

Câu 1. Trong không gian cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d : \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

(A) $19x - 17y - 20z - 77 = 0$.

(B) $19x - 17y - 20z + 34 = 0$.

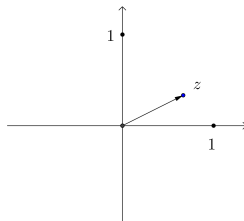
(C) $31x - 8y - 5z + 91 = 0$.

(D) $31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

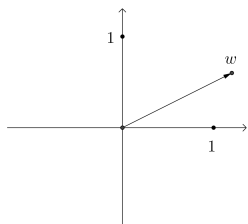
Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng lớn nhất.

(A) $\vec{u} = (4; -5; -2)$. (B) $\vec{u} = (1; 0; 2)$. (C) $\vec{u} = (1; 1; -4)$. (D) $\vec{u} = (8; -7; 2)$.

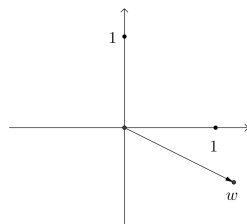
Câu 3. Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng như hình vẽ.



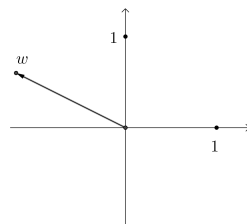
Hỏi hình nào biểu diễn cho số phức $w = \frac{i}{z}$



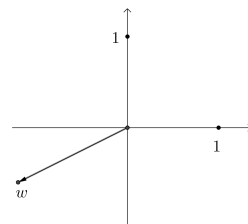
(A)



(B)



(C)



(D)

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 7$. Để diện tích elip (E) gấp 7 lần diện tích hình tròn (C) khi đó

(A) $ab = 7$.

(B) $ab = 7\sqrt{7}$.

(C) $ab = \sqrt{7}$.

(D) $ab = 49$.

Câu 5. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ.

(A) $m = \pm 1$.

(B) $m = \pm \frac{1}{2}$.

(C) $m = \frac{1}{2}$.

(D) $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $y = |x^2 - 4x + 3|; y = x + 3$

(A) $\frac{107}{6}$.

(B) $\frac{109}{6}$.

(C) $\frac{109}{7}$.

(D) $\frac{109}{8}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó

- (A)** $a + b + c = 5$. **(B)** $a + b + c = 6$. **(C)** $a + b + c = 7$. **(D)** $a + b + c = 8$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{\pi} + \cos^2 x$. Tìm tất cả các giá trị a để $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F(0) = \frac{1}{4}, F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

- (A)** $\pi - 2$. **(B)** $\pi - 1$. **(C)** $\frac{\pi}{2} - 1$. **(D)** $\frac{\pi}{2} - 2$.

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** có tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang).

- (A)** $y = \frac{x + 2^{2017}}{x - \log_2 2017}$. **(B)** $y = 2^{x+2017}$. **(C)** $y = \log_2(x + 2017)$. **(D)** $y = \sin(x + 2017)$.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- (A)** Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ có trục đối xứng là trục Ox .
(B) Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có tiệm cận đứng $y = 1$.
(C) Đồ thị hàm số $y = x^3$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ.
(D) Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A)** $\vec{u}(1; -1; -3)$. **(B)** $\vec{u}(-2; -1; -2)$. **(C)** $\vec{u}(-2; 1; -2)$. **(D)** $\vec{u}(2; 1; 2)$.

Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1; +\infty)$?

- (A)** $y = \frac{x-1}{x^2+2}$. **(B)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. **(C)** $y = \log_3 x$. **(D)** $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Câu 13. Trong các hàm số sau, hàm số nào có cực trị?

- (A)** $y = e^x$. **(B)** $y = \log_\pi x$. **(C)** $y = \frac{x+2}{x-3}$. **(D)** $y = |3x-1|$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$ 0 $+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A)** Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$. **(B)** Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
(C) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. **(D)** Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 15. Tìm m để đồ thị hàm số $y = (x - m)(2x^2 + x - 3m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

☐ A $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. ☐ B $\begin{cases} m \neq 0, m \neq 1 \\ m < \frac{1}{24} \end{cases}$. ☐ C $\begin{cases} m \neq 0, m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{24} \end{cases}$. ☐ D $m > -\frac{1}{24}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác $\triangle OAB$ vuông tại A hoặc B .

☐ A $m = 1 \pm \sqrt{5}$. ☐ B $m = 1 \pm \sqrt{3}$. ☐ C $m = 1 \pm \sqrt{2}$. ☐ D $m = 1 \pm \sqrt{6}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ trong đó $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Tính độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện.

☐ A $\sqrt{\frac{86}{19}}$. ☐ B $\sqrt{\frac{19}{86}}$. ☐ C $\frac{\sqrt{19}}{2}$. ☐ D 11.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Có bao nhiêu mặt cầu tiếp xúc với các mặt của tứ diện?

☐ A 1. ☐ B 4. ☐ C 5. ☐ D Vô số.

Câu 19. Trong không gian ($Oxyz$) cho điểm $M(1; 2; 3)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 3)$. Đường thẳng Δ đi qua M và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B đến Δ lớn nhất có phương trình là:

☐ A $\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$. ☐ B $\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$.
☐ C $\Delta: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{2}$. ☐ D $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$.

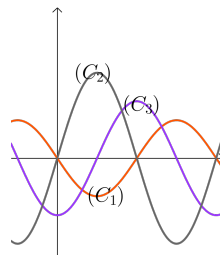
Câu 20. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

☐ A $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. ☐ B $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.
☐ C $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. ☐ D $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Câu 21. Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

☐ A Không tồn tại số phức z_0 . ☐ B $|z_0| = 2$.
☐ C $|z_0| = 7$. ☐ D $|z_0| = 3$.

Câu 22. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = \int_0^x f(t) dt$ ở hình dưới. Hãy xác định xem $(C_1), (C_2), (C_3)$ tương ứng là đồ thị của hàm số nào?



☐ A $y = f'(x)$, $y = f(x)$, $y = \int_0^x f(t) dt$. ☐ B $y = f(x)$, $y = \int_0^x f(t) dt$, $y = f'(x)$.
☐ C $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = \int_0^x f(t) dt$. ☐ D $y = \int_0^x f(t) dt$, $y = f'(x)$, $y = f(x)$.

