

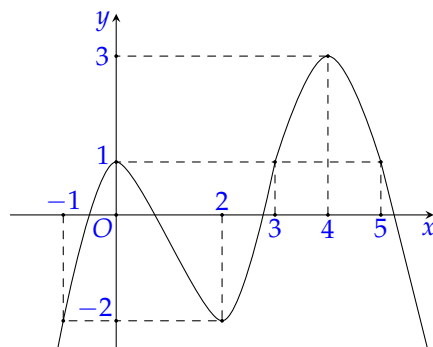
Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số  $y = f(x)$  là

A.  $x = -2$ .B.  $x = -1$ .☒ C.  $x = 2$ .D.  $x = 3$ .**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị, ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

Chọn đáp án ☒ C ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có bảng biến thiên như sau:

|      |    |   |   |   |   |   |
|------|----|---|---|---|---|---|
| $x$  | -1 | 0 | 2 | 3 |   |   |
| $y'$ |    | + | 0 | - | 0 | + |
| $y$  | 0  | 5 | 1 | 4 |   |   |

Gọi  $M, m$  theo thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị  $M \cdot m$  bằng

A.  $M \cdot m = 4$ .B.  $M \cdot m = 5$ .C.  $M \cdot m = -3$ .☒ D.  $M \cdot m = 0$ .**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có  $M = \max_{[-1; 3]} f(x) = 5$  và  $m = \min_{[-1; 3]} f(x) = 0$ .

Vậy  $M \cdot m = 0$ .

Chọn đáp án ☒ D ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.B. Đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.☒ C. Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.D. Đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.**Lời giải.**

- Do  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$  nên  $x = 2$  không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Do  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  nên  $y = 2$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 4.** Hàm số nào trong các phương án dưới đây có bảng biến thiên như sau:

|      |           |     |           |     |           |
|------|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $1$       |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$ |           | $-$ |           |
| $y$  | $1$       |     | $+\infty$ |     | $1$       |

- A.  $y = \frac{-x+2}{x-1}$ .      **B**  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .      C.  $y = \frac{x+2}{x+1}$ .      D.  $y = \frac{x-3}{x-1}$ .

**Lời giải.**

Bảng biến thiên đã cho là bảng biến thiên của hàm số có các tính chất sau:

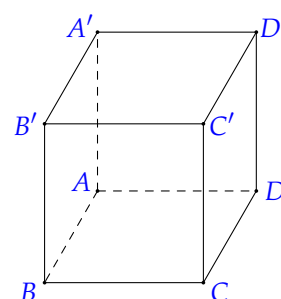
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ ;
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ ;
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

Trong các phương án, hàm số có đủ các tính chất trên là  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .

Chọn đáp án **B** ..... ☐

**Câu 5.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.  $|\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{2}$ .      B.  $|\overrightarrow{BD'}| = a\sqrt{3}$ .  
**C**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'C'} = \vec{0}$ .      D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$ .



**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$ .

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{MO} = 2\vec{j} - 3\vec{i} + \vec{k}$ . Tọa độ điểm  $M$  là

- A.  $M(-3; 1)$ .      **B**  $M(3; -2; -1)$ .      C.  $M(-3; 2; 1)$ .      D.  $M(-2; 3; -1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{MO} = 2\vec{j} - 3\vec{i} + \vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ .

Suy ra  $M(3; -2; -1)$ .

Chọn đáp án **B** ..... ☐

**Câu 7.** Số lượng khách hàng nữ mua hàng thời trang trong một ngày của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số ghép nhóm như sau:

|                  |          |          |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Khoảng tuổi      | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) |
| Số khách hàng nữ | 3        | 9        | 6        | 4        | 2        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 20.

**B** 50.

C. 6.

D. 60.

**Lời giải.**

Ta có  $a_1 = 20$  là giá trị đầu mút trái của nhóm đầu tiên.

Ta lại có  $a_{k+1} = 70$  là giá trị đầu mút phải của nhóm cuối cùng.

Suy ra khoảng biến thiên  $R = a_{k+1} - a_1 = 50$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 8.** Khảo sát về độ ẩm không khí trung bình các tháng năm 2022 tại Đà Nẵng (đơn vị: %), người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau:

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Độ ẩm    | [71; 74) | [74; 77) | [77; 80) | [80; 83) | [83; 86) |
| Số tháng | 1        | 1        | 2        | 6        | 2        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 134,25.

B. 3,34.

C. 80,25.

**D** 11,1875.

**Lời giải.**

Xét mẫu số liệu ghép nhóm:

|                  |          |          |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Nhóm             | [71; 74) | [74; 77) | [77; 80) | [80; 83) | [83; 86) |
| Giá trị đại diện | 72,5     | 75,5     | 78,5     | 81,5     | 84,5     |
| Tần số           | 1        | 1        | 2        | 6        | 2        |

Số trung bình là  $\bar{x} = \frac{72,5 \cdot 1 + 75,5 \cdot 1 + 78,5 \cdot 2 + 81,5 \cdot 6 + 84,5 \cdot 2}{12} = 80,25$ .

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{72,5^2 \cdot 1 + 75,5^2 \cdot 1 + 78,5^2 \cdot 2 + 81,5^2 \cdot 6 + 84,5^2 \cdot 2}{12} - 80,25^2 = 11,1875.$$

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 9.** Cho  $y = f(x)$  liên tục và đồng biến trên khoảng  $(3; 11)$ . Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $f(11x) > f(x^2)$  trên khoảng  $(3; 11)$  là

A. 9.

B. 8.

**C** 7.

D. 10.

**Lời giải.**

Xét trên khoảng  $(3; 11)$ , hàm số  $y = f(x)$  đồng biến và  $f(11x) > f(x^2)$ .

Suy ra  $11x > x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 11x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 11$

Mặt khác  $x \in (3; 11)$  và  $x \in \mathbb{Z}$  nên suy ra  $x \in \{4; 5; \dots; 10\}$ .

Vậy bất phương trình có 7 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 10.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = 4t^2 - \frac{2t^3}{3}$  (m). Thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó tốc độ  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

**A**  $t = 2$ .

B.  $t = 4$ .

C.  $t = 1$ .

D.  $t = 3$ .

**Lời giải.**

Ta có  $v(t) = s'(t) = 8t - 2t^2$ .

Suy ra  $v'(t) = 8 - 4t; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ .

Bảng biến thiên

|         |   |   |           |           |
|---------|---|---|-----------|-----------|
| $t$     | 0 | 2 | $+\infty$ |           |
| $v'(t)$ |   | + | 0         | -         |
| $v(t)$  |   |   | 2         |           |
|         | 0 |   |           | $-\infty$ |

Vậy chất điểm đạt tốc độ lớn nhất tại thời điểm  $t = 2$  (giây).

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)(x-4)^2(x-8)^3$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $f(6) < f(8)$ .      B.  $f(8) > f(12)$ .      C.  $f(-1) < f(4)$ .      **D**  $f(-1) > f(8)$ .

**Lời giải.**

Bảng biến thiên

|      |           |     |         |     |        |     |        |     |           |
|------|-----------|-----|---------|-----|--------|-----|--------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $-1$    |     | $4$    |     | $8$    |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$ | $0$     | $-$ | $0$    | $-$ | $0$    | $+$ |           |
| $y$  |           |     | $f(-1)$ |     | $f(4)$ |     | $f(8)$ |     |           |

Suy ra hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 8)$ .

Vậy  $f(-1) > f(8)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  với điểm  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(2; -1; 1)$  và điểm  $C$  có hoành độ dương trên trục  $Ox$ . Diện tích tam giác  $ABC$  bằng

- A**  $\sqrt{6}$ .      B.  $2\sqrt{6}$ .      C.  $\sqrt{30}$ .      D.  $\frac{\sqrt{30}}{2}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $C(x; 0; 0)$ ,  $x > 0$ .

Khi đó  $\overrightarrow{AC} = (x-1; -2; 0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (x-2; 1; -1)$ .

Do  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  nên

$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-1)(x-2) - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}
 \end{aligned}$$

Suy ra  $C(3; 0; 0)$ .

Khi đó

- $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 0) \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$ .
- $\overrightarrow{BC} = (1; 1; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{3}$ .

Vậy  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \sqrt{6}$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $1$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

- a) ☐ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 2$ .  
b) ☐ Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .  
c) Trên khoảng  $(-\infty; 2)$ , hàm số có giá trị lớn nhất là  $1$  và có giá trị nhỏ nhất là  $-2$ .  
d) Đồ thị hàm số  $y = \frac{2024}{f(x) + 1}$  có 4 đường tiệm cận.

**Lời giải.**

- a) ☒ Theo bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 2$ .  
b) ☒ Theo bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 2)$  mà  $(0; 1) \subset (-1; 2)$  nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .  
c) ☒ Trên khoảng  $(-\infty; 2)$  hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng  $1$  tại  $x = -1$ .  
Vì  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng  $(-\infty; 2)$ .  
d) ☒ Bảng biến thiên:

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $1$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

$y = -1$

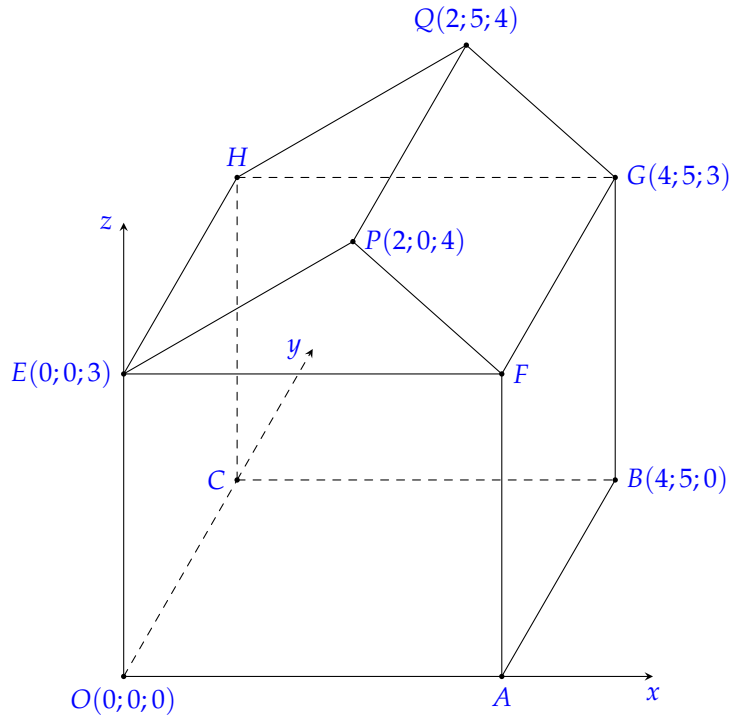
Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình  $f(x) = -1$  có ba nghiệm đơn phân biệt  $x = x_1 \in (-\infty; -1)$ ,  $x = x_2 \in (-1; 2)$ ,  $x = x_3 \in (2; +\infty)$ .

Khi đó, ta có  $y = \frac{2024}{f(x) + 1} = \frac{2024}{a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$ .

Suy ra đồ thị hàm số  $y = \frac{2024}{f(x) + 1}$  có ba đường tiệm cận đứng  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ ,  $x = x_3$  và một đường tiệm cận ngang  $y = 0$ .

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**Câu 2.** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian  $Oxyz$  với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng  $1$  m, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật



- a) Toạ độ điểm  $H(0;5;3)$ .  
b) Diện tích phần nền nhà là  $12 \text{ (m}^2\text{)}$ .  
c) Hình chiếu vuông góc  $K$  của điểm  $Q$  xuống nền nhà có tọa độ  $K(2;5;0)$ .  
d) Thể tích phần không gian của ngôi nhà bằng  $60 \text{ m}^3$ .

**Lời giải.**

- a) **D** Dựa vào hình vẽ,  $H \in (Oyz)$ ,  $x_H = 0$ ;  $y_H = y_C = y_B = 5$ ;  $z_H = z_E = 3$ .  
Do đó, tọa độ điểm  $H(0;5;3)$ .

- b) **S** Nền nhà là hình chữ nhật  $OACB$  nên có diện tích là

$$S_{OACB} = OA \cdot OC = 4 \cdot 5 = 20 \text{ (m}^2\text{)}.$$

- c) **D** Vì  $K$  là hình chiếu vuông góc điểm  $Q$  xuống nền nhà nên  $K \in (Oxy)$ .  
Suy ra  $x_K = x_Q = 2$ ;  $y_K = y_Q = 5$ ;  $z_K = 0$ .  
Do đó, tọa độ  $K(2;5;0)$ .

- d) **S** Theo hình vẽ, ngôi nhà gồm hai phần:

- **Phần 1:** Phần lăng trụ đứng  $EFP.HGQ$ , có đáy là tam giác cân cạnh đáy bằng  $4 \text{ m}$ , chiều cao ứng với cạnh đáy của tam giác cân bằng  $1 \text{ m}$ , chiều cao lăng trụ bằng  $5 \text{ m}$ ;
- **Phần 2:** Phần còn lại là hình hộp chữ nhật  $OAFE.CBGH$  có kích thước đáy là  $4 \text{ m}$  và  $5 \text{ m}$ , chiều cao  $3 \text{ m}$ .

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } V_{EFP.HGQ} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 = 10 \text{ (m}^3\text{)}.$$

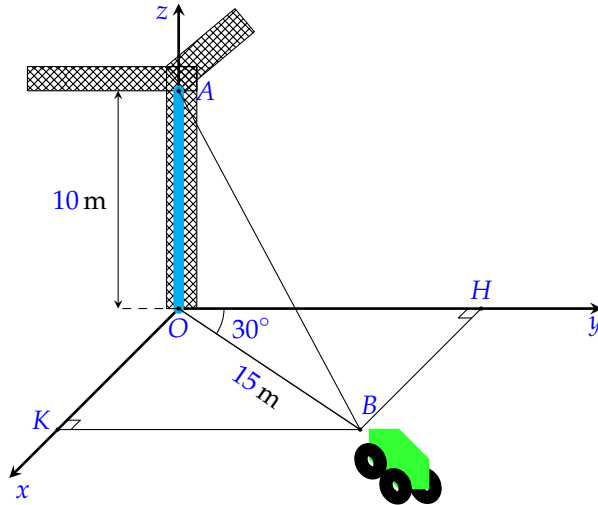
$$\text{Thể tích khối hộp chữ nhật } V_{OAFE.CBGH} = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60 \text{ (m}^3\text{)}.$$

$$\text{Vậy thể tích cả ngôi nhà là } 10 + 60 = 70 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai ..... □

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ (với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m) như hình vẽ sau:



Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$ . Tính  $a + b + c$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta có tọa độ điểm  $A(0; 0; 10)$ .  
Xét tam giác  $OHB$  vuông tại  $H$ , ta có

$$\bullet \sin \widehat{HOB} = \frac{HB}{OB} \Rightarrow HB = \sin \widehat{HOB} \cdot OB = \sin 30^\circ \cdot 15 = \frac{15}{2} \text{ (m)}.$$

$$\bullet \cos \widehat{HOB} = \frac{OH}{OB} \Rightarrow OH = \cos \widehat{HOB} \cdot OB = \cos 30^\circ \cdot 15 = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ (m)}.$$

$$\text{Suy ra tọa độ điểm } B \left( \frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left( \frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10 \right).$$

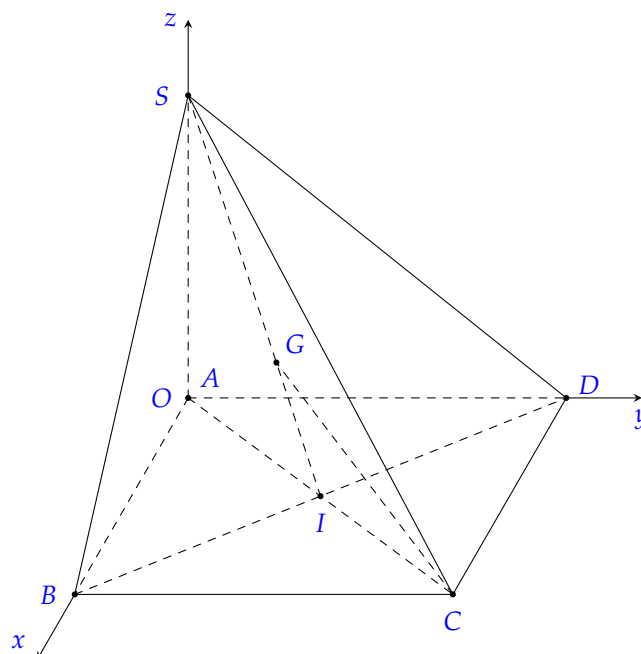
$$\text{Vậy } a + b + c = \frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} - 10 \approx 10,5.$$

Đáp án:  .....

**Câu 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $BC = 2a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBD$ . Biết độ dài  $CG$  bằng  $\frac{a\sqrt{m}}{3}$ . Tìm giá trị  $m$ .

Đáp án:

**Lời giải.**



Đặt hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ.

Khi đó, ta có  $A(0;0;0)$ ,  $B(a;0;0)$ ,  $C(a;2a\sqrt{2};0)$ ,  $D(0;2a\sqrt{2};0)$ ,  $S(0;0;a)$ .

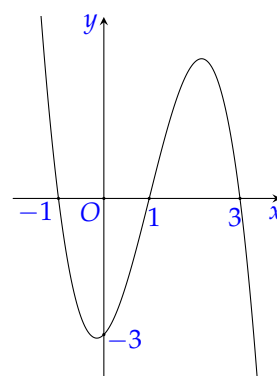
Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBD$  nên có tọa độ là  $G\left(\frac{a}{3}; \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{a}{3}\right)$ .

$$\text{Suy ra } CG = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{2}}{3} - 2a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{37}}{3}.$$

Vậy  $m = 37$ .

Đáp án: 37 ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $f(-1) = f(3) = 0$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên. Hàm số  $y = f^2(x)$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; a)$  và  $(b; c)$  ( $a < b < c$ ). Tính giá trị của biểu thức  $P = a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4}$ .



Đáp án: 4 , 2 5

**Lời giải.**

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

|         |           |      |     |     |     |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ |     | $1$ |     | $3$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  |           |      | $0$ |     |     | $0$ |           |     |

Từ bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ , ta suy ra  $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Xét hàm số  $g(x) = f^2(x)$ .

Ta có  $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ .

Phương trình  $g'(x) = 0$  tương đương

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1. \end{cases}$$

Cả 3 nghiệm trên đều là nghiệm bội lẻ nên ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = g(x) = f^2(x)$  như sau:

|         |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $g(x)$  |           |     |      |     |     |     |     |     |           |

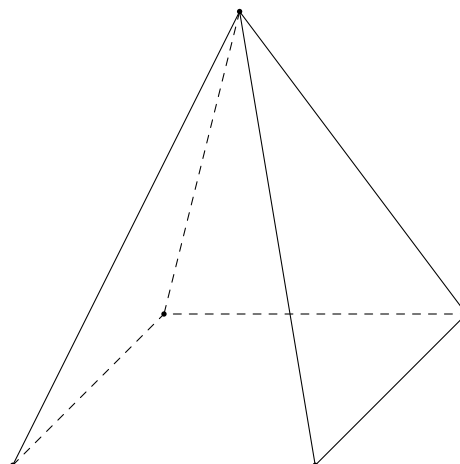
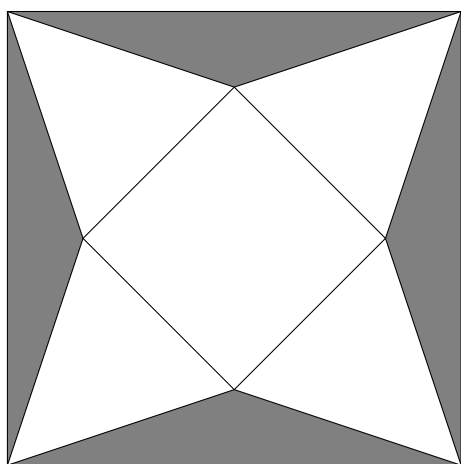
Suy ra hàm số  $y = f^2(x)$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; 3)$ .

Khi đó, ta có  $a = -1$ ,  $b = 1$  và  $c = 3$ .

$$\text{Vậy } P = a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4} = (-1)^2 + 1^2 + \frac{3^2}{4} = 4,25.$$

Đáp án: 4,25 ..... □

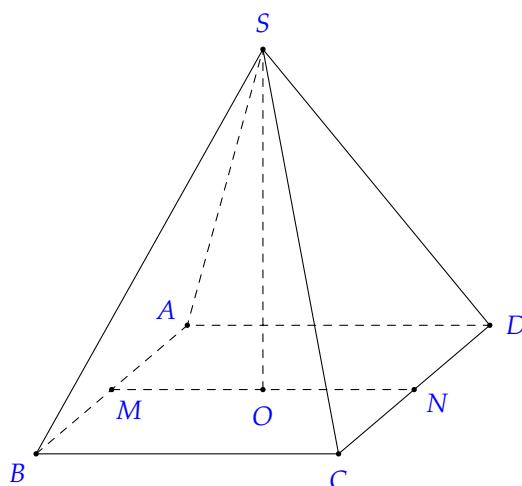
**Câu 4.** Một tấm bạt hình vuông cạnh 20m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

Đáp án: 8 0      

Lời giải.



Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là  $x$  (m).

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng  $20\sqrt{2}$  (m).

Gọi hình chóp tứ giác đều là  $S.ABCD$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ .

Khi đó  $MN = x$  (m),  $SN = \frac{20\sqrt{2} - x}{2}$  (m) với  $0 < x < 10\sqrt{2}$ .

