

Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1: Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh ?

- A. 14. B. 48. C. 6. D. 8.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. 3. B. -4. C. 4. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 3: Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

- A. $4\pi rl$. B. $2\pi rl$. C. πrl . D. $\frac{1}{3}\pi rl$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		1		2	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 5: Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 216. B. 18. C. 36. D. 72.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 5$. C. $x = \frac{9}{2}$. D. $x = \frac{7}{2}$.

Câu 7: Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- A. -3. B. -1. C. 1. D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

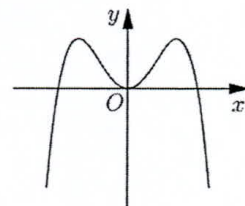
x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			2		-4		$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 3. C. 0. D. -4.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2$. B. $y = x^4 - 2x^2$.
C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 10: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng

- A. $2 + \log_2 a$. B. $\frac{1}{2} + \log_2 a$. C. $2 \log_2 a$. D. $\frac{1}{2} \log_2 a$.

Câu 11: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A. $\sin x + 3x^2 + C$. B. $-\sin x + 3x^2 + C$. C. $\sin x + 6x^2 + C$. D. $-\sin x + C$.

Câu 12: Môđun của số phức $1+2i$ bằng

- A. 5. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. 3.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2;0;1)$. B. $(2;-2;0)$. C. $(0;-2;1)$. D. $(0;0;1)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-1;-2;-3)$. B. $(1;2;3)$. C. $(-1;2;-3)$. D. $(1;-2;3)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (α) ?

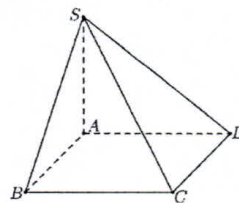
- A. $\vec{n}_2 = (3;2;4)$. B. $\vec{n}_3 = (2;-4;1)$. C. $\vec{n}_1 = (3;-4;1)$. D. $\vec{n}_4 = (3;2;-4)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1;2;1)$. B. $Q(1;-2;-1)$. C. $N(-1;3;2)$. D. $M(1;2;1)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .



Câu 18: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

- A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Câu 20: Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = b^2$. B. $a^3 = b$. C. $a = b$. D. $a^2 = b$.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

- A. $[-2;4]$. B. $[-4;2]$.
C. $(-\infty;-2] \cup [4;+\infty)$. D. $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$.

Câu 22: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. 18π . B. 36π . C. 54π . D. 27π .

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			1		0	

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 24: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

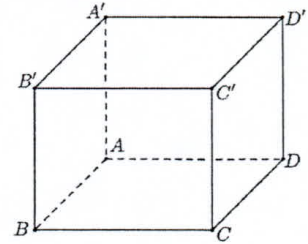
- A. $x + 3 \ln(x-1) + C$. B. $x - 3 \ln(x-1) + C$.
C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. D. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

Câu 25: Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

- A. 109.256.100. B. 108.374.700. C. 107.500.500. D. 108.311.100.

Câu 26: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BD = \sqrt{3}a$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$.
C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.



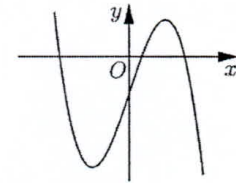
Câu 27: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 28: Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.

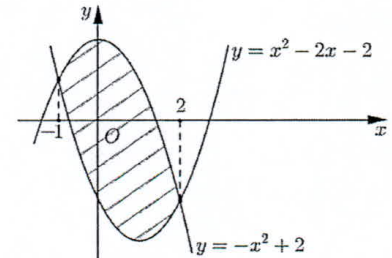
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0; d > 0$. B. $a < 0; d > 0$.
C. $a > 0; d < 0$. D. $a < 0; d < 0$.



Câu 29: Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

- A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$. B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.
C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$. D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$.



Câu 30: Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \bar{z}_2$ bằng

- A. -2. B. $2i$. C. 2. D. $-2i$.

Câu 31: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

- A. $P(-3; 4)$. B. $Q(5; 4)$. C. $N(4; -3)$. D. $M(4; 5)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

- A. 25. B. 23. C. 27. D. 29.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$.

