



HSA

ĐỀ THAM KHẢO

2025
BÀI THI
ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC

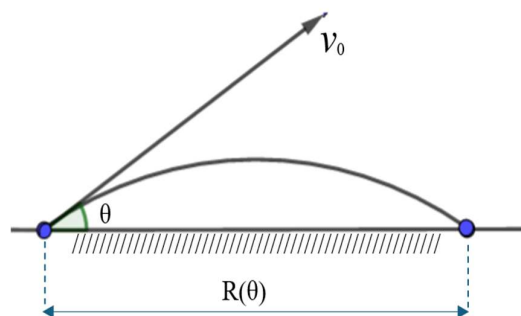
Phát hành: Bản quyền thuộc:
Trung tâm Khảo thí Đại học Quốc Gia Hà Nội

Tầng 5, Nhà HT2  1900-866891  Khu đô thị ĐHQGHN 
tại Hòa Lạc

Phần thi thứ nhất: Toán học và Xử lý số liệu từ câu hỏi số 01 đến 50

Câu hỏi 01

Một viên đạn pháo được bắn từ mặt đất với vận tốc v_0 hợp với phương ngang một góc θ (đơn vị: độ, $0^\circ < \theta < 45^\circ$) và tầm bắn được mô hình hóa bởi hàm số $R(\theta) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$ (m), trong đó g là gia tốc trọng trường lấy xấp xỉ bằng $9,8 \text{ m/s}^2$.



Với $v_0 = 500 \text{ m/s}$, tính θ để viên đạn trúng mục tiêu trên mặt đất phẳng cách đó 19500 m (nhập đáp án vào ô trống, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị):

Câu hỏi 02

Số giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $mx^2 - 2mx + 2m - 1 \leq 0$ thỏa mãn với mọi số thực x là:

- (A) 10.
- (B) 11.
- (C) 18.
- (D) 20.

Câu hỏi 03

Một công ty tuyển dụng nhân viên mới với mức lương là 170 triệu đồng cho năm đầu tiên. Mỗi năm tiếp theo, tiền lương nhân viên này được tăng thêm 15 triệu đồng cho đến khi đạt mức tối đa là 320 triệu đồng/năm. Tính tổng số tiền lương mà người nhân viên nhận được trong 20 năm đầu (nhập đáp án vào ô trống, đơn vị tính: triệu đồng):

Câu hỏi 04

Có bao nhiêu cặp số cộng có các số hạng là số tự nhiên, số hạng đầu là số chẵn, tổng các số hạng có giá trị lẻ bằng 33 và tổng các số hạng có giá trị chẵn bằng 44 (nhập đáp án vào ô trống)?

Câu hỏi 05

Nghiên cứu về quá trình tăng trưởng của một quần thể sinh vật trong điều kiện môi trường sống hạn chế cho thấy: ban đầu số lượng cá thể tăng trưởng chậm, sau đó nhanh và cuối cùng khi thời gian đủ dài, số lượng cá thể của quần thể đạt đến trạng thái cân bằng, khi đó số lượng cá thể sinh ra xấp xỉ bằng số lượng chết đi. Số lượng cá thể N trong quần thể theo thời gian t (ngày) được mô hình hóa và xấp xỉ theo hàm số: $N(t) = \frac{16398e^{0,5(t-9,19)}}{0,12 + e^{0,5(t-9,19)}}$. Khi quần thể sinh vật trên đạt trạng thái cân bằng, số cá thể của quần thể **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) 9264
- (B) 136650
- (C) 16398
- (D) 224630

Câu hỏi 06

Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x$ là:

- (A) $2\sin 2x$
- (B) $2\sin 4x$
- (C) $2\cos 2x$
- (D) $\sin 4x$

Câu hỏi 07

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2(m+2)\log_2 x + m^2 + 4m \leq 0$ đúng với mọi x thuộc $[2;4]$ (nhập đáp án vào ô trống)?

Câu hỏi 08

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ với $f'(x) = x(x+1)^2(1-x)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- (A) $(-1; 0)$
- (B) $(0; 1)$
- (C) $(-\infty; -1)$
- (D) $(1; +\infty)$

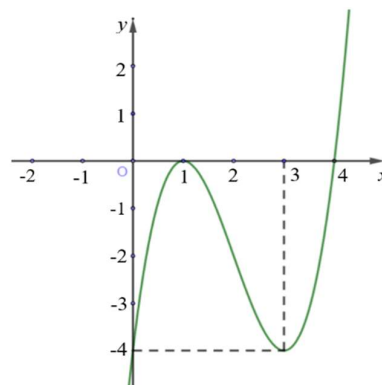
Câu hỏi 09

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt hai trục tọa độ tại A, B . Tính diện tích tam giác OAB (nhập đáp án vào ô trống).

Câu hỏi 10

Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) + 4x$ đồng biến trên khoảng nào?

- (A) $(0; 1)$
- (B) $(-\infty; -3)$
- (C) $(-2; 0)$
- (D) $(-3; -2)$


Câu hỏi 11

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Khẳng định nào sau đây về số cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 1) + x^2 - x^3 + x^4$ là đúng?

- (A) Có hai cực đại và chỉ có một cực tiểu.
- (B) Có hai cực tiểu và chỉ có một cực đại.

- (C) Có đúng một cực tiểu và không có cực đại.
 (D) Có đúng một cực đại và không có cực tiểu.

Câu hỏi 12

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-3	4	-2	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\cos x - 1)$ bằng:

- (A) -2 .
 (B) 1 .
 (C) 3 .
 (D) 4 .

Câu hỏi 13

Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x^4 + 8mx^3 + 12(m^2 - 2m)x^2$ có ba cực trị là:

- (A) 4 .
 (B) 10 .
 (C) 6 .
 (D) -10 .

Câu hỏi 14

Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\int f(x)dx = x^4 - x^2 + C$
 (B) $\int f(x)dx = 12x^2 - 2 + C$
 (C) $\int f(x)dx = x^4 - 2x^2 + C$
 (D) $\int f(x)dx = 3x^2 - 2x + C$

Câu hỏi 15

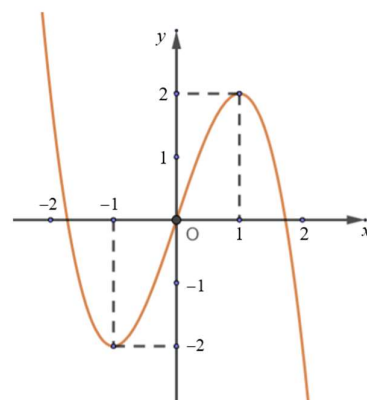
Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ là:

- (A) $y = x + 1$.
- (B) $y = x - 1$.
- (C) $y = x - 3$.
- (D) $y = x + 3$.

Câu hỏi 16

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x) - 3f(x) = -2$ là:

- (A) 3.
- (B) 4.
- (C) 5.
- (D) 6.

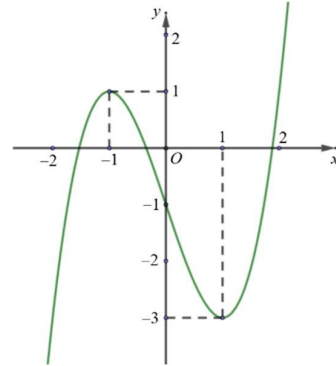

Câu hỏi 17

Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái xe bắt đầu giảm tốc độ. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 12 - \frac{4t^2}{3}$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc giảm tốc độ. Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc giảm tốc độ cho đến khi dừng là:

- (A) 4 m.
- (B) 12 m.
- (C) 24 m.
- (D) 36 m.

Câu hỏi 18

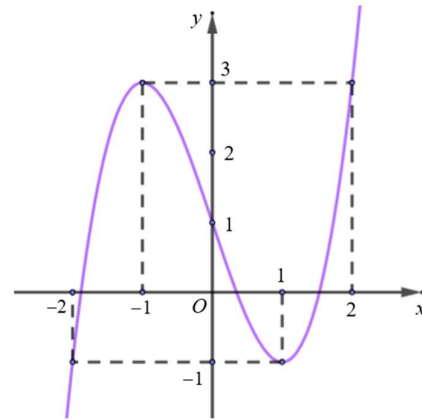
Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ (nhập đáp án vào ô trống)?



Câu hỏi 19

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f[f(x)] = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4



Câu hỏi 20

Cho hàm số $f(x) = x^2 \ln x$. Giá trị của $\int_1^2 \left(f'(x) + \frac{x-4}{x} \right) dx$ là bao nhiêu (nhập đáp án vào ô trống)?

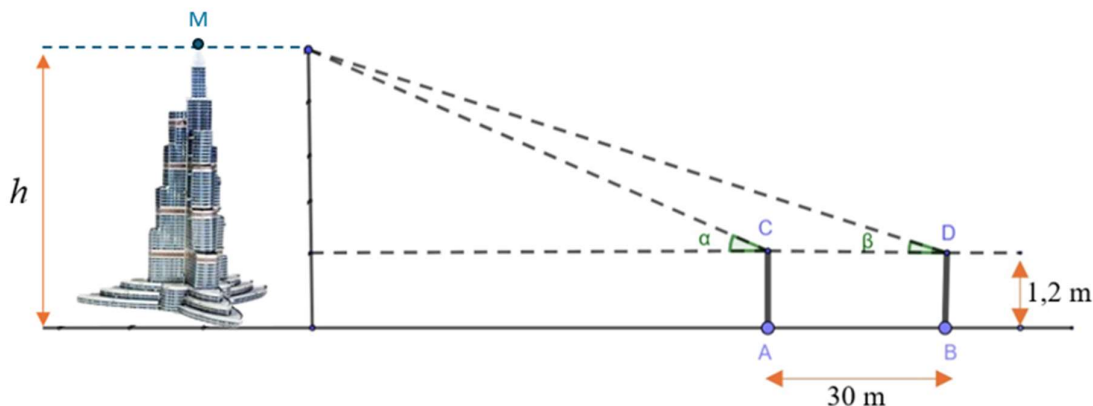
Câu hỏi 21

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$. Điểm nào sau đây nằm bên trong mặt cầu (S) ?

- (A) $(-2; 1; 3)$
- (B) $(1; -2; 2)$
- (C) $(2; 1; -2)$
- (D) $(1; 2; 4)$

Câu hỏi 22

Để đo chiều cao tòa tháp người ta dùng dụng cụ đo góc có chiều cao 1,2 m đặt tại hai vị trí trên mặt đất cách nhau một khoảng $AB = 30$ m. Tại vị trí A và B góc đo thu được so với phương ngang lần lượt là $\alpha = 65^\circ$; $\beta = 50^\circ$ (hình minh họa). Chiều cao (h) của tòa tháp (từ điểm M tới mặt đất) là bao nhiêu?