Gọi  $O$  là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

Thể tích khối chóp  $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{6}x^2\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}$ .

Ta có  $V' = \frac{20x(80 - 5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}}$ .

Khi đó  $V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}$  với  $0 < x < 10\sqrt{2}$ .

Bảng biến thiên

|         |   |             |                          |   |
|---------|---|-------------|--------------------------|---|
| $x$     | 0 | $8\sqrt{2}$ | $10\sqrt{2}$             |   |
| $V'(x)$ |   | +           | 0                        | - |
| $V(x)$  |   |             | $\frac{256\sqrt{10}}{3}$ |   |

Vậy khi  $x = 8\sqrt{2}$  thì thể tích khối chóp lớn nhất  $V = \frac{256\sqrt{10}}{3}$  (m<sup>3</sup>).

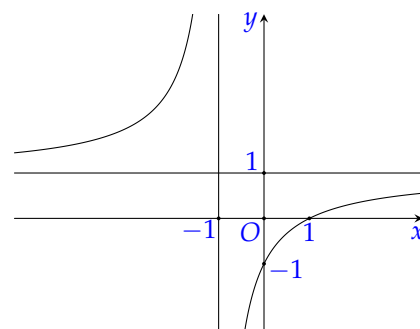
Diện tích phần bị cắt của tấm bạt là

$$S = S_{hv} - S_{ABCD} - 4 \cdot S_{\triangle SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Đáp án: 80 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Biết hàm số  $y = f(x) = \frac{x+a}{x+1}$  ( $a$  là số thực cho trước và  $a \neq 1$ ) có đồ thị (C) là đường cong trong hình bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên  $[0; 3]$ .



**Lời giải.**

Tập xác định của hàm số  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(1; 0)$  nên ta có

$$\frac{1+a}{1+1} = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định nên  $\max_{[0;3]} f(x) = f(3) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$ .

**Câu 2.** Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của học sinh lớp 12A thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

| Thời gian (phút)    | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số học sinh lớp 12A | 5        | 7        | 12       | 10       | 6        |

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

**Lời giải.**

Ta có mẫu số liệu học sinh lớp 12A là  $n_A = 5 + 7 + 12 + 10 + 6 = 40$ ;

Ta có giá trị đại diện của nhóm là  $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ .

Suy ra, các giá trị đại diện các nhóm lần lượt là 15; 25; 35; 45; 55 nên có bảng

| Giá trị đại diện    | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
|---------------------|----|----|----|----|----|
| Số học sinh lớp 12A | 5  | 7  | 12 | 10 | 6  |

Thời gian tập trung bình của học sinh lớp 12A là

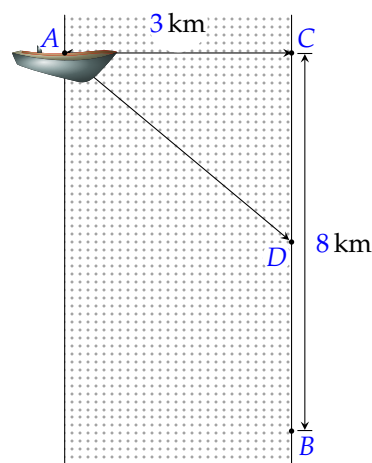
$$\bar{x}_A = \frac{15 \cdot 5 + 25 \cdot 7 + 35 \cdot 12 + 45 \cdot 10 + 55 \cdot 6}{40} = 36,25.$$

Phương sai của mẫu số liệu học sinh lớp 12A là

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{1}{40} \left[ (15 - 36,25)^2 \cdot 5 + (25 - 36,25)^2 \cdot 7 + (35 - 36,25)^2 \cdot 12 \right. \\ &\quad \left. + (45 - 36,25)^2 \cdot 10 + (55 - 36,25)^2 \cdot 6 \right] \\ &= 150,9375. \end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu học sinh lớp 12A là  $S = \sqrt{150,9375} \approx 12,29$ .

**Câu 3.** Một người đàn ông muốn di chuyển từ vị trí  $A$  tới vị trí  $B$  ở phía bờ đối diện một con sông có bề rộng 3 km. Người đàn ông dự định sẽ chèo thuyền từ  $A$  đến vị trí  $D$  nằm giữa  $B$  và  $C$ , rồi sau đó sẽ chạy bộ đến  $B$  (tham khảo hình vẽ). Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 5 km/h, chạy bộ với vận tốc 10 km/h và quãng đường  $BC = 8$  km. Giả sử dòng của con sông không ảnh hưởng đến việc chèo thuyền của người đàn ông, tính khoảng thời gian ngắn nhất mà người đàn ông có thể di chuyển từ  $A$  đến  $B$  (đơn vị: phút và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



**Lời giải.**

Gọi  $x$  (km) là độ dài quãng đường  $DC$  ( $0 \leq x \leq 8$ ).

Khi đó, ta có  $BD = 8 - x$ .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường  $AD$  là  $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{5}$  (giờ).

Thời gian chạy bộ trên quãng đường  $DB$  là  $\frac{8 - x}{10}$  (giờ).

Tổng thời gian di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{5} + \frac{8 - x}{10}$ .

Xét hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{5} + \frac{8 - x}{10}$  trên khoảng  $(0; 8)$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{x}{5\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{10}$ .

Phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 9 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

|         |               |               |                       |
|---------|---------------|---------------|-----------------------|
| $x$     | 0             | $\sqrt{3}$    | 8                     |
| $f'(x)$ |               | 0             |                       |
|         |               | –             | +                     |
| $f(x)$  | $\frac{7}{5}$ | $f(\sqrt{3})$ | $\frac{\sqrt{73}}{5}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra thời gian ngắn nhất để di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là

$$f(\sqrt{3}) = \frac{8 + 3\sqrt{3}}{10} \text{ (giờ)} \approx 79 \text{ (phút)}.$$

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. C   2. D   3. C   4. B   5. C   6. B   7. B   8. D   9. C   10. A   11. D   12. A

### PHẦN II.

Câu 1.      a Đ b Đ c S d Đ      Câu 2.      a Đ b S c Đ d S

### PHẦN III.

Câu 1.   1   0   ,   5      Câu 2.   3   7            Câu 3.   4   ,   2   5      Câu 4.   8   0

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |   |   |    |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0 |   | 3  |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | 0 | - | 0  | + |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |   | 2 |   | -4 |   | $+\infty$ |

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0.

B. 2.

☒ C. -4.

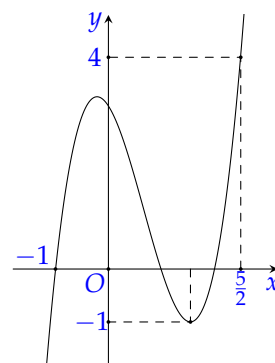
D. 3.

Lời giải.

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x_{CT} = 3$ , giá trị cực tiểu  $y_{CT} = -4$ .

Chọn đáp án ☒ ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên đoạn  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$  và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$  là

A.  $M = 4, m = 1$ .☒ B.  $M = 4, m = -1$ .C.  $M = \frac{7}{2}, m = -1$ .D.  $M = \frac{7}{2}, m = 1$ .

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra  $M = \max_{\left[-1; \frac{5}{2}\right]} f(x) = 4$ ;  $m = \min_{\left[-1; \frac{5}{2}\right]} f(x) = -1$ .

Chọn đáp án ☒ ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $x = 2$  và đường thẳng  $x = -2$ .

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

☒ D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 2$  và đường thẳng  $y = -2$ .

Lời giải.

Theo định nghĩa, đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 2$  và đường thẳng  $y = -2$ .

Chọn đáp án **(D)** ..... □

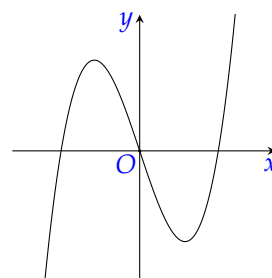
**Câu 4.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

**A**  $y = x^3 - 3x$ .

**B.**  $y = -x^3 + 3x$ .

**C.**  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**D.**  $y = -x^3 + 3x^2$ .



**Lời giải.**

Từ đồ thị ta thấy, đồ thị này là đồ thị hàm bậc ba có hệ số  $a > 0$ .

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ  $O$  nên hàm số có hệ số tự do là  $0$ .

Suy ra  $y = x^3 - 3x$  là phương án thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(A)** ..... □

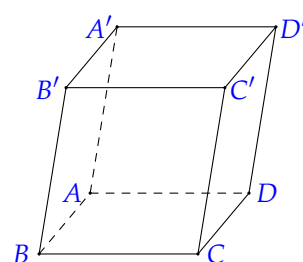
**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$  bằng

**A**  $\overrightarrow{AD'}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AB'}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AC'}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AC}$ .



**Lời giải.**

Theo quy tắc hình bình hành, ta có  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'}$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (3; -1; 2)$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  bằng

**A.**  $\sqrt{6}$ .

**B**  $\sqrt{14}$ .

**C.**  $2$ .

**D.**  $4$ .

**Lời giải.**

Ta có  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 7.** Bảng dưới thống kê khối lượng (đơn vị: gam) của một số quả táo được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng.

| Khối lượng | [80; 82) | [82; 84) | [84; 86) | [86; 88) | [88; 90) |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số quả     | 17       | 20       | 25       | 16       | 12       |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A**  $10$ .

**B.**  $12$ .

**C.**  $22$ .

**D.**  $20$ .

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $90 - 80 = 10$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 8.** Một mẫu số liệu có bảng tần số ghép nhóm như sau:

| Nhóm   | [1; 5) | [5; 9) | [9; 13) | [13; 17) | [17; 21) |
|--------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Tần số | 4      | 8      | 13      | 6        | 4        |

Phương sai (làm tròn đến hàng đơn vị) của mẫu số liệu trên là

**A**  $21$ .

**B.**  $20$ .

**C.**  $22$ .

**D.**  $23$ .

**Lời giải.**

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

| Nhóm             | [1; 5) | [5; 9) | [9; 13) | [13; 17) | [17; 21) |
|------------------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Giá trị đại diện | 3      | 7      | 11      | 15       | 19       |
| Tần số           | 4      | 8      | 13      | 6        | 4        |

Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\bar{x} = \frac{1}{35} (3 \cdot 4 + 7 \cdot 8 + 11 \cdot 13 + 15 \cdot 6 + 19 \cdot 4) = \frac{377}{35}.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{1}{35} (4 \cdot 3^2 + 8 \cdot 7^2 + 13 \cdot 11^2 + 6 \cdot 15^2 + 4 \cdot 19^2) - \left( \frac{377}{35} \right)^2 \approx 21.$$

Chọn đáp án **A** .....  $\square$

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; 1)$ .      B.  $(-\infty; -1)$ .      **C**  $(1; 3)$ .      D.  $(3; +\infty)$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{nghiệm kép}) \\ x = -1 & (\text{nghiệm bội 3}) \\ x = 3 & (\text{nghiệm đơn}). \end{cases}$$

Bảng xét dấu

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       |

Từ bảng xét dấu, hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$ .

Chọn đáp án **C** .....  $\square$

**Câu 10.** Công suất  $P$  (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12 V được cho bởi công thức  $P = 12I - 0,5I^2$  với  $I$  (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Công suất tối đa của mạch điện là

- A** 72 W.      B. 12 W.      C.  $-\frac{1}{192}$  W.      D.  $\frac{23}{2}$  W.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $P(I) = 12I - 0,5I^2$  với  $I \geq 0$  có đạo hàm  $P'(I) = 12 - I$ .

Ta có  $P'(I) = 0 \Leftrightarrow I = 12$ .

Bảng biến thiên

| $I$     | 0 | 12 | $+\infty$ |
|---------|---|----|-----------|
| $P'(I)$ |   | 0  | $-$       |
| $P(I)$  | 0 | 72 | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên, ta suy ra công suất tối đa của mạch điện là 72 W đạt được khi cường độ dòng điện là 12 A.

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 11.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  trên đoạn  $[0; 4]$ . Tính tổng  $S = M + m$ .

A.  $\frac{7}{3}$ .

B. 1.

**C**  $\frac{10}{3}$ .

D. 4.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Ta có  $y(0) = 1; y(1) = \frac{7}{3}; y(3) = 1; y(4) = \frac{7}{3}$ .

Vậy  $\begin{cases} M = \max_{[0;4]} y = y(1) = y(4) = \frac{7}{3} \\ m = \min_{[0;4]} y = y(0) = y(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow S = M + m = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 12.** Cho ba điểm  $A(3; 1; 0), B(2; 1; -1), C(x; y; -1)$ . Tọa độ của  $C$  để  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$  là

A.  $C(4; 1 + \sqrt{2}; -1), (4; 1 - \sqrt{2}; -1)$ .

**B**  $C(4; 1; -1)$ .

C.  $C(2; 1; -1)$ .

D.  $C(2; -1; -1)$ .

**Lời giải.**

$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; -1) \Rightarrow AB^2 = 2, \overrightarrow{AC} = (x - 3; y - 1; -1) \Rightarrow AC = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 1}$ .

Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \\ AB = AC \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AC^2 = AB^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -1(x - 3) + 0(y - 1) + 1 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 1 = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $C(4; 1; -1)$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

|         |           |     |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ |           |
| $f(t)$  | 142       |     |      |     | 38  |     |           |
|         |           |     | 8    |     |     | 14  |           |

a) Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 142.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(8; 38)$ .

c) Đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+2}{f(x)+14}$  không có tiệm cận đứng.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x^2 - 3)$  là 8.  
Lời giải.

a) **S** Hàm số chỉ đạt cực đại tại  $x = 1$  và giá trị cực đại  $y = 38$ .

b) **S** Ta thấy  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

c) **D** Xét phương trình  $f(x) + 14 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -14$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x) \geq 8, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình  $f(x) = -14$  vô nghiệm.

Do đó, không tồn tại  $x_0$  để  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x+2}{f(x)+14}$  có giá trị vô cực.

Suy ra đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+2}{f(x)+14}$  không có tiệm cận đứng.

d) **D** Đặt  $g(x) = f(x^2 - 3)$ .

$$\text{Khi đó } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g(\pm\sqrt{2}) = f(2 - 3) = f(-1) = 8, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x^2 - 3) = 14.$$

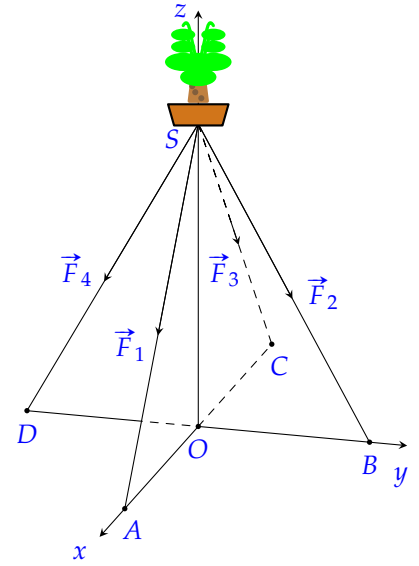
Suy ra bảng biến thiên:

|         |           |      |             |     |            |     |           |     |
|---------|-----------|------|-------------|-----|------------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $g'(x)$ |           | $+$  | $0$         | $-$ | $0$        | $+$ | $0$       | $-$ |
| $g(x)$  |           |      |             |     |            |     |           |     |
|         | $14$      |      | $8$         |     | $8$        |     | $14$      |     |

Dựa vào bảng biến thiên hàm số  $y = g(x)$  có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Chọn đáp án a sai b sai c đúng d đúng ..... □

**Câu 2.** Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân. Trong hệ trục tọa độ được chọn, có điểm đặt  $S(0;0;30)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(30;0;0)$ ,  $B(0;30;0)$ ,  $C(-30;0;0)$ ,  $D(0;-30;0)$  (đơn vị cm). Biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn  $80\text{ N}$  và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau (như hình bên).



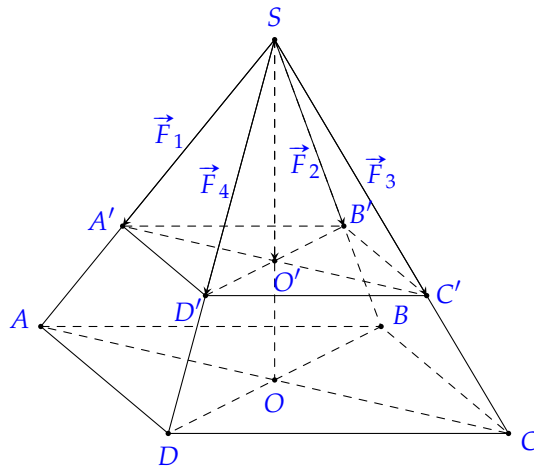
a) Độ dài vector  $\vec{SA}$  là  $30\sqrt{3}$ .

b) Hình chóp  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều.

c) Hình chóp  $S.A'B'C'D'$  là hình chóp tứ giác đều. Biết  $A', B', C', D'$  lần lượt là điểm cuối của các vector lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ .

d) Biết  $\vec{F}_1 = (a; b; c)$  khi đó  $a + b - c = 20$ .

**Lời giải.**



a) **S** Ta có  $\vec{SA} = (30;0;-30) \Rightarrow SA = \sqrt{30^2 + 0^2 + (-30)^2} = 30\sqrt{2}$ .

b) **D** Theo hình vẽ tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có  $\vec{SB} = (0;30;-30)$ ,  $\vec{SC} = (-30;0;-30)$ ,  $\vec{SD} = (0;-30;-30)$ .

Suy ra  $SA = SB = SC = SD = 30\sqrt{2}$ .

Vậy  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều.

c) **D** Bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau, vector  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có điểm đầu tại  $S$  và điểm cuối lần lượt là  $A', B', C', D'$ .

Suy ra  $SA' = SB' = SC' = SD'$  nên  $S.A'B'C'D'$  cũng là hình chóp tứ giác đều.

d) **S** Gọi  $\vec{P}$  là trọng lực tác dụng lên chậu cây và  $O'$  là tâm của hình vuông  $A'B'C'D'$ .

Ta có  $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} + \vec{SD'} = 4\vec{SO'}$ .

Mặt khác  $|\vec{P}| = 80$ , suy ra  $|\vec{SO'}| = SO' = 20$ .

Ta có  $AC = \sqrt{(-60)^2 + 0^2 + 0^2} = 60 \Rightarrow AO = 30 \Rightarrow \sin \widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ASO} = 45^\circ$ .

Suy ra tam giác  $SO'A'$  vuông cân tại  $O'$  nên  $SA' = SO'\sqrt{2} = 20\sqrt{2} = \frac{2}{3}SA$ .

$$\text{Suy ra } \vec{F}_1 = \vec{SA'} = \frac{2}{3}\vec{SA} = (20; 0; -20) \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 0 \\ c = -20 \end{cases} \text{ nên } a + b - c = 40.$$

Chọn đáp án ☐ a sai ☒ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 1; -2)$  và  $\vec{v} = (1; 0; m)$ . Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị  $m$  để hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Số phần tử của  $S$  là bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot m}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + m^2}} = \frac{1 - 2m}{\sqrt{6(1 + m^2)}}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos 60^\circ &\Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6(1 + m^2)}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 - 4m = \sqrt{6(1 + m^2)}. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4m \geq 0 \\ 6(1 + m^2) = (2 - 4m)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ 10m^2 - 16m - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} m = \frac{4 + \sqrt{21}}{5} \\ m = \frac{4 - \sqrt{21}}{5} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = \frac{4 - \sqrt{21}}{5}. \end{aligned}$$

Vậy có 1 giá trị  $m$  thỏa mãn.

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ ?

Đáp án:

**Lời giải.**

Gọi  $M(x; y; z)$ . Ta có  $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \\ \vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0 \\ \vec{CM} \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) + y(y - 2) + z^2 = 0 \\ x^2 + y(y - 2) + z(z - 2) = 0 \\ x(x - 2) + y^2 + z(z - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = \frac{4}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy có hai điểm  $M$  thỏa mãn là  $M(0;0;0)$ ,  $M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

Đáp án: **2** ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 2}$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến  $\Delta$  là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Đáp án: **1, 7, 9**

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

Ta có  $y' = \frac{x^2 + 4x - 9}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{13} \\ x = -2 - \sqrt{13} \end{cases}$ .

Với  $x = -2 - \sqrt{13} \Rightarrow y = -8 - 2\sqrt{13} \Rightarrow A(-2 - \sqrt{13}; -8 - 2\sqrt{13})$ .

Với  $x = -2 + \sqrt{13} \Rightarrow y = -8 + 2\sqrt{13} \Rightarrow B(-2 + \sqrt{13}; -8 + 2\sqrt{13})$ .

Ta có bảng biến thiên

|         |           |                   |           |                  |                   |            |
|---------|-----------|-------------------|-----------|------------------|-------------------|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2 - \sqrt{13}$  | $-2$      | $-2 + \sqrt{13}$ | $+\infty$         |            |
| $y'(x)$ |           | $+$               | $0$       | $-$              | $0$               | $+$        |
| $y(x)$  |           | $-8 - 2\sqrt{13}$ |           | $+ \infty$       |                   | $+ \infty$ |
|         | $-\infty$ |                   | $-\infty$ |                  | $-8 + 2\sqrt{13}$ |            |

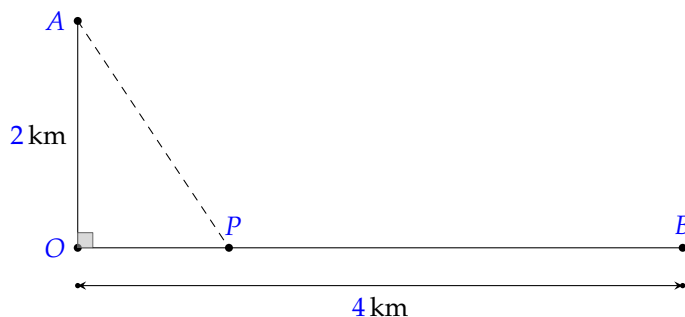
Đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm cực trị  $A$  và  $B$  của đồ thị hàm số có phương trình

$$\frac{x + 2 + \sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{y + 8 + 2\sqrt{13}}{4\sqrt{13}} \Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0.$$

Vậy  $d(O, \Delta) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79$ .

