t^2+400t)\,dt+960.4=4320+3840=8160\ (m)$.

Câu 11: Một ô tô đang chạy với vận tốc $15\,(m/s)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a=3t-8\,(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tố **C.** Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 150. **B.** 180. **C.** 246. **D.** 250.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{dt}=\int (3t-8)\,\mathrm{dt}=\dfrac{3t^2}{2}-8t+C$.

Vận tốc khi ô tô bắt đầu tăng tốc là $15\,m/s$: $v(0)=15\Leftrightarrow C=15$.

Vận tốc của ô tô là $v(t)=\dfrac{3t^2}{2}-8t+15$.

Quãng đường ô tô đi được sau 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{dt}=\int_0^{10}\left(\frac{3t^2}{2}-8t+15\right)\mathrm{dt}=250\,(\mathrm{m}).$$

Câu 12: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t\,(\mathrm{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\,(\mathrm{m/s^2})$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(\text{m/s})$. **B.** $16(\text{m/s})$. **C.** $13(\text{m/s})$. **D.** $15(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường chất điểm A đi từ O đến lúc gặp B là: $S_1=\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)\text{d}t=96(\text{m})$.

Vận tốc của chất điểm B là: $V_B(t)=\int a\text{d}t=at+C$.

Tại thời điểm $t=0\Rightarrow V_B=0\Rightarrow C=0\Rightarrow V_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm B đi từ O đến lúc gặp A là: $S_2=\int_0^{12}(at)\text{d}t=\left(\frac{at^2}{2}\right)\Big|_0^{12}=72a(\text{m})$.

Khi A và B gặp nhau quãng đường đi được là như nhau, ta có: $S_1=S_2\Leftrightarrow 72a=96\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}(\text{m/s}^2)$.

Vận tốc của B khi đuổi kịp A là: $V_B(t)=\frac{4}{3}t$, với $t=12\ \Rightarrow V_B(12)=16(\text{m/s})$.

Câu 13: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16m$. **B.** $55m$. **C.** $25m$. **D.** $50m$.

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng bánh, ta có: $v=0\Leftrightarrow -2t+10=0\Leftrightarrow t=5$.

Do đó, ta có quãng đường xe đi được trong 8 giây cuối cùng (3 giây đi với vận tốc $10\ m/s$, 5 giây sau khi đạp phanh) là:

$$S=3.10+\int_0^5(-2t+10)\,dt=30+\left(-t^2+10t\right)\Big|_0^5=30-5^2+10.5=55\ (m).$$

Câu 14: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ (m/s^2)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\,m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200m$. **B.** $1014m$. **C.** $966m$. **D.** $36m$.

Lời giải

Chọn C

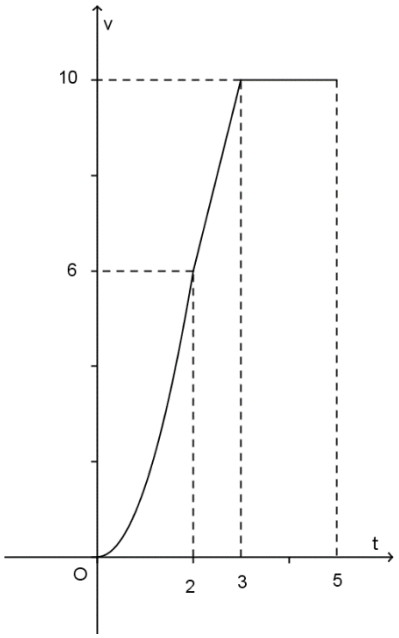
Ta có $v=\int a(t)\text{d}t=\int 6t\text{d}t=3t^2+C$.

Theo giả thiết ta $v(2)=17\Rightarrow 3.2^2+C=17\Rightarrow C=5$. Suy ra $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là: $s=\int_4^{10}v(t)\,dt=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)dt=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=966m$.

Câu 15: Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là $360km/h$. Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu tiên là một phần của parabol

đỉnh tại gốc tọa độ O, giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng 3 giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị $10\,m/s$ và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?

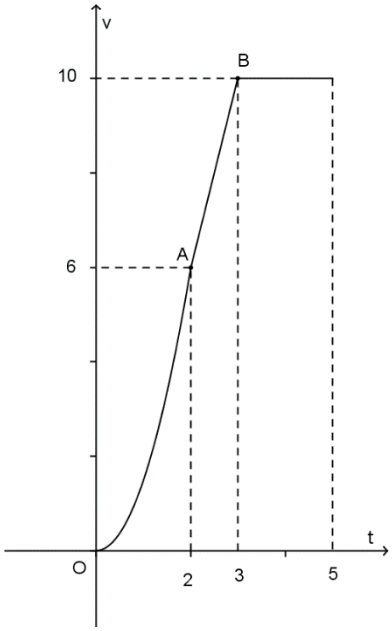


A. 340 **(mét)**. **B.** 420 **(mét)**. **C.** 400 **(mét)**. **D.** 320 **(mét)**.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(2;6);\ B(3;10)$



Theo gt thì phương trình của parabol là $y=\frac{3}{2}x^2$; phương trình đường thẳng AB là $y=4x-2$

Vậy trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là:

$$S=10\left(\int_0^2\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_2^3(4x-2)\mathrm{d}x+2.10\right)=320\ \textbf{(mét)}.$$

DẠNG 13 Tích phân trong đề thi của BGD&ĐT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Câu 2: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 \ khi\ x\ge 2 \\ x^2-2x+3 \ khi\ x<2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos x dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 4: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Câu 5: Cho $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với $a,\ b$ là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Câu 6: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$. **B.** $I=-\pi^4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-\frac{1}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\frac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **C.** $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\frac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $\frac{25}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$ **B.** $-\frac{71}{20}$ **C.** $-\frac{79}{20}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Câu 11: Biết $I=\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ với $x>0$. Khi đó $\int_3^8 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** -25.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