- (A) 78,2 m
- (B) 75,6 m
- (C) 80,1 m
- (D) 81,7 m

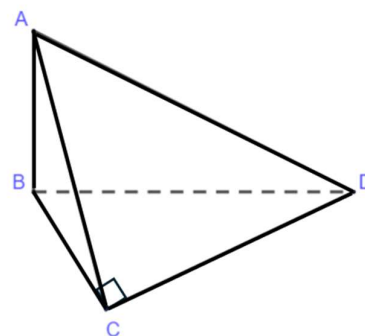
Câu hỏi 23

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = \frac{x^2}{2}$ (nhập đáp án vào ô trống).

Câu hỏi 24

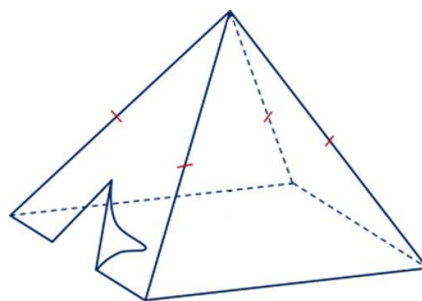
Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) và tam giác BCD vuông tại C . Biết rằng $AB = BC = 2a$. Khoảng cách từ điểm B tới mặt phẳng (ACD) bằng bao nhiêu?

- (A) $\sqrt{2}a$
- (B) $\sqrt{3}a$
- (C) a
- (D) $\frac{3a}{2}$



Câu hỏi 25

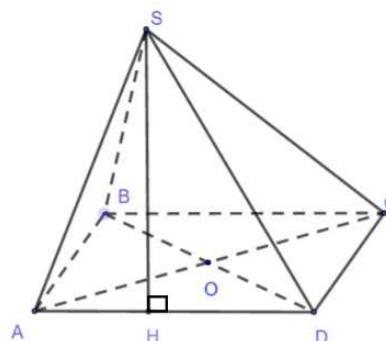
Một chiếc lều cắm trại được thiết kế có dạng hình chóp tứ giác đều với thể tích là 6 m^3 . Bốn mặt bên của lều được may bằng vải bạt (hình minh họa). Để diện tích vải bạt cần dùng là nhỏ nhất, thì độ dài cạnh đáy **gần nhất** với giá trị nào sau đây?



- (A) 2,52 m
- (B) 2,94 m
- (C) 3,12 m
- (D) 3,26 m

Câu hỏi 26

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, chân đường cao hình chóp là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $DH = 2AH$, góc giữa SD và mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng bao nhiêu?



- (A) $\frac{3a}{4}$
- (B) $\frac{a}{2}$
- (C) $\frac{3a}{2}$
- (D) $\frac{a}{4}$

Câu hỏi 27

Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \tan x + \cot x)^2 dx = a + b\sqrt{3} + c\pi$ (*). Biết rằng, tồn tại duy nhất bộ ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn (*). Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng bao nhiêu (nhập đáp án vào ô trống)?

Câu hỏi 28

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi P là trung điểm của OD , điểm I thuộc cạnh SD sao cho đường thẳng PI song song mặt phẳng (SBC) . Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$.

(A) $\frac{5}{2}$

(B) $\frac{7}{2}$

(C) 3

(D) 4

Câu hỏi 29

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$. Tính bán kính đường tròn (C) (nhập đáp án vào ô trống).

Câu hỏi 30

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;-1;-1)$, $B(-1,2,4)$. Điểm M thuộc tia Ox và MA vuông góc với MB . Tìm hoành độ điểm M (nhập đáp án vào ô trống).

Câu hỏi 31

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

(P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz + 3 = 0$ với a, b, c là các số thực.

Tổng $a + b + c$ là:

(A) -2 .

(B) -4 .

(C) 2 .

(D) 4 .

Câu hỏi 32

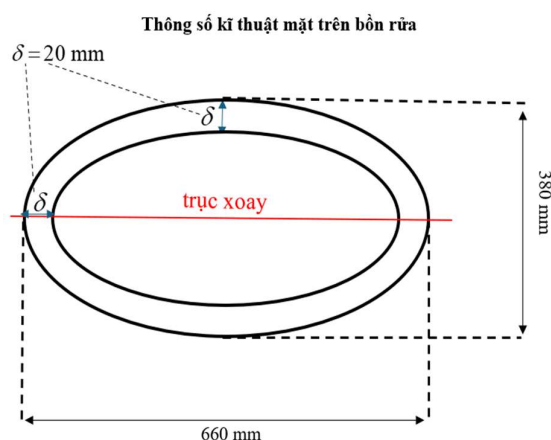
Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ và các điểm $A(-1; 2; 3);$

$B(0; 1; 2)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song AB có phương trình là:

- (A) $x + 2y - z = 0$.
- (B) $x - y + z - 1 = 0$.
- (C) $x + y - z - 3 = 0$.
- (D) $x + 2y - z - 4 = 0$.

Câu hỏi 33

Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,... Một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi elip quay quanh một trục (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm, giả thiết bồn rửa có độ dày đồng đều δ là 20 mm.



Thể tích chứa nước của bồn rửa **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) $18,66 \text{ dm}^3$
- (B) $18,76 \text{ dm}^3$
- (C) $18,86 \text{ dm}^3$
- (D) $18,96 \text{ dm}^3$

Câu hỏi 34

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$; $d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 . Biết Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (a;b;-1)$. Tổng $a^3 + b^3$ bằng:

- (A) -8 .
- (B) -7 .
- (C) 7 .
- (D) 8 .

Câu hỏi 35

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;-2;1)$ có trọng tâm G , M là trung điểm của cạnh BC . Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x+2y-3z-1=0$.

Đường thẳng AM có một vector chỉ phương là:

- (A) $\vec{u}(1;2;1)$.
- (B) $\vec{u}(2;1;1)$.
- (C) $\vec{u}(1;-2;1)$.
- (D) $\vec{u}(1;2;2)$.

Câu hỏi 36

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+4=0$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi 6π . Phương trình mặt cầu (S) là:

- (A) $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 15$.
- (B) $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.
- (C) $(x+3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 15$.
- (D) $(x+3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu hỏi 37

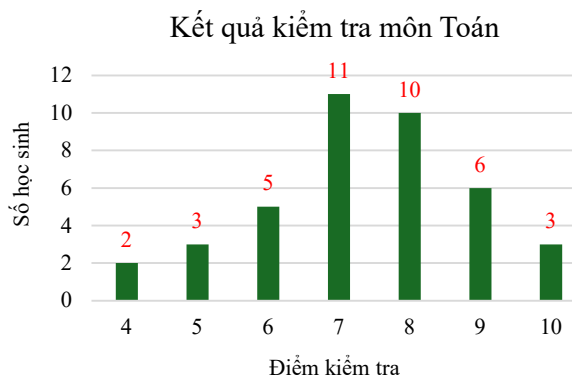
Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2)$ và $B(4;5;1)$. Các điểm M, N di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho độ dài MN bằng 1. Tổng $AM + BN$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu (nhập đáp án vào ô trống)?

Câu hỏi 38

Cho biểu đồ kết quả kiểm tra môn Toán của một lớp học.

Số trung bình của mẫu số liệu ở biểu đồ là:

(nhập đáp án vào ô trống)



Câu hỏi 39

Cô giáo có 12 phần quà gồm 4 phần loại I và 8 phần loại II được đựng trong 12 hộp kín giống nhau. Cô chia đều cho 3 bạn, mỗi bạn 4 phần quà. Xác suất để mỗi bạn đều nhận được cả hai loại quà là:

(A) $\frac{19}{3150}$.

(B) $\frac{19}{1050}$.

(C) $\frac{32}{165}$.

(D) $\frac{32}{55}$.

Câu hỏi 40

Thống kê chiều cao các cây bạch đàn trong vườn ươm của một lâm trường theo bảng số liệu sau:

Chiều cao (cm)	[70 ; 80)	[80 ; 90)	[90 ; 100)	[100 ; 110)	[110 ; 120)	[120 ; 130)
Số cây	150	340	710	750	490	260

Trung vị của mẫu số liệu là:

- (A) 100.
- (B) 102.
- (C) 105.
- (D) 110.

Câu hỏi 41

Hai xạ thủ X, Y độc lập với nhau bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của X, Y tương ứng là 0,7 ; 0,8. Xác suất để có duy nhất một xạ thủ bắn trúng mục tiêu là:

- (A) 0,24.
- (B) 0,38.
- (C) 0,50.
- (D) 0,56.

Câu hỏi 42

Trong một khu dân cư, tỉ lệ gia đình nuôi chó là 0,2; tỉ lệ gia đình nuôi mèo là 0,25; tỉ lệ gia đình nuôi cả chó và mèo là 0,05. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong khu dân cư đó, xác suất để gia đình được chọn không nuôi con vật nào trong hai con vật chó và mèo **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) 0,50
- (B) 0,45
- (C) 0,55
- (D) 0,60

Câu hỏi 43

Để đánh giá mức độ ổn định của một loại pin điện, người ta thống kê thời gian sử dụng liên tục của pin khi được sạc đầy điện theo bảng mẫu số liệu sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[5,0 ; 5,5)	[5,5 ; 6,0)	[6,0 ; 6,5)	[6,5 ; 7,0)	[7,0 ; 7,5)	[7,5 ; 8,0)
Số pin	4	6	11	14	8	7

Hãy cho biết độ lệch chuẩn của mẫu số liệu **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) 0,518
- (B) 0,529
- (C) 0,720
- (D) 1,120

Câu hỏi 44

Cho các biến cố A và B thỏa mãn $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,75$ và $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$. Khi đó $P(A | B)$ bằng:

- (A) $\frac{1}{5}$.
- (B) $\frac{1}{4}$.
- (C) $\frac{1}{3}$.
- (D) $\frac{1}{2}$.

Câu hỏi 45

Trong một báo cáo, xét nghiệm Mammography người mắc bệnh ung thư vú cho kết quả dương tính với xác suất là 90%, người không mắc bệnh ung thư vú cho kết quả âm tính với xác suất 97%. Nghiên cứu dịch tễ học chỉ ra tỉ lệ mắc ung thư vú của phụ nữ trong độ tuổi 55 là 1%. Một phụ nữ 55 tuổi, không có tiền sử ung thư vú thực hiện xét nghiệm Mammography hai lần độc lập nhau đều nhận được kết quả là dương tính. Xác suất người phụ nữ đó mắc bệnh ung thư vú **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) 90%
- (B) 91%

(C) 98%

(D) 99%

Câu hỏi 46

Trong một trò chơi điện tử có 30 con cá. Các con cá có thể ăn được nhau, cá được coi là no nếu nó ăn đủ 3 con cá khác (3 con này có thể no hoặc chưa no). Khi có một con cá no thì người chơi được cộng một điểm. Khi đã no thì cá không ăn thêm nữa. Hỏi người chơi có thể được cộng tối đa bao nhiêu điểm?