Phương trình của (S) là

- A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.
C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ có phương trình là}$$

A. $2x+2y+z+3=0$.

B. $x-2y-z=0$.

C. $2x+2y+z-3=0$.

D. $x-2y-z-2=0$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(4;5;3)$?

A. $\vec{u}_4 = (1;1;1)$.

B. $\vec{u}_3 = (1;1;2)$.

C. $\vec{u}_1 = (3;4;1)$.

D. $\vec{u}_2 = (3;4;2)$.

Câu 36: Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

A. $\frac{41}{81}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{16}{81}$.

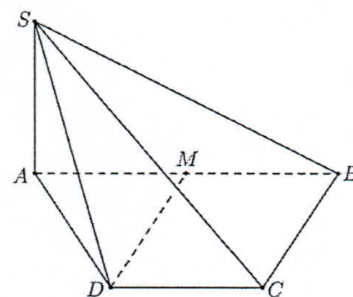
Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB=2a$, $AD=DC=CB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3a$ (minh họa như hình bên). Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

A. $\frac{3a}{4}$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

D. $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.



Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x)dx$ bằng

A. 7.

B. $\frac{197}{6}$.

C. $\frac{29}{2}$.

D. $\frac{181}{6}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 40: Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

B. 32π .

C. $32\sqrt{5}\pi$.

D. 96π .

Câu 41: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$.

D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Câu 42: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16.

B. 16.

C. -12.

D. -2.

Câu 43: Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$.

B. $[1;2]$.

C. $[1;2)$.

D. $[2;+\infty)$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

- A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. B. $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.
C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$. D. $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

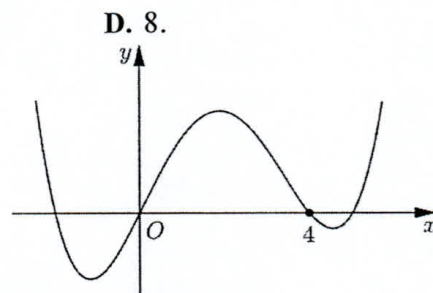
Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 8.

Câu 46: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

- A. 5. B. 3.
C. 7. D. 11.



Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

- A. 2019. B. 6. C. 2020. D. 4.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)dx$ bằng

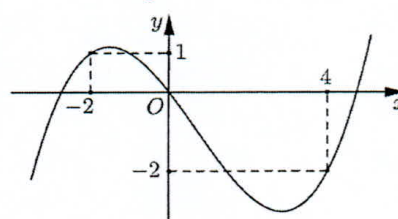
- A. $-\frac{17}{20}$. B. $-\frac{13}{4}$. C. $\frac{17}{4}$. D. -1 .

Câu 49: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; \frac{3}{2})$. B. $(0; \frac{1}{2})$.
C. $(-2; -1)$. D. $(2; 3)$.



----- HẾT -----

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. D	5. A	6. B	7. B	8. D	9. A	10. C
11. A	12. C	13. B	14. D	15. D	16. A	17. B	18. B	19. C	20. D
21. A	22. B	23. C	24. A	25. B	26. A	27. C	28. D	29. A	30. C
31. A	32. B	33. A	34. C	35. B	36. A	37. A	38. B	39. D	40. A
41. B	42. A	43. C	44. C	45. B	46. C	47. D	48. B	49. D	50. A

Câu 1. Số cách chọn ra một học sinh là $6 + 8 = 14$.

Câu 2. Công bội của cấp số nhân đã cho là $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$.

Câu 3. Diện tích xung quanh hình nón πrl .

Câu 4.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giữa 0 và 1 đạo hàm mang dấu dương nên hàm đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 5. Thể tích khối lập phương là $a^3 = 6^3 = 216$.

Câu 6. $\log_3(2x - 1) = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 5$.

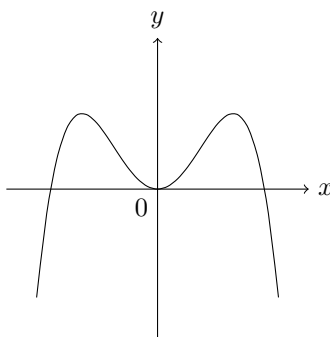
Câu 7. Ta có $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -2 + 1 = -1$

Câu 8.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Qua 3 đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương nên hàm đạt cực tiểu tại đó, có giá trị -4 .