Câu 23. Cho $0 < a < b < 1$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- ☐ A $\log_b a > \log_a b$. ☐ B $\log_a b < 0$. ☐ C $\log_b a < \log_a b$. ☐ D $\log_a b > 1$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0; 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Tính $I = \int_1^0 f'(x) dx$.

- ☐ A $I = 1$. ☐ B $I = 2$. ☐ C $I = -2$. ☐ D $I = 0$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$.

- ☐ A $(0; 1)$. ☐ B $\left(\frac{1}{8}; 1 \right)$. ☐ C $(1; 8)$. ☐ D $\left(\frac{1}{8}; 3 \right)$.

Câu 26. Số tiệm cận ngang của hàm số $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là

- ☐ A 0. ☐ B 1. ☐ C 2. ☐ D 3.

Câu 27. Tìm m để phương trình $m \ln(1 - x) - \ln x = m$ có nghiệm $x \in (0; 1)$

- ☐ A $m \in (0; +\infty)$. ☐ B $m \in (1; e)$. ☐ C $m \in (-\infty; 0)$. ☐ D $m \in (-\infty; -1)$.

Câu 28. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017} dx$.

- ☐ A 0. ☐ B 2. ☐ C -2. ☐ D $\frac{1}{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AC = 7a$, $SA = a\sqrt{7}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- ☐ A $R = a\sqrt{56}$. ☐ B $R = a\sqrt{14}$. ☐ C $R = \frac{a\sqrt{77}}{2}$. ☐ D $R = \frac{7a}{2}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm I của đường tròn giao tuyến của mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 64$ với mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 2y + z + 10 = 0$.

- ☐ A $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3} \right)$. ☐ B $(-2; -2; -2)$. ☐ C $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3} \right)$. ☐ D $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3} \right)$.

Câu 31. Cho hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng 3, chiều cao bằng $6\sqrt{3}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

- ☐ A $9\pi + 36\pi\sqrt{3}$. ☐ B $18\pi + 36\pi\sqrt{3}$. ☐ C $18\pi + 18\pi\sqrt{3}$. ☐ D $6\pi + 36\pi\sqrt{3}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua $A(3; 5; 7)$ và song song với đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

- ☐ A $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$. ☐ B $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$. ☐ C $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$. ☐ D Không tồn tại.

Câu 33. Cho điểm $A(0; 8; 2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S) : (x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 72$ và điểm $B(1; 1; -9)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1; m; n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

- ☐ A $mn = \frac{276}{49}$. ☐ B $mn = -\frac{276}{49}$. ☐ C $m.n = 4$. ☐ D $m.n = -4$.

Câu 34. Cho số phức z có phần thực dương và thỏa: $\bar{z} - \frac{(5 + \sqrt{3}i)}{z} - 1 = 0$. Lúc đó

- ☐ A $|z| = 2$. ☐ B $|z| = 3$. ☐ C $|z| = 4$. ☐ D $|z| = \sqrt{7}$.

Câu 35. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$.

- ☐ A $\sqrt{10}$. ☐ B $2\sqrt{10}$. ☐ C $-3\sqrt{10}$. ☐ D $3\sqrt{10}$.

Câu 36. Giải bất phương trình $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$

- ☐ A $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$. ☐ B $(-4; -3)$. ☐ C $(-4; +\infty)$. ☐ D $(8; +\infty)$.

Câu 37. Giải phương trình $\log_3(x + 2) + \log_9(x + 2)^2 = \frac{5}{4}$

- ☐ A $x = 1$. ☐ B $x = \sqrt[8]{3^5} - 2$. ☐ C $x = \sqrt[4]{3^5} - 2$. ☐ D $x = \sqrt[4]{3} - 2$.

Câu 38. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm

$$(x^2 - 4)(\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x + \dots + \log_{19} x - \log_{20}^2 x) = 0$$

- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C 3. ☐ D 4.

Câu 39. Giả sử tích phân $I = \int_0^4 x \cdot \ln(2x + 1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó:

- ☐ A $b + c = 127075$. ☐ B $b + c = 127073$. ☐ C $b + c = 127072$. ☐ D $b + c = 127071$.

Câu 40. Giả sử số phức $z = -1 + i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \dots + i^{99} - i^{100} + i^{101}$. Lúc đó tổng phần thực và phần ảo của z là

- ☐ A 1. ☐ B $-i$. ☐ C 0. ☐ D i .

Câu 41. Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x + 1}} dx = a + b \cdot \ln 3 + c \cdot \ln 5; a, b, c \in \mathbb{Q}$. Lúc đó:

- ☐ A $a + b + c = \frac{4}{3}$. ☐ B $a + b + c = \frac{5}{3}$. ☐ C $a + b + c = \frac{7}{3}$. ☐ D $a + b + c = \frac{8}{3}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 6)$. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp K của tam giác ABC .

- ☐ A $K(2; 1; 3)$. ☐ B $K(5; 7; 5)$. ☐ C $K\left(\frac{80}{49}; \frac{13}{49}; \frac{135}{49}\right)$. ☐ D $K(-1; -5; 1)$.

Câu 43. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- ☐ A $R = \frac{\sqrt{118}}{4}$.
 ☐ B $R = \frac{\sqrt{118}}{2}$.
 ☐ C $R = \frac{\sqrt{118}}{8}$.
 ☐ D $R = \sqrt{118}$.

Câu 44. Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ và $SA = a\sqrt{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{5}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

- ☐ A $R = \frac{a\sqrt{259}}{7}$.
 ☐ B $R = \frac{a\sqrt{259}}{14}$.
 ☐ C $R = \frac{a\sqrt{259}}{2}$.
 ☐ D $R = \frac{a\sqrt{37}}{14}$.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- ☐ A Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
☐ B Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.
☐ C Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
☐ D Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 1)$.

Câu 46. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 4 - |x|$ và trục hoành Ox là

- ☐ A 0.
 ☐ B 16.
 ☐ C 4.
 ☐ D 8.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(-2; 1)$ và có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

- ☐ A Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
☐ B Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.
☐ C Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
☐ D Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Các mặt bên (SAB) , (SAC) , (SBC) đều cùng với mặt đáy (ABC) một góc 60° và hình chiếu H của S lên (ABC) nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC . Thể tích của khối chóp $S.ABC$

- ☐ A $V_{S.ABC} = 2\sqrt{3}$.
 ☐ B $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}$.
 ☐ C $V_{S.ABC} = 4\sqrt{3}$.
 ☐ D $V_{S.ABC} = 12\sqrt{3}$.