(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

Câu hỏi 47

Lúc 6 giờ 00 sáng kim phút và kim giờ của đồng hồ tạo thành hai tia đối nhau. Biết rằng sau ít nhất x phút thì kim phút và kim giờ lại tạo thành hai tia đối nhau.

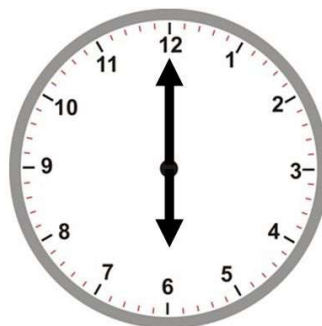
Hỏi x **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

(A) 65,3

(B) 65,5

(C) 65,7

(D) 65,9



Dựa vào thông tin cung cấp dưới đây để trả lời các câu hỏi từ 48 đến 50.

Vào ngày 31 tháng 12 hàng năm người ta thực hiện thống kê số lượng chuột túi xám trên một hòn đảo. Năm 2018 thống kê được số chuột túi xám là 400 con, năm 2022 số chuột túi xám là 600 con. Giả sử, số lượng chuột túi xám tính được xác định xấp xỉ theo hàm số mũ $P = P_0 e^{kt}$, trong đó k là một hằng số, P_0 là số chuột túi xám tại thời điểm gốc năm 2018 ($t = 0$), P là số chuột túi xám tại thời điểm t tính từ gốc (t tính theo đơn vị năm).

Câu hỏi 48

Số chuột túi xám trên đảo năm 2025 là:

(A) 735.

(B) 800.

(C) 813.

(D) 900.

Câu hỏi 49

Vào năm nào số chuột túi xám ở trên đảo tăng gấp đôi so với năm 2022?

(A) 2028

(B) 2029

(C) 2034

(D) 2033

Câu hỏi 50

Trên đảo, ngoài loài chuột túi xám còn có loài chuột túi đỏ sinh sống, theo thống kê ở thời điểm 31 tháng 12 năm 2018 số lượng chuột túi đỏ là 1200 con. Biết số lượng chuột túi đỏ giảm 5% mỗi năm. Vào năm nào thì số chuột túi xám sẽ gấp đôi số chuột túi đỏ?

(A) 2028

(B) 2030

(C) 2031

(D) 2032

----- HẾT PHẦN THI THỨ NHẤT -----

NHÓM TOÁN VÀ L^AT_EX

ÔN THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HSA

Thời gian: 90 phút (không kể phát đề)

ĐỀ MINH HỌA HSA 2025

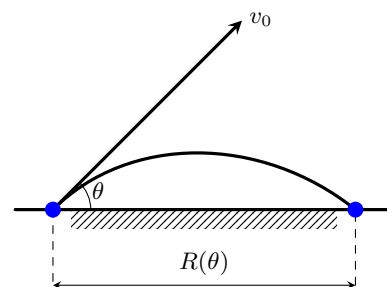
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

--	--	--	--	--	--	--	--

Câu 1. Một viên đạn pháo được bắn từ mặt đất với vận tốc v_0 hợp với phương ngang một góc θ (đơn vị: độ, $0^\circ < \theta < 45^\circ$) và tầm bắn được mô hình hóa bởi hàm số $R(\theta) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$ (m), trong đó g là gia tốc trọng trường lấy xấp xỉ bằng $9,8 \text{ m/s}^2$. Với $v_0 = 500 \text{ m/s}$, tính θ để viên đạn trúng mục tiêu trên mặt đất phẳng cách đó 19500 m (nhập đáp án vào ô trống, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án:

2	5		
---	---	--	--



👉 Lời giải.

Để viên đạn trúng mục tiêu trên mặt đất phẳng cách đó 19500 m thì

$$\frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g} = 19500 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1911}{2500} \Leftrightarrow \theta \approx 25^\circ.$$

Vậy với $\theta = 25^\circ$ thì viên đạn trúng mục tiêu trên mặt đất phẳng cách đó 19500 m.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $mx^2 - 2mx + 2m - 1 \leq 0$ thỏa mãn với mọi số thực x là

A 10.**B** 11.**C** 18.**D** 20.

👉 Lời giải.

Xét bất phương trình $mx^2 - 2mx + 2m - 1 \leq 0$. (1)

- ☑ Nếu $m = 0$, bất phương trình (1) trở thành $-1 \leq 0$, luôn đúng với mọi số thực x .
Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

- ☑ Nếu $m \neq 0$, (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = m^2 - m(2m - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0. \end{cases}$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10; 10]$, ta được $m \in \{-10, -9, \dots, -2, -1\}$.

Vậy có 11 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Một công ty tuyển dụng nhân viên mới với mức lương là 170 triệu đồng cho năm đầu tiên. Mỗi năm tiếp theo, tiền lương nhân viên này được tăng thêm 15 triệu đồng cho đến khi đạt mức tối đa là 320 triệu đồng/năm. Tính tổng số tiền lương mà người nhân viên nhận được trong 20 năm đầu (nhập đáp án vào ô trống, đơn vị tính: triệu đồng).

Đáp án:

5	5	7	5
---	---	---	---

👉 Lời giải.

Mức lương cho năm đầu của nhân viên đó là 170 triệu đồng và mỗi năm tiếp theo, nhân viên được tăng thêm 15 triệu đồng cho đến khi đạt mức tối đa là 320 triệu đồng/năm. Khi đó số tiền lương nhân viên này nhận được trong mỗi năm tiếp theo cho đến khi đạt mức tối đa 320 triệu đồng/năm là một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 170$ và công sai $d = 15$.

Năm mà tiền lương nhân viên này nhận được 320 triệu đồng là

$$170 + 15(n - 1) = 320 \Rightarrow n - 1 = \frac{320 - 170}{15} = 10 \Rightarrow n = 11.$$

Năm thứ 11 thì người đó đạt được 320 triệu đồng. Khi đó $20 - 11 = 9$ năm sau, người đó nhận được 320 triệu đồng/năm.

Vậy tổng số tiền lương mà người nhân viên nhận được trong 20 năm đầu là

$$\frac{11(320 + 170)}{2} + 320 \cdot 9 = 5575 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 4. Có bao nhiêu cấp số cộng có các số hạng là số tự nhiên, số hạng đầu là số chẵn, tổng các số hạng có giá trị lẻ bằng 33 và tổng các số hạng có giá trị chẵn bằng 44 (nhập đáp án vào ô trống)? **Đáp án:**

Lời giải.

Vì số hạng đầu u_1 chẵn và trong cấp số cộng có số hạng lẻ nên công sai d lẻ.

☑ Trường hợp 1. Dãy số có lẻ số hạng.

Gọi dãy số tổng quát là: $u_1; u_2; \dots; u_{2n}; u_{2n+1}$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 + \dots + u_{2n+1} = 44 \\ u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(u_1 + u_{2n+1}) \cdot (n+1)}{2} = 44 \\ \frac{(u_2 + u_{2n}) \cdot n}{2} = 33. \end{cases}$$

$$\text{Mà } u_1 + u_{2n+1} = u_1 + u_{2n} + d = u_2 + u_{2n} \text{ nên } \frac{n+1}{n} = \frac{44}{3} \Rightarrow n = 3.$$

$$\Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 77 \Leftrightarrow 7u_4 = 77 \Leftrightarrow u_4 = 11.$$

— Nếu $d > 0$ thì:

$$\text{Ta có: } u_4 = u_1 + 3d = 11 \Leftrightarrow 3d = 11 - u_1. \text{ Do } u_1 \geq 2 \Rightarrow 3d \leq 11 - 2 \Leftrightarrow 3d \leq 9 \Leftrightarrow d \leq 3.$$

$$\text{Mà } d \text{ lẻ nên } d = \{1; 3\}.$$

— Nếu $d < 0$ thì:

$$\text{Ta có: } u_4 = u_7 - 3d = 11 \Leftrightarrow u_7 = 3d + 11. \text{ Do } u_7 > 0 \Rightarrow 3d + 11 > 0 \Leftrightarrow d > -\frac{11}{3} \Rightarrow -\frac{11}{3} < d < 0.$$

$$\text{Mà } d \text{ lẻ nên } d = \{-3; -1\}.$$

☑ Trường hợp 2. Dãy số có chẵn số hạng.

Gọi dãy số tổng quát là: $u_1; u_2; \dots; u_{2n-1}; u_{2n}$.

Do đó, để tổng số hạng có giá trị chẵn lớn hơn tổng số hạng có giá trị lẻ thì $d < 0$.

$$\begin{cases} u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = 44 \\ u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(u_1 + u_{2n-1}) \cdot n}{2} = 44 \\ \frac{(u_2 + u_{2n}) \cdot n}{2} = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_1 + u_{2n-1}}{2} = \frac{44}{n} \\ \frac{u_2 + u_{2n}}{2} = \frac{33}{n}. \end{cases}$$

$$\text{Mà } u_2 + u_{2n} = u_1 + u_{2n-1} + 2d \text{ nên } \frac{33}{n} = \frac{44}{n} + d \Leftrightarrow nd = -11.$$

$$\text{Do } n \text{ là số tự nhiên và } d \text{ lẻ nên } \begin{cases} n = 11; d = -1 \\ n = 1; d = -11. \end{cases}$$

$$\text{Với } n = 11; d = -1 \text{ thì } \frac{u_1 + u_{21}}{2} = \frac{44}{11} \Leftrightarrow \frac{2u_1 + 20d}{2} = 4 \Leftrightarrow u_1 = 14 \Rightarrow u_{21} = -6.$$

Do các số hạng của cấp số cộng là số tự nhiên nên trường hợp này không thoả mãn.

Với $n = 1; d = -11$ cấp số cộng có hai số hạng là $u_1 = 44; u_2 = 33$.