Câu 9.



Nhìn vào đồ thị thấy hàm số có 3 cực trị, suy ra là hàm bậc 4, mà tại hai bên hàm tiến tới âm vô cùng nên hệ số cao nhất âm, vậy $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 10. Với số thực dương a thì $\log_2 a^2 = 2 \log_2 |a| = 2 \log_2 a$.

Câu 11. $\int (\cos x + 6x) dx = \int \cos x dx + 6 \int x dx = \sin x + 3x^2 + C$.

Câu 12. Môđun của số phức $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

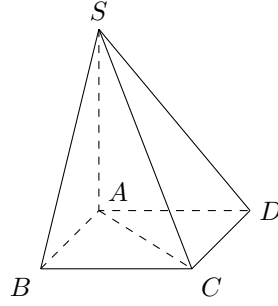
Câu 13. Hình chiếu vuông góc của M lên Oxy có tọa độ z bằng 0 nên là $(2; -2; 0)$.

Câu 14. $(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16 \Rightarrow I(1; -2; 3)$.

Câu 15. $(\alpha) : 3x + 2y - 4z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3; 2; -4)$.

Câu 16. $d : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$ thì đi qua điểm $(-1; 2; 1)$.

Câu 17.



Do $SA \perp (ABCD)$ nên

$$(\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA} = \tan^{-1} \frac{AS}{AC} = \tan^{-1} \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = 30^\circ.$$

Câu 18.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, qua -1 thì đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm, qua 0 không bị đổi dấu, qua 1 đổi dấu từ âm sang dương nên hàm có tổng cộng 2 cực trị.

Câu 19. Khảo sát hàm $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên $[-1; 2]$

Phương trình đạo hàm $f'(x) = -4x^3 + 24x = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = 0 \in [-1; 2]$, ta xét các điểm

$$\begin{cases} f(-1) = 12 \\ f(0) = 1 \\ f(2) = 33 \end{cases}$$

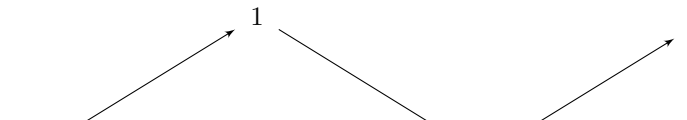
Như vậy $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 33$.

Câu 20. Ta có $\log_2 a = \log_8 ab = \frac{1}{3} \log_2(ab) \Rightarrow a = (ab)^{1/3} \Rightarrow a^2 = b$.

Câu 21. Ta có $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0$, bấm máy suy ra tập nghiệm là $[-2; 4]$.

Câu 22. Do mặt phẳng đi qua trục cắt hình trụ với thiết diện là hình vuông nên chiều cao h hình trụ bằng đường kính đáy $d = 2r = 6$, như vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh = 36\pi$.

Câu 23.

x	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Vẽ đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ cắt hàm số tại 3 điểm nên phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm.

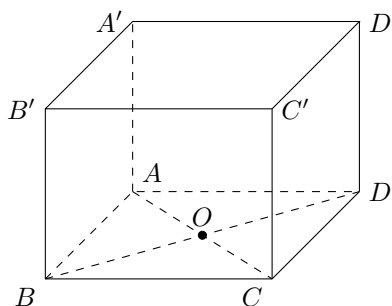
Câu 24. Do $x > 1$ nên $|x - 1| = x - 1$

$$\int \frac{x+2}{x-1} dx = \int (1 + \frac{3}{x-1}) dx = \int dx + 3 \int \frac{dx}{x-1} = x + 3 \ln(x-1) + C$$

Câu 25. Lấy mốc tính là năm 2017, như vậy $A = 93.671.600$ người, từ năm 2017 đến năm 2035 là $n = 18$ năm nên

$$S = Ae^{nr} = 93.671.600e^{18 \times 0.81\%} \approx 108374700 \text{ người}$$

Câu 26.