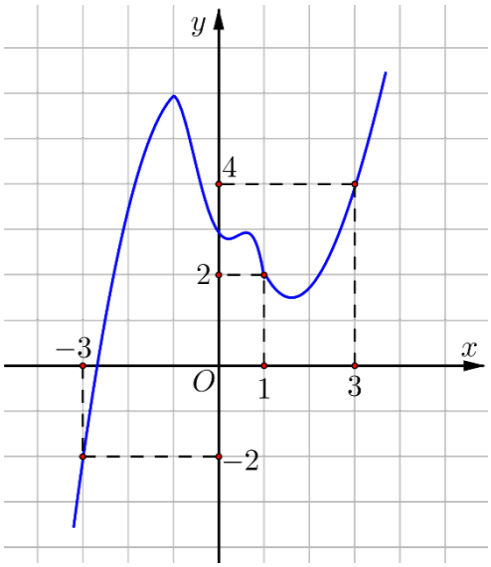
Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{17}{20}$. **B.** $-\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(2)=-\frac{2}{9}$ và $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\frac{35}{36}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{19}{36}$ **D.** $-\frac{2}{15}$

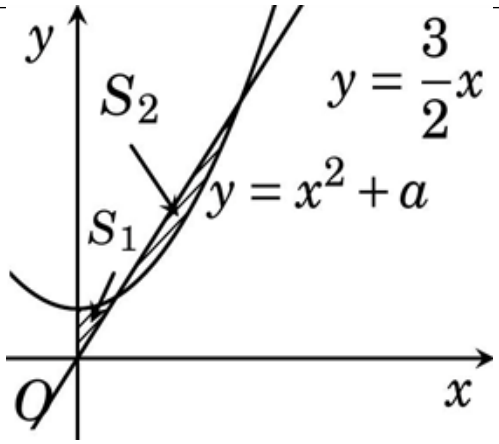
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3)>g(3)>g(1)$ **B.** $g(1)>g(-3)>g(3)$

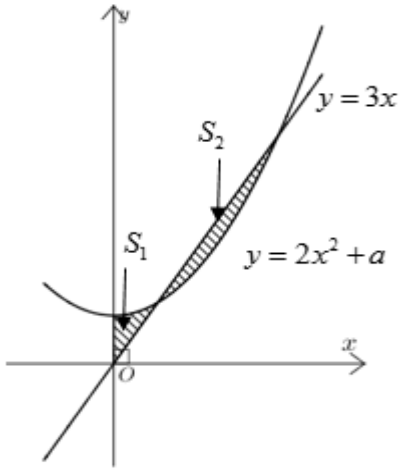
C. $g(3)>g(-3)>g(1)$ **D.** $g(1)>g(3)>g(-3)$

Câu 21: Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây



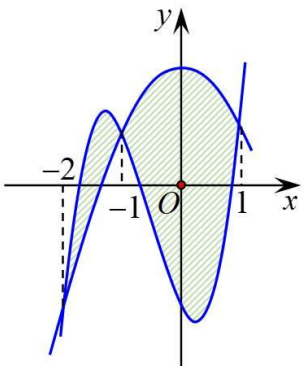
A. $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$. **C.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{2}{5}\right)$

Câu 22: Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $y=2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$

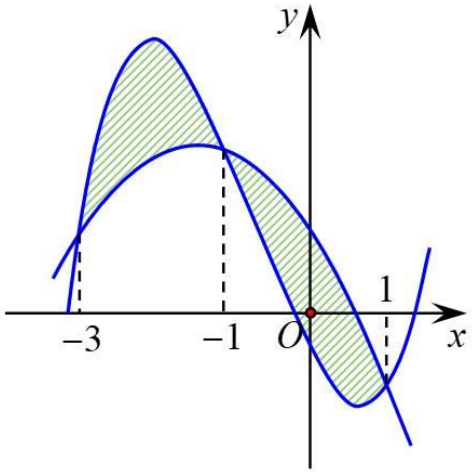
Câu 23: Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

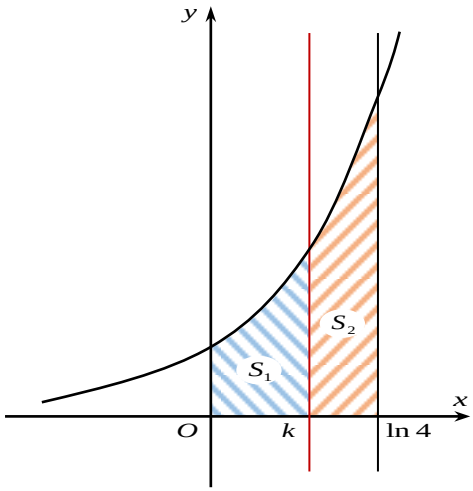
A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{37}{12}$

Câu 24: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{9}{2}$ **B.** 8 **C.** 4 **D.** 5

Câu 25: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.

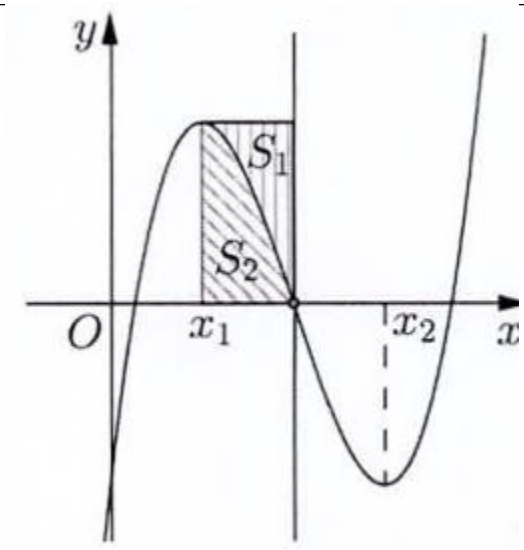


A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$ **D.** $k=\ln 3$.