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC . Biết $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $d(AB; CD) = a$. Khi đó độ dài đoạn MN là

- ☐ A $MN = a$ hoặc $MN = a\sqrt{3}$.
 ☐ B $MN = a\sqrt{2}$ hoặc $MN = a\sqrt{3}$.
☐ C $MN = \frac{a}{2}$ hoặc $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 ☐ D $MN = a$ hoặc $MN = a\sqrt{2}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0; 0; 4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu của O lên AM và E là trung điểm OM . Biết đường thẳng DE luôn luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

- ☐ A $R = 2$.
 ☐ B $R = 1$.
 ☐ C $R = 4$.
 ☐ D $R = \sqrt{2}$.

Trong quá trình chép và dán chữ không phải biên soạn thầy Nguyễn Văn Huy có sắp xếp lại thứ tự các câu hỏi để giúp học sinh thuận tiện trong quá trình làm bài. Thay mặt các em học sinh cảm ơn quý thầy cô ra đề, biên tập đề, giải đề, ...

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tiểu $x = 1$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 1)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = (x+2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên. Ta suy ra hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Câu 3. Giải bất phương trình $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$

A. $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$.

B. $(-4; -3)$.

C. $(-4; +\infty)$.

D. $(8; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Tập xác định $D = (-4; 1) \cup 0; +\infty$.

$$\text{Ta có: } \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0.$$

$$\Leftrightarrow -4 < x < -3 \vee x > 8.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ trong đó $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Tính độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện.

A. $\sqrt{\frac{86}{19}}$.

B. $\sqrt{\frac{19}{86}}$.

C. $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

D. 11.

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Ta có.

$$h_D = d(D; (ABC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|}.$$

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3); \overrightarrow{AC} = (4; 0; 6); \overrightarrow{AD} = (-7; -7; 7)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-12; -24; 8); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 308$$

$$\Rightarrow h_D = 11$$

Câu 5. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$

A. $\sqrt{10}$.

B. $2\sqrt{10}$.

C. $-3\sqrt{10}$.

D. $3\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{TXD: } D = [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$$

$$y' = 3 - \frac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{10 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 + x - 90 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{3241}}{18}$$

$$y(\sqrt{10}) = 3\sqrt{10}, y(-\sqrt{10}) = -3\sqrt{10}, y\left(\frac{-1 + \sqrt{3241}}{18}\right) \approx 9,91$$

Câu 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1; +\infty)$?

A. $y = \frac{x-1}{x^2+2}$.

B. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

C. $y = \log_3 x$.

D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ đồng biến trên tập xác định nếu $a > 1$.

Do đó hàm số $y = \log_3 x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 7. Giả sử tích phân $\int_0^1 x \cdot \ln(2x+1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

A. $b+c = 6057$.

B. $b+c = 6059$.

C. $b+c = 6058$.

D. $b+c = 6056$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 x \cdot \ln(2x+1) dx = (\ln(2x+1)) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \frac{2}{2x+1} \right) dx$$

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

$$= \frac{3}{8} \ln 3 - \left(\frac{x^2 - x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \ln 3$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \left(\frac{3}{8} \ln 3 \right) = \frac{6051}{8} \ln 3.$$

Khi đó $b+c=6059$.

Câu 8. Giải bất phương trình $\log_3(x+2) + \log_9(x+2)^2 = \frac{5}{4}$.

A. $x=1$.

B. $x = \sqrt[8]{3^5} - 2$.

C. $x = \sqrt[4]{3^5} - 2$.

D. $x = \sqrt[4]{3} - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x > -2$.

$$\log_3(x+2) + \log_9(x+2)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \log_3(x+2) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{5}{8}} - 2 = \sqrt[8]{3^5} - 2. \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Trong các vectơ sau vectơ nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

A. $\vec{u}(1; -1; -3)$.

B. $\vec{u}(-2; -1; -2)$.

C. $\vec{u}(-2; 1; -2)$.

D. $\vec{u}(2; 1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ đường thẳng và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ có phương trình chính tắc là $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

Suy ra đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{v}(2; -1; 2)$.

Các vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d đều cùng phương với $\vec{v}$.

Câu 10. Tìm m để phương trình $m \ln(1-x) - \ln x = m$ có nghiệm $x \in (0; 1)$.

A. $m \in (0; +\infty)$.

B. $m \in (1; e)$.

C. $m \in (-\infty; 0)$.

D. $m \in (-\infty; -1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện xác định $x \in (0; 1)$.

$$\text{Ta có } m \ln(1-x) - \ln x = m \Leftrightarrow m = \frac{\ln x}{\ln(1-x) - 1}$$

Xét hàm số $y = \frac{\ln x}{\ln(1-x) - 1}$ trên $(0; 1)$.

$$\text{Có } y' = \frac{\frac{1}{x}(\ln(1-x) - 1) + \frac{1}{1-x} \ln x}{(\ln(1-x) - 1)^2} < 0, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow y > 0.$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (0; +\infty)$.

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ có trục đối xứng là trục Ox .

B. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $y = 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

C. Đồ thị hàm số $y = x^3$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

D. Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đáp án A sai, vì: Hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là trục Oy.

Đáp án B sai, vì: Hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $x=1$.

Đáp án C đúng, vì: Hàm số $y = x^3$ là hàm lẻ nên có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

Đáp án D sai, vì: Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định là $D = (0; +\infty)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 12. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ

A. $m = \pm 1$.

B. $m = \pm \frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$y' = 4x^3 - 16m^2x = 4x(x^2 - 4m^2)$$

Điều kiện để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Với $m \neq 0$ $y' = 0$ có 3 nghiệm là $x \in 0, 2m, -2m$ do đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$$A(0;1), B(-2m;1-16m^2), C(2m;1-16m^2).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường: $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$.