Vậy có 5 cấp số cộng thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Nghiên cứu về quá trình tăng trưởng của một quần thể sinh vật trong điều kiện môi trường sống hạn chế cho thấy: ban đầu số lượng cá thể tăng trưởng chậm, sau đó nhanh và cuối cùng khi thời gian đủ dài, số lượng cá thể của quần thể đạt đến trạng thái cân bằng, khi đó số lượng cá thể sinh ra xấp xỉ bằng số lượng chết đi. Số lượng cá thể N trong quần thể theo thời gian t (ngày) được mô hình hóa và xấp xỉ theo hàm số: $N(t) = \frac{16398e^{0,5(t-9,19)}}{0,12 + e^{0,5(t-9,19)}}$. Khi quần thể sinh vật trên đạt trạng thái cân bằng, số cá thể của quần thể gần nhất với giá trị nào sau đây?

A 9264.**B** 136650.**C** 16398.**D** 224630.**Lời giải.**

Vì số lượng cá thể của quần thể đạt đến trạng thái cân bằng khi thời gian đủ dài nên số cá thể của quần thể khi đó là

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{16398e^{0,5(t-9,19)}}{0,12 + e^{0,5(t-9,19)}} = 16398.$$

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x$ là

A $2 \sin 2x$.**B** $2 \sin 4x$.**C** $2 \cos 2x$.**D** $\sin 4x$.**Lời giải.**

$$y' = 2 \sin 2x (\sin 2x)' = 2 \sin 2x (2 \cos 2x) = 2 \sin 4x.$$

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2(m+2) \log_2 x + m^2 + 4m \leq 0$ đúng với mọi x thuộc $[2; 4]$? Đáp án:

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in [2; 4]$ ta có $t \in [1; 2]$.

Xét bất phương trình

$$\begin{aligned} & t^2 - 2(m+2)t + m^2 + 4m \leq 0 \\ \Leftrightarrow & t^2 - (m+m+4)t + m(m+4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & m \leq t \leq m+4 \quad (\forall t \in [1; 2]). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} m \leq 1 \\ m+4 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ với $f'(x) = x(x+1)^2(1-x)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A $(-1; 0)$.**B** $(0; 1)$.**C** $(-\infty; -1)$.**D** $(1; +\infty)$.**Lời giải.**

Xét phương trình

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & x(x+1)^2(1-x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 9. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt hai trục tọa độ tại A, B . Tính diện tích tam giác OAB .

Đáp án: **2**, **6** **7**

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Khi đó $\begin{cases} y(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -1 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x = 1$ là

$$y = y'(1)(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow y = 3x - 4.$$

Tiếp tuyến cắt hai trục tọa độ tại A, B nên ta có $A\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ và $B(0; -4)$.

Khi đó $OA = \frac{4}{3}$ và $OB = 4$.

Diện tích tam giác OAB vuông tại O là $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{8}{3} \approx 2,67$.

Câu 10. Cho hàm bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f(x) + 4x$$

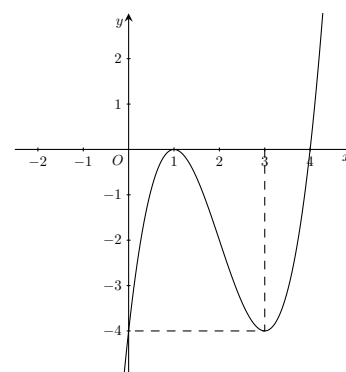
đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(0; 1)$.

(B) $(-\infty; -3)$.

(C) $(-2; 0)$.

(D) $(-3; -2)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 4$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi

$$g'(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \geq -4.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, $f'(x) \geq -4$ khi $x \geq 0$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vì $(0; 1) \subset (0; +\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0

Khẳng định nào sau đây về số cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 1) + x^2 - x^3 + x^4$ là đúng?

A Có hai cực đại và chỉ có một cực tiểu.

B Có hai cực tiểu và chỉ có một cực đại.

C Có đúng một cực tiểu và không có cực đại.

D Có đúng một cực đại và không có cực tiểu.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 1) + 2x - 3x^2 + 4x^3 = 2x \left[f'(x^2 + 1) + 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right]$.

Ta có $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f'(x) \geq 0 \forall x \in (1; +\infty)$ nên $f'(x^2 + 1) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, ta có $2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{23}{32} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $f'(x^2 + 1) + 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	—	0	+
y	$+\infty$	$g(0)$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có đúng một điểm cực tiểu là $x = 0$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
y'	+	0	—	0	—	+
y	$-\infty$	3	-3	4	-2	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\cos x - 1)$ bằng

A -2.

B 1.

C 3.

D 4.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$.

Đặt $\cos x - 1 = t$, với $t \in [-2; 0]$ ta có bảng biến thiên

t	-2	0
y'	—	
$f(t)$	3	-3

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(\cos x - 1)$ là 3.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 13. Tổng tất cả các giá trị nguyên để hàm số $y = 3x^4 + 8mx^3 + 12(m^2 - 2m)x^2$ có ba cực trị là

A 4.

B 10.

C 6.

D -10.

Lời giải.

Ta có $y' = 12x^3 + 24mx^2 + 24(m^2 - 2m)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24mx^2 + 24(m^2 - 2m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 2m^2 - 4m = 0. \end{cases} (*)$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0. Vậy ta phải có

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 + 2m \cdot 0 + 2m^2 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 1$ và $m = 3$, nên tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn bằng 4.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\int f(x) dx = x^4 - x^2 + C.$

(B) $\int f(x) dx = 12x^2 - 2 + C.$

(C) $\int f(x) dx = x^4 - 2x^2 + C.$

(D) $\int f(x) dx = 3x^2 - 2x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (4x^3 - 2x) dx = x^4 - x^2 + C.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ là

(A) $y = x + 1.$

(B) $y = x - 1.$

(C) $y = x - 3.$

(D) $y = x + 3.$

Lời giải.

Ta có $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} = x - 3 + \frac{6}{x + 1}.$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ có một đường tiệm cận xiên là $y = x - 3.$

Chọn đáp án **(C)** □

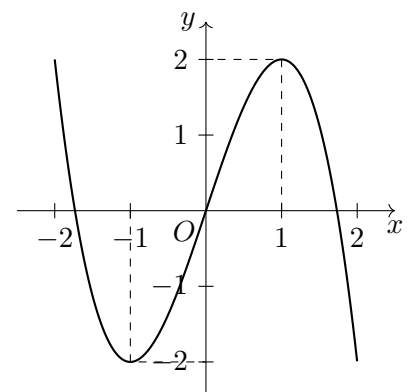
Câu 16. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x) - 3f(x) = -2$ là

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

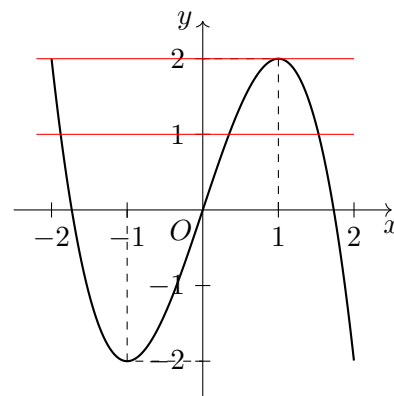


 Lời giải.

$$f^2(x) - 3f(x) = -2 \Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm và $f(x) = 2$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.



Chọn đáp án **C** ☐

Câu 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái xe bắt đầu giảm tốc độ. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 12 - \frac{4t^2}{3}$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc giảm tốc độ. Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc giảm tốc độ cho đến khi dừng là

A 4m.

B 12m.

C 24m.

D 36m.

 Lời giải.

Khi ô tô dừng $v(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - \frac{4t^2}{3} = 0 \Rightarrow t = 3$.

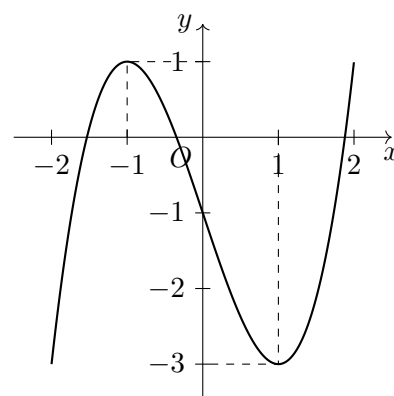
Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc giảm tốc độ cho đến khi dừng là:

$$\int_0^3 \left(12 - \frac{4t^2}{3}\right) dt = \left(12t - \frac{4t^3}{9}\right) \Big|_0^3 = 24.$$

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 18. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ (nhập đáp án vào ô trống)?

Đáp án:



 Lời giải.

Gọi a, b, c là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

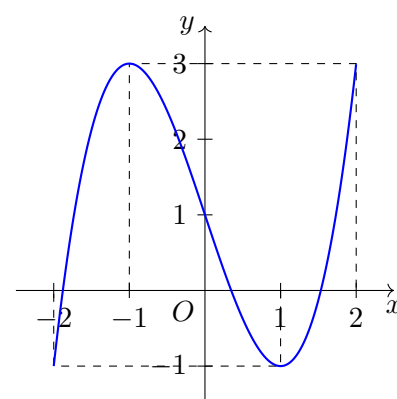
Từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							
		$f(a)$		$f(b)$		$f(c)$		$+\infty$

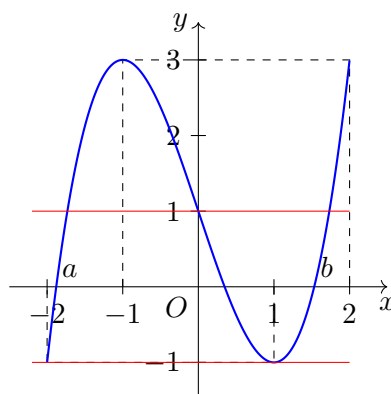
Do đó hàm số $f(x)$ có 3 cực trị.

Câu 19. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f[f(x)] = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

- A** 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.



Đặt $u = f(x)$.

Xét $y = f(u)$ Khi đó $y' = u' f'(u)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ u = -1 \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ f(x) = -1 \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (1; 2) \\ x = 0 \end{cases}$$

x	-1	0	1	b	2
y'	+	0	-	0	+
$y = f(u)$	$f(3)$		3		$f(3)$
		-1		-1	

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên $f(3) > f(2) = 2$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-1 < m < 3$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = x^2 \ln x$. Giá trị của $\int_1^2 \left(f'(x) + \frac{x-4}{x} \right) dx$ là bao nhiêu (nhập đáp án vào ô trống)?

Đáp án:

Lời giải.

$$\int_1^2 \left(f'(x) + \frac{x-4}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(f'(x) + 1 - \frac{4}{x} \right) dx = (x^2 \ln x + x - 4 \ln x) \Big|_1^2 = 4 \ln 2 + 2 - 4 \ln 2 - 1 = 1.$$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$. Điểm nào sau đây nằm bên trong mặt cầu (S) ?

A $(-2; 1; 3)$.

B $(1; -2; 2)$.