Câu 26: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

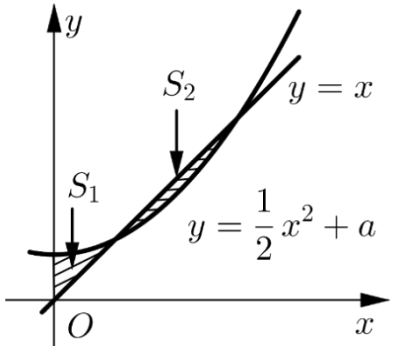
A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



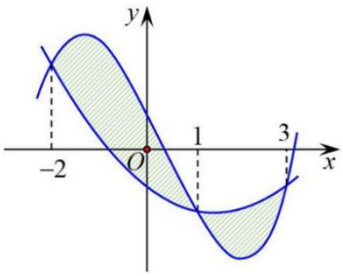
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 28: Cho đường thẳng $y=x$ và Parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?



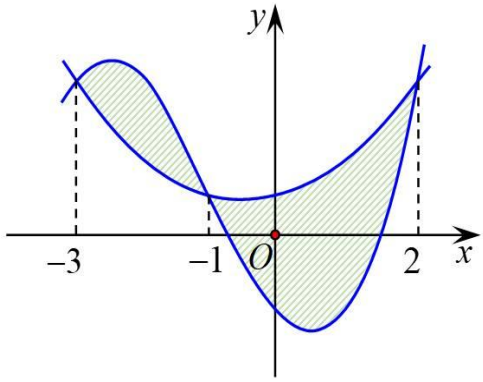
A. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right)$

Câu 29: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

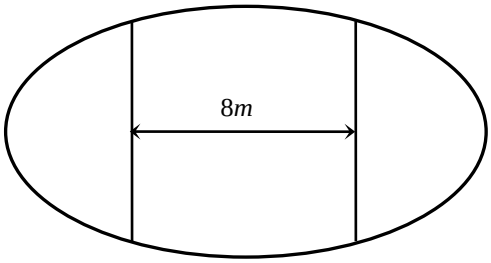
Câu 30: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}\,(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$. **B.** $\frac{125}{12}$. **C.** $\frac{253}{48}$. **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 31: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



A. $7.862.000$ đồng **B.** $7.653.000$ đồng **C.** $7.128.000$ đồng **D.** $7.826.000$ đồng

Câu 32: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8m, B_1B_2=6m$ và tứ giác MNPQ là hình chữ nhật có $MQ=3m$.

A. 7322000 đồng. **B.** 7213000 đồng. **C.** 5526000 đồng. **D.** 5782000 đồng.

Câu 33. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-G(0)+a,\,(a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bằng?

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(2\cos^2 x+1\right)dx=\int(2+\cos 2x)dx=2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Theo bài: $f(0)=4\Leftrightarrow 2.0+\frac{1}{2}.\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$. Suy ra $f(x)=2x+\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

Vậy:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x+\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)dx=\left(x^2-\frac{\cos 2x}{4}+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi^2}{16}+\pi\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}.$$

Câu 2: Cho $\int\limits_0^1\frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$\int\limits_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=\int\limits_0^1\frac{x+2-2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\frac{1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2}-2\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$=\ln(x+2)\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3.$$

Ta có $a=-\frac{1}{3},\ b=-1,\ c=1$. Vậy $3a+b+c=-1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1\ khi\ x\ge 2\\ x^2-2x+3\ khi\ x<2\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos x dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2\sin x+1\Leftrightarrow dt=2\cos x dx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=3$.

Tích phân trở thành:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(t)dt=\frac{1}{2}\left(\int\limits_1^2 f(t)dt+\int\limits_2^3 f(t)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2\left(t^2-2t+3\right)dt+\int_2^3\left(t^2-1\right)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{16}{3}\right)=\frac{23}{6}.$$

Câu 4: Biết $\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

$$\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\Leftrightarrow 2dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2}{t^2}dt=\left(\frac{-2}{t}\right)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46.$

Cách 2

$$\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$$

$$=\int_1^2\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$$

Câu 5: Cho $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t=e^x\Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^1\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln\left(1+e\right)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}.$

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 6: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$. **B.** $I=-\pi^4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_0^{\pi}\cos^3 x.\sin xdx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Leftrightarrow -dt=\sin xdx$

Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=1$; với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Vậy $I=-\int\limits_1^{-1}t^3dt=\int\limits_{-1}^{1}t^3dt=\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.

Cách khác : Bấm máy tính.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\frac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **C.** $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\frac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int g(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=(x+1)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

Tính $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+4}+C$.

Khi đó: $\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\sqrt{x^2+4}+C=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $I=\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=3x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$ và $x=\frac{1}{3}t$.

Khi $x=0$ thì $t=0$. Khi $x=1$ thì $t=3$.

Do đó $I=\int_0^3 \frac{1}{3}tf(t).\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t$,

suy ra $\frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=1\Rightarrow\int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=9\Rightarrow\int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=9\Rightarrow\int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x=9$.

Xét tích phân $J=\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$, ta có

$J=\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\big|_0^3-\int_0^3 2xf(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\big|_0^3-2\int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x$

$=3^2.f(3)-0^2.f(0)-2.9=-9$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $I=\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=6x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{d}t$ và $x=\frac{1}{6}t$.

Khi $x=0$ thì $t=0$. Khi $x=1$ thì $t=6$.

Do đó $I=\int_0^6 \frac{1}{6}tf(t).\frac{1}{6}\mathrm{d}t=\frac{1}{36}\int_0^6 tf(t)\mathrm{d}t$,

suy ra $\frac{1}{36}\int_0^6 tf(t)\mathrm{d}t=1\Rightarrow\int_0^6 tf(t)\mathrm{d}t=36\Rightarrow\int_0^6 tf(t)\mathrm{d}t=36\Rightarrow\int_0^6 xf(x)\mathrm{d}x=36$.