Đáp án: **1,79** ..... □

**Câu 4.** Anh Tư đang trên chiếc thuyền tại vị trí  $A$  cách bờ sông  $2$  km, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm  $B$  tọa lạc ven bờ sông (như hình vẽ minh họa bên dưới),  $B$  cách vị trí  $O$  trên bờ gần với thuyền nhất là  $4$  km. Biết rằng anh Tư chèo thuyền với vận tốc  $6$  km/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc  $10$  km/h. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Tư đi từ vị trí xuất phát đến được điểm  $B$  là bao nhiêu phút?



Đáp án: **4, 0**

**Lời giải.**

Đặt  $OP = x$  ( $0 < x < 4$ )  $\Rightarrow BP = 4 - x$ ;  $AP = \sqrt{4 + x^2}$ .

Khoảng thời gian để anh Tư đi từ vị trí xuất phát đến được điểm  $B$  là

$$t = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{6} + \frac{4 - x}{10} \text{ (h)}.$$

Suy ra  $t' = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}$ .

Xét  $t' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .

Bảng biến thiên

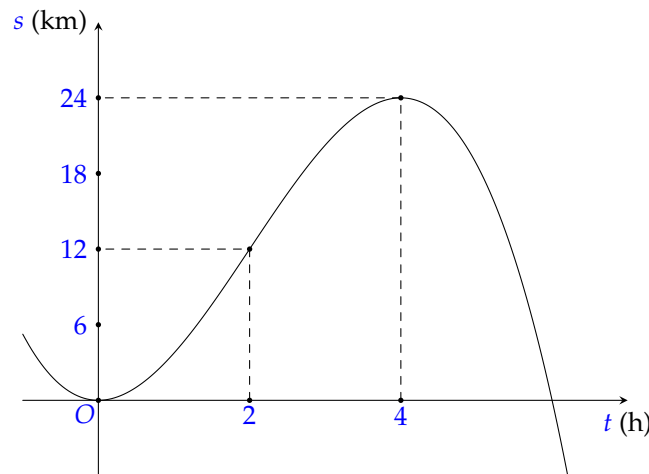
|         |                 |               |                      |
|---------|-----------------|---------------|----------------------|
| $x$     | 0               | $\frac{3}{2}$ | 4                    |
| $t'(x)$ | —               | 0             | +                    |
| $t(x)$  | $\frac{11}{15}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{\sqrt{5}}{3}$ |

Từ bảng biến thiên suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Tư từ vị trí xuất phát đến được điểm B là  $t_{\min} = \frac{2}{3}$  (h) = 40 (phút).

Đáp án: 40 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Thầy Toán tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC” năm 2024. Thầy Toán đã hoàn thành quãng đường dài 24 km sau 4 h đi bộ và quãng đường này được biểu diễn là một phần đồ thị của hàm số bậc ba  $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  (trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giờ,  $s$  là quãng đường tính bằng kilômét) như hình vẽ sau:



Tính vận tốc tối đa của thầy Toán đạt được trong quá trình đi bộ (đơn vị km/h).

**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm:  $O(0;0)$ ,  $A(2;12)$ ,  $B(4;24)$  và nhận  $B(4;24)$  làm một điểm cực trị.

Theo giả thiết  $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \Rightarrow s'(t) = 3at^2 + 2bt + c$ .

Khi đó, ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(2) = 12 \\ s(4) = 24 \\ s'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 12 \\ 64a + 16b + 4c + d = 24 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{2} \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Nên  $s(t) = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{9}{2}t^2 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$ .

Thầy Toán dừng đi bộ khi  $v(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}t^2 + 9t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4. \end{cases}$

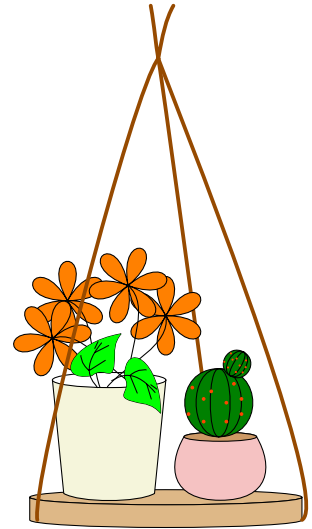
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của  $v(t)$  trên  $[0; 4]$ .

Ta có  $v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ .

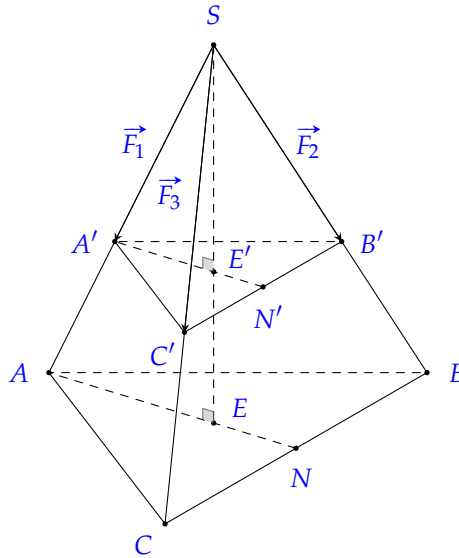
Khi đó  $v(0) = 0, v(2) = 9, v(4) = 0$ .

Vậy vận tốc lớn nhất mà thầy Toán đạt được là 9 (km/h) tại thời điểm  $t = 2$  (h).

**Câu 2.** Cô Lan là người thích làm những giỏ hoa treo trong nhà (như hình bên) cô làm một giỏ hoa treo bằng 3 sợi dây mỗi sợi dài 60 cm, miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính 20 cm, ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại ba điểm tạo thành tam giác đều. Tính khối lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt, biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi chịu không quá 15 N, trọng lượng của miếng giá gỗ là 5 N (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm), lấy gia tốc trọng trường  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .



**Lời giải.**



Ta thấy đầu dây và các điểm tiếp xúc tạo thành một hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , có  $SA = SB = SC = 60 \text{ cm}$ .

Gọi  $E$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $AE$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC \Rightarrow AE = 20$ .

Ta có  $\sin \widehat{ASE} = \frac{AE}{AS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \widehat{ASE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  (vì góc  $\widehat{ASE}$  nhọn).

Các vector  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có điểm đầu tại  $S$  và điểm cuối lần lượt là  $A', B', C'$ .

Ta có  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| \leq 15 \text{ (N)} \Rightarrow SA' = SB' = SC'$  nên  $S.A'B'C'$  là hình chóp đều.

Suy ra  $SE' = SA' \cdot \cos \widehat{A'SE'} \Rightarrow SE' \leq 15 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$ .

Mặt khác  $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} = 3\vec{SE'}$ .

Suy ra  $P = 3SE' \leq 3 \cdot 10\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$ .

Trọng lượng của các chậu hoa không được vượt quá  $30\sqrt{2} - 5 \approx 37,43 \text{ (N)}$ .

Vậy khối lượng tối đa của chậu hoa là  $m \leq 37,43 : 10 \approx 3,74 \text{ (kg)}$ .

**Câu 3.** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

|                    |           |            |            |            |            |
|--------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| Độ dài quãng đường | [50; 100) | [100; 150) | [150; 200) | [200; 250) | [250; 300) |
| Số ngày            | 5         | 10         | 9          | 4          | 2          |

Tính khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

**Lời giải.**

- Cỡ mẫu  $n = 5 + 10 + 9 + 4 + 2 = 30$ .

Gọi  $x_1; \dots; x_{30}$  là mẫu số liệu gốc về độ dài quãng đường bác tài xế đã lái xe mỗi ngày trong một tháng được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có  $x_1; \dots; x_5 \in [50; 100)$ ,  $x_6; \dots; x_{15} \in [100; 150)$ ,  $x_{16}; \dots; x_{24} \in [150; 200)$ ,  $x_{25}; \dots; x_{28} \in [200; 250)$ ,  $x_{29}; x_{30} \in [250; 300)$ .

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là  $x_8 \in [100; 150)$ .

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 100 + \frac{\frac{30}{4} - 5}{10} \cdot (150 - 100) = 112,5.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là  $x_{23} \in [150; 200)$ .

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 150 + \frac{\frac{3 \cdot 30}{4} - (5 + 10)}{9} \cdot (200 - 150) = \frac{575}{3}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{575}{3} - 112,5 \approx 79,17.$$

- Ta có bảng sau:

|                    |           |            |            |            |            |
|--------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| Độ dài quãng đường | [50; 100) | [100; 150) | [150; 200) | [200; 250) | [250; 300) |
| Giá trị đại diện   | 75        | 125        | 175        | 225        | 275        |
| Số ngày            | 5         | 10         | 9          | 4          | 2          |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 75 + 10 \cdot 125 + 9 \cdot 175 + 4 \cdot 225 + 2 \cdot 275}{30} = 155.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{1}{30} \left[ 5 \cdot 75^2 + 10 \cdot 125^2 + 9 \cdot 175^2 + 4 \cdot 225^2 + 2 \cdot 275^2 \right] - 155^2 = 3\,100.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3\,100} \approx 55,68.$$

**BẢNG ĐÁP ÁN**

## PHẦN I.

1. C
2. B
3. D
4. A
5. A
6. B
7. A
8. A
9. C
10. A
11. C
12. B

PHẦN II.

**Câu 1.**

a S b S c Đ d Đ

**Câu 2.**

a S b Đ c Đ d S

### PHẦN III.

Câu 1. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 1 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 2. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 2 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 3. 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | , | 7 | 9 |
|---|---|---|---|

    Câu 4. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 4 | 0 |  |  |
|---|---|--|--|

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-2$      | $-1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$       | $-$  | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$ | $2$  | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.  $(-3; -1)$ .      B.  $(-\infty; -3)$ .      C.  $(-1; +\infty)$ .      **D**  $(-3; -2)$ .

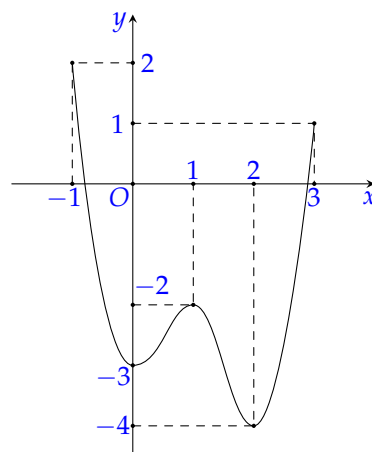
**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ , hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-3; -2)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của  $M + m$  là

- A. 2.      B. -6.  
C. -5.      **D** -2.



**Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , ta có  $M = \max_{x \in [-1; 3]} y = f(-1) = 2$  và  $m = \min_{x \in [-1; 3]} y = f(2) = -4$ .

Suy ra  $M + m = -2$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$       |
| $f(x)$  | $-1$      | $1$       |

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là

A. 3.

**B. 2.**

C. 1.

D. 0.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$  nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 1$  và đường thẳng  $y = -1$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

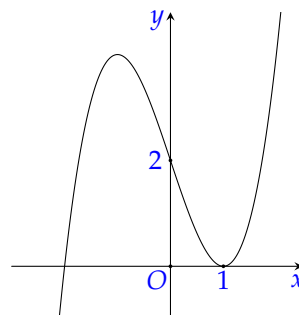
**Câu 4.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A.  $y = -x^3 + 3x + 2$ .

B.  $y = x^2 + 1$ .

C.  $y = x^3 + x^2 + 1$ .

**D.  $y = x^3 - 3x + 2$ .**



**Lời giải.**

Đường cong trong hình là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số  $a > 0$ .

Vì đồ thị đi qua điểm  $(0; 2)$  nên hàm số có hệ số tự do là 2.

Suy ra hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  là phương án thỏa đề.

Chọn đáp án **(D)** ..... □

**Câu 5.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ ngược hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .

**D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .**

**Lời giải.**

Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ ngược hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$  nên  $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ .

Suy ra  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

Chọn đáp án **(D)** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; -1)$  và  $B(2; 3; 2)$ . Vectơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

**A.  $(1; 2; 3)$ .**

B.  $(-1; -2; 3)$ .

C.  $(3; 5; 1)$ .

D.  $(3; 4; 1)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3)$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 7.** Giả sử kết quả khảo sát khu vực A về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

|                     |          |          |          |          |          |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tuổi kết hôn        | [19; 22) | [22; 25) | [25; 28) | [28; 31) | [31; 34) |
| Số phụ nữ khu vực A | 10       | 27       | 31       | 25       | 7        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

**A. 15.**

B. 12.

C. 5,17.

D. 3.

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực A là  $R = 34 - 19 = 15$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 8.** Đo chiều cao (tính bằng cm) của 500 học sinh trong một trường THPT ta thu được kết quả ở bảng sau:

|             |            |            |            |            |            |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Chiều cao   | [150; 154) | [154; 158) | [158; 162) | [162; 166) | [166; 170) |
| Số học sinh | 25         | 50         | 200        | 175        | 50         |

Độ lệch chuẩn (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 161,4.      B. 3,85.      C. 8,2.      D. 14,48.

Lời giải.

Ta có chiều cao trung bình là

$$\bar{x} = \frac{1}{500}(152 \cdot 25 + 156 \cdot 50 + 160 \cdot 200 + 164 \cdot 175 + 168 \cdot 50) = 161,4.$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{500} [25(152 - 161,4)^2 + 50(156 - 161,4)^2 + 200(160 - 161,4)^2 \\ &\quad + 175(164 - 161,4)^2 + 50(168 - 161,4)^2] \\ &= \frac{371}{25} = 14,84. \end{aligned}$$

Suy ra độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{14,84} \approx 3,85$ .

Chọn đáp án B ..... □

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ . Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

- A. -3.      B. 1.      C. 2.      D. -6.

Lời giải.

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có  $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ .

Phương trình  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$

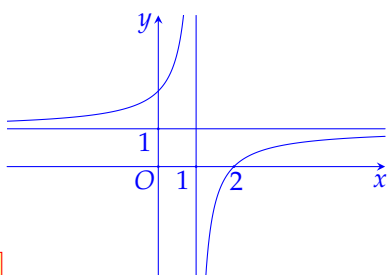
Bảng biến thiên của hàm số như sau:

|      |           |      |           |     |           |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-1$      | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$       | $-$ |           |
| $y$  | $-\infty$ | $-6$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |

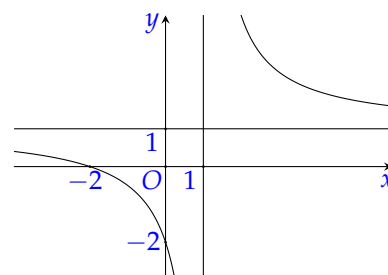
Suy ra giá trị cực tiểu của hàm số bằng 2.

Chọn đáp án C ..... □

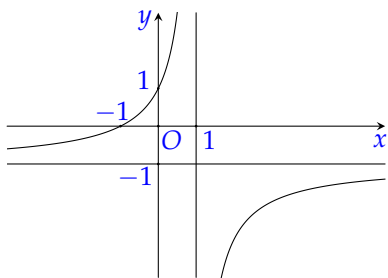
**Câu 10.** Đường cong trong hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$ ?



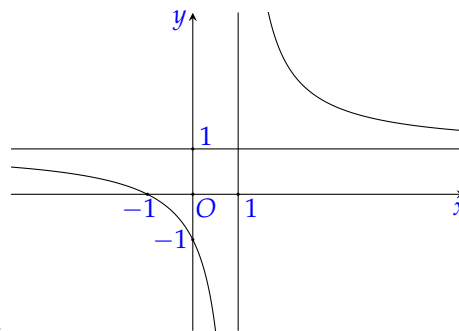
A



B.



C.



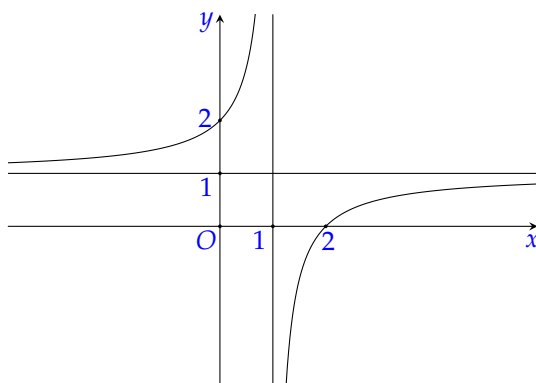
D.

**Lời giải.**

Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$  có các tính chất:

- Đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ ;
- Đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ ;
- Đồ thị cắt trục hoành  $Ox$  tại điểm  $A(2; 0)$ ;
- Đồ thị cắt trục tung  $Oy$  tại điểm  $B(0; 2)$ .

Do đó, đồ thị hàm số là đường cong như hình sau:



Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 11.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$  với  $t \geq 0$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $S$  tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

- A.  $(0; +\infty)$ .      B.  $(0; 3)$ .      C.  $(-4; +\infty)$ .      **D**.  $(3; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Phương trình vận tốc của chuyển động là  $v(t) = S'(t) = t^2 - 6t + 5$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $v(t) = t^2 - 6t + 5$  trên  $[0; +\infty)$  như sau:

|         |   |    |           |
|---------|---|----|-----------|
| $t$     | 0 | 3  | $+\infty$ |
| $v'(t)$ |   | 0  |           |
|         | 5 | -4 | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của hàm số  $v(t)$ , suy ra vận tốc của vật tăng trong khoảng  $(3; +\infty)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 12.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A_1B_1C_1$ . Đặt  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$ .  
 Đẳng thức nào sau đây đúng?

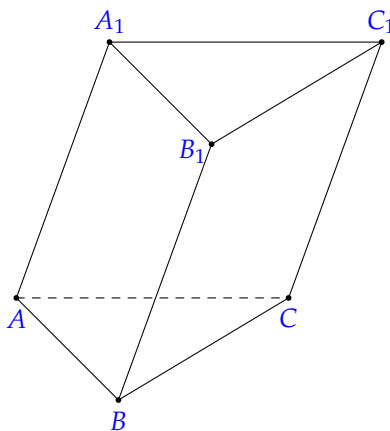
A.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

B.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ .

**C**  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

D.  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .

Lời giải.



Ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} + \vec{d} - \vec{c} = \vec{0}.$$

Chọn đáp án **C** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

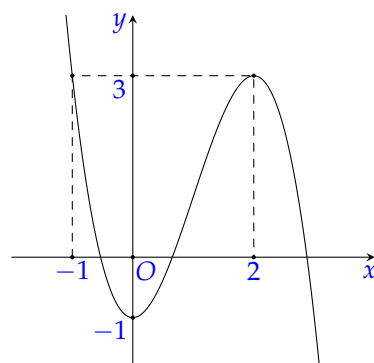
**Câu 1.** Cho hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị là đường cong trong hình bên.

**a** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

**b** Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = -1$ .

**c** Phương trình  $f(x) = 2$  có ba nghiệm phân biệt.

**d** Phương trình  $f(f(x)) = 4$  có sáu nghiệm phân biệt.

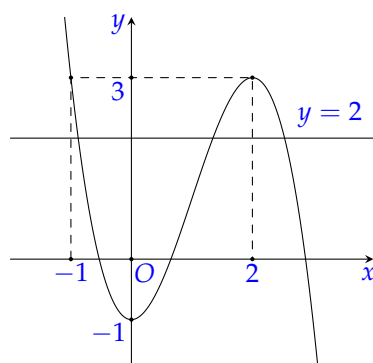


Lời giải.

a) **D** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

b) **S** Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ .

c) **D**

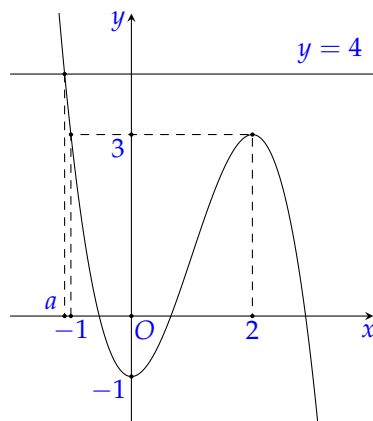


Phương trình  $f(x) = 2$  là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = 2$ .

Vẽ đường thẳng  $y = 2$  trên cùng hệ trục tọa độ  $Oxy$  với đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

Ta thấy đường thẳng  $y = 2$  cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt nên phương trình  $f(x) = 2$  có ba nghiệm phân biệt.

d) **S**



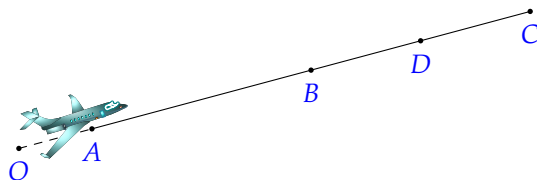
Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , ta suy ra  $f(f(x)) = 4 \Leftrightarrow f(x) = a$ , với  $a < -1$ .

Lại có, đường thẳng  $y = a$  với  $a < -1$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại đúng một điểm.