C $(2; 1; -2)$.

D $(1; 2; 4)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm trên vào vế trái của phương trình mặt cầu, ta thấy $(2-1)^2 + (1-2)^2 + (-2+1)^2 = 3 < 25$, suy ra điểm có tọa độ $(2; 1; -2)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .

Chọn đáp án **C** ☐

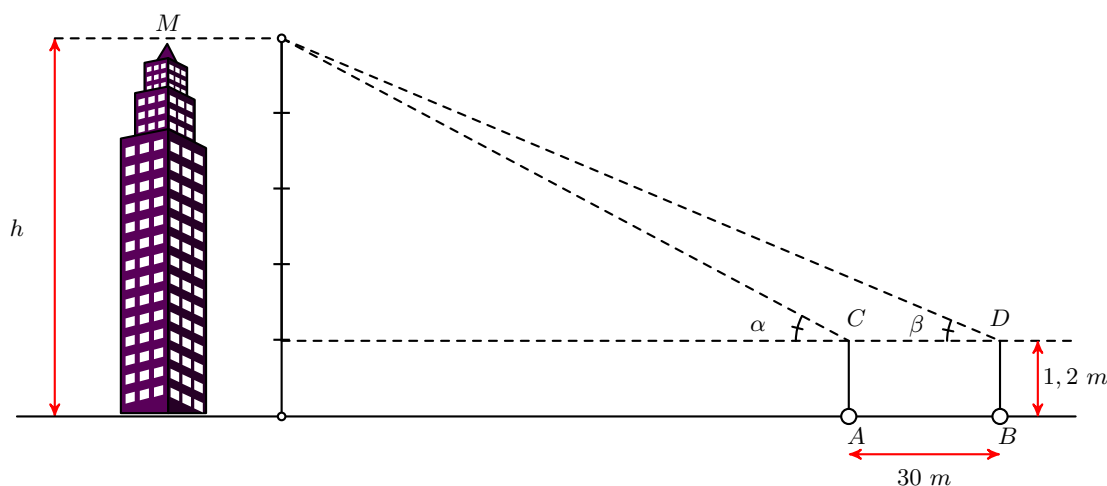
Câu 22. Để đo chiều cao tòa tháp người ta dùng dụng cụ đo góc có chiều cao 1,2 m đặt tại hai vị trí trên mặt đất cách nhau một khoảng $AB = 30$ m. Tại vị trí A và B góc đo thu được so với phương ngang lần lượt là $\alpha = 65^\circ$; $\beta = 50^\circ$ (hình minh họa). Chiều cao h của tòa tháp (từ điểm M tới mặt đất) là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

A 78,2.

B 75,6.

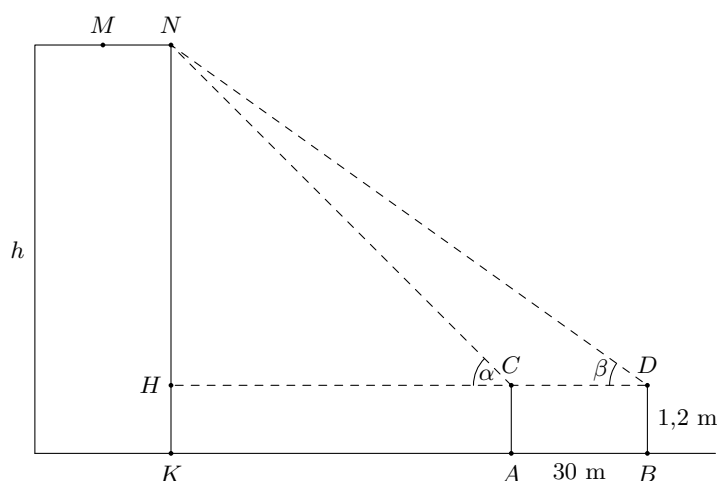
C 80,1.

D 81,7.



Lời giải.

Gọi điểm N , H , K như hình vẽ.



Xét tam giác vuông NCH vuông tại $H \Rightarrow \tan \alpha = \frac{NH}{CH} \Rightarrow CH = \frac{NH}{\tan 65^\circ} = \frac{h - 1,2}{\tan 65^\circ}$.
 Xét tam giác vuông NDH vuông tại $H \Rightarrow \tan \beta = \frac{NH}{DH} \Rightarrow DH = \frac{NH}{\tan 50^\circ} = \frac{h - 1,2}{\tan 50^\circ}$.

Vì $DH = CH + CD$ nên

$$\frac{h - 1,2}{\tan 50^\circ} = \frac{h - 1,2}{\tan 65^\circ} + 30 \Leftrightarrow h \left(\frac{1}{\tan 50^\circ} - \frac{1}{\tan 65^\circ} \right) = \frac{1,2}{\tan 50^\circ} - \frac{1,2}{\tan 65^\circ} + 30 \Leftrightarrow h \approx 81,7.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = \frac{x^2}{2}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 1 , 3

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{x^4}{4} \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0. \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = \frac{x^2}{2}$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left| \sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right| dx \\ &= \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6} \right) \bigg|_0^2 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2^3}{6} \\ &= \frac{4}{3} \approx 1,3. \end{aligned}$$

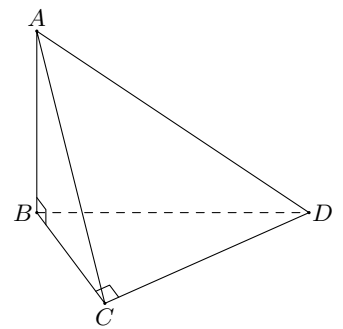
Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) và tam giác BCD vuông tại C . Biết rằng $AB = BC = 2a$. Khoảng cách từ điểm B tới mặt phẳng (ACD) bằng bao nhiêu?

A $a\sqrt{2}$.

B $a\sqrt{3}$.

C a .

D $\frac{3a}{2}$.



Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H .

Ta có $CD \perp BC$ và $CD \perp AB$ (do $AB \perp (BCD)$)

$\Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp BH$ hay $BH \perp CD$.

Mặt khác $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (ACD)$.

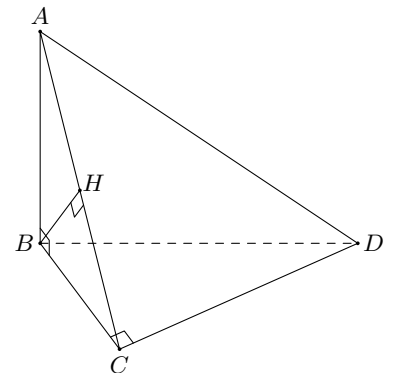
Suy ra khoảng cách từ điểm B tới mặt phẳng (ACD) là BH .

Vì tam giác ABC vuông cân tại B nên H là trung điểm của AC .

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2 \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$.

Vậy khoảng cách từ điểm B tới mặt phẳng (ACD) bằng $a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án **A** □

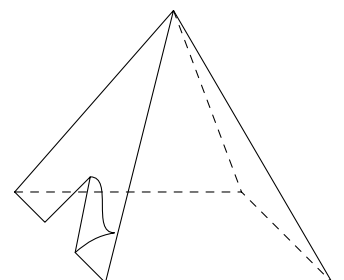
Câu 25. Một chiếc lều cắm trại được thiết kế có dạng hình chóp tứ giác đều với thể tích là 6 m^3 . Bốn mặt bên của lều được may bằng vải bạt (hình minh họa). Để diện tích vải bạt cần dùng là nhỏ nhất, thì độ dài cạnh đáy gần nhất với giá trị nào sau đây?

A 2,52 m.

B 2,94 m.

C 3,12 m.

D 3,26 m.



Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp đều thỏa mãn bài.

Gọi O là tâm của $ABCD$, M là trung điểm AB và x (m) là độ dài cạnh đáy.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp là

$$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot SO \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot SO \Leftrightarrow SO = \frac{18}{x^2}.$$

Xét tam giác SOM vuông tại O

$$\Rightarrow SM^2 = SO^2 + OM^2 = \frac{324}{x^4} + \frac{x^2}{4} \Rightarrow SM = \sqrt{\frac{324}{x^4} + \frac{x^2}{4}}.$$

Diện tích vải bạt cần dùng là

$$S = 4 \cdot S_{\triangle SAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 2x \cdot \sqrt{\frac{324}{x^4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{1296}{x^2} + x^4}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{1296}{x^2} + x^4 = \frac{648}{x^2} + \frac{648}{x^2} + x^4 \geq 3\sqrt[3]{\frac{648}{x^2} \cdot \frac{648}{x^2} \cdot x^4} = 3\sqrt[3]{419904}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{648}{x^2} = x^4 \Leftrightarrow x^6 = 648 \Rightarrow x \approx 2,94$.

Vậy để diện tích vải bạt cần dùng là nhỏ nhất thì độ dài cạnh đáy gần nhất với 2,94.

Chọn đáp án (B) □

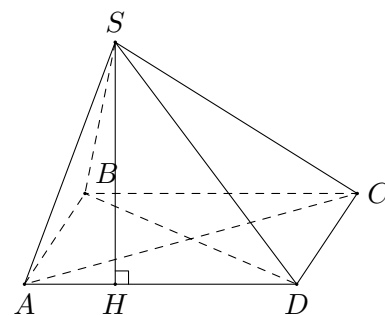
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, chân đường cao hình chóp là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $DH = 2AH$, góc giữa SD và mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng bao nhiêu?

A $\frac{3a}{4}$.

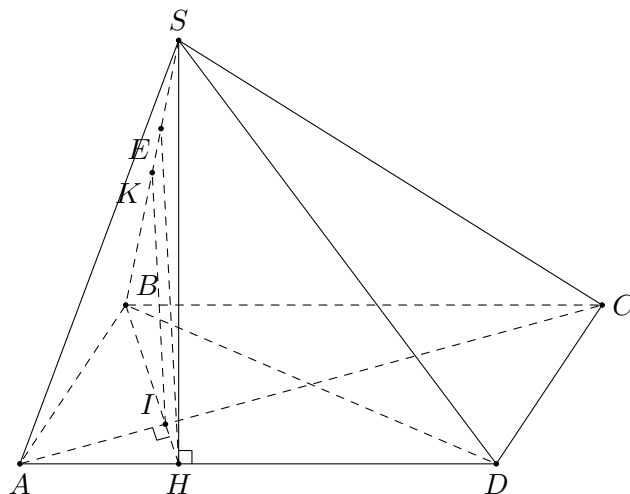
B $\frac{a}{2}$.

C $\frac{3a}{2}$.

D $\frac{a}{4}$.



Lời giải.



Gọi I là giao điểm của BH với AC .