Áp dụng định lý Pytago cho tam giác AOB

$$OA^2 = AB^2 - OB^2 = AB^2 - \frac{BD^2}{4} = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{4}a^2$$

Như vậy $AC = 2OA = 2\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = a$, thể tích cần tìm

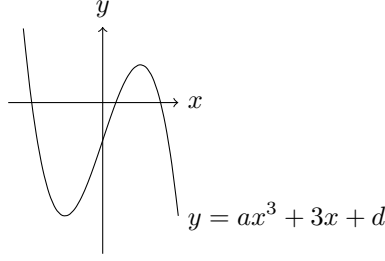
$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = AA' \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BD = 2a^3\sqrt{3}$$

Câu 27.

$$\frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(5x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x+1}{x+1}$$

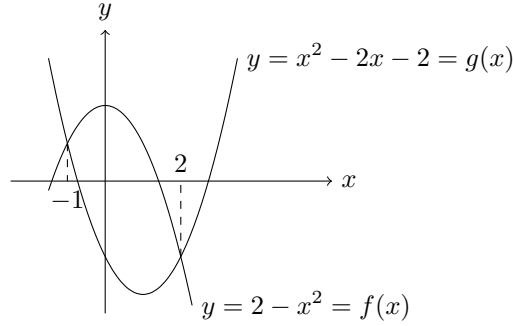
Như vậy hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 28.



Nhìn vào đồ thị, ta thấy y có 2 nghiệm dương mà một nghiệm âm nên $-\frac{d}{a} < 0 \Rightarrow \frac{d}{a} > 0$, mặt khác, $y' = 3ax^2 + 3$ có nghiệm nên $a < 0$, như vậy cả a và d đều âm.

Câu 29.



Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) \geq g(x) \forall x \in [-1; 2]$ nên diện tích giới hạn bởi $f(x)$ và $g(x)$ là

$$\int_{-1}^2 (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4)dx$$

Câu 30.

$$z = z_1 + \overline{z_2} = -3 + i + \overline{1 - i} = -3 + i + 1 + i = -2 + 2i \Rightarrow \text{Im}(z) = 2$$

Câu 31. $z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ nên điểm biểu diễn là $(-3; 4)$.

Câu 32.

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (1; 0; 3) \cdot ((1; 0; 3) + (-2; 2; 5)) = (1; 0; 3) \cdot (-1; 2; 8) = 23$$

Câu 33. Mặt cầu có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$.

Bình phương bán kính mặt cầu là

$$\begin{aligned} R^2 = IM^2 &= (4 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - (-3))^2 = 25 \\ \Rightarrow (S) : x^2 + y^2 + (z + 3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Câu 34. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ nên có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{u}_\Delta = (2; 2; 1)$, mặt khác, $M(1; 1; -1) \in (P)$ nên

$$(P) : 2(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow (P) : 2x + 2y + z - 3 = 0$$

Câu 35. Đường thẳng đi qua 2 điểm $M(2; 3; -1)$ và $N(4; 5; 3)$ có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (2; 2; 4)$, chia vector này cho 2 (không làm đổi hướng) ta được $(1; 1; 2)$.

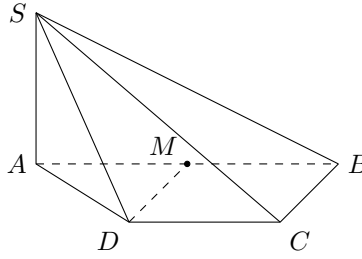
Câu 36. Gọi số cần tìm là $a = \overline{a_1 a_2 a_3}$, $a_1 \neq 0$, để tổng 3 chữ số này chẵn, ta có các trường hợp sau

- chẵn chẵn chẵn: Có $4 \cdot 4 \cdot 3$ cách chọn.
- chẵn lẻ lẻ: Có $4 \cdot 5 \cdot 4$ cách chọn.
- lẻ chẵn lẻ: Có $5 \cdot 5 \cdot 4$ cách chọn.
- lẻ lẻ chẵn: Có $5 \cdot 4 \cdot 5$ cách chọn.