A. $\frac{107}{6}$.

B. $\frac{109}{6}$.

C. $\frac{109}{7}$.

D. $\frac{109}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

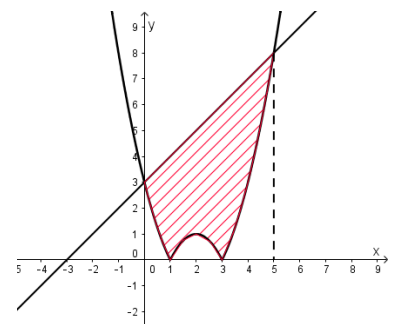
Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có

$$|x^2 - 4x + 3| = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -(x + 3) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Sau khi vẽ hình ta thấy $|x^2 - 4x + 3| \leq x + 3, \forall x \in [0; 5]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 (x + 3 - |x^2 - 4x + 3|) dx \\ &= \int_0^1 (x + 3 - x^2 + 4x - 3) dx + \int_1^3 (x + 3 + x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^5 (x + 3 - x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx \end{aligned}$$



HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right) \Big|_1^3 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_3^5 = \frac{109}{6}$$

Câu 14. Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$. Lúc đó:

- A. $a+b+c = \frac{4}{3}$. B. $a+b+c = \frac{5}{3}$. C. $a+b+c = \frac{7}{3}$. D. $a+b+c = \frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Đặt } 1+\sqrt{3x+1}=t \Rightarrow 3x+1=(t-1)^2 \Rightarrow dx = \frac{2}{3}(t-1)dt.$$

$$\text{Đổi cận } x=1 \Rightarrow t=3; x=5 \Rightarrow t=5.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_3^5 \frac{2}{3} \frac{t-1}{t} dt = \frac{2}{3} \int_3^5 \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{2}{3} \left(t - \ln|t| \right) \Big|_3^5 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 5.$$

$$\text{Do đó } a = \frac{4}{3}; b = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3}. \text{ Vậy } a+b+c = \frac{4}{3}.$$

Câu 15. Cho $0 < a < b < 1$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\log_b a > \log_a b$. B. $\log_a b < 0$. C. $\log_b a < \log_a b$. D. $\log_a b > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $0 < a < 1$ nên hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đáp án B sai, vì: Với $b < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b > 0$.

Đáp án D sai, vì: Với $a < b \Rightarrow \log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1$.

Với $0 < a < b < 1$ ta có $0 < \log_a b < 1$.

Đáp án C sai, vì: Nếu $\log_b a < \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} < \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 > 1$ (vô lí).

Đáp án A sai, vì: Nếu $\log_b a > \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} > \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 < 1$ (luôn đúng).

Câu 16. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 4 - |x|$ và trục hoành là

- A. 0. B. 16. C. 4. D. 8.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm.

$$4 - |x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng là.

$$S = \int_{-4}^4 |4 - |x|| dx = \int_{-4}^0 |4 + x| dx + \int_0^4 |4 - x| dx = \left| \int_{-4}^0 4 + x dx \right| + \left| \int_0^4 4 - x dx \right| = 16.$$

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017} dx$

- A. 0. B. 2. C. -2. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y = x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017}$ là hàm lẻ. $I = \int_{-1}^1 x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017} dx = 0$

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ C . Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt C tại hai điểm phân biệt sao cho tam giác OAB vuông tại A hoặc B

- A.** $m = 1 \pm \sqrt{5}$. **B.** $m = 1 \pm \sqrt{3}$. **C.** $m = 1 \pm \sqrt{2}$. **D.** $m = 1 \pm \sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \Leftrightarrow x^2 + m - 3x + 1 - m = 0$ *.

Ta có d cắt C tại hai điểm phân biệt khi chỉ khi $\begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0 \\ 1^2 + m - 3 \cdot 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases}$ (luôn đúng với mọi m).

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình *, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$ và C cắt d tại $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$.

Vecto $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1; 1)$.

Tam giác OAB vuông tại A khi chỉ khi $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + m = 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \\ 2x_1 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -m \\ 2x_2 = 6 - m \\ -m(6 - m) = 4 - 4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Câu 19. Cho số phức z có phần thực dương và thỏa $\bar{z} - \frac{5 + \sqrt{3}i}{z} - 1 = 0$. Khi đó

- A.** $|z| = 2$. **B.** $|z| = 3$. **C.** $|z| = 4$. **D.** $|z| = \sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Ta có $\bar{z} - \frac{5 + \sqrt{3}i}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 - 5 + \sqrt{3}i = z$.

Đặt $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. Ta có.

$a^2 + b^2 - 5 - \sqrt{3}i = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 5 = a \\ -\sqrt{3} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$.

$z = 2 - \sqrt{3}i$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Có bao nhiêu mặt cầu tiếp xúc với các mặt của tứ diện

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Khi đó I cách đều các mặt ABC , ACD nên I nằm trên mặt phẳng P_1 là phân giác của hai mặt phẳng ABC , ACD ..

Tương tự.

- I nằm trên mặt phẳng P_2 là phân giác của hai mặt phẳng ABC , ABD .
- I nằm trên mặt phẳng P_3 là phân giác của hai mặt phẳng ABC , BCD .

Gọi d là giao tuyến của P_1 và P_2 và I là giao điểm của d và P_3 .

Điểm I tồn tại và duy nhất.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$:

- A. $(0;1)$. B. $\left(\frac{1}{8};1\right)$. C. $(1;8)$. D. $\left(\frac{1}{8};3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < \log_3 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \\ \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 1$$

Câu 22. Cho hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng 3, chiều cao bằng $6\sqrt{3}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ

- A. $9\pi + 36\pi\sqrt{3}$. B. $18\pi + 36\pi\sqrt{3}$. C. $18\pi + 18\pi\sqrt{3}$. D. $6\pi + 36\pi\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

$$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{day} = 2\pi r.h + 2\pi r^2 = 2\pi.3.6\sqrt{3} + 2\pi(3)^2 = 18\pi + 36\pi\sqrt{3}.$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào sau đây là sai ?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\parallel$	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	0	$+\infty$

- A. Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
B. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 24. Tìm m để đồ thị hàm số $y = (x-m)(2x^2 + x - 3m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \neq 0, m \neq 1 \\ m < \frac{1}{24} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \neq 0, m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{24} \end{cases}$. D. $m > -\frac{1}{24}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành $(x-m)(2x^2+x-3m)=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ g(x)=2x^2+x-3m=0(1) \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác m .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(m) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2+m-3m \neq 0 \\ 1+24m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0, m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{24} \end{cases} \dots$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, xác định tọa độ tâm I của đường tròn giao tuyến với mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=64$ với mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y+z+10=0$

A. $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. B. $(-2; -2; -2)$. C. $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. D. $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=8$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $I(1;1;1)$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y+z+10=0$.

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Gọi J là tâm của mặt cầu (S) . Suy ra: $J=d \cap (\alpha)$.

