

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 15/9/2026

Câu 1. (4,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2027$ và $u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2026}{u_{n-1}} \right), \forall n \geq 2$.

a) Chứng minh rằng $u_n \geq \sqrt{2026}, \forall n \geq 1$.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ có các hệ số nguyên, biết rằng tồn tại ba số nguyên x_1, x_2, x_3 sao cho $P(x_1) = 2025, P(x_2) = 2026$ và $P(x_3) = 2027$.

a) Chứng minh rằng x_2 là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình $P(x) = 2026$.

b) Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 2029$ có không quá một nghiệm nguyên.

Câu 3. (4,0 điểm) Cho $A(n) = 10^{10^n} - 9^{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tìm một giá trị của n sao cho $A(n)$ có hai chữ số tận cùng giống nhau.

b) Chứng minh rằng nếu $A(n)$ có k chữ số tận cùng giống nhau thì $k \leq 4$.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC, CA, AB . Đường thẳng AI cắt DE, DF lần lượt tại P, Q . Đường tròn đường kính PQ cắt BC tại M, N .

a) Chứng minh rằng BP song song với CQ .

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tiếp xúc với đường tròn (I) .

Câu 5. (4,0 điểm) Bạn Hải tô màu n số nguyên dương đầu tiên bởi đúng k màu, mỗi số chỉ tô đúng một màu ($k \leq n$). Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô luôn tồn tại hai số được tô cùng màu mà hiệu của chúng là số chính phương trong mỗi trường hợp sau:

a) $k = 2$.

b) $k = 3$.

----- **Hết** -----

2 • Lời giải

Bài toán 1

Câu 1 (4,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2027$ và $u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2026}{u_{n-1}} \right), \forall n \geq 2$.

- a) Chứng minh rằng $u_n \geq \sqrt{2026}, \forall n \geq 1$.
 b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

✍️ Lời giải.

- a) Từ công thức truy hồi của dãy (u_n) , ta được $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = 2027 > \sqrt{2026}$. Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Với $n > 1$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2026}{u_{n-1}} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2026} = \sqrt{2026}$$

Vậy khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay $u_n \geq \sqrt{2026}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- b) Với mọi $n \geq 2$, chú ý rằng $u_n \geq \sqrt{2026}$, ta có:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2026}{u_{n-1}} \right) - u_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2026}{u_{n-1}} - u_{n-1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2026 - u_{n-1}^2}{u_{n-1}} \leq 0$$

Vậy (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2026}$ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = L$. Từ công thức truy hồi của (u_n) , ta cho $n \rightarrow +\infty$, ta được:

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{2026}{L} \right) \Leftrightarrow \frac{L}{2} = \frac{1013}{L} \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{2026}$$

Chú ý rằng $u_n \geq \sqrt{2026}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $L = \sqrt{2026}$. Vậy $\lim u_n = \sqrt{2026}$.

Bài toán 2

Câu 2 (4,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ có các hệ số nguyên, biết rằng tồn tại ba số nguyên x_1, x_2, x_3 sao cho $P(x_1) = 2025, P(x_2) = 2026$ và $P(x_3) = 2027$.

- a) Chứng minh rằng x_2 là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình $P(x) = 2026$.
 b) Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 2029$ có không quá một nghiệm nguyên.

Lời giải.

- a) Chú ý rằng $a - b | P(a) - P(b)$ với mọi cặp số nguyên a, b và $a \neq b$. Khi đó ta có $x_2 - x_1 | P(x_2) - P(x_1)$ hay $x_2 - x_1 | 1$. Tương tự, ta được $x_2 - x_3 | 1$.

Chú ý rằng $x_1 \neq x_3$ nên ta được $\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_2 - x_1 = -1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$. Từ cả hai trường hợp, ta được $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$.

Giả sử tồn tại số nguyên a là nghiệm của phương trình $P(x) = 2026$. Khi đó ta được $P(a) = 2026$. Lập luận tương tự, ta được $a = \frac{x_1 + x_3}{2} = x_2$.