Xét $\triangle ABH$ vuông tại A có $\tan \widehat{AHB} = \frac{AB}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AHB} = 60^\circ$.

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có $\tan \widehat{DAC} = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{a}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{DAC} = 30^\circ$.

$\triangle AIH$ có $\widehat{AHB} + \widehat{DAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{AIH} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BH$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BH \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBH)$.

Trong $\triangle SBH$, kẻ $IK \perp SB$, ta có IK là đoạn vuông góc chung của SB và AC , do đó $d(SB, AC) = IK$.

Ta có $(SD, (ABCD)) = \widehat{SDH} = 60^\circ$.

$\triangle SHD$ vuông tại H nên $SH = DH \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2a$.

$\triangle BAH$ vuông tại A nên $BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle SBH$ kẻ $HE \perp SB$, ta có $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{1}{a^2}$.

Suy ra $HE = a$.

$\triangle ABH$ vuông tại A , đường cao AI nên $\frac{BI}{BH} = \frac{BI \cdot BH}{BH^2} = \frac{BA^2}{BH^2} = \frac{a^2}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$.

$\triangle BIK \sim \triangle BIE$ nên $\frac{IK}{HE} = \frac{BI}{BH} = \frac{3}{4} \Rightarrow IK = \frac{3}{4}HE = \frac{3a}{4}$.

Vậy $d(SB, AC) = IK = \frac{3a}{4}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \tan x + \cot x)^2 dx = a + b\sqrt{3} + c\pi$ (*). Biết rằng, tồn tại duy nhất bộ ba số hữu tỉ a, b, c

thỏa mãn (*). Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng bao nhiêu (nhập đáp án vào ô trống)?

Đáp án: 2 , 5 8

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \tan x + \cot x)^2 dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (4 \tan^2 x + 4 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx \\ &= (4 \tan x - \cot x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 3 + \frac{-1}{3} \cdot \sqrt{3} + \frac{-1}{12} \cdot \pi \end{aligned}$$

Vậy $a = 3, b = \frac{-1}{3}, c = \frac{-1}{12}$. Do đó $a + b + c = \frac{31}{12} \approx 2,58$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi P là trung điểm của OD , điểm I thuộc cạnh SD sao cho đường thẳng PI song song mặt phẳng (SBC) . Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$.

(A) $\frac{5}{2}$.

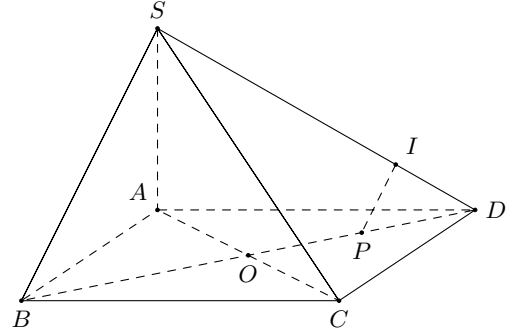
(B) $\frac{7}{2}$.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \begin{cases} (SBD) \cap (SBC) = SB \\ IP \subset (SBD) \\ IP \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow IP \parallel SB. \\ \text{Ta có } & \frac{SI}{ID} = \frac{BP}{PD} = 3. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 2)$, $B(4; 1)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$. Tính bán kính đường tròn (C) (nhập đáp án vào ô trống). Đáp án:

Lời giải.

Vì tâm I của đường tròn thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$ nên $I(a; 2a - 5)$.

Vì đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 2)$, $B(4; 1)$ nên $AI = BI$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \sqrt{(a-1)^2 + (2a-5-2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (2a-5-1)^2} \\ \Leftrightarrow & a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 28a + 49 = a^2 - 8a + 16 + 4a^2 - 24a + 36 \\ \Leftrightarrow & 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Suy ra $I(1; -3)$, $R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2+3)^2} = 5$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -1; -1)$, $B(-1; 2; 4)$. Điểm M thuộc tia Ox và MA vuông góc với MB . Tìm hoành độ điểm M (nhập đáp án vào ô trống). Đáp án:

Lời giải.

Vì M thuộc tia Ox nên $M(a; 0; 0)$, $a > 0$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-a; -1; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (-1-a; 2; 4)$.

MA vuông góc với MB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow -a(-1-a) - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 & (\text{loại}) \\ a = 2 & (\text{thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy $M(2; 0; 0)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz + 3 = 0$ với a, b, c là các số thực. Tổng $a + b + c$ là

A -2.

B -4.

C 2.

D 4.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của điểm A trên d và K là hình chiếu của điểm A trên (P) .

Vì $H \in d$ nên ta giả sử $H(1 + 2t; t; 2 + 2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (2t-1; t-5; 2t-1)$ và $\vec{n}_P = (a; b; c)$.

Vì $AK \perp (P)$ nên $AK \perp HK$, do đó $\triangle AKH$ vuông tại K . Từ đây suy ra $AK \leq AH$.

Hơn nữa, vì AH cố định nên khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là độ dài của đoạn AK đạt GTLN bằng độ dài của AH khi K trùng với H .

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d$ nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 & \Leftrightarrow 2(2t-1) + 1(t-5) + 2(2t-1) = 0 \\ & \Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$.

Khi K trùng H thì $AH \perp (P)$, do đó, mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AH}$ và đi qua điểm $(1; 0; 2) \in d$ nên có phương trình là

$$1(x-1) - 4(y-0) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 4y - z + 3 = 0.$$

Đối chiếu với giả thiết ta suy ra $(a; b; c) = (-1; 4; -1)$, do đó $a + b + c = 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ và các điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$. Mặt

phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với AB có phương trình là

A $x + 2y - z = 0$.

B $x - y + z - 1 = 0$.

C $x + y - z - 3 = 0$.

D $x + 2y - z - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}_d = (-1; 2; 3)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$.

Theo giả thiết, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với AB nên $\begin{cases} \vec{n}_P \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_P \perp \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Do đó, một véc-tơ pháp tuyến của (P) được xác định bởi:

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_d; \overrightarrow{AB}] = (2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1); 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1); (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1) = (1; 2; -1).$$

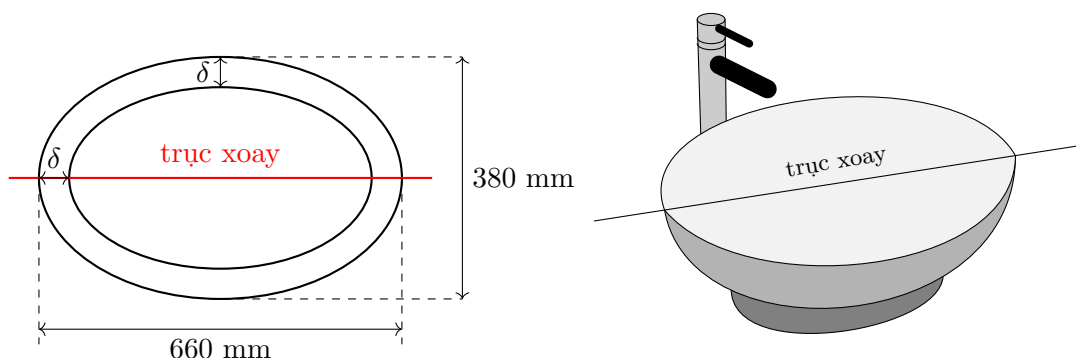
Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên điểm $M(2; 1; 0)$ trên d cũng thuộc mặt phẳng (P) .

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 1; 0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 2; -1)$ nên có phương trình là

$$1(x-2) + 2(y-1) - z = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 4 = 0.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 33. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,... Một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi elip quay quanh một trục (hình minh họa). Thông số kỹ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm, giả thiết bồn rửa có độ dày đồng đều δ là 20 mm.



Thể tích chứa nước của bồn rửa **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

A $18,66 \text{ dm}^3$.

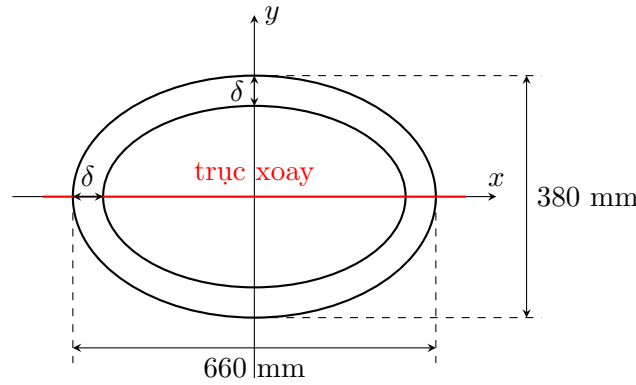
B $18,76 \text{ dm}^3$.

C $18,86 \text{ dm}^3$.

D $18,96 \text{ dm}^3$.

Lời giải.

Đặt hình vẽ trên vào hệ trục tọa độ Oxy như sau.



Khi đó, Elip bên trong có trục lớn bằng 620 mm và trục bé bằng 340 mm nên có phương trình

$$\frac{x^2}{310^2} + \frac{y^2}{170^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 170^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{310^2}\right).$$

Thể tích bồn chứa nước là

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \int_{-310}^{310} \left(170^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{310^2}\right)\right) dx = 18763685 \text{ mm}^3 \approx 18,76 \text{ dm}^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$; $d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 . Biết Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; -1)$. Tổng $a^3 + b^3$ bằng

(A) -8.

(B) -7.

(C) 7.

(D) 8.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d_2 có dạng:
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}.$$

Gọi M là giao điểm của Δ với d_2 .

Vì $M \in d_2$ nên tọa độ của điểm M có dạng $(2 + 3t; 2t; t)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm A và điểm M nên có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}$.

Theo giả thiết, vì Δ vuông góc với d_1 nên ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_{d_1} &= 0 \Leftrightarrow (3t + 1; 2t - 2; t - 3) \cdot (1; 1; 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3t + 1 + 2t - 2 + 2t - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $\overrightarrow{AM} = (4; 0; -2) = 2(2; 0; -1)$.

Vậy đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $(2; 0; -1)$.

Đối chiếu với giả thiết ta suy ra $a = 2$, $b = 0$ và $a^3 + b^3 = 8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; -2; 1)$ và trọng tâm G , gọi M là trung điểm của cạnh BC . Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z - 1 = 0$. Đường thẳng AM có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $(1; 2; 1)$.

(B) $(2; 1; 1)$.

(C) $(1; -2; 1)$.

(D) $(1; 2; 2)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d có dạng:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Vì điểm G thuộc đường thẳng d nên tọa độ điểm G có dạng $(2 + t; -2 + 2t; -1 + 2t)$.