Như vậy có tổng cộng 328 cách chọn số có 3 chữ số phân biệt mà tổng của chúng là số chẵn, đồng thời số có 3 chữ số phân biệt là $9 \cdot 9 \cdot 8$ nên xác suất cần tìm là

$$p = \frac{328}{9 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{41}{81}$$

Câu 37. Chọn $Oxyz$ với $A(0; 0; 0)$, $S(0; 0; 3)$, $B(2; 0; 0)$, $D(1/2; \sqrt{3}/2; 0)$, $C(3/2; \sqrt{3}/2; 0) \Rightarrow M(1; 0; 0)$.



Như vậy

$$d(SB, DM) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot (\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{DM})|}{|\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{DM}|} = \frac{3}{4}$$

Kết luận $d(SB, DM) = \frac{3a}{4}$.

Câu 38. Đặt $t = x + 1 \Rightarrow dx = dt$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x dx}{x+1 - \sqrt{x-1}} \\ &= \int \frac{t-1}{t-\sqrt{t}} dt = \int \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}} dt = t + 2\sqrt{t} + C \\ &= x + 2\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

Mà $f(3) = 3 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow f(x) = x + 2\sqrt{x+1} - 4$

$$\int_3^8 f(x) dx = \frac{197}{6}$$

Câu 39.

$$f(x) = \frac{m(x-m) + m^2 - 4}{x-m} = m + \frac{m^2 - 4}{x-m}$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì

$$\begin{cases} m \leq 0 \text{ để hàm xác định trên } (0; +\infty) \\ f'(x) = -\frac{m^2 - 4}{(x-m)^2} > 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \end{cases}$$

Như vậy

$$-2 < m \leq 0$$

Câu 40. Độ dài cạnh tam giác đều chính là đường sinh l của hình nón, vì tam giác đó có diện tích $9\sqrt{3}$ nên

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow l = 6$$

Bán kính đáy hình nón là

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = 4$$

Như vậy thể tích khối nón cần tìm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$$

Câu 41. Ta có

$$\begin{aligned}\log_9 x = \log_6 y &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 9} = \frac{\ln y}{\ln 6} = \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln \frac{9}{6}} \\ \log_4(2x + y) = \log_6 y &\Leftrightarrow \frac{\ln(2x + y)}{\ln 4} = \frac{\ln y}{\ln 6} = \frac{\ln(\frac{2x}{y} + 1)}{\ln \frac{4}{6}}\end{aligned}$$

Như vậy

$$\frac{\ln y}{\ln 6} = \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln \frac{9}{6}} = \frac{\ln(\frac{2x}{y} + 1)}{\ln \frac{4}{6}}$$

Bấm máy theo ẩn $\frac{x}{y}$ được $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Câu 42. Dễ thấy trên $[0; 3]$ thì $-2 \leq x^3 - 3x \leq 18$, như vậy

$$\max_{[0;3]} f(x) = \max(|m + 18|, |m - 2|)$$

Giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 16 khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\begin{cases} |m + 18| = 16 \\ |m - 2| \leq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} |m + 18| \leq 16 \\ |m - 2| = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow m = -2 \vee m = -14\end{aligned}$$

Tổng các giá trị m thỏa là -16 .

Câu 43. Đặt $t = \log_2 x \in [0; 1]$, phương trình tương đương

$$(t + 1)^2 - (m + 2)t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m - 1 \end{cases}$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa yêu cầu

$$\begin{cases} 0 \leq m - 1 \leq 1 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [1; 2)$$

Câu 44. Vì $\cos 2x$ là một nguyên hàm của $f(x)e^x$ nên $f(x)e^x = -2\sin 2x$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ \text{chọn } v = f(x) \end{cases}$$

$$\int f'(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f(x)e^x dx = -2\sin 2x - \cos 2x + C$$

Câu 45.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$
			-2		-2		

Đặt $\sin x = t \in [-1; 1]$. Kẻ đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ cắt hàm số $f(x)$ tại 2 điểm $1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ dựa vào bảng biến thiên.