Suy ra phương trình  $f(f(x)) = 4$  có đúng một nghiệm.

Chọn đáp án **a đúng** | **b sai** | **c đúng** | **d sai** ..... ☐

**Câu 2.** Một máy bay xuất phát từ mặt đất từ vị trí gốc tọa độ  $O$  (mặt đất đặt trùng với mặt phẳng  $(Oxy)$ ) theo phương như hình vẽ với vận tốc không đổi.



Rađa phát hiện máy bay đi từ điểm  $A(800;500;7)$  đến điểm  $B(940;550;8)$  trong 10 phút. Các kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị và đơn vị đo là km.

**a** **Quãng đường di chuyển của máy bay từ A đến B xấp xỉ 149 km.**

**b** Độ cao của máy bay tại vị trí A so với mặt đất bằng 943 km.

**c** Sau 10 phút kể từ vị trí B, máy bay sẽ nâng lên đến độ cao 14 km.

**d** **Toạ độ của máy bay sau 15 phút quan sát của rađa là  $(1\,010;575;8,5)$ .**

**Lời giải.**

**a** **D** Ta có  $AB = \sqrt{(940 - 800)^2 + (550 - 500)^2 + (8 - 7)^2} = \sqrt{22\,101} \approx 149$  (km).

Vậy quãng đường di chuyển của máy bay từ A đến B xấp xỉ 149 km.

**b** **S** Độ cao tại vị trí A là  $z_A = 7$  km.

**c** **S** Sau 10 phút kể từ vị trí B, máy bay sẽ bay đến điểm C sao cho B là trung điểm AC. Khi đó tọa độ  $C(1\,080;600;9)$ . Suy ra độ cao của máy bay là  $z_C = 9$  km.

**d** **D** Gọi D là vị trí mới của máy bay sau 15 phút kể từ vị trí A. Khi đó, D là trung điểm của đoạn thẳng BC. Suy ra, tọa độ  $D(1\,010;575;8,5)$ .

Chọn đáp án **a đúng** | **b sai** | **c sai** | **d đúng** ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; -2; 2)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(2; 2; 0)$ . Điểm  $M$  có tọa độ  $M(a; b; c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho  $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức  $P = 3a - 2b + c$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Gọi  $I$  là điểm thỏa mãn  $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{OI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow & I\left(\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}; 1\right). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & |3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \\ &= |3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| \\ &= |3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{MI}| \\ &= 4MI. \end{aligned}$$

Do đó,  $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $MI$  nhỏ nhất, hay  $M$  là hình chiếu của  $I$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$ .

Suy ra  $M\left(0; -\frac{3}{2}; 1\right)$ .

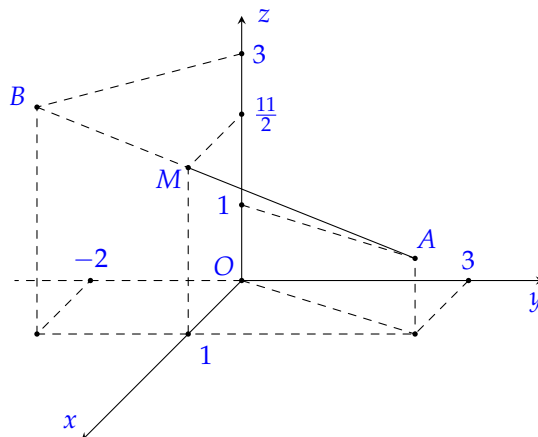
Vậy  $P = 3 \cdot 0 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = 4$ .

Đáp án:  ..... □

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 1)$ ,  $B(1; -2; 3)$ . Biết điểm  $M(a; b; c)$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$ . Giá trị của biểu thức  $P = b + 3c - a^2$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**



Điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxz)$  nên tọa độ có dạng  $M(a; 0; c)$ .

Suy ra  $b = 0$ .

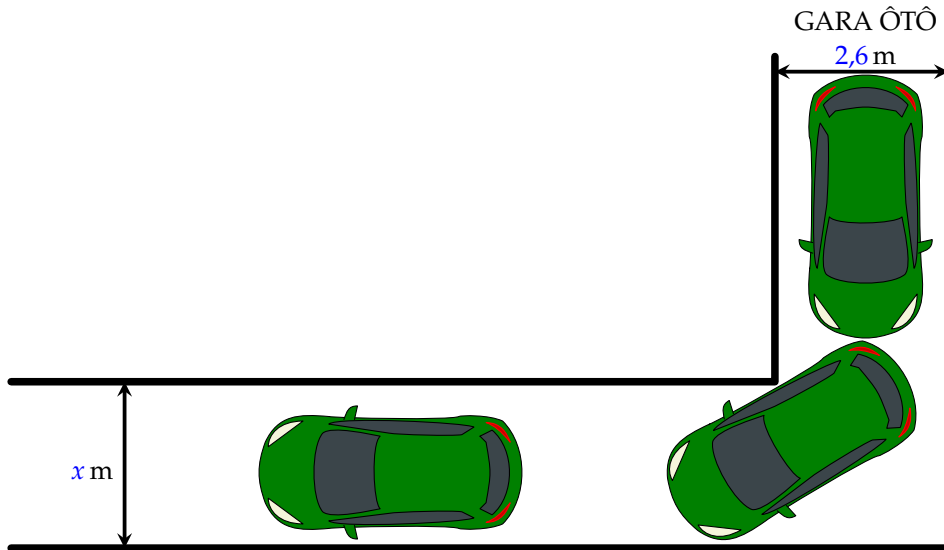
Ta có  $\overrightarrow{AB} = (0; -5; 2)$ ,  $\overrightarrow{AM} = (a - 1; -3; c - 1)$ .

Vì  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AM}$  là hai vectơ cùng phương nên  $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ \frac{c - 1}{2} = \frac{-3}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = \frac{11}{5} \end{cases}$ .

Vậy  $P = b + 3c - a^2 = 3 \cdot \frac{11}{5} - 1^2 = \frac{28}{5} = 5,6$ .

Đáp án: **5,6** ..... □

**Câu 3.** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào gara ô tô nhà cô Hiền.

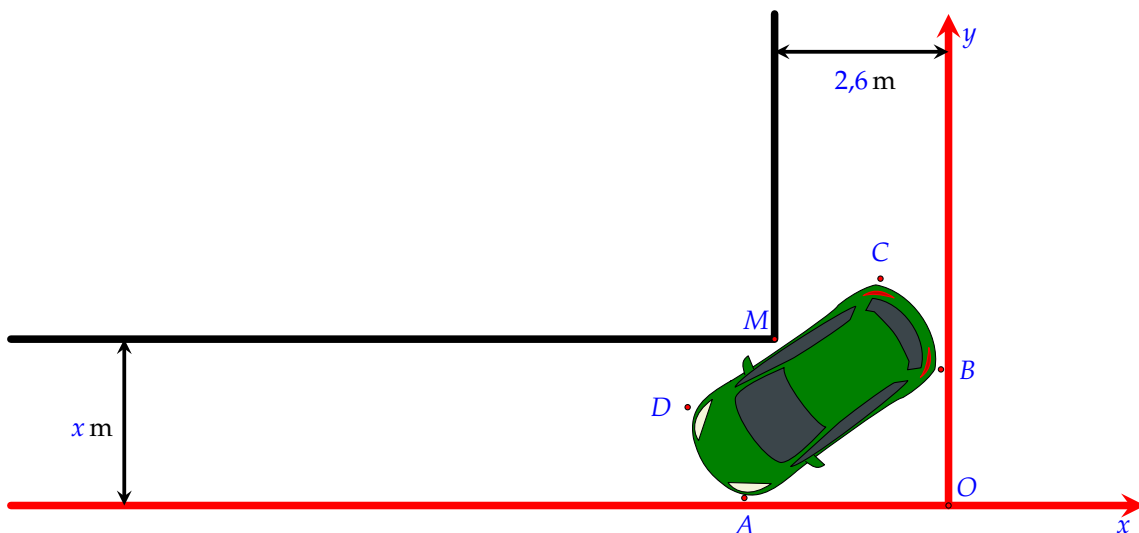


Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng  $x$  m, đoạn đường thẳng vào cổng gara có chiều rộng  $2,6$  m. Biết kích thước xe ô tô là  $5 \text{ m} \times 1,9 \text{ m}$ . Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài  $5$  m, chiều rộng  $1,9$  m. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên bằng bao nhiêu mét để ô tô có thể đi vào gara được (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Đáp án: **3 , 7** □

**Lời giải.**

Chọn hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ dưới.



Khi đó  $M(-2,6; x)$ .

Gọi  $A(-a; 0)$  suy ra  $B\left(0; \sqrt{25 - a^2}\right)$  (Điều kiện  $0 \leq a \leq 5$ ).

Phương trình  $AB$ :  $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25 - a^2}} - 1 = 0$ .

Do  $CD \parallel AB$  nên phương trình  $CD$ :  $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - T = 0$  ( $T \neq 1$ ).

Mà khoảng cách giữa  $AB$  và  $CD$  bằng 1,9 m nên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Rightarrow T = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là  $M, O$  nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng  $CD$  (Nếu  $M$  và  $O$  nằm cùng phía thì  $M$  sẽ nằm bên trong hình chữ nhật  $ABCD$ , điều này có nghĩa là điểm  $M$  sẽ làm biến dạng ô tô  $ABCD$ ).

Suy ra

$$\frac{-2,6}{-a} + \frac{x}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \cdot \sqrt{25-a^2}}{a}.$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(a) = \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \cdot \sqrt{25-a^2}}{a}$  trên khoảng  $(0;5)$

Ta có

$$f'(a) = \frac{-a^3 - 9,5\sqrt{25-a^2} + 65}{a^2\sqrt{25-a^2}}.$$

Giải  $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 3$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $f(a)$  trên khoảng  $(0;5)$

|         |   |   |        |   |
|---------|---|---|--------|---|
| $a$     | 0 | 3 | 5      |   |
| $f'(a)$ |   | + | 0      | - |
| $f(a)$  |   |   | $f(3)$ |   |

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên là  $f(3) \approx 3,7$  (m).

Đáp án: 3,7 ..... □

**Câu 4.** Một công ty sản xuất bồn chứa nước hình trụ loại 2000 lít kín hai đáy bằng inox. Biết rằng đơn giá của vật liệu làm hai mặt đáy bằng đơn giá của vật liệu để làm mặt xung quanh của bồn (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Để chi phí nhỏ nhất thì bán kính đáy của bồn là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Đáp án: 0,68

**Lời giải.**

Đổi đơn vị  $2000 \ell = 2 \text{ m}^3$ .

Gọi  $r$  (m) là bán kính đáy của hình trụ,  $h$  (m) là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ .

Do thể tích của hình trụ là  $2 \text{ m}^3$  nên ta có  $V = \pi r^2 h = 2$ , hay  $h = \frac{2}{\pi r^2}$ .

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là  $S = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}, r > 0$ .

Ta cần tìm  $r$  sao cho  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có  $S' = 4\pi r - \frac{4}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 4}{r^2}$ .

Phương trình  $S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 1 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ .

Bảng biến thiên của  $S$  như sau:

|         |           |                           |           |           |
|---------|-----------|---------------------------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ | $+\infty$ |           |
| $S'(r)$ |           | -                         | 0         | +         |
| $S(r)$  | $+\infty$ |                           |           | $+\infty$ |

$S\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,68$  m.

Đáp án: 0,68 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

|             |           |            |            |            |            |
|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| Quãng đường | [50; 100) | [100; 150) | [150; 200) | [200; 250) | [250; 300) |
| Số ngày     | 5         | 10         | 9          | 4          | 2          |

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Lời giải.**

Ta có bảng số liệu ghép nhóm như sau:

|                  |           |            |            |            |            |
|------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| Quãng đường      | [50; 100) | [100; 150) | [150; 200) | [200; 250) | [250; 300) |
| Giá trị đại diện | 75        | 125        | 175        | 225        | 275        |
| Số ngày          | 5         | 10         | 9          | 4          | 2          |
| Tần số tích lũy  | 5         | 15         | 24         | 28         | 30         |

Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\bar{x} = \frac{75 \cdot 5 + 125 \cdot 10 + 175 \cdot 9 + 225 \cdot 4 + 275 \cdot 2}{30} = 155.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s = \sqrt{\frac{1}{30} (5 \cdot 75^2 + 10 \cdot 125^2 + 9 \cdot 175^2 + 4 \cdot 225^2 + 2 \cdot 275^2) - 155^2} \approx 55,68.$$

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$  có đồ thị (C) và đường thẳng  $d: y = -mx + 1$  với  $m$  là tham số. Tìm các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-5; 5]$  để đường thẳng  $d$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C).

**Lời giải.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng  $d$  là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} &= -mx + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 &= (-mx + 1)(x + 2) \quad (\text{với } x \neq -2) \\ \Leftrightarrow (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + 1 &= 0. \quad (*) \end{aligned}$$

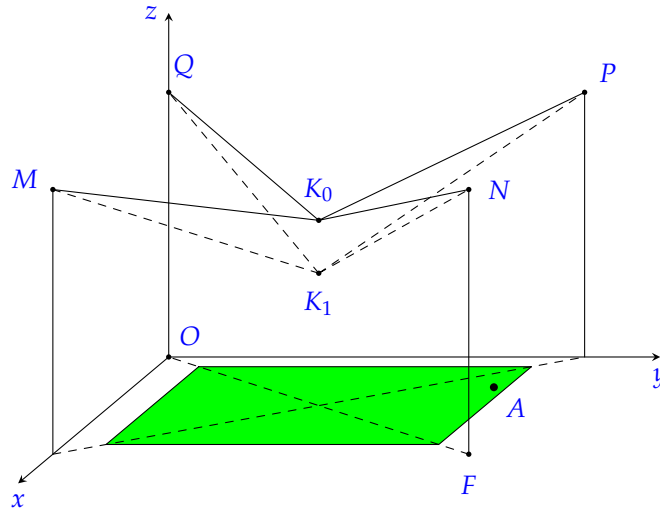
Đường thẳng  $d$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (C) khi và chỉ khi phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < -2 < x_2$ .

Do đó, ta có

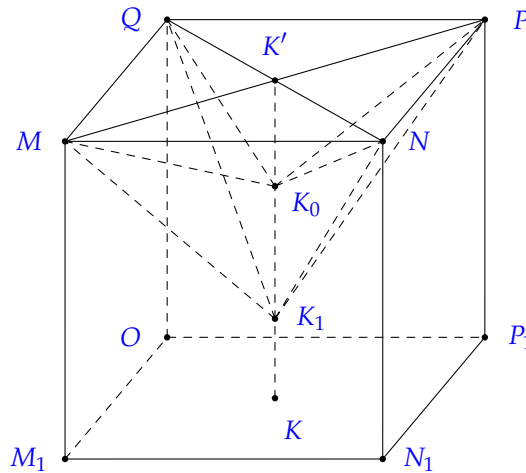
$$(m + 1) \left[ (m + 1)(-2)^2 + (2m + 1)(-2) + 1 \right] < 0 \Leftrightarrow 3(m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Kết hợp với điều kiện  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in [-5; 5]$ , ta suy ra  $m \in \{-5; -4; -3; -2\}$ .

**Câu 3.** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm  $M(90;0;30)$ ,  $N(90;120;30)$ ,  $P(0;120;30)$ ,  $Q(0;0;30)$  (tham khảo hình vẽ). Giả sử  $K_0$  là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ . Để theo dõi quả bóng đến vị trí  $A$ , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm  $K_1$  có cao độ bằng 19. Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{K_0K_1}$ .



**Lời giải.**



Gọi  $M_1, N_1, P_1, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M, N, P, K_0$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Ta thấy  $MNPQ.M_1N_1P_1O$  là hình hộp chữ nhật.

Gọi  $K'$  là giao hai đường chéo  $MP$  và  $NQ$ .

Khi đó, ta có  $K'Q = K'P = K'N = K'M$ . Vì  $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$  và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm  $K_0$  xuống điểm  $K_1$  nên các điểm  $K', K_0, K_1, K$  thẳng hàng.

Khi đó, các điểm  $K', K_0, K_1, K$  có hoành độ và tung độ bằng nhau.

Theo bài ra, cao độ của  $K_0$  và  $K_1$  lần lượt là 25 và 19.

Giả sử  $K_0(x; y; 25)$  và  $K_1(x; y; 19)$ .

Ta có  $MNPQ.M_1N_1P_1O$  là hình hộp chữ nhật nên  $K'K = OQ$ .

Suy ra cao độ của  $K'$  bằng 30.

Do đó  $K'(x; y; 30)$ .

Vì  $K'$  là giao hai đường chéo của hình chữ nhật  $MNPQ$  nên  $K'$  là trung điểm của  $NQ$ .

Suy ra  $K'(45; 60; 30)$ .

Vì  $K_0(45; 60; 25)$  và  $K_1(45; 60; 19)$  nên ta có  $\overrightarrow{K_0K_1} = (0; 0; -6)$ .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

## PHẦN I.

1. D   2. D   3. B   4. D   5. D   6. A   7. A   8. B   9. C   10. A   11. D   12. C

PHẦN II.

Câu 1. a Đ b S c Đ d S      Câu 2. a Đ b S c S d Đ

### PHẦN III.

Câu 1. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 4 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 2. 

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 5 | , | 6 |  |
|---|---|---|--|

    Câu 3. 

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 3 | , | 7 |  |
|---|---|---|--|

    Câu 4. 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | , | 6 | 8 |
|---|---|---|---|

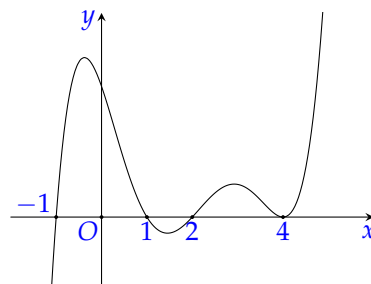
Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(-1; 1)$ .B.  $(-\infty; -1)$ .C.  $(0; 1)$ .D.  $(1; 2)$ .**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , ta có hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[-4; 5]$ , có bảng biến thiên như sau:

|         |               |                |                 |                 |     |
|---------|---------------|----------------|-----------------|-----------------|-----|
| $x$     | $-4$          | $-2$           | $4$             | $5$             |     |
| $f'(x)$ | $+$           | $0$            | $-$             | $0$             | $+$ |
| $f(x)$  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{46}{3}$ | $-\frac{62}{3}$ | $-\frac{52}{3}$ |     |

Gọi  $m, n$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  xác định trên đoạn  $[-4; 5]$ . Giá trị của  $m + n$  bằng

A.  $-\frac{16}{3}$ .B.  $-\frac{50}{3}$ .

C. 2.

D. -20.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số  $y = f(x)$  có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên  $[-4; 5]$  lần lượt là  $m = \frac{46}{3}$  và  $n = -\frac{62}{3}$ .

Suy ra  $m + n = \frac{46}{3} - \frac{62}{3} = -\frac{16}{3}$ .

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 3.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{x+1}$  là

A.  $x = -1$ .B.  $x = -2$ .C.  $x = 1$ .D.  $x = 2$ .**Lời giải.**

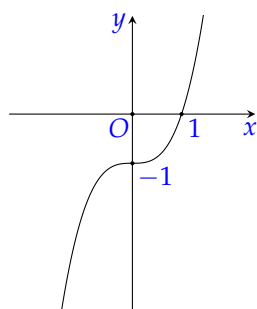
Hàm số đã cho có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x+2}{x+1} = -\infty$ .

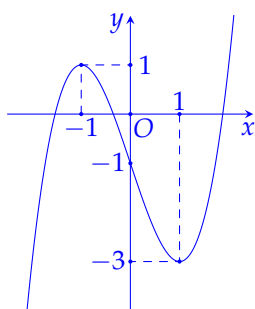
Vậy đường thẳng  $x = -1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án **(A)** ..... □

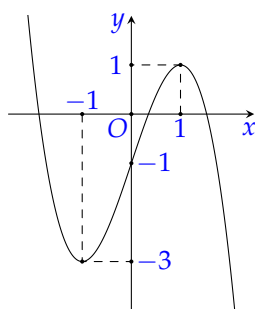
**Câu 4.** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x - 1$  là đường cong trong hình nào dưới đây?



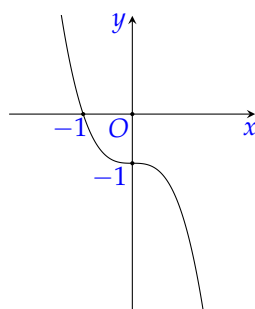
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1.

**B** Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

**Lời giải.**

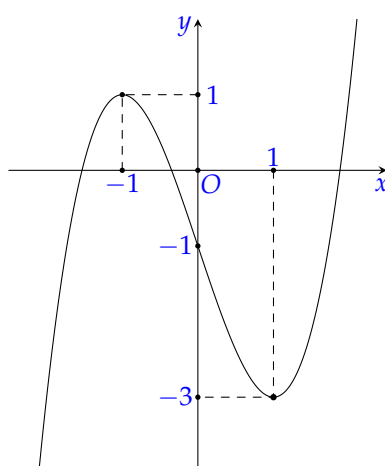
Ta có  $y' = 3x^2 - 3$ .

Phương trình  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $1$  | $-3$ | $+\infty$ |     |

Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x - 1$  là đường cong trình hình sau:



Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 5.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $2\sqrt{3}$ . Độ dài của vectơ  $\vec{u} = \vec{SA} - \vec{SC}$  bằng

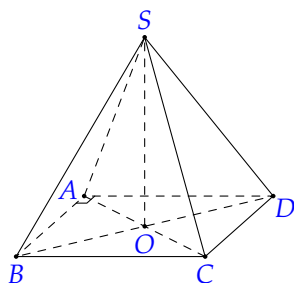
A.  $\sqrt{3}$ .