Xét tích phân $J=\int_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$, ta có

$J=\int_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\big|_0^6-\int_0^6 2xf(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\big|_0^6-2\int_0^6 xf(x)\mathrm{d}x$

$=6^2.f(6)-0^2.f(0)-2.36=-36$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$

bằng

A. $-\frac{4}{35}$ **B.** $-\frac{71}{20}$ **C.** $-\frac{79}{20}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2=\frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}.$

Câu 11: Biết $I=\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5,$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c.$

A. $S=6.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=-2.$ **D.** $S=0.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$

Khi đó: $I=\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=\int_3^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\Big|_3^4=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)$

$=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra: $a=4,b=-1,c=-1.$ Vậy $S=2.$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}.$ **B.** $\frac{208}{225}.$ **C.** $\frac{242}{225}.$ **D.** $\frac{149}{225}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x).$

Có $\int f'(x)dx=\int \cos x.\cos^2 2xdx=\int \cos x.\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\int \frac{\cos x}{2}dx+\int \frac{\cos x.\cos 4x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int \cos xdx+\frac{1}{4}\int(\cos 5x+\cos 3x)dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x+C.$

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x+C,\forall x\in\mathbb{R}.$ Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0.$

Do đó $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x,\forall x\in\mathbb{R}.$ Khi đó:

$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{12}\sin 3x\right)dx=\left(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{100}\cos 5x-\frac{1}{36}\cos 3x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{242}{225}.$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ với $x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{197}{6}$. **C.** $\dfrac{29}{2}$. **D.** $\dfrac{181}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$

$$\int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}dx=\int\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=x+2\sqrt{x+1}+C$$

Suy ra $f(x)=x+2\sqrt{x+1}+C$

$f(3)=3\Leftrightarrow C=-4$

$f(x)=x+2\sqrt{x+1}-4$

Dùng máy tính bấm $\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)dx=\dfrac{197}{6}$

Cách 2

Xét $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Khi đó, $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t^2-1}{t^2-t}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int\dfrac{(t-1).(t+1)}{t.(t-1)}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int(2t+2)\mathrm{d}t$

$=t^2+2t+C=(x+1)+2\sqrt{x+1}+C$.

Mà $f(3)=3\Leftrightarrow(3+1)+2\sqrt{3+1}+C=3\Leftrightarrow C=-5$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)+2\sqrt{x+1}-5=x+2\sqrt{x+1}-4$.

$\Rightarrow\int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4x\right)\Bigg|_3^8=36-\dfrac{19}{6}=\dfrac{197}{6}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^5 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\dfrac{123}{5}$. **D.** -25.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=5x\Rightarrow\begin{cases}dx=\dfrac{dt}{5}\\ x=\dfrac{t}{5}\end{cases}$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 xf\left(5x\right)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow\int\limits_0^5\frac{t}{5}f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{5}=1\Leftrightarrow\int\limits_0^5 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=25\Leftrightarrow\int\limits_0^5 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=25\ \ (*)$

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}.f\left(x\right)\Big|_0^5-\frac{1}{2}\int\limits_0^5 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=25$

$\Leftrightarrow\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^5 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=25\Leftrightarrow\int\limits_0^5 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-25$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(4\right)=1$ và $\int\limits_0^1 xf\left(4x\right)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^4 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=4x\ \Rightarrow\mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$

Khi đó: $\int\limits_0^1 xf\left(4x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^4\frac{t.f\left(t\right)}{16}\mathrm{d}t=1\Rightarrow\int\limits_0^4 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=16$

Xét: $\int\limits_0^4 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$\int\limits_0^4 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x=x^2f\left(x\right)\Big|_0^4-\int\limits_0^4 2x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=16.f\left(4\right)-2\int\limits_0^4 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=16-2.16=-16$

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=10$ và $2f\left(1\right)-f\left(0\right)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$. Khi đó $I=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $10=2f\left(1\right)-f\left(0\right)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x=-t$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)d(-t)=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)dt=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)d(x)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)d(x)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)$

Hay $I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(-x)+f(x)\right)d(x)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}d(x)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}d(x)$

$\Leftrightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}d(x)=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|d(x)=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x d(x)-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos x d(x)$

Vậy $I=2\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{17}{20}$. **B.** $-\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$

$\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$ (*)

$\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$

Mặt khác : $(*)\Rightarrow\int\limits_{-1}^0 x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$(*)\Rightarrow\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^0 f(x^3)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 f(1-x^2)\mathrm{d}\left((1-x)^2\right)=-\frac{17}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{17}{24} \Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}.\frac{-3}{4} - \frac{17}{24}\right) = -\frac{13}{4}$.

Cách khác tham khảo câu 48:

Cách 1:

Từ giả thiết : $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

ta suy ra $f\ x$ là bậc ba có $a = -1$. Nên $f\ x = -x^3 + bx^2 + cx + d$

Cho $x = 0 \Rightarrow f\ 1 = 0 \Rightarrow b + c + d = 1.$

Cho $x = 1 \Rightarrow f\ 1 + f\ 0 = -2 \Rightarrow f\ 0 = -2 \Rightarrow d = -2$

Cho $x = -1 \Rightarrow -f\ -1 + f\ 0 = 2 \Rightarrow f\ -1 = -4 \Rightarrow 1 + b - c + d = -4.$

Suy ra $\Rightarrow b = 0; c = 3$. Từ đó có $f\ x = -x^3 + 3x - 2$.