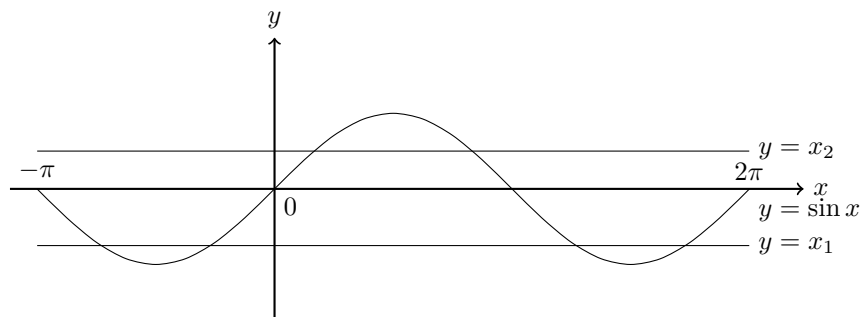
Do đó

$$2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = x_1 \vee t = x_2$$

Hay

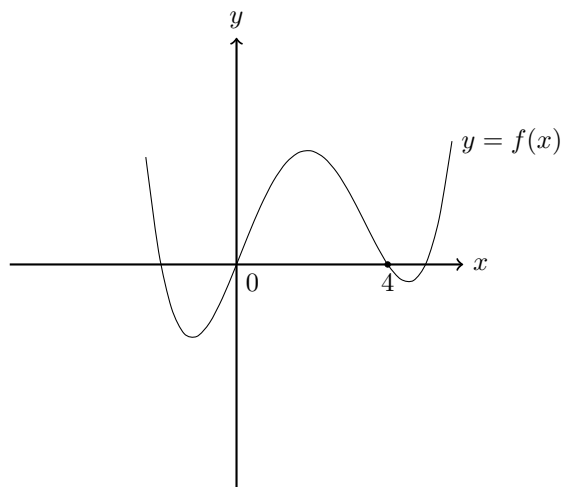
$$\begin{cases} \sin x = x_1 \\ \sin x = x_2 \end{cases}$$

Ta vẽ đồ thị của $\sin x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ để đếm số nghiệm như sau



Như vậy $\sin x = x_1$ có 4 nghiệm, $\sin x = x_2$ có 2 nghiệm nên tổng cộng $2f(\sin x) + 3$ có 6 nghiệm.

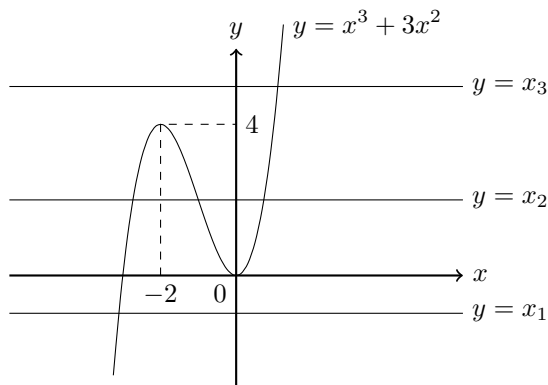
Câu 46.



Dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $x_1 < 0 < x_2 < 4 < x_3$.
Xét đạo hàm của $g(x)$

$$g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2) = 3x(x+2)f'(x^3 + 3x^2)$$

$$f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 = x_1 \\ x^3 + 3x^2 = x_2 \\ x^3 + 3x^2 = x_3 \end{cases}$$



Như vậy $f'(x^3 + 3x^2)$ có 5 nghiệm đơn khác 0 và -2 nên $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn hay $g(x)$ có đúng 7 cực trị.

Câu 47. Đặt $9^y = t > 0 \Leftrightarrow 2y = \log_3 t$, điều kiện ban đầu trở thành

$$\log_3(3x + 3) + x = t + \log_3 t \Leftrightarrow \log_3(x + 1) + (x + 1) = \log_3 t + t$$

Hàm đặc trưng là $f(x) = \log_3 x + x$ đơn điệu trên $(0; +\infty)$ nên

$$f(x + 1) = f(t) \Leftrightarrow x + 1 = t = 9^y$$

Như vậy

$$1 \leq 1 + x = 9^y \leq 2021 \Rightarrow 0 \leq y \leq 3$$

Mỗi y cho ra duy nhất một x nên có tổng cộng 4 cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn.