Vậy $J(1+2t; 1+2t; 1+t)$.

Mà $J \in (\alpha): 2(1+2t)+2(1+2t)+1+t+10=0$.

$$\Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}. \text{ Suy ra } J\left(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Câu 26. Trong các hàm số sau, hàm số nào không có tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang)?

A. $y = \frac{x+2^{2017}}{x-\log_2 2017}$.

B. $y = 2^{x+2017}$.

C. $y = \log_2(x+2017)$.

D. $y = \sin(x+2017)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2^{2017}}{x - \log_2 2017}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$, đường

tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \log_2 2017$.

Đồ thị hàm số $y = 2^{x+2017}$ nhận trục Ox làm tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \log_2(x + 2017)$ nhận đường thẳng $x = -2017$ làm tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y = \sin(x + 2017)$ không có tiệm cận.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(-2; 1)$ và có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua $A(3; 5; 7)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có: Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; 4)$ và qua $A(3; 5; 7) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

Câu 29. Trong không gian $(Oxyz)$ cho điểm $M(1; 2; 3)$; $A(1; 0; 0)$; $B(0; 0; 3)$. Đường thẳng Δ đi qua M và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A ; B đến Δ lớn nhất có phương trình là:

A. $\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Ta có $d(A; \Delta) + d(B; \Delta) \leq MA + MB$.

Để tổng khoảng cách từ các điểm A ; B đến Δ lớn nhất thì.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

$$d(A; \Delta) + d(B; \Delta) = MA + MB \Leftrightarrow \begin{cases} MA \perp \Delta \\ MB \perp \Delta \end{cases}.$$

Suy ra d qua M , vtcp $\vec{u} = [\vec{MA}; \vec{MB}] = -6; 3; -2 = 6; -3; 2$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là: $\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp K của tam giác ABC .

- A. $K(2;1;3)$. B. $K(5;7;5)$. C. $K\left(\frac{80}{49}; \frac{13}{49}; \frac{135}{49}\right)$. D. $K(-1; -5; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1. PP trắc nghiệm

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y + 2z = 12$.

Thay các đáp án có mỗi đáp án C điểm $K\left(\frac{80}{49}; \frac{13}{49}; \frac{135}{49}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC) .

Cách 2. Tự luận.

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y + 2z = 12$.

Giả sử $K(x, y, z)$, do K là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} K \in (ABC) \\ KA = KB \\ KA = KC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K \in (ABC) \\ KA^2 = KB^2 \\ KA^2 = KC^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y + 2z = 12 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-6)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y + 2z = 12 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-6)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y + 2z = 12 \\ 2x - y = 3 \\ 2x - 3z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{80}{49} \\ y = \frac{13}{49} \\ z = \frac{135}{49} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AC = 7a, SA = a\sqrt{7}$ và $SA \perp (ABCD)$.

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = a\sqrt{56}$. B. $R = a\sqrt{14}$. C. $a\sqrt{7}$. D. $R = \frac{7a}{2}$.

Hướng dẫn giải

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

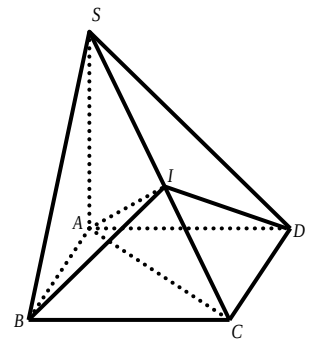
Chọn A.

Ta có các tam giác SAC, SBC, SDC là các tam giác vuông tại A .

Gọi I là trung điểm của SC suy ra

$$IA = IB = IC = ID = IS = \frac{SC}{2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{(7a)^2 + (a\sqrt{7})^2} = \frac{a\sqrt{56}}{2}$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \frac{a\sqrt{56}}{2}$



Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$, $f(0)=1$, $f(1)=-1$, tính $I = \int_1^0 f'(x) dx$.

A. $I=1$.

B. $I=2$.

C. $I=-2$.

D. $I=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$I = \int_1^0 f'(x) dx = f(0) - f(1) = 2$$

Câu 33. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

B. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

C. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

D. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A, B, C đều thuộc đường tròn đơn vị và ABC tạo thành tam giác đều.

Do các phép toán cộng và nhân số phức phụ thuộc vào vị trí tương đối của các điểm biểu diễn nên ta có thể cho: $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Thay vào ta được $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = 0$ và $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 0$.

Câu 34. Trong các hàm số sau, hàm số nào có cực trị?

A. $y = e^x$.

B. $y = \log_{\pi} x$.

C. $y = \frac{x+2}{x-3}$.

D. $y = |3x-1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$y = e^x, y = \log_{\pi} x$ là hàm đồng biến trên tập xác định nên không có cực trị.

$y = \frac{x+2}{x-3}$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định ($y' = \frac{-5}{(x-3)^2}$) nên không có cực trị.

$y = |3x-1|$ có giá trị nhỏ nhất là 0 nên có cực tiểu tại $x = \frac{1}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

Câu 35. Giả sử số phức $z = -1 + i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \dots - i^{99} + i^{100} - i^{101}$. Lúc đó tổng phần thực và phần ảo của z là:

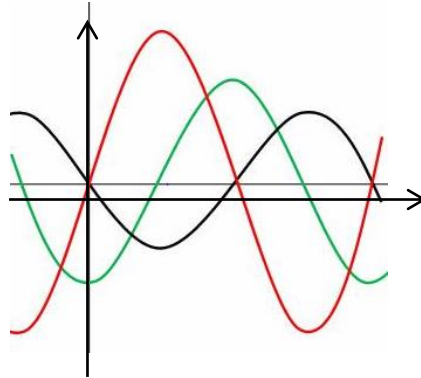
- A. 2. B. -1. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Nhận xét: tổng 4 số hạng liên tiếp $-i^{4m+2} + i^{4m+3} - i^{4m+4} + i^{4m+5} = 1 - i - 1 + i = 0$ nên $z = -1 + i$

Câu 36. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x), y = f'(x), y = \int_0^x f(t)dt$ ở hình dưới. Xác định xem $(C_1), (C_2), (C_3)$ tương ứng là đồ thị hàm số nào?