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -x^3 + 3x - 2\ \mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$

Cách 2:

Ta có :

$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2 = -x^{11} + x^7, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2$ là hàm số lẻ

Do đó:

$\int_{-1}^{0}\left[x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2\right]dx = -\int_{0}^{1}\left[x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2\right]dx = -\int_{0}^{1}\left(-x^{11} + x^7\right)dx = \frac{-1}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{15}{24}$

$\Rightarrow 2\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + 8 = -5\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{15}{4}$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -4 - \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$

Cách 3:

Thay x bởi $-x$ ta có: $\begin{cases} xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \\ -xf(-x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow xf(x^3) + xf(-x^3) = -4x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x^3) + f(-x^3) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$

Thay x^3 bởi x ta có $f(x) + f(-x) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(-x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(-x)dx = -4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = -4$

Từ giả thiết suy ra $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{5}{8}$

$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$

Vậy $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$

Cách 4:

Do $f(0)=-2$, ta có: $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\int_{-1}^a x^2 f(x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^a xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^a\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{1}{3}\int_{-1}^{a^3} f(x)\mathrm{d}(x)+\frac{1}{2}\int_{1-a^2}^0 f(x)\mathrm{d}(x)=\int_{-1}^a\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $I=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ và $J=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Cho $a=0\Rightarrow\frac{1}{3}I-\frac{1}{2}J=-\frac{17}{24}$

$a=1\Rightarrow\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}J=-\frac{4}{3}$

Vậy $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$

Cách trình bày khác

Cách 1 : Chọn $f(x)$ là hàm đa thức và giả sử n là bậc của $f(x)$.

Ta có : bậc của vế phải là 10. Bậc của $xf(x^3)$ là $3n+1$, bậc của $f(1-x^2)$ là $2n$, suy ra bậc của vế trái là $3n+1$. Khi đó : $3n+1=10\Leftrightarrow n=3$. Giả sử hệ số của x^3 trong $f(x)$ là a.

Mặt khác, hệ số bậc cao nhất của vế trái và vế phải lần lượt là a và -1 nên $a=-1$.

Cho $x=0$ thì $f(1)=0\Rightarrow f(x)=-(x-1)(x^2+bx+c)$.

Cho $x=1$ thì $f(1)+f(0)=-2\Rightarrow f(0)=-2\Rightarrow c=-2$.

Cho $x=-1$ thì $f(-1)=-4\Rightarrow b=1$.

Suy ra $f(x)=-(x-1)(x^2+x-2)$. Thử lại thấy thỏa.

Vậy $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left[-(x-1)(x^2+x-2)\right]\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$.

Cách 2 : Đặt $I=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ và $J=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

ta có : $\begin{cases}xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}\\-xf(-x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6+2x,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\Rightarrow xf(x^3)+xf(-x^3)=-4x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x^3)+f(-x^3)=-4,\forall x\neq 0$

$\Rightarrow f(x)+f(-x)=-4,\forall x\in\mathbb{R}$ (do $f(0)=-2$)

Suy ra $\int_{-1}^0\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=-4\Leftrightarrow\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-4\Rightarrow I+J=-4$ (1)

Mặt khác, với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$

$\Rightarrow x^2 f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{17}{24} \Rightarrow \frac{1}{3}I - \frac{1}{2}J = -\frac{17}{24}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\frac{35}{36}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{19}{36}$ **D.** $-\frac{2}{15}$

Lời giải

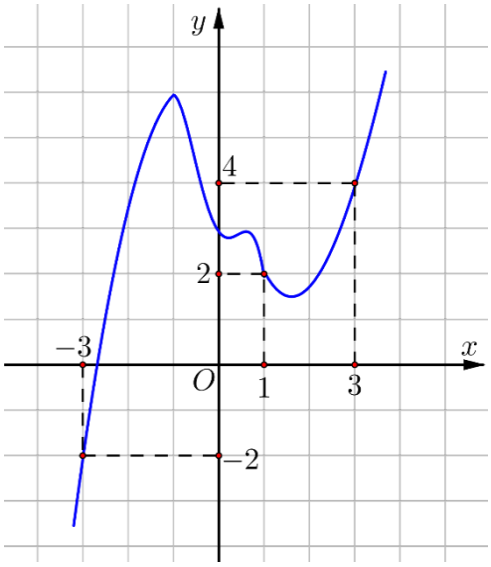
Chọn B

Ta có $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + C$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2+C}$. Theo giả thiết: $f(2) = -\frac{2}{9} \Rightarrow -\frac{2}{9} = -\frac{1}{4+C} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3) > g(3) > g(1)$ **B.** $g(1) > g(-3) > g(3)$

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$ **D.** $g(1) > g(3) > g(-3)$

Lời giải

Chọn D

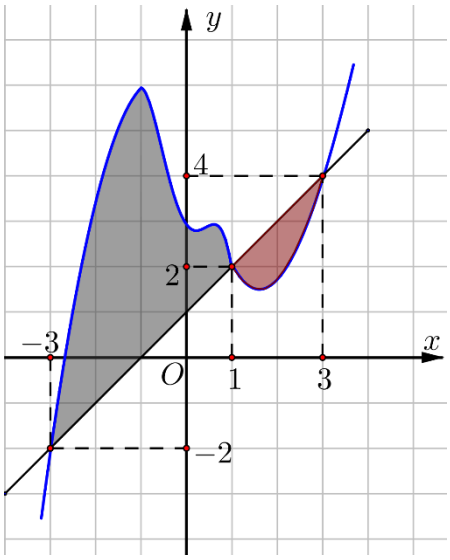
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$.



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f'(x),\ y=x+1,\ x=-3,\ x=1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x+1,\ y=f'(x),\ x=1,\ x=3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1>S_2>0$.