Vậy phương trình $P(x) = 2026$ có nghiệm nguyên duy nhất x_2 .

- b) Xét phương trình $P(x) = 2029$. Khi đó, giả sử phương trình $P(x) = 2029$ có nghiệm nguyên a , ta chứng minh a là nghiệm nguyên duy nhất.

Chú ý rằng $a - x_1 | P(a) - P(x_1)$ nên $a - x_1 | 4$. Tương tự, ta được $a - x_3 | 2$ và $a - x_2 | 3$. Từ câu a), ta được x_1, x_2, x_3 là ba số nguyên liên tiếp (nếu xếp tăng dần) và $a \neq x_1, x_2, x_3$.

Xét trường hợp $x_1 < x_2 < x_3$, ta có các khả năng sau:

- Khả năng 1: $a < x_1$. Khi đó, $|a - x_3| > |x_1 - x_3| = 2$. Vô lý.
- Khả năng 2: $a > x_3$. Lúc này ta được $a - x_1 = 4; a - x_2 = 3; a - x_3 = 2$. Có duy nhất một giá trị a như vậy.

Xét trường hợp $x_1 > x_2 > x_3$, ta có các khả năng sau:

- Khả năng 1: $a > x_1$. Khi đó $|a - x_3| > |x_1 - x_3| = 2$. Điều này là vô lý.
- Khả năng 2: $a < x_3$. Khi đó $a - x_1 = -4; a - x_2 = -3; a - x_3 = -2$. Có duy nhất một giá trị a như vậy.

Vậy từ tất cả các trường hợp, phương trình $P(x) = 2029$ có không quá một nghiệm nguyên.

Bài toán 3

Câu 3 (4,0 điểm) Cho $A(n) = 10^{10^n} - 9^{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tìm một giá trị của n sao cho $A(n)$ có hai chữ số tận cùng giống nhau.
- Chứng minh rằng nếu $A(n)$ có k chữ số tận cùng giống nhau thì $k \leq 4$.

Lời giải.

- a) Chú ý $10^{10^n} \equiv 0 \pmod{10}$; $9^{9^n} \equiv 9 \pmod{10}$ với mọi số nguyên dương n . Vậy ta được $A(n) \equiv 0 - 9 \equiv 1 \pmod{10}$. Do đó, nếu $A(n)$ có nhiều chữ số tận cùng giống nhau thì các chữ số đó phải là 1.

Với $n = 1$, ta chứng minh $A(1) \equiv 11 \pmod{100}$ hay $9^9 \equiv -11 \pmod{100}$.

Thật vậy, ta có $9^2 \equiv -19 \pmod{100}$; $9^4 \equiv -39 \pmod{100}$; $9^8 \equiv 21 \pmod{100}$; $9^9 \equiv -11 \pmod{100}$.

Vậy $A(1) \equiv 11 \pmod{100}$ hay $A(1)$ có hai chữ số tận cùng giống nhau.

- b) Giả sử tồn tại số nguyên dương n để $A(n)$ có 5 chữ số tận cùng giống nhau. Chú ý rằng $A(n) \equiv 1 \pmod{10}$ nên 5 chữ số tận cùng của $A(n)$ là 11111. Lúc này ta được $A(n) \equiv 11111 \pmod{10^5}$.

Do $10^n > 5$ nên $10^{10^n} \equiv 0 \pmod{10^5}$. Vậy $-9^{9^n} \equiv 11111 \pmod{10^5} \Rightarrow 9^{9^n} \equiv -11111 \equiv 25 \pmod{32}$.

Ta có: $9 \equiv 9 \pmod{32}$; $9^2 \equiv 17 \pmod{32}$; $9^3 \equiv 25 \pmod{32}$; $9^4 \equiv 1 \pmod{32}$. Vậy để $9^{9^n} \equiv 25 \pmod{32}$ thì $9^n \equiv 3 \pmod{4}$. Tuy nhiên điều này là vô lý vì $9^n \equiv 1 \pmod{4}$.