- A. $y = f'(x), y = f(x), y = \int_0^x f(t)dt$. B. $y = f(x), y = \int_0^x f(t)dt, y = f'(x)$.
C. $y = f(x), y = \int_0^x f(t)dt, y = f'(x)$. D. $y = \int_0^x f(t)dt, y = f'(x), y = f(x)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta có: (C_3) là đạo hàm của (C_1)

Câu 37. Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

- A. Không tồn tại số phức z_0 . B. $|z_0| = 2$.
C. $|z_0| = 7$. D. $|z_0| = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Cách 1:

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (a + 3)^2 + (b + 4)^2 = 4.$$

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3; -4)$ và bán kính $R = 2$.

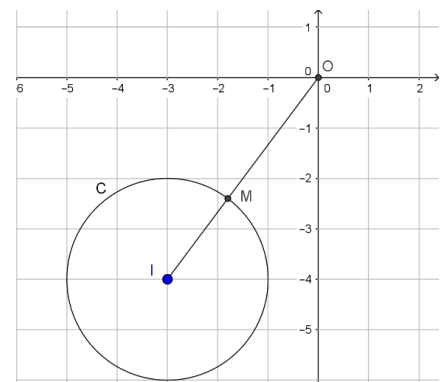
Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z . Ta có:

$$M(z) \in (C).$$

$$|z| = OM \geq OI - R = 3.$$

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z) = (C) \cap IM$.

Cách 2:



HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} a+3=2\cos\varphi \\ b+4=2\sin\varphi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3+2\cos\varphi \\ b=-4+2\sin\varphi \end{cases} \\ \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2} &=\sqrt{(2\cos\varphi-3)^2+(2\sin\varphi-4)^2}=\sqrt{29-12\cos\varphi-16\sin\varphi} \\ &=\sqrt{29-20\left(\frac{3}{5}\cos\varphi+\frac{4}{5}\sin\varphi\right)}=\sqrt{29-20\cos(\alpha-\varphi)}\geq\sqrt{9} \\ \Rightarrow |z_0| &=3 \end{aligned}$$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng lớn nhất.

- A. $\vec{u}=(4;-5;-2)$. B. $\vec{u}=(1;0;2)$. C. $\vec{u}=(1;1;-4)$. D. $\vec{u}=(8;-7;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\overrightarrow{AM}=(-3;-4;4)$. Gọi $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của $d \Rightarrow \vec{u}_d=(2;2;-1)$.

Do $M \in \Delta \Rightarrow d[A; \Delta] \leq AM$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AM \perp \Delta$

Khi đó chọn $\vec{u}=[\vec{u}_d; \overrightarrow{AM}]=(4;-5;-2)$.

Câu 39. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm $(x^2-4)(\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x + \dots \log_{19} x - \log_{20}^2 x)$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$(x^2-4)(\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x + \dots \log_{19} x - \log_{20}^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ \log_2 x + \log_3 x + \log_4 x + \dots \log_{19} x - \log_{20}^2 x = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x + \dots \log_{19} x - \log_{20}^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (1 + \log_3 2 + \log_4 2 + \dots \log_{19} 2 - \log_{20}^2 2 \cdot \log_2 x) = 0$$

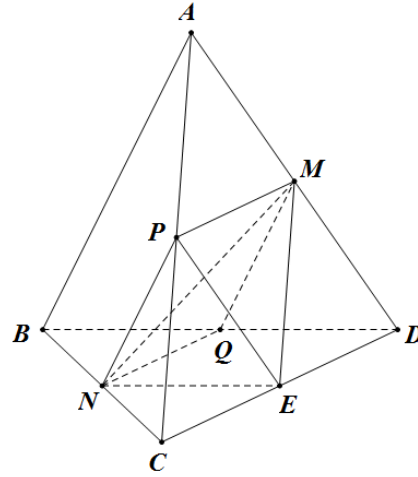
Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .

Biết $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $d(AB, CD) = a$. Khi đó độ dài MN là

- A. $MN = a\sqrt{2}$ hoặc $MN = a\sqrt{6}$. B. $MN = a\sqrt{2}$ hoặc $MN = a\sqrt{3}$.
C. $MN = \frac{a}{2}$ hoặc $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $MN = a$ hoặc $MN = a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.



Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm của AC, BD, CD . Ta có tứ giác $MQNP$ là hình thoi cạnh $\frac{a}{2}$. Ta chứng minh được $V_{CDMQNP} = \frac{1}{2}V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Mặt khác: $V_{C.PNE} = V_{D.QME} = \frac{1}{8}V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96} \Rightarrow V_{E.MQNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} - 2 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{96} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Vì AB, CD chéo nhau và $d(AB, CD) = a$ nên $d(CD, MQNP) = \frac{a}{2}$ (thật vậy, gọi Δ là đường vuông góc chung của AB, CD thì $\Delta \perp MQNP$ vì $\Delta \perp NP, \Delta \perp NQ$).

Suy ra $\frac{a^3\sqrt{3}}{48} = V_{E.MQNP} = \frac{1}{3}d(CD, MQNP) \cdot S_{MQNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot S_{MQNP}$.

$$\Rightarrow S_{MQNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftrightarrow MQ \cdot NQ \cdot \sin NQP = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \sin NQP = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} NQP = 60^\circ \Rightarrow MN = \frac{a}{2} \\ NQP = 120^\circ \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{\pi} + \cos^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của a để $f(x)$ có một nguyên hàm

$F(x)$ thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{4}, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

A. $\pi - 2$.

B. $\pi - 1$.

C. $\frac{\pi}{2} - 1$.

D. $\frac{\pi}{2} - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{a}{\pi} + \cos^2 x \right) dx = \int \left[\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] dx = \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2} \right) x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Theo giả thiết $\begin{cases} F(0) = \frac{1}{4} \\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{4} \\ a = \frac{\pi}{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - 2$

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

Câu 42. Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$ và $SA=a\sqrt{2}$, $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{5}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{259}}{7}$. B. $R = \frac{a\sqrt{259}}{14}$. C. $R = \frac{a\sqrt{259}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{37}}{14}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Tam giác SBC có $BC^2 + SB^2 = SC^2$. Nên tam giác SBC vuông tại B . Hay $CB \perp SB$.

Lại có : $CB \perp AB$. Suy ra $CB \perp (SAB)$.

Có $SA=SB=a\sqrt{2}$ nên tam giác SAB cân tại S .

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , khi đó $O \in SN$, với N là trung điểm của AB .