B.  $\sqrt{2}$ .

**C**  $2\sqrt{6}$ .

D.  $2\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**



Ta có  $|\vec{u}| = |\vec{SA} - \vec{SC}| = |\vec{CA}| = CA = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{OC} = 2\vec{i} - \vec{k}$ . Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $C$  trên trục  $Ox$  là

- A.  $(2; -1; 0)$ .      B.  $(2; 0; -1)$ .      **C**  $(2; 0; 0)$ .      D.  $(0; -1; 0)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{OC} = 2\vec{i} - \vec{k}$  nên điểm  $C$  có tọa độ là  $(2; 0; -1)$ .

Vậy hình chiếu vuông góc của điểm  $C$  trên trục  $Ox$  là điểm  $C'(2; 0; 0)$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 7.** Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau:

| Thời gian   | $[0; 4)$ | $[4; 8)$ | $[8; 12)$ | $[12; 16)$ | $[16; 20)$ |
|-------------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| Số học sinh | 2        | 4        | 7         | 4          | 3          |

Khoảng biến thiên cho mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

- A** 20.      B. 15.      C. 16.      D. 4.

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên cho mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $R = 20 - 0 = 20$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 8.** Một mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn bằng 3 thì có phương sai bằng

- A.  $s^2 = \sqrt{3}$ .      B.  $s^2 = 3$ .      **C**  $s^2 = 9$ .      D.  $s^2 = 6$ .

**Lời giải.**

Mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn  $s = 3$  thì phương sai là  $s^2 = 9$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 9.** Trong các hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ ,  $y = \frac{-x+1}{x+3}$ ,  $y = \frac{2x}{3x+2}$ , có bao nhiêu hàm số có đồ thị nhận đường thẳng  $y = 2$  làm tiệm cận ngang của chúng?

- A. 2.      B. 0.      C. 3.      **D** 1.

**Lời giải.**

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2$  nên đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  có duy nhất một đường tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 2$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = -1$  nên đồ thị hàm số  $y = \frac{-x+1}{x+3}$  có duy nhất một đường tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = -1$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{2}{3}$  nên đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{3x+2}$  có duy nhất một đường tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$ .

Vậy có một hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  có đồ thị nhận đường thẳng  $y = 2$  làm tiệm cận ngang.

Chọn đáp án **(D)** .....  $\square$

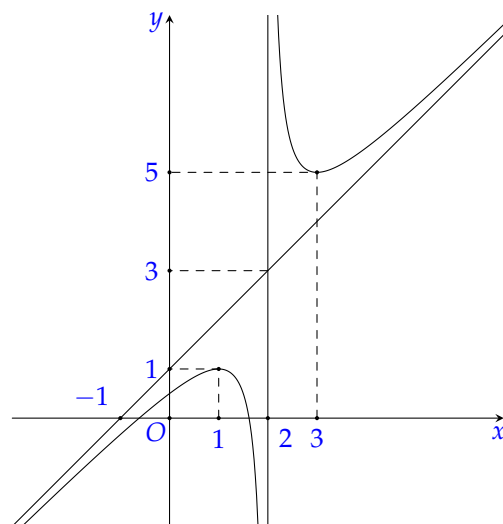
**Câu 10.** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A.  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ .

C.  $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$ .

D.  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$ .



**Lời giải.**

Từ hình vẽ, ta nhận thấy

- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = 2$  làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(1; 1)$  và  $(3; 5)$ .

Vậy hàm số thỏa mãn đề bài là  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ .

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = e^{2x} - 5e^x + 2x$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

A.  $e^2 - 12$ .

B.  $-4$ .

**C**  $2 \ln 2 - 6$ .

D.  $\ln 2 - 6$ .

**Lời giải.**

Tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ .

Xét phương trình

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \\ e^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln 2 \notin [0; 2] \\ x = \ln 2 \in [0; 2]. \end{cases}$$

Mặt khác, ta có  $y(0) = -4$ ;  $y(\ln 2) = 2 \ln 2 - 6$ ;  $y(2) = e^4 - 5e^2 + 4$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 2]$  bằng  $2 \ln 2 - 6$  tại  $x = \ln 2$ .

Chọn đáp án **(C)** .....  $\square$

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có điểm  $A$  trùng với gốc tọa độ  $O$ , điểm  $B$  nằm trên tia  $Ox$ , điểm  $D$  nằm trên tia  $Oy$ , điểm  $A'$  nằm trên tia  $Oz$ . Biết  $AB = 2$ ,  $AD = 4$ ,  $AA' = 3$ . Gọi tọa độ của  $C'$  là  $(a; b; c)$ , khi đó biểu thức  $a + b - c$  có giá trị bằng

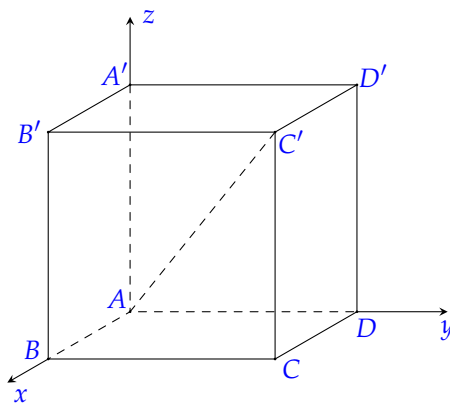
A.  $-4$ .

B.  $9$ .

**C**  $3$ .

D.  $6$ .

**Lời giải.**



Theo giả thiết, ta có  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = 3\vec{k}$ .

Áp dụng quy tắc hình hộp, ta có

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Suy ra tọa độ điểm  $C'(2; 4; 3)$ .

Vậy  $a + b - c = 2 + 4 - 3 = 3$ .

Chọn đáp án **C** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$  có đồ thị là đường cong (C).

**a)** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; -2)$  và  $(-2; -1)$ .

**b)** Biết hàm số có hai điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng  $-4$ .

**c)** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng  $y = -x + 1$ .

**d)** Đồ thị (C) có một tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $x - 3y - 6 = 0$  và đi qua điểm  $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

Ta có  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$ .

Suy ra  $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$ .

Xét phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Với  $x = -1$ , ta được  $y = 1$ .

Với  $x = -3$ , ta được  $y = -3$ .

Khi đó, ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

|      |           |      |      |      |           |
|------|-----------|------|------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$  | $-$  | $+$       |
| $y$  |           | $-3$ |      | $1$  |           |

**a)** **D** Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-3; -2)$  và  $(-2; -1)$ .

b) **S** Từ bảng biến thiên, suy ra  $\begin{cases} y_{CT} = 1 \\ y_{CD} = -3 \end{cases} \Rightarrow y_{CT} + y_{CD} = -3 + 1 = -2.$

c) **S** Ta có

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x+2} \right) = 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x+2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Suy ra  $y = x + 1$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

d) **D** Đường thẳng  $d: x - 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$  có hệ số góc  $k_1 = \frac{1}{3}.$

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng  $d$  nên có hệ số góc  $k_2 = -3.$

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

Ta có

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 3}{(x_0 + 2)^2} = -3 \Leftrightarrow 4x_0^2 + 16x_0 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{5}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{2} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

• Tại  $A\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$  có tiếp tuyến  $(d_1): y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 11.$

• Tại  $B\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$  có tiếp tuyến  $(d_2): y = -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 3.$

Vậy tiếp tuyến  $(d_2)$  của (C) vuông góc với đường thẳng  $x - 3y - 6 = 0$  và đi qua điểm  $B\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**Câu 2.** Bảng bên dưới thống kê độ ẩm không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Đà Lạt và Vũng Tàu (đơn vị: %).

| Độ ẩm    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Đà Lạt   | 83 | 79 | 79 | 87 | 87 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 88 | 86 |
| Vũng Tàu | 75 | 77 | 78 | 77 | 79 | 79 | 81 | 79 | 81 | 83 | 80 | 77 |

(Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022)

Người ta lần lượt ghép các số liệu của Đà Lạt, Vũng Tàu thành mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

| Đà Lạt         |                  |        | Vũng Tàu       |                  |        |
|----------------|------------------|--------|----------------|------------------|--------|
| Nhóm           | Giá trị đại diện | Tần số | Nhóm           | Giá trị đại diện | Tần số |
| $[75; 78,3)$   | 76,65            | 0      | $[75; 78,3)$   | 76,65            | 5      |
| $[78,3; 81,6)$ | 79,95            | 2      | $[78,3; 81,6)$ | 79,95            | 6      |
| $[81,6; 84,9)$ | 83,25            | 1      | $[81,6; 84,9)$ | 83,25            | 1      |
| $[84,9; 88,2)$ | 86,55            | 6      | $[84,9; 88,2)$ | 86,55            | 0      |
| $[88,2; 91,5)$ | 89,85            | 3      | $[88,2; 91,5)$ | 89,85            | 0      |

- a) Xét số liệu ở Đà Lạt ta có khoảng biến thiên là 16,5.  
b) Xét số liệu ở Vũng Tàu thì khoảng tứ phân vị là 0,23 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).  
c) Xét số liệu ở Đà Lạt thì độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là 3,25 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).  
d) Đà Lạt có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn so với ở Vũng Tàu vì có độ lệch chuẩn nhỏ hơn.

**Lời giải.**

a) **D** Xét số liệu ở Đà Lạt, khoảng biến thiên là  $R = 91,5 - 75 = 16,5$ .

b) **S** Xét số liệu ở Vũng Tàu, ta có

- Số phần tử của mẫu là  $n = 12$ .

- Tứ phân vị thứ nhất là

$$Q_1 = a_p + \left[ \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \right] \cdot (a_{p+1} - a_p) = 75 + \left( \frac{3 - 0}{5} \right) \cdot 3,3 = 76,98.$$

- Ta có tứ phân vị thứ ba là

$$Q_3 = a_p + \left[ \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \right] \cdot (a_{p+1} - a_p) = 78,3 + \left( \frac{9 - 5}{6} \right) \cdot 3,3 = 80,5.$$

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$Q_3 - Q_1 = 80,5 - 76,98 = 3,52.$$

c) **D** Xét số liệu ở Đà Lạt, ta có

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{0 \cdot 76,65 + 2 \cdot 79,95 + 83,25 + 6 \cdot 86,55 + 3 \cdot 89,85}{12} = 86.$$

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s_1^2 = \frac{0 \cdot 76,65^2 + 2 \cdot 79,95^2 + 83,25^2 + 6 \cdot 86,55^2 + 3 \cdot 89,85^2}{12} - 86^2 = 10,5875.$$

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là  $s_1 = \sqrt{s_1^2} = \sqrt{10,5875} \approx 3,25$ .

d) **S** Xét số liệu ở Vũng Tàu, ta có

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{5 \cdot 76,65 + 6 \cdot 79,95 + 83,25}{12} = 78,85.$$

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s_2^2 = \frac{5(76,65 - 78,85)^2 + 6(79,95 - 78,85)^2 + (83,25 - 78,85)^2}{12} = 4,235.$$

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là  $s_2 = \sqrt{s_2^2} = \sqrt{4,235} \approx 2,06$ .

Vũng Tàu có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn vì độ lệch chuẩn nhỏ hơn.

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai ..... □

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M(a; b; c)$ . Tính giá trị biểu thức  $a^2 + b^2 + c^2$ .

Đáp án: 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 8 | 1 |  |  |
|---|---|--|--|

**Lời giải.**

Vì  $M \in (Oxz)$  nên  $b = 0$ .

Khi đó, ta có  $\overrightarrow{AM} = (a + 2; -3; c - 1)$  và  $\overrightarrow{AB} = (7; 3; 1)$ .

Vì  $A, B, M$  thẳng hàng nên  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  là hai vectơ cùng phương.

Do đó  $\frac{a+2}{7} = \frac{-3}{3} = \frac{c-1}{1}$ , suy ra  $\begin{cases} a = -9 \\ c = 0. \end{cases}$

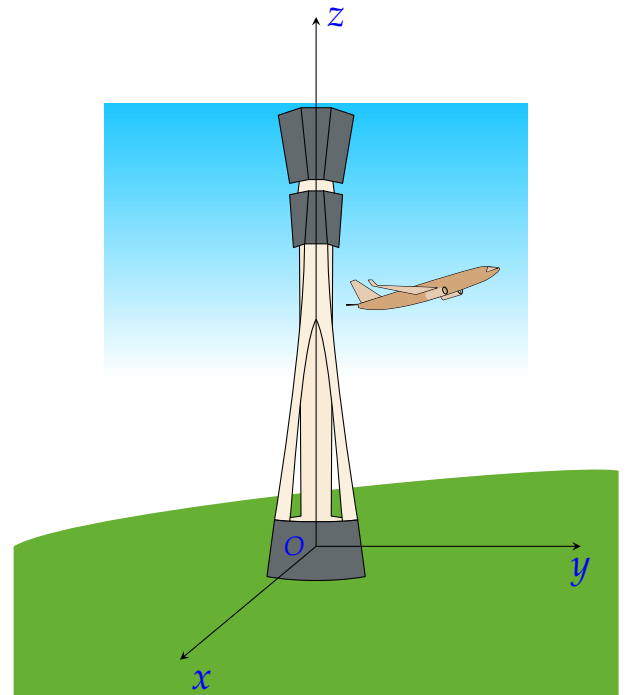
Vậy  $a^2 + b^2 + c^2 = (-9)^2 = 81$ .

Đáp án: 

|    |
|----|
| 81 |
|----|

 ..... □

**Câu 2.** Radar của một trung tâm kiểm soát không lưu sân bay có phạm vi theo dõi 500 km. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét. Giả sử có máy bay đang bay tới vị trí  $A$  có tọa độ  $(200; -300; z)$ . Độ cao lớn nhất máy bay có thể đạt được mà radar trung tâm kiểm soát không lưu vẫn có thể phát hiện được là bao nhiêu kilômét? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Đáp án: 

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 3 | 4 | 6 |  |
|---|---|---|--|

**Lời giải.**

Khoảng cách từ trung tâm kiểm soát không lưu tới máy bay tại vị trí  $A$  là

$$OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{200^2 + (-300)^2 + z^2}.$$

Để radar trung tâm kiểm soát không lưu vẫn có thể phát hiện được máy bay thì

$$\begin{aligned} OA &\leq 500 \\ \Leftrightarrow \sqrt{200^2 + (-300)^2 + z^2} &\leq 500 \\ \Leftrightarrow 200^2 + (-300)^2 + z^2 &\leq 500^2 \\ \Leftrightarrow z^2 &\leq 120\,000 \\ \Rightarrow z &\leq 200\sqrt{3}. \end{aligned}$$

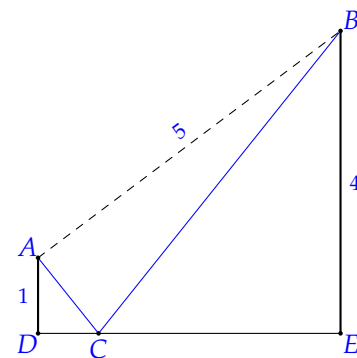
Vậy độ cao lớn nhất máy bay có thể đạt được là  $200\sqrt{3} \approx 346$  km.

Đáp án: 

|     |
|-----|
| 346 |
|-----|

 ..... □

**Câu 3.** Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1 m và 4 m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5 m. Người ta cần chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình bên. Tính độ dài ngắn nhất của sợi dây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



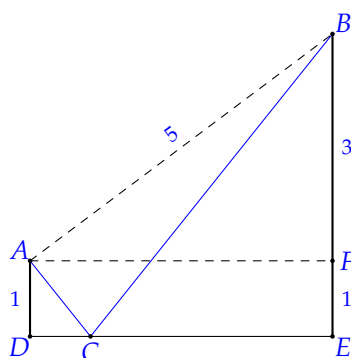
Đáp án:  ,

**Lời giải.**

Gọi  $F$  là điểm sao cho  $ADEF$  là hình chữ nhật.

Khi đó,  $EF = AD = 1$  m,  $BF = BE - EF = 3$  m,  $DE = AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = 4$  m.

- **Cách 1:** (Sử dụng phương pháp hàm số)



Đặt  $CD = x$  ( $0 \leq x \leq 4$ ).

Suy ra  $CE = 4 - x$ .

Khi đó, ta có  $AC + BC = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4 - x)^2 + 16} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$ .

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$  trên  $[0; 4]$ .

Khi đó, độ dài ngắn nhất của sợi dây là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}$  và phương trình

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \frac{4 - x}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 8x + 32} &= (4 - x)\sqrt{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8x + 32) &= (4 - x)^2(x^2 + 1) \\ \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 32x^2 &= x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 16 \\ \Leftrightarrow 15x^2 + 8x - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} & \in [0; 4] \\ x = -\frac{4}{3} & \notin [0; 4]. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có  $f(0) = 1 + 4\sqrt{2} \approx 6,7$ ;  $f(4) = 4 + \sqrt{17} \approx 8,1$ ;  $f\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{41} \approx 6,4$ .

Suy ra hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 4]$  là  $f\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{41}$ .

Vậy độ dài ngắn nhất của sợi dây là  $\sqrt{41} \approx 6,4$ .



$$b = OB = AH = 50 \cdot \cos 48^\circ \sin 64^\circ;$$

$$c = OC = MH = 50 \cdot \sin 48^\circ.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 50 \cdot \cos 48^\circ \cos 64^\circ + 50 \cdot \cos 48^\circ \sin 64^\circ + 50 \cdot \sin 48^\circ \approx 82.$$

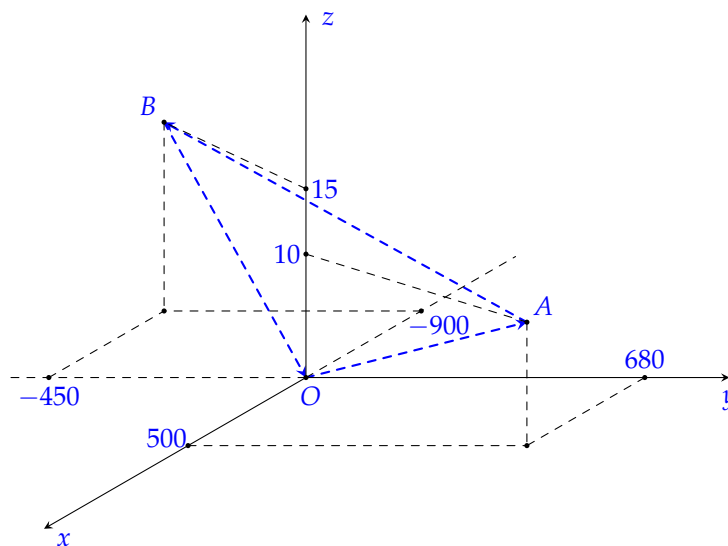
Đáp án: 82 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Một người điều khiển một flycam ở bìa rừng để phục vụ việc khảo sát quá trình làm tổ của một loài chim. Ban đầu flycam ở vị trí người điều khiển ở bìa rừng (flycam nằm trên mặt đất) và bắt đầu di chuyển đến vị trí  $A$  cách vị trí điều khiển  $500\text{ m}$  về phía nam và  $680\text{ m}$  về phía đông, đồng thời cách mặt đất  $10\text{ m}$ . Sau đó, flycam được điều khiển đến vị trí  $B$  cách vị trí điều khiển  $900\text{ m}$  về phía bắc và  $450\text{ m}$  về phía tây, đồng thời cách mặt đất  $15\text{ m}$ . Tốc độ bay được duy trì suốt quá trình di chuyển là  $v = 8\text{ m/s}$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với phía nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với  $1\text{ m}$ .

- Tìm tọa độ của flycam khi đang ở các vị trí  $A$  và  $B$ .
- Tính tổng thời gian flycam di chuyển được từ khi bắt đầu tại vị trí  $O$  của người điều khiển đến vị trí  $A$ , vị trí  $B$  rồi quay về  $O$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị giây).

**Lời giải.**



- Tọa độ của flycam khi đang ở vị trí  $A$  là  $A(500; 680; 10)$ .  
Tọa độ của flycam khi đang ở vị trí  $B$  là  $B(-900; -450; 15)$ .
- Ta có

$$OA = \sqrt{500^2 + 680^2 + 10^2} = 50\sqrt{285} \text{ (m)}.$$

$$AB = \sqrt{(-900 - 500)^2 + (-450 - 680)^2 + (15 - 10)^2} = 5\sqrt{129477} \text{ (m)}.$$

$$OB = \sqrt{(-900)^2 + (-450)^2 + 15^2} = 15\sqrt{4501} \text{ (m)}.$$

Tổng quãng đường flycam di chuyển được là

$$S = OA + AB + BO = 50\sqrt{285} + 5\sqrt{129477} + 15\sqrt{4501} \text{ (m)}.$$

Vậy tổng thời gian flycam di chuyển được từ khi bắt đầu tại vị trí  $O$  của người điều khiển đến vị trí  $A$ , vị trí  $B$  rồi quay về  $O$  là

$$t = \frac{S}{v} = \frac{50\sqrt{285} + 5\sqrt{129477} + 15\sqrt{4501}}{8} \approx 456 \text{ (giây)}.$$

**Câu 2.** Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một hồ nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là  $h$  và có thể tích là  $18 \text{ m}^3$ . Hãy tính chiều cao  $h$  của hồ nước sao cho chi phí xây dựng là thấp nhất.