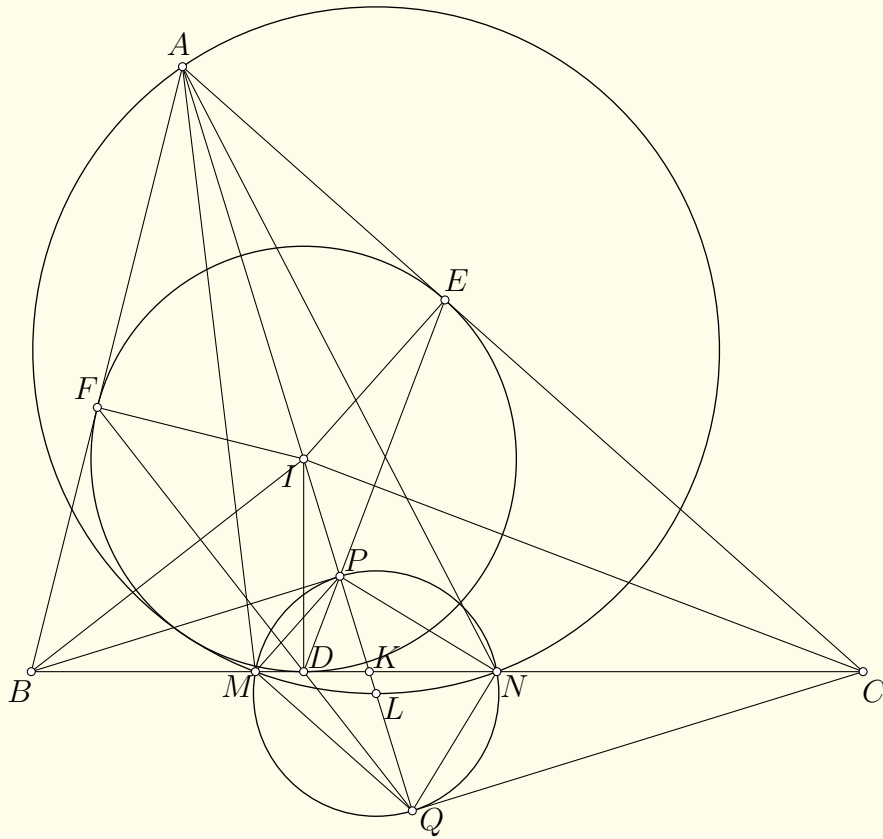
Vậy $A(n)$ không thể có 5 chữ số tận cùng là giống nhau hay nói cách khác, nếu k là số chữ số tận cùng giống nhau của $A(n)$ thì $k \leq 4$.

Bài toán 4

Câu 4 (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC, CA, AB . Đường thẳng AI cắt DE, DF lần lượt tại P, Q . Đường tròn đường kính PQ cắt BC tại M, N .

- a) Chứng minh rằng BP song song với CQ .
- b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tiếp xúc với đường tròn (I) .

 **Lời giải.**



- a) Xét tứ giác $IDQC$, ta có:

$$\widehat{QDC} = \widehat{FDB} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2} = \widehat{QIC}$$

Vậy tứ giác $IDQC$ nội tiếp. Do đó $\widehat{IQC} = \widehat{IDC} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $IPDB$, ta có:

$$\widehat{PDC} = 90^\circ - \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2} = \widehat{BIP}$$

Vậy tứ giác $BIPD$ nội tiếp. Do đó $\widehat{IPB} = \widehat{IDB} = 90^\circ$. Chú ý $\widehat{IQC} = 90^\circ$. Vậy $BP \parallel CQ$.

- b) Gọi K là giao điểm của AQ và BC , L là trung điểm PQ . Lúc này L là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMQN$.

Theo định lý Thales và tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{KP}{KQ} = \frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB \cos \widehat{BAK}}{AC \cos \widehat{CAK}} = \frac{AP}{AQ}$$

Vậy $(AKPQ) = -1 = M(AKPQ) = N(AKPQ)$. Chú ý rằng do $MP \perp MQ, NP \perp NQ$ nên MP, NP lần lượt là phân giác trong của $\widehat{AMN}, \widehat{ANM}$; MQ và NQ lần lượt là phân giác ngoài của $\widehat{AMN}, \widehat{ANM}$. Khi đó, P và Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc A của tam giác AMN .