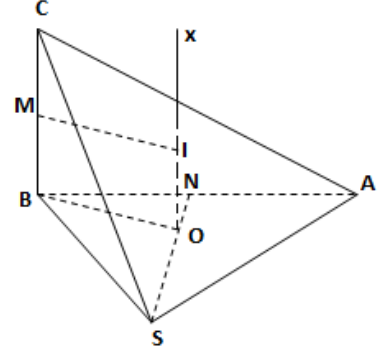
Dựng Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

Gọi M là trung điểm của BC . Trong $(SB; Ox)$ dựng đường trung trực của BC cắt Ox tại I . Khi đó, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

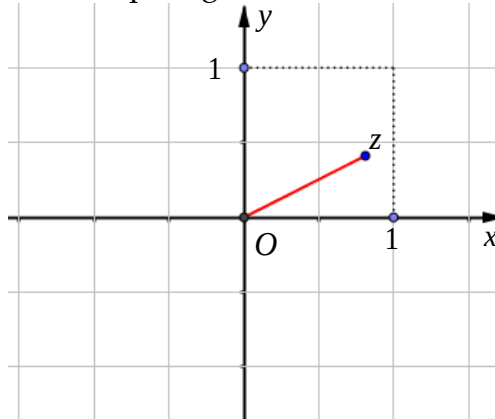
$$\text{Có } SN = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Có : } S_{\Delta SAB} = \frac{SB.SA.AB}{4R} = \frac{1}{2} SN.AB \Leftrightarrow R = \frac{SB.SA}{2SN} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{2a\sqrt{7}}{7}.$$

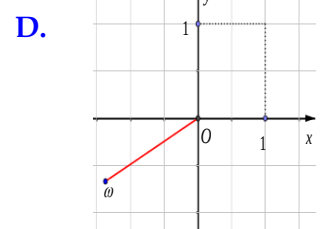
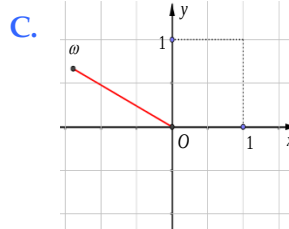
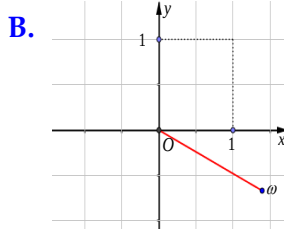
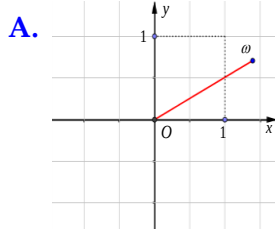
$$\text{Vậy bán kính mặt cầu : } CI = \sqrt{CM^2 + MI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{7}}{7}\right)^2} = \frac{a\sqrt{259}}{14}.$$



Câu 43. Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ:



Hỏi hình nào biểu diễn cho số phức $\varpi = \frac{i}{z}$?



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết điểm biểu diễn số phức z nằm ở góc phần tư thứ nhất nên $a, b > 0$.

$$\text{Ta có } \varpi = \frac{i}{z} = \frac{i}{a - bi} = \frac{i(a + bi)}{a^2 + b^2} = -\frac{b}{a^2 + b^2} + \frac{a}{a^2 + b^2}i$$

$$\text{Do } a, b > 0 \text{ nên } \begin{cases} -\frac{b}{a^2 + b^2} < 0 \\ \frac{a}{a^2 + b^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{điểm biểu diễn số phức } \varpi \text{ nằm ở góc phần tư thứ hai.}$$

Vậy chọn C.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM . Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R = 2$.

B. $R = 1$.

C. $R = 4$.

D. $R = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O .

Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định)

Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là

đường trung tuyến nên $ID = \frac{1}{2}OA = 2$ (1)

Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM

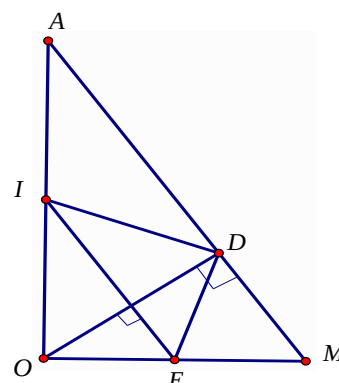
nên IE song song với AM mà $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$

Mặt khác tam giác EOD cân tại E . Từ đó suy ra

IE là đường trung trực của OD

Nên $DOE = ODE; IOD = IDO \Rightarrow IDE = IOE = 90^\circ \Rightarrow ID \perp DE$ (2)

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2$



Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

A. $a + b + c = 5$.

B. $a + b + c = 6$.

C. $a + b + c = 7$.

D. $a + b + c = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1; 2; 3)$ và vuông góc (P)

$$\text{Suy ra phương trình tham số của đường thẳng } d \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

Gọi A, B lần lượt là giao của d và (S) , khi đó tọa độ A, B ứng với t là nghiệm của phương trình $(1+2t-1)^2 + (2-2t-2)^2 + (3+t-3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$

Với $t=1 \Rightarrow A(3;0;4) \Rightarrow d(A;(P)) = \frac{13}{3}$.

Với $t=-1 \Rightarrow B(-1;4;2) \Rightarrow d(B;(P)) = \frac{5}{3}$.

Với mọi điểm $M(a;b;c)$ trên (S) ta luôn có $d(B;(P)) \leq d(M;(P)) \leq d(A;(P))$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất bằng $\frac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Do đó $a+b+c=7$.

Câu 46. Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1; m; n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

A. $m.n=2$.

B. $m.n=-2$.

C. $m.n=4$.

D. $m.n=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) qua A có dạng

$$a(x-0) + b(y-8) + c(z-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - 8b - 2c = 0.$$

Điều kiện tiếp xúc:

$$d(I;(P)) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a - 3b + 7c - 8b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a - 11b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}. (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } d(B;(P)) &= \frac{|9a - 7b + 23c - 8b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|9a - 15b + 21c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|5a - 11b + 5c + 4(a - b + 4c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \\ &\leq \frac{|5a - 11b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + 4 \frac{|a - b + 4c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 18\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{4}$. Chọn $a=1; b=-1; c=4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P): x - y + 4z = 0$. Suy ra $m=-1; n=4$. Suy ra: $m.n=-4$.

Câu 47. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB=3a$, $AC=4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết $SA=2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{4}$.