**Lời giải.**

Gọi  $x, y$  (m) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của hình hộp ( $x > 0, y > 0$ ).

Theo đề bài ta có  $y = 3x$  và  $V = hxy \Rightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{V}{3x^2} = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2}$ .

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hồ nước là nhỏ nhất.

Khi đó, diện tích toàn phần của hồ nước là

$$S_{\text{tp}} = 2xh + 2yh + xy = 2x \cdot \frac{6}{x^2} + 2 \cdot 3x \cdot \frac{6}{x^2} + x \cdot 3x = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2$ .

Ta có  $f'(x) = -\frac{48}{x^2} + 6x = \frac{6x^3 - 48}{x^2}$ .

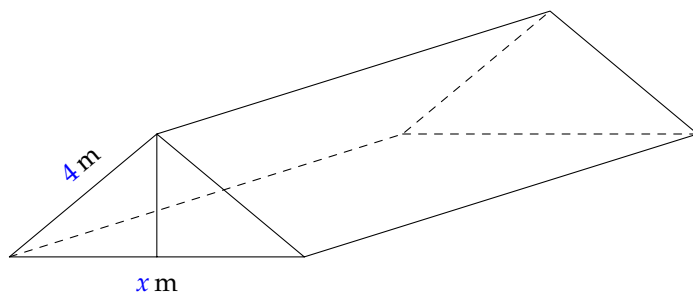
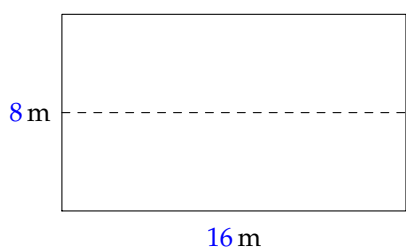
Phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Ta có bảng biến thiên như sau:

|         |           |        |           |
|---------|-----------|--------|-----------|
| $x$     | 0         | 2      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0      | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(2)$ | $+\infty$ |

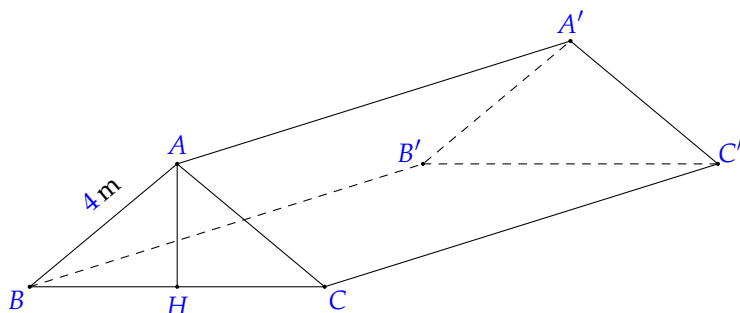
Vậy chi phí xây dựng hồ nước thấp nhất khi chiều cao là  $h = \frac{6}{2^2} = 1,5$  (m).

**Câu 3.** Trong một đợt tổ chức cho học sinh tham gia dã ngoại ngoài trời, để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan dã ngoại, các bạn học sinh đã dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là  $16 \text{ m}$  và chiều rộng là  $8 \text{ m}$  bằng cách gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau  $x \text{ m}$  (tham khảo hình vẽ).



Khi khoảng không gian phía trong có thể tích lớn nhất,  $x$  có giá trị bằng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải.**



Gọi tên như hình vẽ với  $AH \perp BC$ . Khi đó, ta có  $H$  là trung điểm của  $BC$ .

Do đó  $BH = \frac{BC}{2} = \frac{x}{2}$ .

Xét  $\triangle AHB$  vuông tại  $H$ , theo định lý Pythagore ta có

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{64 - x^2}}{2}, x \in (0; 8).$$

Thể tích của lều là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{64 - x^2}}{2} \cdot x \cdot 16 = 4x\sqrt{64 - x^2}.$$

Xét hàm số  $y = f(x) = 4x\sqrt{64 - x^2}$  trên khoảng  $(0; 8)$ .

Ta có  $f'(x) = 4\sqrt{64 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = \frac{8(32 - x^2)}{\sqrt{64 - x^2}}$ .

Do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 32 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \\ x = -4\sqrt{2} \notin (0; 8). \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  là

|         |   |             |   |   |
|---------|---|-------------|---|---|
| $x$     | 0 | $4\sqrt{2}$ | 8 |   |
| $f'(x)$ |   | +           | 0 | - |
| $f(x)$  | 0 | 128         | 0 |   |

Suy ra  $V_{ABC.A'B'C'}$  lớn nhất bằng  $128 \text{ m}^3$ , khi  $x = 4\sqrt{2}$ .

Vậy  $x = 4\sqrt{2} \approx 5,66 \text{ m}$ .

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. C   2. A   3. A   4. B   5. C   6. C   7. A   8. C   9. D   10. B   11. C   12. C

### PHẦN II.

Câu 1.      a Đ b S c S d Đ      Câu 2.      a Đ b S c Đ d S

### PHẦN III.

Câu 1.   8   1            Câu 2.   3   4   6         Câu 3.   6   ,   4         Câu 4.   8   2

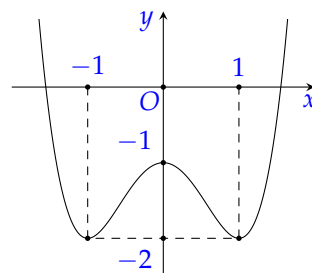
Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

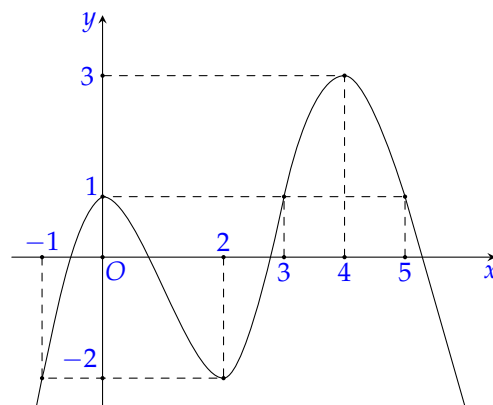
**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(-\infty; -1)$ .B.  $(-1; 1)$ .☒ C.  $(-1; 0)$ .D.  $(0; 1)$ .**Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$  nên đáp án đúng là hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .

Chọn đáp án ☒ C ..... ☐

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 5]$  và có đồ thị như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 5]$  bằng

A.  $-1$ .B.  $4$ .☒ C.  $1$ .D.  $2$ .**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có  $\max_{x \in [-1; 5]} f(x) = 3$  và  $\min_{x \in [-1; 5]} f(x) = -2$ .

Khi đó, tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 5]$  bằng  $3 + (-2) = 1$ .

Chọn đáp án ☒ C ..... ☐

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$  liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |     |           |
|------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       |           |     | $-$       |
| $y$  | $2$       | $+\infty$ | $0$ | $-2$      |

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là

A.  $1$ .☒ B.  $3$ .C.  $4$ .D.  $2$ .

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên từng khoảng  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; +\infty)$  và có

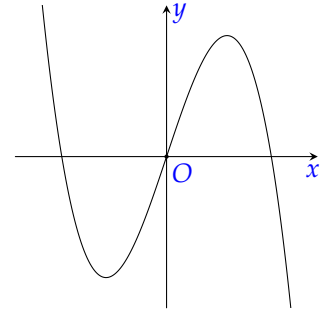
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \end{cases}$  nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là  $y = 2$  và  $y = -2$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$  nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là  $x = -1$ .

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 4.** Hàm số nào dưới đây có đồ thị hàm số như hình vẽ?

- A.  $y = x^3 - 3x$ . **B**  $y = -x^3 + 3x$ .  
C.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ . **D**  $y = -x^3 + 3x^2$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra hàm số đã cho có dạng  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với hệ số  $a < 0$  và đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$  nên  $d = 0$ .

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu theo hình vẽ.

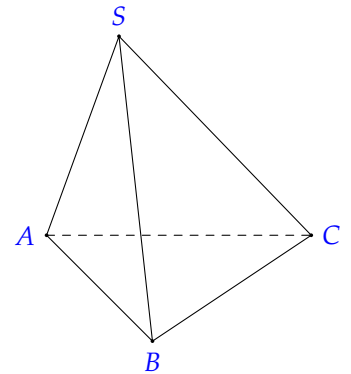
Từ  $y = -x^3 + 3x$  suy ra  $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Vậy hàm số thỏa mãn là  $y = -x^3 + 3x$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 5.** Cho hình chóp  $S.ABC$  (tham khảo hình vẽ). Vectơ tổng của hai vectơ  $\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{AB}$  bằng

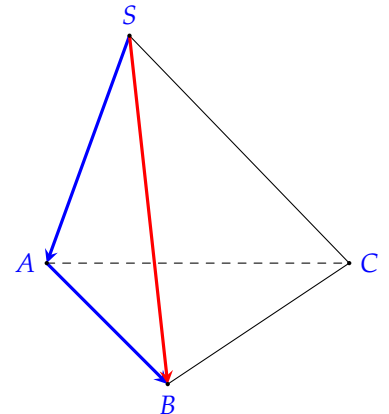
- A.  $\overrightarrow{BS}$ . **B**  $\overrightarrow{BA}$ .  
**C**  $\overrightarrow{SB}$ . **D**  $\overrightarrow{SC}$ .



**Lời giải.**

Áp dụng quy tắc 3 điểm cho các điểm  $S$ ,  $A$  và  $B$ , ta có

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}.$$



Chọn đáp án **(C)** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là

- A.  $(2; 0; 1)$ .      **B**  $(2; -2; 0)$ .      C.  $(0; -2; 1)$ .      D.  $(0; 0; 1)$ .

**Lời giải.**

Hình chiếu của  $M(2; -2; 1)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm  $M'(2; -2; 0)$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 7.** Người ta thống kê tốc độ của một số xe ô tô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau:

| Tốc độ (km/h) | [75; 80) | [80; 85) | [85; 90) | [90; 95) | [95; 100) |
|---------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số xe         | 17       | 23       | 26       | 30       | 19        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 75 km/h.      **B** 25 km/h.      C. 100 km/h.      D. 5 km/h.

**Lời giải.**

Trong mẫu số liệu ghép nhóm đã cho, ta có đầu mút trái của nhóm 1 là  $a_1 = 75$ , đầu mút phải của nhóm 5 là  $a_6 = 100$ .

Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là  $R = a_6 - a_1 = 100 - 75 = 25$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 8.** Bạn Hoàng rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày gần đây của bạn Hoàng được thống kê lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút) | [19; 19,5) | [19,5; 20) | [20; 20,5) | [20,5; 21) | [21; 21,5) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số lần           | 13         | 45         | 24         | 12         | 6          |

Số trung bình của mẫu ghép nhóm là

- A. 100.      **B** 20,015.      C. 2021,5.      D. 2.

**Lời giải.**

- Cỡ mẫu  $n = 13 + 45 + 24 + 12 + 6 = 100$ .
- Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên được bổ sung giá trị đại diện là

| Cự li (m)        | [19; 19,5) | [19,5; 20) | [20; 20,5) | [20,5; 21) | [21; 21,5) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Giá trị đại diện | 19,25      | 19,75      | 20,25      | 20,75      | 21,25      |
| Tần số           | 13         | 45         | 24         | 12         | 6          |

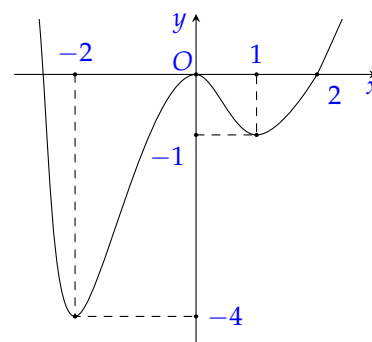
- Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{19,25 \cdot 13 + 19,75 \cdot 45 + 20,25 \cdot 24 + 20,75 \cdot 12 + 21,25 \cdot 6}{100} = 20,015.$$

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-2; 0)$ .      **B**  $(2; +\infty)$ .  
C.  $(-\infty; -2)$ .      D.  $(1; 3)$ .



**Lời giải.**

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $K$  nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ , nên ta chọn các khoảng  $K$  thỏa mãn phần đồ thị của  $y = f'(x)$  nằm từ trục  $Ox$  lên phía trên.  
Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

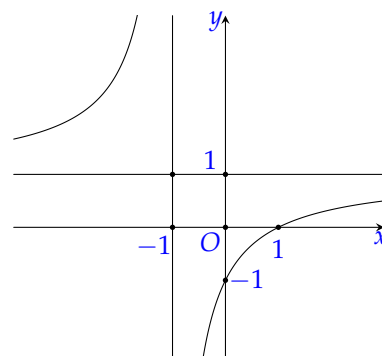
**Câu 10.** Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

**(A)**  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

**B.**  $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$ .

**C.**  $y = \frac{x^2+3x+1}{x+3}$ .

**D.**  $y = x^3 - 3x^2$ .

**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị của hàm số, ta nhận thấy

- Đây là đồ thị của hàm số dạng  $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$ .
- Tập xác định của hàm số  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- Đường tiệm cận đứng là  $x = -1$ .
- Đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ .

Từ các nhận định trên, suy ra hàm số cần tìm là  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

Chọn đáp án **(A)** .....  $\square$

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

**A.** 4.

**B.** 3.

**C.** 1.

**(D)** 2.

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4. \end{cases}$

Bảng xét dấu

|         |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $0$ |     | $4$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Dựa vào bảng xét dấu  $f'(x)$ , điểm cực tiểu thì hàm số đổi dấu từ âm sang dương.  
Vậy hàm số có 2 điểm cực tiểu là  $x = -1$  và  $x = 4$ .

Chọn đáp án **(D)** .....  $\square$

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;3)$  và  $B(-1;4;1)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Tích vô hướng của  $\vec{IA} \cdot \vec{BA}$  bằng

**A.** 4.

**(B)** 6.

**C.**  $-4$ .

**D.**  $-6$ .

**Lời giải.**

Vì  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên ta có  $I(0; 3; 2)$ .

Suy ra 
$$\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1; -1; 1) \\ \overrightarrow{BA} = (2; -2; 2). \end{cases}$$

Vậy  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BA} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 6$ .

Chọn đáp án **B** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ , với  $m$  là tham số.

a) Khi  $m = 1$ , đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm  $A(0; -3)$ .

**b** Khi  $m = 1$ , đồ thị hàm số đã cho nhận điểm  $I(1; 1)$  làm tâm đối xứng.

**c** Khi  $m = 1$ , thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

d) Có hai giá trị của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 4]$  bằng  $-1$ .

**Lời giải.**

a) **S** Khi  $m = 1$ , hàm số đã cho trở thành  $y = \frac{x - 3}{x - 1}$ .

Với  $x = 0$  ta được  $y = 3$ .

Suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm  $(0; 3)$ .

b) **Đ** Khi  $m = 1$ , hàm số đã cho trở thành  $y = \frac{x - 3}{x - 1}$ .

Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 1$  và đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ .

Do đó, tâm đối xứng của đồ thị hàm số là  $I(1; 1)$ .

c) **Đ** Khi  $m = 1$ , hàm số đã cho trở thành  $y = \frac{x - 3}{x - 1}$ .

Ta có  $y' = \frac{2}{(x - 1)^2} > 0, \forall x \neq 1$  nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

d) **S** Ta có  $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x - m)^2}$  và  $m^2 - m + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$  nên hàm số đã cho đồng biến với mọi  $x \neq m$ .

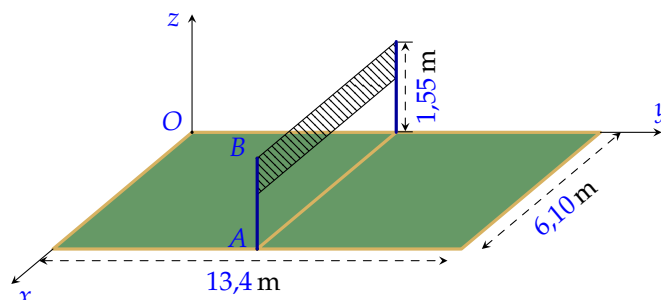
Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên  $[0; 4]$  bằng  $-1$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \notin [0; 4] \\ f(4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \\ f(4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \\ \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy chỉ có một giá trị của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c đúng | d sai** .....  $\square$

**Câu 2.** Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế.



Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới.

a) Mặt sân nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$ .

**b** Điểm  $A$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  nên cao độ của nó là  $z_A = 0$ .

c) Tọa độ của điểm  $A(6,1;13,4;0)$ .

d) Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB} = (6,1;6,7;1,55)$ .

**Lời giải.**

a) **S** Mặt sân nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ .

b) **D** Tất cả các điểm thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  đều có cao độ bằng 0 nên  $z_A = 0$ .

c) **S** Gọi tọa độ điểm  $A$  là  $A(x_A; y_A; z_A)$ . Vì chiều rộng của sân là 6,1 m nên  $x_A = 6,1$ .

Do một nửa chiều dài của sân là 6,7 m nên  $y_A = 6,7$ .

Điểm  $A$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  nên cao độ của nó là  $z_A = 0$ .

Vậy tọa độ  $A(6,1;6,7;0)$ .

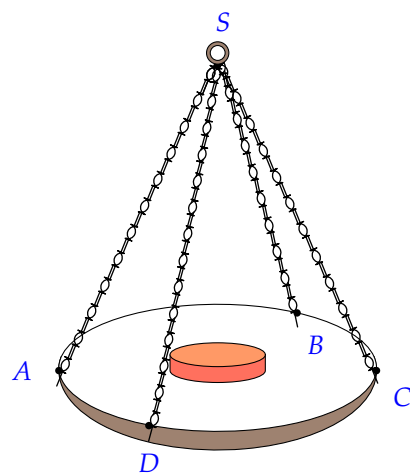
d) **S** Độ dài của đoạn thẳng  $AB$  là 1,55 m nên điểm  $B$  có tọa độ là  $B(6,1;6,7;1,55)$ .

Vậy  $\overrightarrow{AB} = (0;0;1,55)$ .

Chọn đáp án ☐ a sai ☒ b đúng ☐ c sai ☐ d sai ..... ☐

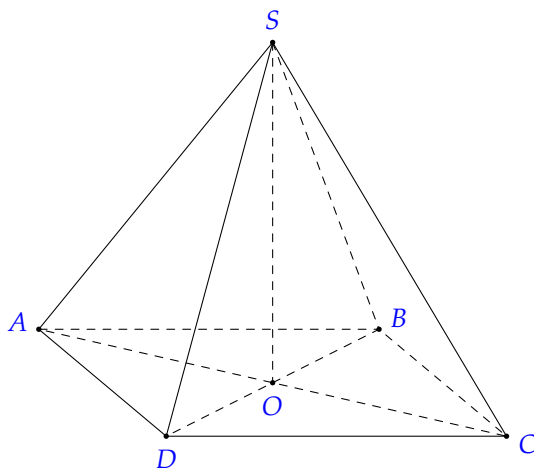
**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng  $m = 3$  kg được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 90^\circ$ . Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$  (N). Biết trọng lượng của vật nặng được tính theo công thức  $P = mg$ , lấy  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Khi đó, giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



Đáp án:

**Lời giải.**



Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ .

Ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = -4\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{SO}. \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}| = |4\overrightarrow{SO}| = 4SO. \end{aligned}$$

Trọng lượng của vật nặng là  $P = mg = 3 \cdot 10 = 30$  (N).

Suy ra  $4|\overrightarrow{SO}| = P = 30$  (N)  $\Rightarrow SO = \frac{15}{2}$ .

Lại có tam giác  $ASC$  vuông cân tại  $S$  nên

$$SO = SA \cdot \sin \widehat{SAC} \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin \widehat{SAC}} = \frac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{15\sqrt{2}}{2} = \frac{30\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = 30.$$

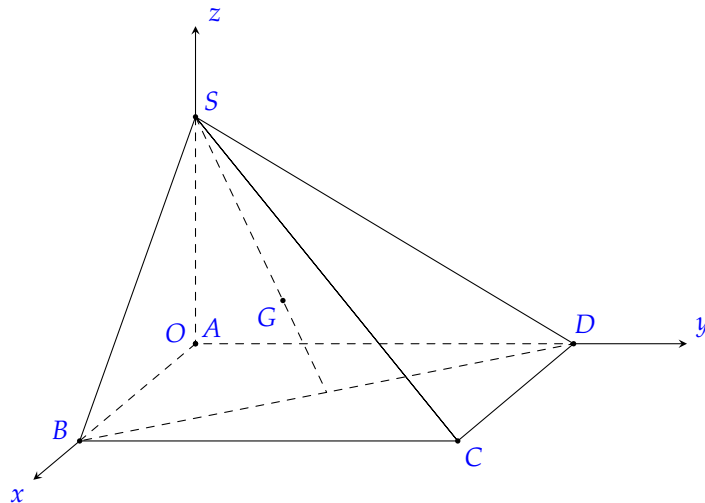
Vậy  $a = 30$ .

Đáp án: 30 ..... □

**Câu 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $BC = 2a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBD$ . Độ dài  $CG$  bằng  $\frac{a\sqrt{m}}{n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ ;  $m < 50$ ). Giá trị của  $m + n$  bằng bao nhiêu?

Đáp án: 4 0

**Lời giải.**



Đặt hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ.

Khi đó, ta có  $A(0;0;0)$ ,  $B(a;0;0)$ ,  $C(a;2a\sqrt{2};0)$ ,  $D(0;2a\sqrt{2};0)$ ,  $S(0;0;a)$ .