Khi đó trung điểm L của PQ là điểm chính giữa cung nhỏ MN của đường tròn (AMN) .

Ta có: $\widehat{DQI} = \widehat{DCI} = \widehat{IDP}$. Do đó $\triangle IDP \sim \triangle IQD \Rightarrow ID^2 = IP \cdot IQ = IL^2 - LP^2$. Vậy đường tròn (DEF) và đường tròn $(MPNQ)$ trực giao. Khi đó $\mathcal{P}_{L/(DEF)} = LP^2$.

Chú ý rằng $LM^2 = LN^2 = LK \cdot LA$. Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}_{(L; LP^2)}$, ta được $(DEF) \mapsto (DEF), BC \equiv MN \mapsto (AMN)$. Do phép nghịch đảo bảo toàn góc và BC tiếp xúc với (DEF) nên (AMN) tiếp xúc với (DEF) .

Bài toán 5

 **Câu 5** (4,0 điểm) Bạn Hải tô màu n số nguyên dương đầu tiên bởi đúng k màu, mỗi số chỉ tô đúng một màu ($k \leq n$). Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô luôn tồn tại hai số được tô cùng màu mà hiệu của chúng là số chính phương trong mỗi trường hợp sau:

a) $k = 2$.

b) $k = 3$.

 Lời giải.

a) Với $n = 4$, ta phân hoạch tập $\{1; 2; 3; 4\}$ thành hai nhóm, mỗi nhóm gồm các số được tô cùng màu.

Xét phân hoạch $\{1; 3\}, \{2; 4\}$, ta nhận thấy phân hoạch này không có hai số nào được tô cùng màu mà hiệu giữa số lớn và số nhỏ là số chính phương.

Vậy $n \geq 5$. Với $n = 5$, ta chứng minh mọi cách tô màu đều thỏa mãn bài toán.

Thật vậy, giả sử tồn tại cách tô màu không thỏa mãn bài toán với $n = 5$. Khi đó, hai số tự nhiên liên tiếp không được tô cùng màu. Do đó, các số 1, 3, 5 được tô cùng màu. Tuy nhiên $5 - 1 = 4$ là số chính phương nên điều này vô lý.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 5 với $k = 2$.

b) Nhận xét: với số tự nhiên r bất kì, bộ số $(r, r+9, r+25)$ và $(r, r+16, r+25)$ có ba số được tô bởi ba màu khác nhau. Do đó, với $r = 1, 2, 3, 4$. Các bộ $(10, 17); (11, 18); (12, 19); (13, 20)$ có hai số được tô cùng màu.

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 4 bộ vừa liệt kê, tồn tại hai bộ có 4 số được tô cùng màu. Tuy nhiên, bằng cách kiểm tra lại từng cặp bộ số, ta nhận thấy rằng luôn tồn tại hai số được tô cùng màu và hiệu giữa số lớn và số nhỏ là số chính phương.

Khi đó, giá trị n nhỏ nhất thỏa mãn 4 bộ số trên xuất hiện và có hai bộ gồm 4 số tô cùng màu là $4 + 25 = 29$. Vậy với $n = 29$, luôn tìm được hai số cùng màu và hiệu giữa số lớn và số nhỏ là số chính phương.

Với $n = 28$, ta xét phân hoạch sau:

- 1, 4, 6, 9, 12, 14, 19, 24, 27.
- 2, 5, 7, 10, 15, 17, 20, 22, 25, 28.
- 3, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23, 26.

Với mỗi số trong cùng một nhóm, ta tô cùng một màu và mỗi nhóm khác nhau được tô bởi mỗi màu khác nhau. Cách tô này thỏa mãn không có hai số được tô cùng màu có hiệu là một số chính phương. Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 29 với $k = 3$.