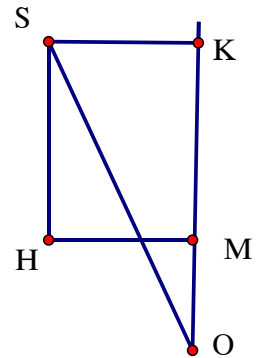
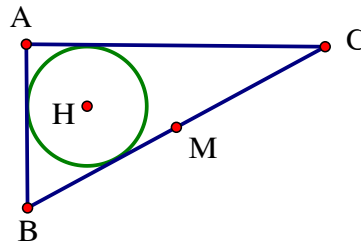
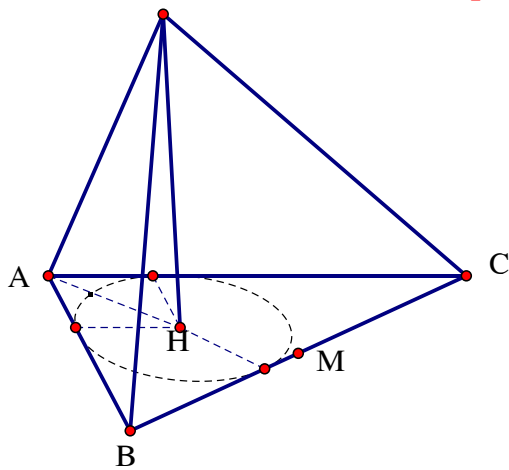
B. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{2}$.

C. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{8}$.

D. $R = a \cdot \sqrt{118}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính được

$$r = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC + BC} = a.$$

Tính được $AH = a\sqrt{2}$ và $MH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại H suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của BC và Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Suy ra $O \in \Delta$.

Ta có:

$$OC^2 = OS^2 \Leftrightarrow OM^2 + MC^2 = SK^2 + OK^2.$$

$$\Leftrightarrow OM^2 + \frac{25a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} + (OM + a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow OM = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

$$\text{Suy ra } R = OC = \frac{\sqrt{118}}{4}a.$$

Câu 48. Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng

$d: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x - 17y - 20z - 77 = 0$.

B. $19x - 17y - 20z + 34 = 0$.

C. $31x - 8y - 5z + 91 = 0$.

D. $31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3; 0; -1)$ và có VTCP là $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

Do $\Delta \subset (P)$ nên $M \in (P)$. Giả sử VTPT của (P) là $\vec{n} = (A; B; C), (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Phương trình (P) có dạng $A(x-3) + By + C(z+1) = 0$.

Do $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A + 2B + 3C = 0 \Leftrightarrow A = -2B - 3C$.

Gọi α là góc giữa d và (P) . Ta có

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3A + B + 2C|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3(-2B - 3C) + B + 2C|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{(-2B - 3C)^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|5B + 7C|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5B^2 + 12BC + 10C^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{(5B + 7C)^2}{5B^2 + 12BC + 10C^2}}.$$

TH1: Với $C = 0$ thì $\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{14}} = \frac{\sqrt{70}}{14}$.

TH2: Với $C \neq 0$ đặt $t = \frac{B}{C}$ ta có $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10}}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-50t^2 + 10t + 112}{(5t^2 + 12t + 10)^2}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -50t^2 + 10t + 112 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{5} \Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{75}{14} \\ t = -\frac{7}{5} \Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right) = 0 \end{cases}.$$

Và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10} = 5$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$+\infty$			
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5		0		$\frac{75}{14}$		5

Từ đó ta có $\text{Max} f(t) = \frac{75}{14}$ khi $t = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{B}{C} = \frac{8}{5}$. Khi đó $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{f\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và TH2 ta có $\sin \alpha$ lớn nhất là $\sin \alpha = \frac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\frac{B}{C} = \frac{8}{5}$.

Chọn $B = -8 \Rightarrow C = -5 \Rightarrow A = 31$.

Phương trình (P) là $31(x - 3) - 8y - 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$ và đường

tròn (C): $x^2 + y^2 = 7$. Để diện tích elip (E) gấp 7 lần diện tích hình tròn (C) khi đó

A. $ab = 7$.

B. $ab = 7\sqrt{7}$.

C. $ab = \sqrt{7}$.

D. $ab = 49$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

HƯỚNG DẪN GIẢI: Tập thể giáo viên toán học Bắc Trung Nam

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0) \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Diện tích (E) là

$$S_{(E)} = 4 \int_0^a \frac{b \sqrt{a^2 - x^2} dx}{a} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$S_{(E)} = 4 \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cdot \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab$$

$$\text{Mà ta có } S_{(C)} = \pi R^2 = 7\pi.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } S_{(E)} = 7 \cdot S_{(C)} \Leftrightarrow \pi ab = 49\pi \Leftrightarrow ab = 49.$$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3, BC = 4, AC = 5$. Các mặt bên $(SAB), (SAC), (SBC)$ đều cùng hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60° và hình chiếu H của S lên (ABC) nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC . Thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $V_{S.ABC} = 2\sqrt{3}$. **B.** $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}$. **C.** $V_{S.ABC} = 4\sqrt{3}$. **D.** $V_{S.ABC} = 12\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi M, N, P là hình chiếu của H lên CB, BA, AC

Ta có $\triangle SHM = \triangle SHN = \triangle SHP \Rightarrow HM = HN = HP$

Theo bài ra ta có H là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle ABC$

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow BMHN$ là hình vuông

Gọi $I = AH \cap BC$

$$\frac{BI}{IC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BI = \frac{3}{8} BC = \frac{3}{2}$$

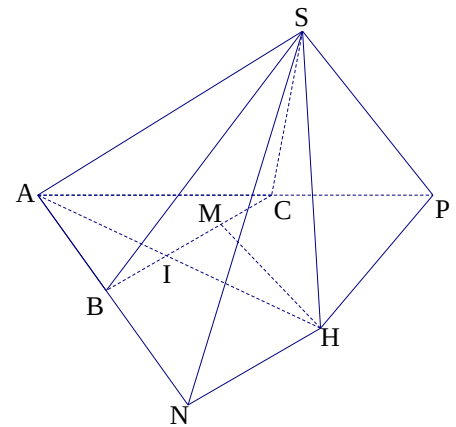
$$\text{Ta có } \frac{BI}{AB} = \frac{NH}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow B \text{ là trung điểm của } AN$$

$$\Rightarrow HN = AB = 3$$

$$\Rightarrow SH = HN \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = 6$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = 6\sqrt{3}$$



-----oOo-----