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBD$  nên  $G\left(\frac{a}{3}; \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{a}{3}\right)$ .

$$\text{Độ dài } CG = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{2}}{3} - 2a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{37}}{3}.$$

Suy ra  $m = 37$ ;  $n = 3$  và  $m + n = 40$ .

Đáp án: 40 ..... □

**Câu 3.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu nghìn đồng một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Đáp án: 3 0 0 0

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số lần tăng giá căn hộ ( $x \geq 0$ ).  
 Giá của căn hộ sau khi tăng là  $0,2x + 2$  (triệu đồng).  
 Số phòng được thuê là  $20 - x$ .  
 Tổng số tiền thu được là  $f(x) = (20 - x)(0,2x + 2)$ .  
 Ta cần tìm giá trị của  $x$  sao cho tổng số tiền thu được là lớn nhất.  
 Ta có  $f'(x) = 2 - 0,4x$ .  
 Phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 0,4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$ .  
 Bảng biến thiên

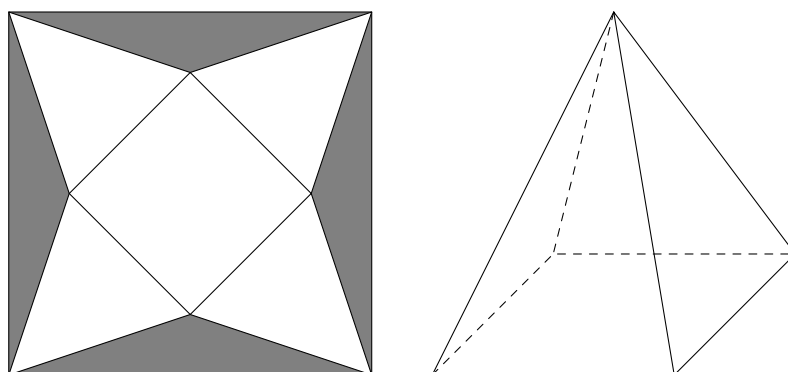
|         |    |    |    |   |
|---------|----|----|----|---|
| $x$     | 0  | 5  | 20 |   |
| $f'(x)$ |    | +  | 0  | - |
| $f(x)$  | 40 | 45 | 0  |   |

Suy ra hàm số cực đại tại  $x = 5$ .

Vì vậy, công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá  $5 \cdot 0,2 + 2 = 3$  (triệu đồng) = 3000 (nghìn đồng) mỗi tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất.

Đáp án: 3000 ..... □

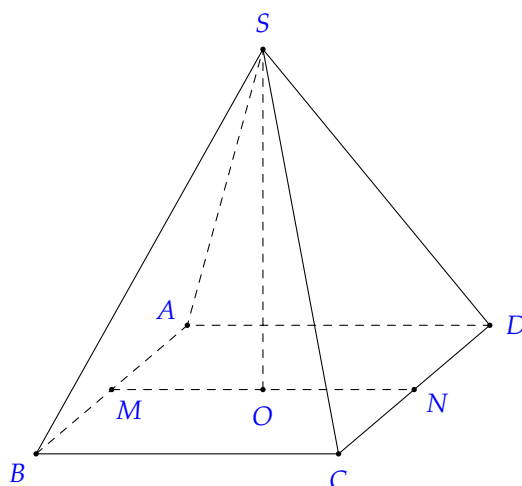
**Câu 4.** Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại, nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu mét vuông để đảm bảo yêu cầu trên?

Đáp án: 8 0

**Lời giải.**



Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là  $x$  (m).

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng  $20\sqrt{2}$  (m).

Gọi hình chóp tứ giác đều là  $S.ABCD$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ .

Khi đó  $MN = x$  (m),  $SN = \frac{20\sqrt{2} - x}{2}$  (m) với  $0 < x < 10\sqrt{2}$ .

Gọi  $O$  là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

Thể tích khối chóp  $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{6}x^2\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}$ .

Ta có  $V' = \frac{20x(80 - 5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}$  với  $0 < x < 10\sqrt{2}$ .

Xét bảng biến thiên

|         |   |                                   |              |   |
|---------|---|-----------------------------------|--------------|---|
| $x$     | 0 | $8\sqrt{2}$                       | $10\sqrt{2}$ |   |
| $V'(x)$ |   | +                                 | 0            | - |
| $V(x)$  | 0 | $\nearrow \frac{256\sqrt{10}}{3}$ | $\searrow 0$ |   |

Suy ra thể tích khối chóp lớn nhất  $V = \frac{256\sqrt{10}}{3}$  (m<sup>3</sup>) khi  $x = 8\sqrt{2}$ .

Vậy diện tích phần bị cắt của tấm bạt là

$$S = S_{\text{Hình vuông}} - S_{ABCD} - 4 \cdot S_{\triangle SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Đáp án: 80 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Bảng dưới đây cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng (đơn vị: kilôgam) của học sinh lớp 11A1 trong một trường trung học phổ thông:

|             |          |          |          |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Cân nặng    | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) |          |
| Số học sinh | 2        | 10       | 16       | 8        | 2        | 2        | $n = 40$ |

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Lời giải.**

Ta có, cỡ mẫu  $n = 40$ .

Sắp xếp các số liệu trong mẫu số liệu gốc thành một dãy không giảm:

$x_1, x_2 \in [30; 40); x_3, \dots, x_{12} \in [40; 50); x_{13}, \dots, x_{28} \in [50; 60),$

$x_{29}; \dots; x_{36} \in [60; 70), x_{37}; x_{38} \in [70; 80), x_{39}; x_{40} \in [80; 90).$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là  $\frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) \in [40; 50).$

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 40 + \frac{\frac{40}{4} - 2}{10} \cdot (50 - 40) = 48.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là

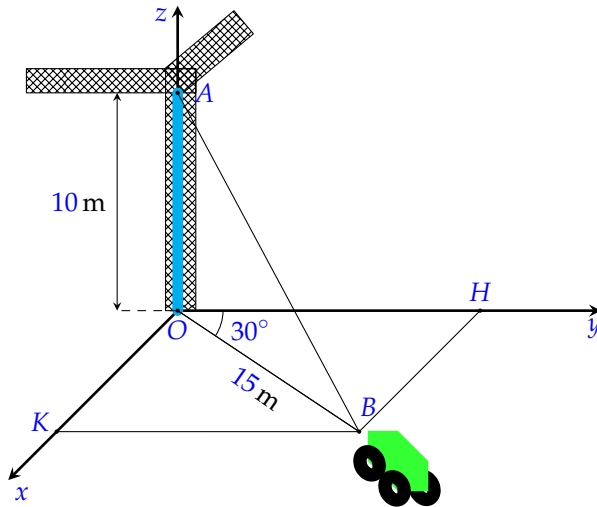
$$\frac{1}{2}(x_{30} + x_{31}) \in [60; 70).$$

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 60 + \frac{\frac{3 \cdot 40}{4} - (2 + 10 + 16)}{8} \cdot (70 - 60) = \frac{125}{2}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là  $\Delta_Q = \frac{125}{2} - 48 = \frac{29}{2}$ .

**Câu 2.** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m.



Tính tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{OA} = 10 \cdot \vec{k} \Rightarrow A(0; 0; 10)$ .

Xét  $\triangle BOH$  vuông tại  $H$ , ta có

$$OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2};$$

$$OK = OB \cdot \cos (90^\circ - 30^\circ) = \frac{15}{2}.$$

Suy ra  $B\left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ .

Vậy  $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$ .

**Câu 3.** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  (giờ) được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta có  $c'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}, \forall t \in (0; +\infty).$

Cho  $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow t = 1, (t \in (0; +\infty)).$

Bảng biến thiên:

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $t$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $c'(t)$ |   | 0 | +         |
| $c(t)$  | 0 | 1 | 0         |

Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Đáp án: 1 ..... □

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. C   2. C   3. B   4. B   5. C   6. B   7. B   8. B   9. B   10. A   11. D   12. B

### PHẦN II.

Câu 1.      a S   b Đ   c Đ   d S      Câu 2.      a S   b Đ   c S   d S

### PHẦN III.

Câu 1.   3   0            Câu 2.   4   0            Câu 3.   3   0   0   0      Câu 4.   8   0

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |     |      |     |     |      |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $0$ |      | $1$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$  | $0$ | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     | $4$ |      |     |     | $+\infty$ |
|         |           |     | $-1$ |     |     | $-1$ |     |     |           |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

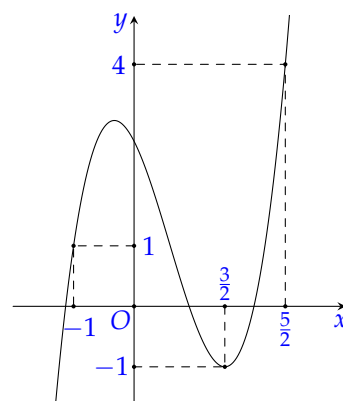
A.  $(-\infty; -1)$ .B.  $(0; 1)$ .C.  $(-1; 1)$ .D.  $(-1; 0)$ .

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$  và có đồ thị hàm số là đường cong như hình vẽ. Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x)$  trên  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$  là

A.  $M = 4, m = 1$ .B.  $M = 4, m = -1$ .C.  $M = \frac{7}{2}, m = -1$ .D.  $M = \frac{7}{2}, m = 1$ .

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có  $M = 4, m = -1$

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 3.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+3}{x-2}$  là

A.  $x = 4$ .B.  $x = 2$ .C.  $y = 4$ .D.  $y = 2$ .

Lời giải.

Ta có  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{4x+3}{x-2} \right) = 4$ .

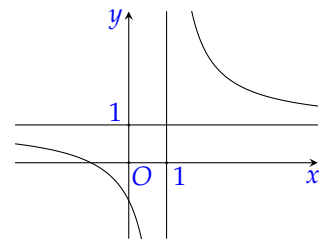
Vậy  $y = 4$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 4.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A.  $y = \frac{2x-1}{x-1}$ .  
C.  $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ .

**B**  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .  
D.  $y = x^3 - 3x - 1$ .



**Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số, ta có tiệm cận đứng  $x = 1$  và tiệm cận ngang  $y = 1$ .

Do đó, phương án thỏa đề là hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .

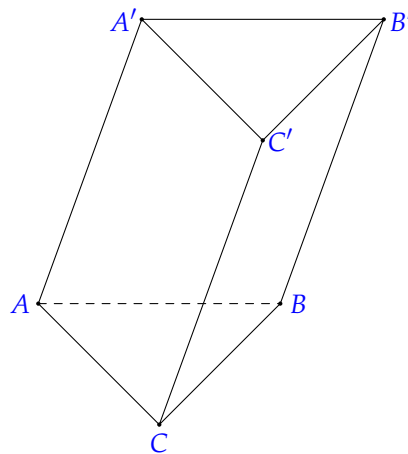
Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 5.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ , đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Vector  $\overrightarrow{B'C}$  biểu diễn theo các vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  là

**A**  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .  
C.  $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

B.  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .  
D.  $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

**Lời giải.**



Vì  $BB'C'C$  là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} \\ &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'} \\ &= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(2;3;-1)$ . Điểm nào sau đây đối xứng với điểm  $A$  qua trục  $Oy$ ?

A.  $A'(2;3;-1)$ .      B.  $A'(2;-3;1)$ .      C.  $A'(-2;-3;1)$ .      **D**  $A'(-2;3;1)$ .

**Lời giải.**

Vì  $A'$  đối xứng  $A$  qua trục  $Oy$  nên 
$$\begin{cases} x_{A'} = -x_A = -2 \\ y_{A'} = y_A = 3 \\ z_{A'} = -z_A = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(-2;3;1).$$

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 7.** Dữ liệu về tốc độ (đơn vị: km/h) của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông như sau:

| Tốc độ | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) | [90; 100) | [100; 110) |
|--------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Số xe  | 10       | 20       | 20       | 35        | 15         |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu bằng

- A** 50 km/h.                      B. 10 km/h.                      C. 30 km/h.                      D. 110 km/h.

**Lời giải.**

Ta có  $u_{k+1} = 110$  và  $u_1 = 60$ .

Khoảng biến thiên  $R = u_{k+1} - u_1 = 110 - 60 = 50$  (km/h).

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 8.** Khảo sát thời gian tự học bài ở nhà (đơn vị: phút) của học sinh khối 9 ở trường X, ta thu được bảng sau:

| Thời gian   | [0; 30) | [30; 60) | [60; 90) | [90; 120) | [120; 150) |
|-------------|---------|----------|----------|-----------|------------|
| Số học sinh | 9       | 10       | 9        | 15        | 7          |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 1 602.                      **B** 1 601,64.                      C. 1 601,9.                      D. 1 603.

**Lời giải.**

| Thời gian        | [0; 30) | [30; 60) | [60; 90) | [90; 120) | [120; 150) |
|------------------|---------|----------|----------|-----------|------------|
| Giá trị đại diện | 15      | 45       | 75       | 105       | 135        |
| Số học sinh      | 9       | 10       | 9        | 15        | 7          |

Thời gian trung bình tự học ở nhà của các em học sinh đó là

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 15 + 10 \cdot 45 + 9 \cdot 75 + 15 \cdot 105 + 7 \cdot 135}{50} = 75,6 \text{ (phút)}.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{1}{50} \left( 9 \cdot 15^2 + 10 \cdot 45^2 + 9 \cdot 75^2 + 15 \cdot 105^2 + 7 \cdot 135^2 \right) - 75,6^2 = 1\,601,64.$$

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 9.** Gọi  $x_1$  là điểm cực đại  $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$ . Khi đó giá trị của  $x_1 + 2x_2$  bằng

- A. 2.                      B. 1.                      **C** -1.                      D. 0.

**Lời giải.**

Ta có  $y' = -3x^2 + 3$ ,  $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Vì  $y'$  đổi dấu từ âm sang dương khi qua  $x = -1$  và đổi dấu từ dương sang âm khi qua  $x = 1$  nên  $x_2 = -1$  là điểm cực tiểu và  $x_1 = 1$  là điểm cực đại của hàm số.

Vậy  $x_1 + 2x_2 = 1 - 2 = -1$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 10.** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất và  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$  trên đoạn  $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ . Khi đó giá trị của  $M - m$  bằng

- A. -5.                      B. 1.                      C. 4.                      **D** 5.

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = 6x^2 + 6x$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \\ x = -1 \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$ .

Do hàm số liên tục trên đoạn  $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$  và có  $f(-2) = -5$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ .

Suy ra  $m = \min_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = -5$ ,  $M = \max_{\left[-2; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 0$  nên  $M - m = 5$ .

Chọn đáp án **(D)** .....  $\square$

**Câu 11.** Biết đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x - 2}$  có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = ax + b$ . Giá trị của  $a + b$  bằng

A. 4.

B. 13.

C. 12.

**(D)** 7.

**Lời giải.**

Chia tử thức cho mẫu thức ta được  $y = x + 6 + \frac{13}{x - 2}$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{13}{x - 2} = 0$  nên tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình  $y = x + 6$ .

Suy ra  $a = 1$  và  $b = 6$ .

Vậy  $a + b = 7$ .

Chọn đáp án **(D)** .....  $\square$

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; 5; 3)$  và  $M(2; 1; -2)$ . Khi đó, điểm  $B$  đối xứng với điểm  $A$  qua điểm  $M$  có tọa độ là

A.  $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$ .

B.  $B(-4; 9; 8)$ .

C.  $B(5; 3; -7)$ .

**(D)**  $B(5; -3; -7)$ .

**Lời giải.**

Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên ta có 
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7. \end{cases}$$

Vậy  $B(5; -3; -7)$ .

Chọn đáp án **(D)** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 4x + 7}{x + 1}$  có đồ thị (C).

**a)** Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**b)** Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x + 2$ .

**c)** Tâm đối xứng của đồ thị (C) có tọa độ là  $(-1; 1)$ .

**d)** Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng  $y = mx + 2024$  thì  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

**a)** **(D)** Hàm số xác định khi  $x \neq -1$ .

Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**b)** **(S)** Ta có  $y = x + 3 + \frac{4}{x + 1}$  nên  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x + 3)] = 0$ .

Suy ra  $y = x + 3$  là đường tiệm cận xiên.

Vậy đường thẳng  $y = x + 2$  không phải là tiệm cận xiên của (C).

- c) **S** Tiệm cận đứng là  $x = -1$ ; tiệm cận xiên là  $y = x + 3$ .  
 Vậy tọa độ tâm đối xứng là  $(-1; 2)$ .

d) **D**  $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ ;  
 $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |           |      |           |           |           |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$      | $1$       | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$       | $0$       | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-2$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $6$       | $+\infty$ |

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là  $(1; 6)$  và  $(-3; -2)$ .

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 6}{-2 - 6} \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0.$$

Đường thẳng  $y = mx + 2024 \Leftrightarrow mx - y + 2024 = 0$ .

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$2 \cdot m + (-1) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**Câu 2.** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

|                    |             |              |              |              |              |
|--------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Độ dài quãng đường | $[50; 100)$ | $[100; 150)$ | $[150; 200)$ | $[200; 250)$ | $[250; 300)$ |
| Số ngày            | 5           | 10           | 9            | 4            | 2            |

- a** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là 250 (km).  
**b** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần bằng 79,17.  
 c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 145.  
**d** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm gần bằng 55,68.

**Lời giải.**

- a) **D** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là  $R = 300 - 50 = 250$  (km).  
 b) **D** Cỡ mẫu  $n = 5 + 10 + 9 + 4 + 2 = 30$ .

Gọi  $x_1, \dots, x_{30}$  là mẫu số liệu gốc về độ dài quãng đường bác tài xế đã lái xe mỗi ngày trong một tháng được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có

- $x_1, \dots, x_5 \in [50; 100);$
- $x_6, \dots, x_{15} \in [100; 150);$
- $x_{16}, \dots, x_{24} \in [150; 200);$

- $x_{25}, \dots, x_{28} \in [200; 250)$ ;
- $x_{29}, x_{30} \in [250; 300)$ .

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là  $x_8 \in [100; 150)$ .  
Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 100 + \frac{\frac{30}{4} - 5}{10} \cdot (150 - 100) = 112,5.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là  $x_{23} \in [150; 200)$ .  
Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 150 + \frac{\frac{3 \cdot 30}{4} - (5 + 10)}{9} \cdot (200 - 150) = \frac{575}{3}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{575}{3} - 112,5 \approx 79,17.$$

c)  Ta có bảng sau:

| Độ dài quãng đường | [50; 100) | [100; 150) | [150; 200) | [200; 250) | [250; 300) |
|--------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày            | 5         | 10         | 9          | 4          | 2          |
| Giá trị đại diện   | 75        | 125        | 175        | 225        | 275        |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 75 + 10 \cdot 125 + 9 \cdot 175 + 4 \cdot 225 + 2 \cdot 275}{30} = 155 \text{ (km)}.$$

d)  Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{30} \left[ 5 \cdot 75^2 + 10 \cdot 125^2 + 9 \cdot 175^2 + 4 \cdot 225^2 + 2 \cdot 275^2 \right] - 155^2 = 3\,100.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là  $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3\,100} \approx 55,68$ .

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Đáp án:

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Ta có

- $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}.$
- $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}.$

Bảng biến thiên

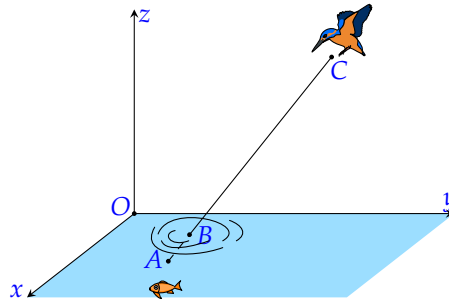
|      |           |                         |           |
|------|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$  | 0         | $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | 0                       |           |
|      |           | -                       | +         |
| $y$  | $+\infty$ |                         | $+\infty$ |

$3\sqrt[3]{9}$

Vậy  $\min_{(0;+\infty)} y = y \left( \sqrt[3]{\frac{8}{3}} \right) = 3\sqrt[3]{9} \approx 6,24$ .

Đáp án: 6,24 ..... □

**Câu 2.** Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước  $2,5$  m, cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $5$  m và  $3$  m phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước  $90$  cm và cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $4$  m và  $3,5$  m. Biết tọa độ điểm  $B(x; y; z)$  là lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước. Tổng  $x + y + z$  bằng bao nhiêu (kết quả lấy tròn đến hàng phần trăm)?



Đáp án: 7 , 6 3

**Lời giải.**

Theo bài ta có  $C(3;5;2,5)$  và  $A(3,5;4;-0,9)$ .

Điểm  $B(x; y; z) \in (Oxy) \Rightarrow B(x; y; 0)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AC} = (-0,5; 1; 3,4)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (x - 3,5; y - 4; 0,9)$ .

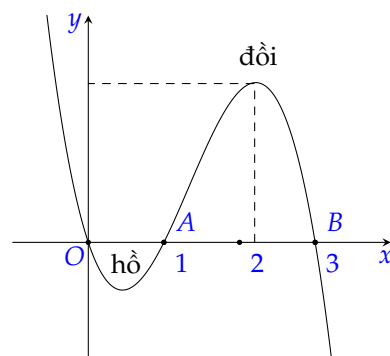
Do ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= k\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3,5 = -0,5k \\ y - 4 = k \\ 0,9 = 3,4k \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{9}{34} \\ x = \frac{229}{68} \\ y = \frac{145}{34} \end{cases} &\Rightarrow B \left( \frac{229}{68}; \frac{145}{34}; 0 \right). \end{aligned}$$

Vậy  $x + y + z = \frac{229}{68} + \frac{145}{34} + 0 = \frac{519}{68} \approx 7,63$ .