Giả sử $M(x; y; z)$, theo tính chất trọng tâm tam giác, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow (x - 2; y + 2; z - 1) = \frac{3}{2}(t; 2t; 2t - 2) \\ &\Leftrightarrow (x - 2; y + 2; z - 1) = \left(\frac{3}{2}t; 3t; 3t - 3\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = 3t - 2 \\ z = 3t - 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra, tọa độ điểm M có dạng $\left(\frac{3}{2}t; 3t - 2; 3t - 2\right)$.

Vì điểm M thuộc mặt phẳng (P) nên ta có:

$$\frac{3}{2}t + 2(3t - 2) - 3(3t - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $M(1; 0; 0)$, do đó $\overrightarrow{AM} = (-1; 2; -1) = -(1; -2; 1)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - z + 4 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi 6π . Phương trình mặt cầu (S) là

A $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 15.$

B $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9.$

C $(x + 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 15.$

D $(x + 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9.$

Lời giải.

Đường tròn giao tuyến có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r = 3$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là

$$d(I, (P)) = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}.$$

Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R , khi đó

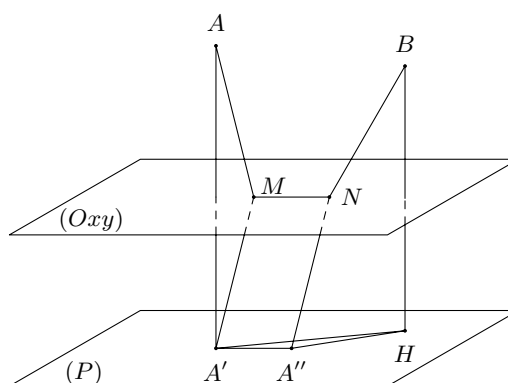
$$R^2 = [d(I, (P))]^2 + r^2 = 15 \Rightarrow R = \sqrt{15}.$$

Phương trình của (S) : $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 15.$

Chọn đáp án **A** □

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(4; 5; 1)$. Các điểm M, N di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho độ dài MN bằng 1. Tổng $AM + BN$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu? Đáp án: 5

Lời giải.



Dễ thấy A và B nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) , suy ra $A'(1; 1; -2)$.

Dựng hình bình hành $A'MNA''$, ta có $A'A'' \parallel MN$ và $A'A'' = MN = 1$.

Do $M, N \in (Oxy)$ nên $A'A''$ nằm trên mặt phẳng $(P): z = -2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P) , suy ra $H(4; 5; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{A'H} = (3; 4; 0) \Rightarrow A'H = 5$ và $\overrightarrow{BH} = (0; 0; -3) \Rightarrow BH = 3$.

Mặt khác $A''H \geq |A'H - A'A''| = A'H - A'A'' = 4$.

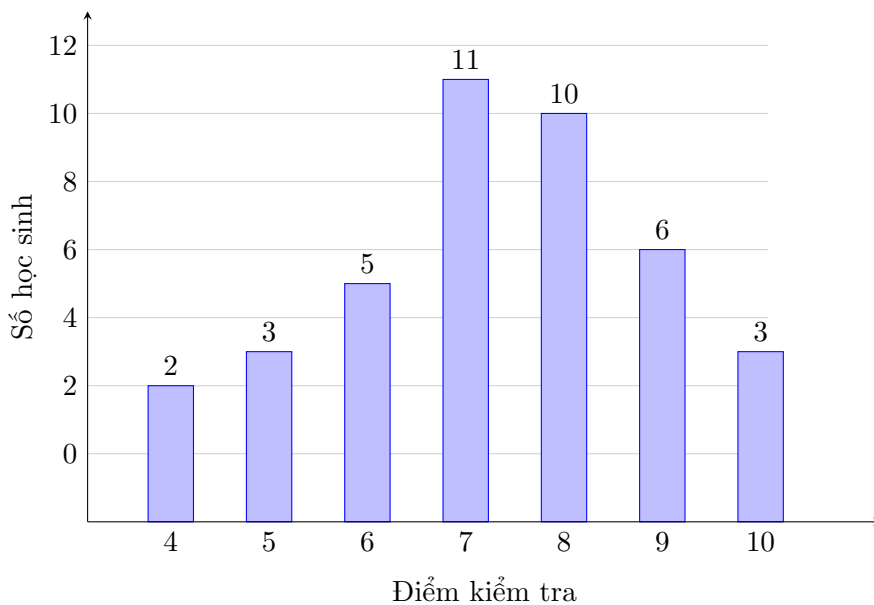
Ta có

$$\begin{aligned} AM + BN = A'M + BN &= A''N + BN \\ &\geq A''B = \sqrt{BH^2 + A''H^2} \\ &\geq \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng 5 khi và chỉ khi

- ☑ A', A'', H là 3 điểm thẳng hàng; A'' nằm giữa H và A' ;
- ☑ N là giao điểm của $A''B$ và mặt phẳng (Oxy) ;
- ☑ M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $A'A''NM$.

Câu 38. Cho biểu đồ kết quả kiểm tra kết quả kiểm tra môn Toán của một lớp học.



Số trung bình của mẫu số liệu ở biểu đồ bằng bao nhiêu? (nhập đáp án vào ô trống).

Đáp án: ,

Lời giải.

Số trung bình của mẫu số liệu ở biểu đồ là

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 11 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 6 + 10 \cdot 3}{2 + 3 + 5 + 11 + 10 + 6 + 3} = 7,35.$$

Câu 39. Cô giáo có 12 phần quà gồm 4 phần loại **I** và 8 phần loại **II** được đựng trong 12 hộp kín giống nhau. Cô chia đều cho 3 bạn, mỗi bạn 4 phần quà. Xác suất để mỗi bạn đều nhận được cả hai loại quà là

A $\frac{19}{3150}$.

B $\frac{19}{1050}$.

C $\frac{32}{165}$.

D $\frac{32}{55}$.

 Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^4 \cdot C_8^4 = 34\,650$.

Số cách chia 12 phần quà cho 3 bạn, sao cho bạn nào cũng nhận được cả hai loại quà là

$$(C_4^2 \cdot C_8^2) \cdot (C_2^1 \cdot C_6^3) \cdot \frac{3!}{2!} = 20\,160 \text{ (cách)}.$$

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{20\,160}{34\,650} = \frac{32}{55}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Thống kê chiều cao các cây bạch đàn trong vườn ươm của một lâm trường theo bảng số liệu sau

Chiều cao (cm)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)	[120; 130)
Số cây	150	340	710	750	490	260

Trung vị của mẫu số liệu là

(A) 100.

(B) 102.

(C) 105.

(D) 110.

 Lời giải.

Cỡ mẫu là $n = 2700$.

Nhóm chứa trung vị là nhóm [100; 110).

Trung vị của mẫu số liệu là

$$Q_2 = 100 + \frac{\frac{2700}{2} - (150 + 340 + 710)}{750} \cdot (110 - 100) = 102.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 41. Hai xạ thủ X, Y độc lập với nhau bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của X, Y tương ứng là 0,7; 0,8. Xác suất để có duy nhất một xạ thủ bắn trúng mục tiêu là

(A) 0,24.

(B) 0,38.

(C) 0,50.

(D) 0,56.

 Lời giải.

☑ Ta gọi $P(X)$ là xác suất bắn trúng của xạ thủ X suy ra $P(X) = 0,7$. Tương tự thì $P(Y) = 0,8$.

☑ Gọi A là biến cố chỉ có duy nhất một xạ thủ bắn trúng hay $A = X\bar{Y} + \bar{X}Y$.

☑ Từ đó ta tính được $P(A) = P(X) \cdot P(\bar{Y}) + P(\bar{X}) \cdot P(Y) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 42. Trong một khu dân cư, tỉ lệ gia đình nuôi chó là 0,2; tỉ lệ gia đình nuôi mèo là 0,25; tỉ lệ gia đình nuôi cả chó và mèo là 0,05. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong khu dân cư đó, xác suất để gia đình được chọn không nuôi con vật nào trong hai con vật chó và mèo **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

(A) 0,50.

(B) 0,45.

(C) 0,55.

(D) 0,60.

 Lời giải.

☑ Gọi A là biến cố: "Hộ gia đình nuôi chó"

☑ B là biến cố: "Hộ gia đình nuôi mèo"

☑ Khi đó: $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,25$; $P(A \cap B) = 0,05$.

- ☑ Áp dụng quy tắc cộng xác suất, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,25 - 0,05 = 0,4$$

- ☑ Xác suất để gia đình được chọn không nuôi con vật nào trong hai con vật chó và mèo là:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Để đánh giá mức độ ổn định của một loại pin điện, người ta thống kê thời gian sử dụng liên tục của pin khi được sạc đầy điện theo bảng mẫu số liệu sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[5,0; 5,5)	[5,5; 6,0)	[6,0; 6,5)	[6,5; 7,0)	[7,0; 7,5)	[7,5; 8,0)
Số pin	4	6	11	14	8	7

Hãy cho biết độ lệch chuẩn của mẫu số liệu **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

(A) 0,518.

(B) 0,529.

(C) 0,720.

(D) 1,120.

Lời giải.

- ☑ Ta có bảng tần số ghép nhóm chứa giá trị đại diện như sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[5,0; 5,5)	[5,5; 6,0)	[6,0; 6,5)	[6,5; 7,0)	[7,0; 7,5)	[7,5; 8,0)
Giá trị đại diện	5,25	5,75	6,25	6,75	7,25	7,75
Số pin	4	6	11	14	8	7

- ☑ Cỡ mẫu là: $n = 4 + 6 + 11 + 14 + 8 + 7 = 50$.

- ☑ Số trung bình của mẫu số liệu là:

$$\bar{x} = \frac{5,25 \cdot 4 + 5,75 \cdot 6 + 6,25 \cdot 11 + 6,75 \cdot 14 + 7,25 \cdot 8 + 7,75 \cdot 7}{50} = 6,62.$$

- ☑ Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s^2 = \frac{m_1(x_1 - \bar{x})^2 + m_2(x_2 - \bar{x})^2 + m_3(x_3 - \bar{x})^2 + m_4(x_4 - \bar{x})^2 + m_5(x_5 - \bar{x})^2 + m_6(x_6 - \bar{x})^2}{n} = 0,5181.$$

- ☑ Vậy độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là:

$$s = \sqrt{s^2} \approx 0,720.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 44. Cho các biến cố A và B thỏa mãn $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,75$ và $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$. Khi đó $P(A | B)$ bằng:

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

- ☑ Vì $\bar{A}\bar{B}$ và AB là hai biến cố xung khắc và $\bar{A}\bar{B} \cup AB = A$ nên theo tính chất của xác suất, ta có:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = 0,45 - 0,3 = 0,15.$$

- ☑ Theo công thức xác suất có điều kiện, ta có:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,75} = \frac{1}{5}.$$

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 45. Trong một báo cáo, xét nghiệm Mammography người mắc bệnh ung thư vú cho kết quả dương tính với xác suất là 90%, người không mắc bệnh ung thư vú cho kết quả âm tính với xác suất 97%. Nghiên cứu dịch tễ học chỉ ra tỉ lệ mắc ung thư vú của phụ nữ trong độ tuổi 55 là 1%. Một phụ nữ 55 tuổi, không có tiền sử ung thư vú thực hiện xét nghiệm Mammography hai lần độc lập nhau đều nhận được kết quả là dương tính. Xác suất người phụ nữ đó mắc bệnh ung thư vú **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

(A) 90%.