Suy ra: $S_1-S_2>0$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x>0$$

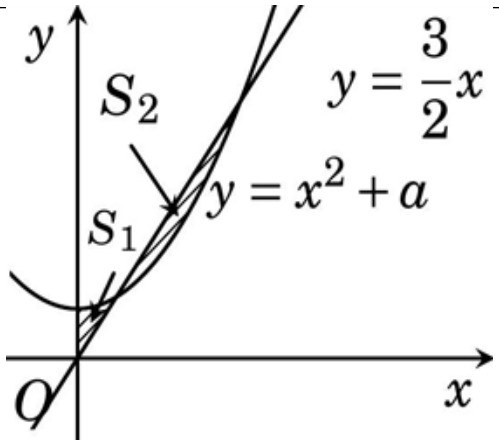
$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0.$$

Khi đó: $g(3)-g(-3)=\int_{-3}^{3}g'(x)\mathrm{d}x=2\int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$

Từ và suy ra: $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Câu 21: Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây



A. $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$. **C.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{2}{5}\right)$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình tương giao: $\frac{3}{2}x=x^2+a\Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x+a=0\ (1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2 ($x_2>x_1>0$)

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta=\frac{9}{4}-4a>0\\ x_1+x_2=\frac{3}{2}>0\Rightarrow 0<a<\frac{9}{16}.\\ x_1.x_2=a>0\end{cases}$$

Ta có: $S_1=\int\limits_0^{x_1}\left(x^2-\frac{3}{2}x+a\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+ax\right)\Big|_0^{x_1}=\frac{1}{3}x_1^3-\frac{3}{4}x_1^2+ax_1$

$S_2=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(x^2-\frac{3}{2}x+a\right)dx=-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+ax\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=-\left(\frac{1}{3}x_2^3-\frac{3}{4}x_2^2+ax_2\right)+\left(\frac{1}{3}x_1^3-\frac{3}{4}x_1^2+ax_1\right)$

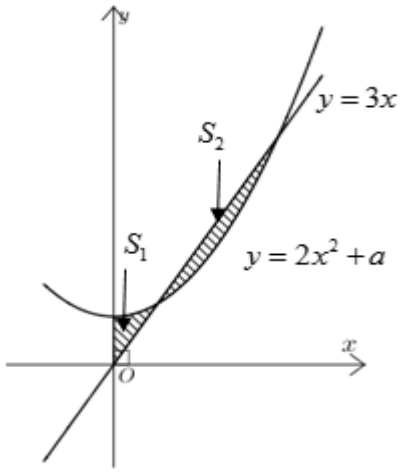
Do $S_1=S_2\Rightarrow\frac{1}{3}x_2^3-\frac{3}{4}x_2^2+ax_2=0$

mà x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2-\frac{3}{2}x_2+a=0\Rightarrow a=-x_2^2+\frac{3}{2}x_2\ (2)$

$\Rightarrow\frac{1}{3}x_2^3-\frac{3}{4}x_2^2+\left(-x_2^2+\frac{3}{2}x_2\right).x_2=0\Leftrightarrow-\frac{2}{3}x_2^3+\frac{3}{4}x_2^2=0\Rightarrow x_2=\frac{9}{8}$ (loại nghiệm $x_2=0$)

Thay vào $(2)\Rightarrow a=\frac{27}{64}\in\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Câu 22: Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $y=2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình tương giao: $3x = 2x^2 + a \Rightarrow 2x^2 - 3x + a = 0\ (1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 ($x_2 > x_1 > 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{9}{8}. \\ x_1.x_2 = \frac{a}{2} > 0 \end{cases}$$

Ta có: $S_1 = \int_0^{x_1} \left(2x^2 - 3x + a\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + ax_1$

$$S_2 = -\int_{x_1}^{x_2} \left(2x^2 - 3x + a\right) dx = -\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = -\left(\frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + ax_2\right) + \left(\frac{2}{3}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + ax_1\right)$$

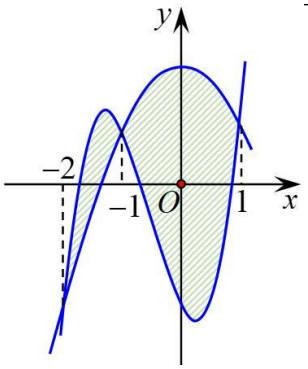
Do $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + ax_2 = 0$

mà x_2 là nghiệm của (1) nên $2x_2^2 - 3x_2 + a = 0 \Rightarrow a = -2x_2^2 + 3x_2\ (2)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \left(-2x_2^2 + 3x_2\right).x_2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$ (loại nghiệm $x_2 = 0$)

Thay vào $(2) \Rightarrow a = \frac{27}{32} \in \left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$.

Câu 23: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ (a , b , c , d , $e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{37}{12}$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2 \Leftrightarrow a^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=0.$ $(*)$

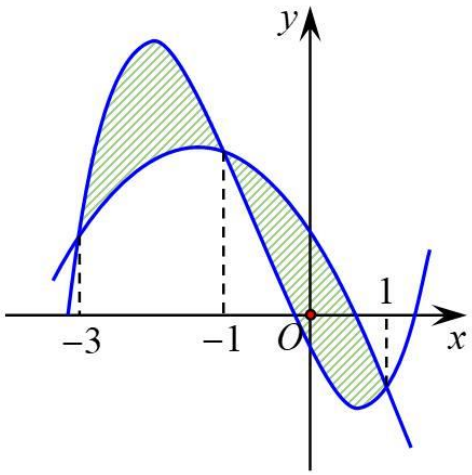
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=k(x+2)(x+1)(x-1).$

Khi đó $-4=-2k \Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

Câu 24: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{9}{2}$ **B.** 8 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là $-3;\ -1;\ 1$ nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\-a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\a=\frac{1}{2}\\c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int\limits_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$

$\Leftrightarrow S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4$.