Câu 48. Ta có

$$\begin{aligned} xf(x^3) + f(1 - x^2) &= -x^{10} + x^6 - 2x \\ \Leftrightarrow x(f(x^3) + 2) &= -x^{10} + x^6 - f(1 - x^2) \end{aligned}$$

Vế phải là hàm chẵn nên vế trái cũng là hàm chẵn, tức

$$x(f(x^3) + 2) = -x(f(-x^3) + 2) \Leftrightarrow f(x^3) + 4 = -f(-x^3) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = -4 \quad (*)$$

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, nhân hai vế phương trình đầu cho x , như vậy

$$\begin{aligned} \frac{(F(x^3))'}{3} - \frac{(F(1 - x^2))'}{2} &= -x^{11} + x^7 - 2x^2 \\ \int_{-1}^0 \frac{(F(x^3))'}{3} dx - \int_{-1}^0 \frac{(F(1 - x^2))'}{2} dx &= -\frac{17}{24} \\ \frac{F(0) - F(-1)}{3} - \frac{F(1) - F(0)}{2} &= -\frac{17}{24} \end{aligned}$$

Tích phân hai vế của (*) được

$$\int_{-1}^0 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(-x)d(-x) = F(1) - F(-1) = -4$$

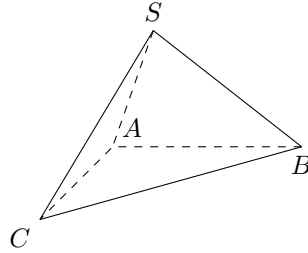
Do đó

$$\frac{F(0) - F(-1)}{3} - \frac{F(1) - F(0)}{2} = \frac{F(0) - F(-1)}{3} - \frac{F(-1) - F(0) - 4}{2} = -\frac{17}{24}$$

Đặt $I = \int_{-1}^0 f(x)dx = F(0) - F(-1)$, phương trình trên tương đương

$$\frac{I}{3} - \frac{-I - 4}{2} = -\frac{17}{24} \Leftrightarrow I = -\frac{13}{4}$$

Câu 49. Chọn $Oxyz$ với $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(0; 1; 0), S(a; b; c)$ ($c > 0$)



$$\begin{cases} BS \perp AB \Rightarrow (a-1; b; c) \cdot (1; 0; 0) = 0 \\ CS \perp AC \Rightarrow (a; b-1; c) \cdot (0; 1; 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Lập phương trình mặt phẳng (SAB) và (SAC) được

$$\begin{cases} (SAB) : y + cz = 0 \\ (SAC) : x + cz = 0 \end{cases}$$

Góc giữa hai mặt phẳng này bằng 60°

$$\Rightarrow \frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+c^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$$

Như vậy $S(1; 1; 1)$

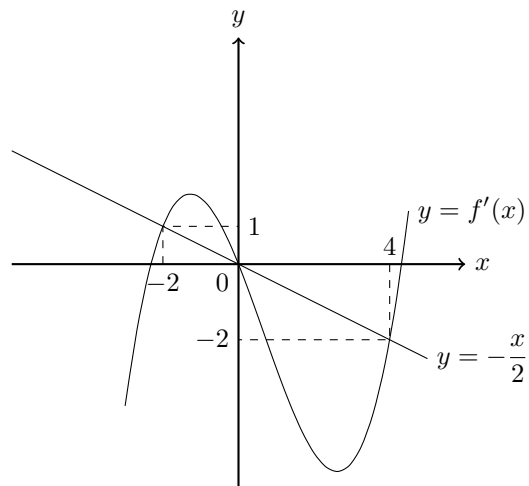
$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS}| = \frac{1}{6}$$

Kết luận $V_{SABC} = \frac{a^3}{6}$

Câu 50. Đặt $t = 1 - 2x$. Đạo hàm $g(x)$ được

$$g'(x) = 2x - 1 - 2f'(1 - 2x) = -t - 2f'(t)$$

Để hàm $g(x)$ nghịch biến thì $g'(x) = -t - 2f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq \frac{-t}{2}$, dựa vào đồ thị của $f'(x)$



Như vậy $t \in [-2; 0]$ thì $g'(x) \leq 0$ hay $x \in [1/2; 3/2]$ thì $g'(x) \leq 0$, vậy $g(x)$ nghịch biến trên $(1; 3/2)$.

----- HẾT -----