(B) 91%.

(C) 98%.

(D) 99%.

Lời giải.

☑ Xét hai biến cố

☑ X : "Người phụ nữ mắc bệnh ung thư vú".

☑ Y : "Kết quả xét nghiệm của người phụ nữ là dương tính".

☑ Do người phụ nữ đó 55 tuổi nên $P(X) = 1\% = 0,01 \Rightarrow P(\bar{X}) = 1 - P(X) = 0,99$.

☑ Khi đó:

— $P(X | Y)$ là xác suất người phụ nữ bị mắc bệnh ung thư vú khi có kết quả xét nghiệm dương tính.

— $P(Y | X)$ là xác suất người phụ nữ có kết quả xét nghiệm là dương tính với điều kiện có mắc bệnh $\Rightarrow P(Y | X) = 90\% = 0,9$.

— $P(Y | \bar{X})$ là xác suất người phụ nữ có kết quả xét nghiệm là dương tính với điều kiện không mắc bệnh $\Rightarrow P(Y | \bar{X}) = 1 - 97\% = 0,03$.

☑ Áp dụng công thức Bayes, ta có xác suất người phụ nữ bị mắc bệnh ung thư vú khi có kết quả xét nghiệm dương tính lần thứ nhất là:

$$P(X | Y) = \frac{P(X).P(Y | X)}{P(X).P(Y | X) + P(\bar{X}).P(Y | \bar{X})} = \frac{0,01.0,9}{0,01.0,9 + 0,99.0,03} = \frac{10}{43}$$

☑ Vì người phụ nữ xét nghiệm 2 lần đều ra kết quả dương tính nên ở lần thứ hai, tỉ lệ mắc ung thư vú của người phụ nữ này được chuyển thành $P(X) = \frac{10}{43}$.

☑ Do đó hoàn toàn tương tự thì xác suất người phụ nữ bị mắc bệnh ung thư vú khi có kết quả xét nghiệm dương tính lần thứ hai là:

$$P(X | Y) = \frac{P(X).P(Y | X)}{P(X).P(Y | X) + P(\bar{X}).P(Y | \bar{X})} = \frac{\frac{10}{43}.0,9}{\frac{10}{43}.0,9 + \left(1 - \frac{10}{43}\right).0,03} = \frac{100}{111} \approx 90\%$$

☑ Vậy xác suất người phụ nữ bị mắc bệnh ung thư vú gần với 90%.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 46. Trong một trò chơi điện tử có 30 con cá. Các con cá có thể ăn được nhau, cá được coi là no nếu nó ăn đủ 3 con cá khác (3 con này có thể no hoặc chưa no). Khi có một con cá no thì người chơi được cộng một điểm. Khi đã no thì cá không ăn thêm nữa. Hỏi người chơi có thể được cộng tối đa bao nhiêu điểm?

(A) 7.

(B) 8.

(C) 9.

(D) 10.

Lời giải.

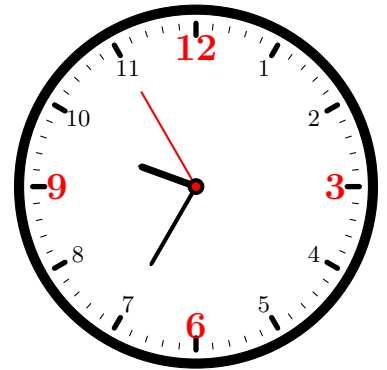
☑ Đầu tiên, cứ 3 con đối thì sẽ có 1 con cá no. Khi đó người chơi được 1 điểm và có 4 con cá không thể ăn thêm.

- ☑ Do vậy, 9 con cá đối đầu tiên thì tạo ra 1 bộ 3 con cá no số 1. Khi đó người chơi có 3 điểm và trò chơi còn 18 con cá đối và 3 con cá no.
- ☑ Lần 2, bộ 6 con cá đối tạo 3 con cá no số 1 tạo ra 1 bộ 3 con cá no số 2. Khi đó người chơi được thêm 3 điểm và trò chơi còn 9 con cá đối và 3 con cá no.
- ☑ Lần 3, bộ 6 con cá đối và 3 con cá no bị 3 con cá đối ăn thịt thì người chơi được thêm 3 điểm và trong trò chơi chỉ còn 3 con cá no.
- ☑ Vậy người chơi được tối đa $3 + 3 + 3 = 9$ điểm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Lúc 6 giờ 00 sáng kim phút và kim giờ của đồng hồ tạo thành hai tia đối nhau. Biết rằng sau ít nhất x phút thì kim phút và kim giờ lại tạo thành hai tia đối nhau. Hỏi x gần nhất với giá trị nào sau đây?

- (A) 65,3. (B) 65,5. (C) 65,7. (D) 65,9.



Lời giải.

- ☑ Do kim phút di chuyển nhanh hơn kim giờ nên dễ dàng thấy trong khoảng từ $6h - 7h$, 2 kim phút và kim giờ không thể tạo thành 2 tia đối nhau.
Ta xét từ thời điểm $7h$, 2 kim tạo với nhau một góc 150° . Khi kim giờ quay được một góc a độ thì kim phút quay được một góc $12a$ độ.
- ☑ Khi đó ta có phương trình $150 - a + 12a = 180 \Leftrightarrow a = \frac{30}{11}$.
- ☑ Vậy $x = 60 + \frac{12a}{360} + 60 \approx 65,5$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Vào ngày 31 tháng 12 hàng năm người ta thực hiện thống kê số lượng chuột túi xám trên một hòn đảo. Năm 2018 thống kê được số chuột túi xám là 400 con, năm 2022 số chuột túi xám là 600 con. Giả sử, số lượng chuột túi xám tính được xác định xấp xỉ theo hàm số mũ $P = P_0 e^{kt}$, trong đó k là một hằng số, P_0 là số chuột túi xám tại thời điểm gốc năm 2018 ($t = 0$), P là số chuột túi xám tại thời điểm t tính từ gốc (t tính theo đơn vị năm). Số chuột túi xám trên đảo năm 2025:

- (A) 735. (B) 800. (C) 813. (D) 900.

Lời giải.

- ☑ Theo bài ra ta có: $600 = 400e^{4k} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4}$.
- ☑ Do đó, $P = 400e^{\frac{\ln \frac{3}{2}}{4}t}$.
- ☑ Vậy Số chuột túi xám trên đảo năm 2025 là $P_7 = 400e^{\frac{\ln \frac{3}{2}}{4} \cdot 7} \approx 813$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 49. Vào ngày 31 tháng 12 hàng năm người ta thực hiện thống kê số lượng chuột túi xám trên một hòn đảo. Năm 2018 thống kê được số chuột túi xám là 400 con, năm 2022 số chuột túi xám là 600 con. Giả sử, số lượng chuột túi xám tính được xác định xấp xỉ theo hàm số mũ $P = P_0 e^{kt}$, trong đó k là một hằng số, P_0 là số chuột túi xám tại thời điểm gốc năm 2018 ($t = 0$), P là số chuột túi xám tại thời điểm t tính từ gốc (t tính theo đơn vị năm). Vào năm nào số chuột túi xám ở trên đảo tăng gấp đôi so với năm 2022?

A 2028.

B 2029.

C 2034.

D 2033.

Lời giải.

☑ Theo bài ra ta có: $1200 = 400e^{kt} \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{k}$ mà $k = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4}$.

Nên $t \approx 10,8$.

☑ Vậy vào năm $2018 + 10 = 2028$ số chuột túi xám ở trên đảo tăng gấp đôi so với năm 2022.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 50. Vào ngày 31 tháng 12 hàng năm người ta thực hiện thống kê số lượng chuột túi xám trên một hòn đảo. Năm 2018 thống kê được số chuột túi xám là 400 con, năm 2022 số chuột túi xám là 600 con. Giả sử, số lượng chuột túi xám tính được xác định xấp xỉ theo hàm số mũ $P = P_0 e^{kt}$, trong đó k là một hằng số, P_0 là số chuột túi xám tại thời điểm gốc năm 2018 ($t = 0$), P là số chuột túi xám tại thời điểm t tính từ gốc (t tính theo đơn vị năm). Trên đảo, ngoài loài chuột túi xám còn có loài chuột túi đỏ sinh sống, theo thống kê ở thời điểm 31 tháng 12 năm 2018 số lượng chuột túi đỏ là 1200 con. Biết số lượng chuột túi đỏ giảm 5% mỗi năm. Vào năm nào thì số chuột túi xám sẽ gấp đôi số chuột túi đỏ?

A 2028.

B 2030.

C 2031.

D 2032.

Lời giải.

☑ Theo bài ra ta có: $2 \cdot 1200 = (1 - 5\%)^t = 400e^{kt}$ mà $k = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4} \Rightarrow \ln(6 \cdot 0,95^t) = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4} \cdot t$
 $\Rightarrow \ln(6) + \ln(0,95^t) = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4} \cdot t \Rightarrow \ln(6) + t \cdot \ln(0,95) = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4} \cdot t \Rightarrow t \approx 11,73$.

☑ Vậy $2018 + 11 \approx 2030$.

Chọn đáp án (B) ☐

BẢNG ĐÁP ÁN

1. 2 5	2. B	3. 5 5 7 5	4. 5	5. C
6. B	7. 4	8. B	9. 2 , 6 7	10. A
11. C	12. C	13. A	14. A	15. C
16. C	17. C	18. 3	19. C	20. 1
21. C	22. D	23. 1 , 3	24. A	25. B
26. A	27. 2 , 5 8	28. C	29. 5	30. 2
31. C	32. D	33. B	34. D	35. C
36. A	37. 5	38. 7 , 3 5	39. D	40. B

41.	B	42.	D	43.	C	44.	A	45.	A
46.	C	47.	B	48.	C	49.	A	50.	B