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

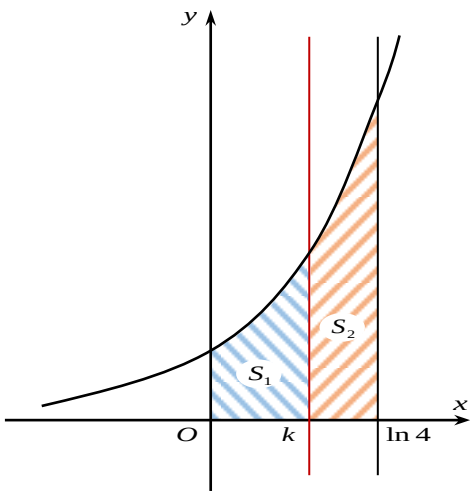
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S=\int\limits_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4$.

Câu 25: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$ **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_1=\int\limits_0^k e^x\mathrm{d}x=e^x\big|_0^k=e^k-1$ và $S_2=\int\limits_k^{\ln 4} e^x\mathrm{d}x=e^x\big|_k^{\ln 4}=4-e^k$.

Lại có $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Câu 26: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

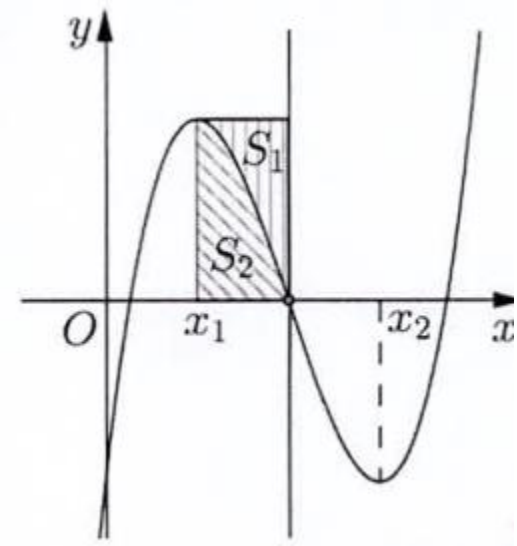
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\left|-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{37}{12}.$$

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$.

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Ta có $f(x_1)+f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)=0 \Rightarrow C+8a-12a+C=0 \Rightarrow C=2a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a=a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]$.

$$f(x)=0 \Rightarrow a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1+1-\sqrt{3} \\ x=x_1+1 \\ x=x_1+1+\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Suy ra $S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}x$

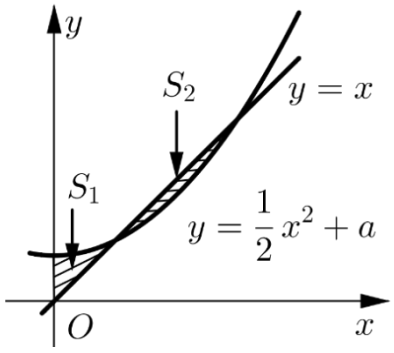
$=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}(x-x_1)$

$=a\left[\dfrac{(x-x_1)^4}{4}-(x-x_1)^3+2(x-x_1)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\dfrac{5a}{4}$.

Mặt khác ta có $S_1+S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x_1)\mathrm{d}x=f(x_1)\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\mathrm{d}x=f(x_1)=2a \Rightarrow S_1=2a-S_2=\dfrac{3a}{4}$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{5}$.

Câu 28: Cho đường thẳng $y=x$ và Parabol $y=\dfrac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?



A. $\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{7}\right)$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình tương giao: $\dfrac{1}{2}x^2+a=x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + a = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{1-2a} \\ x_1 = 1 + \sqrt{1-2a} \end{array}\right.$, với điều kiện $a < \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{1-2a}, (t \geq 0) \Rightarrow a = \frac{1-t^2}{2}$.

Xét $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$ và $\int g(x)dx = G(x) + C$.

Theo giả thiết ta có $S_1 = \int_0^{x_1} g(x)dx = G(x_1) - G(0)$.

$S_2 = -\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = G(x_1) - G(x_2)$.

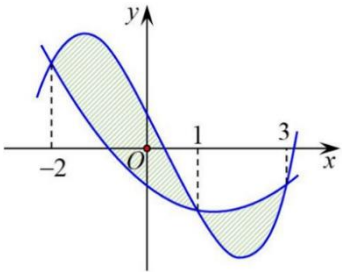
Do $S_1 = S_2 \Rightarrow G(x_2) = G(0) \Rightarrow \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2^2 + ax_2 = 0$

$\Rightarrow x_2^2 - 3x_2 + 6a = 0 \Rightarrow (1+t)^2 - 3(1+t) + 6\left(\frac{1-t^2}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow -2t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ và $t = -1$.

Khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$.

Câu 29: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4} = dx^2 + ex - \frac{3}{4} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2} = 0$.

Đặt $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x = -2$; $x = 1; x = 3$.

Với $x = -2$ ta có $-8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2}$, (1).

Với $x = 1$ ta có $a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2}$, (2).

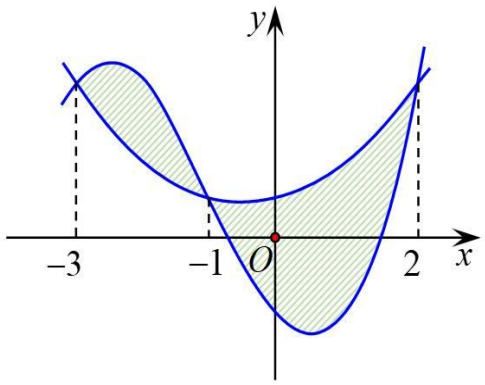
Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}$, (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Câu 30: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$. **B.** $\frac{125}{12}$. **C.** $\frac{253}{48}$. **D.** $\frac{125}{48}$

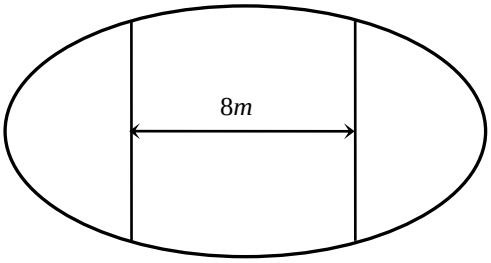
Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$.

Câu 31: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng$10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

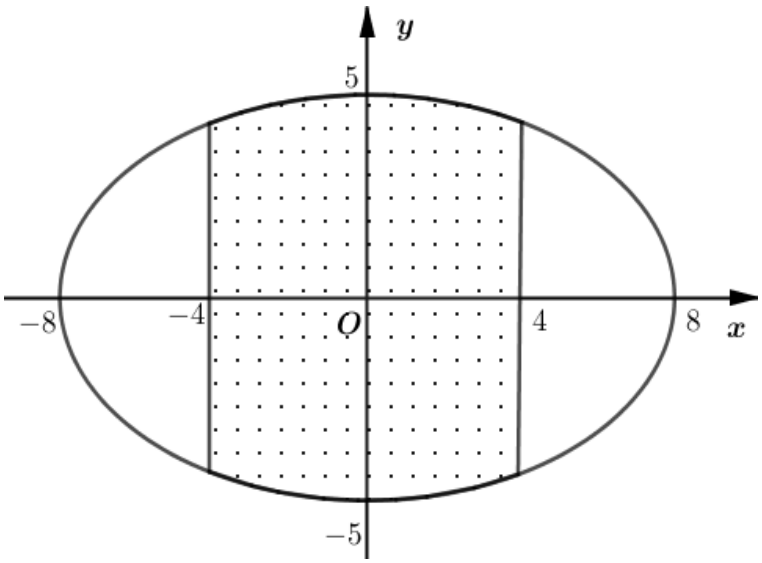


A. 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng **C.** 7.128.000 đồng **D.** 7.826.000 đồng

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\ \ (E_1) \\ y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\ \ (E_2)\end{array}\right.$

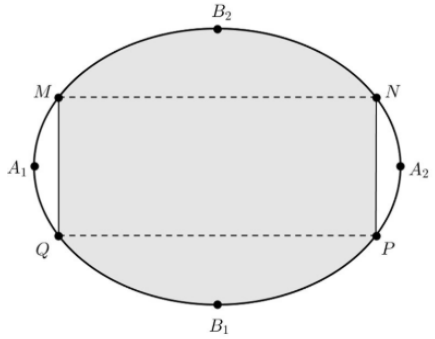
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}$

Khi đó số tiền là $T=\left(\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

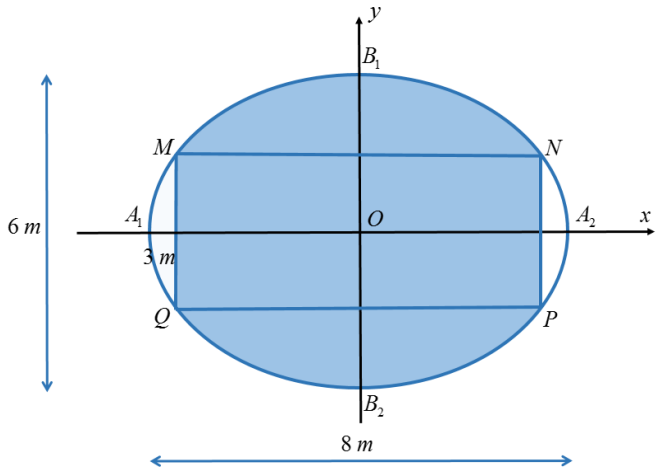
Câu 32: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8m, B_1B_2=6m$ và tứ giác MNPQ là hình chữ nhật có $MQ=3m$.

A. 7322000 đồng. **B.** 7213000 đồng. **C.** 5526000 đồng. **D.** 5782000 đồng.



Lời giải

Chọn A



Gắn hệ trục tọa độ Oxy có A_1A_2 trùng với trục Ox, B_1B_2 trùng với trục Oy, gốc tọa độ $O = A_1A_2 \cap B_1B_2$ (như hình vẽ).

Elip có độ dài trục lớn $2a = A_1A_2 = 8 \Leftrightarrow a = 4\,(m)$, độ dài trục nhỏ $2b = B_1B_2 = 6 \Leftrightarrow b = 3\,(m)$.

Suy ra phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$. Trong đó:

Do $MQ = 3 \Rightarrow y_M = \frac{MQ}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_M = -4\sqrt{1 - \frac{y_M^2}{9}} = -2\sqrt{3} \Rightarrow x_N = 2\sqrt{3}$.

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm của elip, S_2 là diện tích phần không bị tô đậm của elip và S là diện tích elip. Suy ra S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, $y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$

Ta có:

$+ S = \pi ab = 12\pi\left(m^2\right)$.

$+ S_1 = \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left|\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} - \left(-\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right)\right| \mathrm{dx} = 3\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{dx}$.

Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow \mathrm{dx} = 4\cos t\,\mathrm{dt}$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$. Khi $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow S_1 = 3\int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\ \mathrm{dx} = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 48\cos^2 t \mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 24\left(1+\cos 2\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}$

$= \left(24t\ +\ 12\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\pi + 6\sqrt{3}\left(m^2\right).$

$\Rightarrow S_2 = S - S_1 = 4\pi - 6\sqrt{3}\left(m^2\right).$

Suy ra chi phí để sơn biển quảng cáo là: $200000.S_1 + 100000.S_2 \approx 7322416$ (đồng).

Vậy số tiền để sơn biển quảng cáo gần nhất với $7\,322\,000$ đồng.

Câu 33. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - G(0) + a,\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng?

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $G(x) = F(x) + C$ (C là hằng số).

$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - F(0) = F(5) - \left(G(0) - C\right) = F(5) - G(0) + C$

Suy ra $C = a$.

$S = \int_0^5 \left|F(x) - G(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^5 |a|\mathrm{d}x = \int_0^5 a\mathrm{d}x = 5a$.

Theo giả thiết $5a = 20 \Leftrightarrow a = 4$