Đáp án: 7,63 ..... □

**Câu 3.** Lát cắt ngang một vùng đất được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km). Biết độ rộng của hồ  $OA = 1$  km, khoảng cách giữa hai bên chân đồi  $AB = 2$  km, độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là 160 m. Chiều cao của ngọn đồi bằng bao nhiêu (đơn vị: km, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Đáp án:

**Lời giải.**

Dựa đồ thị hàm số ta có  $y = f(x) = ax(x-1)(x-3) = a(x^3 - 4x^2 + 3x)$  với  $a < 0$ .

Ta có  $f'(x) = a(3x^2 - 8x + 3)$ .

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

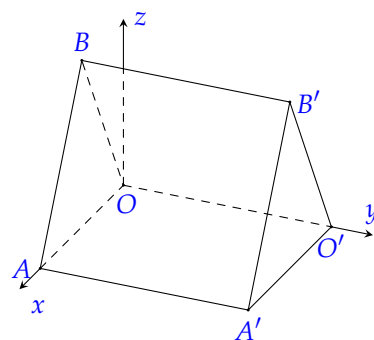
Vì độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là 160 m nên

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right) &= -0,16 \\ \Rightarrow a \left[ \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^3 - 4 \left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \right] &= -0,16 \\ \Rightarrow a &\approx -0,2535. \end{aligned}$$

Vậy chiều cao của ngọn đồi là  $f\left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right) \approx 0,54$  (km).

Đáp án:  .....

**Câu 4.** Những căn nhà gỗ được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác  $OAB.O'A'B'$  như hình bên. Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  thể hiện như hình (đơn vị đo lấy theo centimet), hai điểm  $A'$  và  $B'$  có tọa độ lần lượt là  $(240; 450; 0)$  và  $(120; 450; 300)$ . Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là  $a$  cm, chiều rộng là  $b$  cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là  $c$  cm. Giá trị của  $a + b + c$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Đáp án:

**Lời giải.**

Vì điểm  $A'$  có tọa độ là  $(240; 450; 0)$  nên khoảng cách từ  $A'$  đến các trục  $Ox$ ,  $Oy$  lần lượt là 450 cm và 240 cm nên  $A'A = 450$  cm và  $A'O' = 240$  cm.

Từ giả thiết suy ra  $A'B' = (-120; 0; 300)$ .

$$\text{Do đó } A'B' = |A'B'| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323 \text{ (cm)}.$$

Vì  $O'O = A'A = 450$  cm và  $O'$  nằm trên trục  $Oy$  nên tọa độ của điểm  $O'$  là  $(0; 450; 0)$ .

$$\text{Do đó } O'B' = (120; 0; 300) \text{ và } O'B' = |O'B'| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323 \text{ (cm)}.$$

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450 cm, chiều rộng là 240 cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm. Suy ra  $a + b + c = 1013$ .

Đáp án:  .....

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 2x + 1$ . Tính độ dài  $AB$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Đạo hàm  $f'(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \\ e^x = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln 2 \\ x = \ln 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = -\ln 2 \Rightarrow y = -\frac{5}{4} - 2\ln 2$ . Suy ra điểm  $A\left(-\ln 2; -\frac{5}{4} - 2\ln 2\right)$ .

Với  $x = \ln 2 \Rightarrow y = -5 + 2\ln 2$ . Suy ra điểm  $B(\ln 2; -5 + 2\ln 2)$ .

Khi đó, hàm số có điểm cực trị là  $A\left(-\ln 2; -\frac{5}{4} - 2\ln 2\right)$  và  $B(\ln 2; -5 + 2\ln 2)$ .

Ta có

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2\ln 2)^2 + \left(-\frac{15}{4} + 4\ln 2\right)^2} \\ &= \sqrt{20(\ln 2)^2 - 30\ln 2 + \frac{225}{16}} \approx 1,7. \end{aligned}$$

Vậy  $AB \approx 1,7$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(0; 1; 2)$ . Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  xuống  $BC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $OH$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{BC} = (-2; 0; 1)$  và  $\overrightarrow{BH} = (x - 2; y - 1; z - 1)$ .

Do  $B, C, H$  thẳng hàng nên tồn tại  $k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC}$  hay

$$\begin{cases} x - 2 = -2k \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 1 \\ z = k + 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Khi đó tọa độ của  $H(2 - 2k; 1; k + 1)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AH} = (1 - 2k; -1; k + 2)$ .

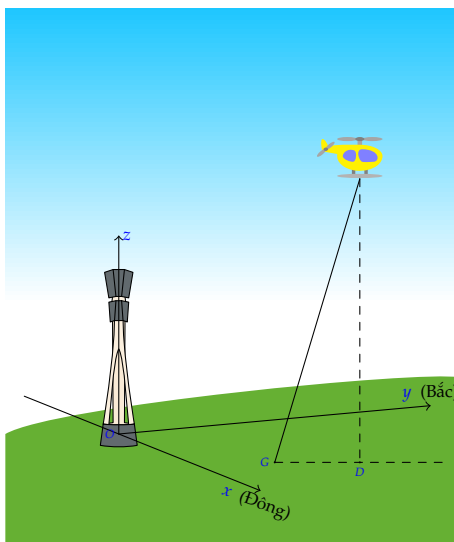
Lại có  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  xuống  $BC$  nên

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (1 - 2k) \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + (k + 2) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Suy ra  $H(2; 1; 1)$ .

Vậy  $OH = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ .

**Câu 3.** Một chiếc trực thăng cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc tọa độ  $O$  là chân tháp điều khiển sân bay; trục  $Ox$  là hướng đông, trục  $Oy$  là hướng bắc và trục  $Oz$  là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét. Trực thăng cất cánh từ điểm  $G$  trên mặt đất (mặt phẳng  $Oxy$ ) và  $M\left(1 + t; \frac{1}{2} + 2t; 2t\right)$  là vị trí của trực thăng tại thời điểm  $t$  phút sau khi cất cánh ( $t \geq 0$ ). Một hòn đảo ở vị trí  $D(150; 115; 0)$ . Trực thăng bay đến vị trí  $M$  thì khoảng cách từ máy bay đến  $D$  là nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm  $M$ .



### Lời giải.

Vì  $G$  là vị trí trực thăng tại mặt đất nên tọa độ  $G \equiv M \left( 1+t; \frac{1}{2}+2t; 2t \right)$  thỏa mãn  $z_G = 0$ .

Do đó  $t = 0 \Rightarrow G \left( 1; \frac{1}{2}; 0 \right)$ .

Ta có  $\overrightarrow{MD} = \left( 149-t; \frac{229}{2}-2t; -2t \right)$ .

Khi đó, độ dài của  $\overrightarrow{MD}$  là

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MD}| &= \sqrt{(149-t)^2 + \left( \frac{229}{2}-2t \right)^2 + (-2t)^2} \\ &= \sqrt{t^2 - 298t + 22\,201 + 4t^2 - 458t + \frac{52\,441}{4} + 4t^2} \\ &= \sqrt{9t^2 - 756t + \frac{141\,245}{4}}. \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = 9t^2 - 756t + \frac{141\,245}{4}$  với  $t \geq 0$ .

Ta có  $f'(t) = 18t - 756$ ,  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 42$ .

Lập bảng biến thiên ta được  $\max_{t \geq 0} = f(42) = \frac{77\,741}{4}$ .

Suy ra độ dài của  $\overrightarrow{MD}$  nhỏ nhất khi  $t = 42$ .

Vậy  $M \left( 43; \frac{169}{2}; 84 \right)$ .

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. D   2. B   3. C   4. B   5. A   6. D   7. A   8. B   9. C   10. D   11. D   12. D

### PHẦN II.

Câu 1.      a Đ b S c S d Đ      Câu 2.      a Đ b Đ c S d Đ

### PHẦN III.

Câu 1.   6 , 2 4      Câu 2.   7 , 6 3      Câu 3.   0 , 5 4      Câu 4.   1 0 1 3

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |     | $4$ |           |     |     | $+\infty$ |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |
|         |           |      |     |     |           |     |     |           |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

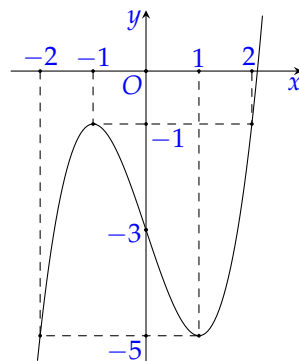
A.  $(-\infty; -1)$ .B.  $(0; 1)$ .C.  $(-1; 1)$ .D.  $(-1; 0)$ .

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$ .

Chọn đáp án **D** ..... ☐

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 2]$  là

A.  $m = -5; M = -1$ .B.  $m = -2; M = 2$ .C.  $m = -1; M = 0$ .D.  $m = -5; M = 0$ .

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có

$$M = \max_{[-2; 2]} f(x) = -1 \text{ khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2;$$

$$m = \min_{[-2; 2]} f(x) = -5 \text{ khi } x = -2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 3.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+1}{x-1}$  là

A.  $y = \frac{1}{4}$ .B.  $y = 4$ .C.  $y = 1$ .D.  $y = -1$ .

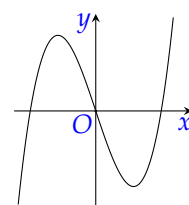
Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{x-1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Suy ra đồ thị của hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang  $y = 4$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 4.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



**(A)**  $y = x^3 - 3x$ .

**B.**  $y = -x^3 + 3x$ .

**C.**  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**D.**  $y = -x^3 + 3x^2$ .

**Lời giải.**

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số  $a > 0$ .

Hơn nữa, đồ thị đi qua gốc tọa độ nên chỉ có hàm số  $y = x^3 - 3x$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 5.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Vector  $\overrightarrow{AB}$  bằng

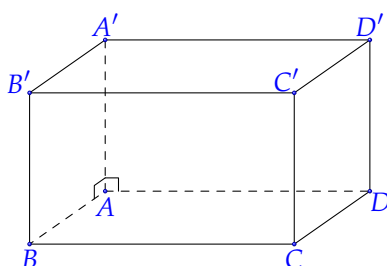
**(A)**  $\overrightarrow{D'C'}$ .

**B.**  $\overrightarrow{BA}$ .

**C.**  $\overrightarrow{CD}$ .

**D.**  $\overrightarrow{B'A'}$ .

**Lời giải.**



Dễ dàng thấy  $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{AB}$ .

Còn các vector  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{B'A'}$  là các vector đối của vector  $\overrightarrow{AB}$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1;2;5)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

**A.**  $(0;2;0)$ .

**B.**  $(0;0;5)$ .

**(C)**  $(1;0;0)$ .

**D.**  $(0;2;5)$ .

**Lời giải.**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1;2;5)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là  $(1;0;0)$ .

Chọn đáp án **(C)** ..... □

**Câu 7.** Số tiền mà sinh viên chi cho thanh toán cước điện thoại trong tháng (đơn vị: nghìn đồng) được cho trong bảng sau:

| Số tiền      | [0;50) | [50;100) | [100;150) | [150;200) | [200;250) |
|--------------|--------|----------|-----------|-----------|-----------|
| Số sinh viên | 5      | 12       | 23        | 17        | 3         |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

**(A)**  $R = 250$ .

**B.**  $R = 50$ .

**C.**  $R = 200$ .

**D.**  $R = 150$ .

**Lời giải.**

Ta có  $R = 250 - 0 = 250$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 8.** Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** Độ lệch chuẩn càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

**B.** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là căn bậc hai số học của phương sai.

**C.** Phương sai càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

**(D)** Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là căn bậc hai số học của độ lệch chuẩn.

**Lời giải.**

Dựa theo lý thuyết sách giáo khoa: “Căn bậc hai số học của phương sai chính là độ lệch chuẩn”. Do đó, khẳng định sai là “Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là căn bậc hai số học của độ lệch chuẩn”.

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2024$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2024$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng  $x = 2024$  và  $x = -2024$ .  
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.  
C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

**D** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 2024$  và  $y = -2024$ .

**Lời giải.**

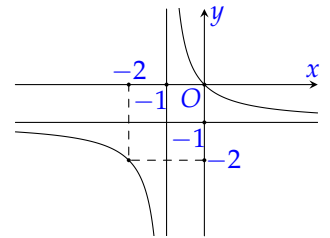
Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án “Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 2024$  và  $y = -2024$ ”.

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 10.** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A.  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .  
C.  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

B.  $y = \frac{-x+1}{x+1}$ .  
**D**  $y = \frac{-x}{x+1}$ .



**Lời giải.**

Ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm  $O(0;0)$  nên đồ thị của hàm số  $y = \frac{-x}{x+1}$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 11.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $f(x)$  có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 2. B. 0. **C** 1. D. 3.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x-1 = 0 \\ (x-2)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = 1 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm bội bậc ba).} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |   |   |   |   |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0 |   | 1 |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + | 0 | + | 0 | - | 0 | + |           |
| $f(x)$  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 điểm cực đại.

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; -1; 1)$  và  $\vec{v} = (1; 2; -2)$ . Độ dài của vectơ  $\vec{u} + \vec{v}$  bằng

- A.  $\sqrt{10}$ . B.  $\sqrt{11} + 3$ . **C**  $3\sqrt{2}$ . D. 5.

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{u} + \vec{v} = (4; 1; -1)$ .

Độ dài của vectơ  $\vec{u} + \vec{v}$  là  $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$ .

Chọn đáp án **C** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$ .

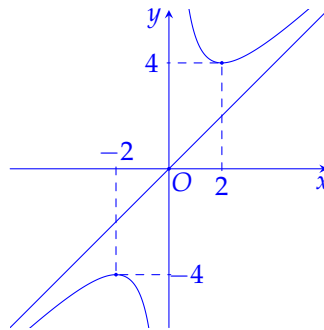
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $y' = 1 + \frac{4}{x^2}$ .

**b** Đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm trên các khoảng  $(-2; 0)$ ,  $(0; 2)$  và nhận giá trị dương trên các khoảng  $(-\infty; -2)$ ,  $(2; +\infty)$ .

c) Bảng biến thiên của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  là

|      |           |      |           |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$       | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $+$       | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**d** Đồ thị của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  là đường cong như hình sau:



**Lời giải.**

a) **S** Đạo hàm của hàm số đã cho là  $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$ ,  $\forall x \neq 0$ .

b) **Đ** Ta có  $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ .

Bảng xét dấu của  $y'$  như sau

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $+$ | $+$       |

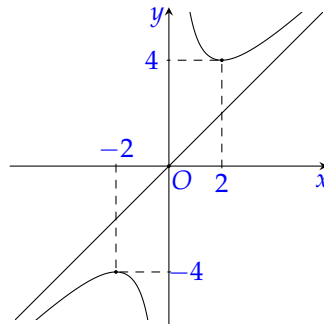
Do đó, đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm trên các khoảng  $(-2; 0)$ ,  $(0; 2)$  và nhận giá trị dương trên các khoảng  $(-\infty; -2)$ ,  $(2; +\infty)$ .

c) **S** Bảng biến thiên của hàm số đã cho là

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$       | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-4$ | $+\infty$ | $4$ | $+\infty$ |     |

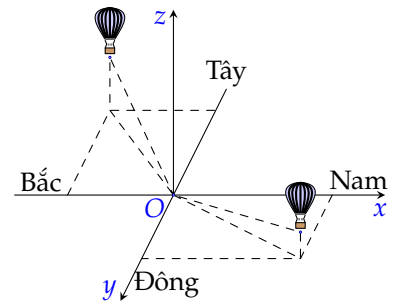
Mệnh đề sai vì thấy  $y(-2) = -4 \neq 4$ .

d) ☒ Hàm số đã cho có đồ thị như ở hình vẽ:



Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**Câu 2.** Hai khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Sau 30 phút, chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía nam và 1,5 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía bắc và 2 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,4 km. Giả sử khinh khí cầu chuyển động theo đường thẳng với vận tốc không đổi. Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên), đơn vị đo lấy theo kilômét.



- ☒ a Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất sau 30 phút là  $(3; 1,5; 0,8)$ .
- b) Quãng đường khinh khí cầu thứ nhất đi được sau 30 phút là 3,44 km (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- ☒ c Quãng đường khinh khí cầu thứ hai đi được sau 30 phút là 2,86 km (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- d) Khoảng cách giữa hai khinh khí cầu sau khi đi được 30 phút là 6,11 km (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**Lời giải.**

- a) ☒ Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là  $(3; 1,5; 0,8)$ .
- b) ☒ Quãng đường khinh khí cầu thứ nhất đi được sau 30 phút là  $\sqrt{3^2 + 1,5^2 + 0,8^2} \approx 3,45$  (km).
- c) ☒ Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là  $(-2; -2; 0,4)$ .  
Quãng đường khinh khí cầu thứ hai đi được sau 30 phút là

$$\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0,4^2} \approx 2,86 \text{ (km)}.$$

d) **S** Khoảng cách giữa hai kinh khí cầu sau khi đi được 30 phút là

$$\sqrt{(3+2)^2 + (1,5+2)^2 + (0,8-0,4)^2} \approx 6,12 \text{ (km)}.$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ .  $E(a; b; c)$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ . Giá trị của  $2a + b + c$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Vì  $E$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  nên tọa độ điểm  $E(x; y; 0)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AE} = (x - 3; y + 1; -2)$ .

Mà  $A, B, E$  thẳng hàng nên hai vectơ  $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$  và  $\overrightarrow{AE}$  cùng phương. Do đó

$$\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -2k \\ y + 1 = 3k \\ -2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ k = -2 \\ y = -7. \end{cases}$$

Suy ra  $E(7; -7; 0)$ .

Vậy  $2a + b + c = 7$ .

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 2.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt là  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với trục  $Ox$ . Hoành độ giao điểm của  $AB$  và  $Ox$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$y' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

|         |           |     |      |     |       |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $3$   |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$ | $0$   | $+$ |           |
| $f(x)$  |           |     | $10$ |     | $-22$ |     | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |     |      |     |       |     |           |

Khi đó, hai cực trị là  $A(-1; 10)$  và  $B(3; -22)$ .

Ta có phương trình đường thẳng  $AB$  là

$$\frac{x + 1}{3 + 1} = \frac{y - 10}{-22 - 10} \Leftrightarrow y = -8x + 2.$$

Khi đó,  $AB$  giao  $Ox$  tại điểm  $I\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ .

Vậy hoành độ giao điểm của  $I$  bằng  $\frac{1}{4} = 0,25$ .

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 3.** Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các học sinh lớp 12A được ghi lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút)    | [25;30) | [30;35) | [35;40) | [40;45) |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|
| Số học sinh lớp 12A | 7       | 16      | 15      | 4       |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12A bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Đáp án:

**Lời giải.**

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 12A là

$$\bar{x}_1 = \frac{7 \cdot 27,5 + 16 \cdot 32,5 + 15 \cdot 37,5 + 4 \cdot 42,5}{42} = \frac{1445}{42}.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 12A là

$$s_1^2 = \frac{1}{42} \left( 7 \cdot 27,5^2 + 16 \cdot 32,5^2 + 15 \cdot 37,5^2 + 4 \cdot 42,5^2 \right) - \left( \frac{1445}{42} \right)^2 \approx 19.$$

Đáp án:  ..... □

**Câu 4.** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe máy Honda Lead. Biết rằng thể tích  $V$  (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng  $t$  (phút) cho bởi công thức  $V(t) = 4(3t^2 - 2t^3) + 1$ , với  $0 \leq t \leq 1$ . Gọi  $V'(t)$  là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm  $t$  với  $0 \leq t \leq 1$ . Xăng chảy vào bình xăng ở giây thứ bao nhiêu có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Đáp án:

**Lời giải.**

Tốc độ tăng thể tích tại thời điểm  $t$  là  $V'(t) = 24t(1 - t) = -24t^2 + 24t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Yêu cầu bài toán, ta cần tìm  $t_0 \in [0; 1]$  mà tại đó, giá trị của hàm số  $f(t) = -24t^2 + 24t$  là lớn nhất.

Ta có  $f'(t) = -48t + 24$ ,  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(t)$  trên  $[0; 1]$  như sau

|        |   |               |   |
|--------|---|---------------|---|
| $t$    | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f(t)$ | 0 | 6             | 0 |

Từ bảng biến thiên, ta suy ra tốc độ tăng thể tích lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 30.

Đáp án:  ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các học sinh lớp 12A được ghi lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút)    | [25;30) | [30;35) | [35;40) | [40;45) |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|
| Số học sinh lớp 12A | 7       | 16      | 15      | 4       |

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12A (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

**Lời giải.**

Xét mẫu số liệu của học sinh lớp 12A.

Gọi  $x_1, x_2, \dots, x_{42}$  là mẫu số liệu gốc về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh

lớp 12A được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là  $x_{11} \in (30; 35)$ .

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12A là

$$Q_1 = 30 + \frac{\frac{42}{4} - 7}{16}(35 - 30) = \frac{995}{32}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là  $x_{32} \in (35; 40)$ .

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12A là

$$Q_3 = 35 + \frac{\frac{3 \cdot 42}{4} - (7 + 16)}{15}(40 - 35) = \frac{227}{6}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 12A là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{227}{6} - \frac{995}{32} \approx 6,74.$$

**Câu 2.** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra-đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm  $A(800; 500; 7)$  đến điểm  $B(940; 550; 9)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là  $C(x; y; z)$ . Tìm tọa độ  $C$ .

**Lời giải.**

Vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo là  $C(x; y; z)$ .

Vì hướng của máy bay không đổi nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.

Do tốc độ của máy bay không đổi và thời gian bay từ  $A$  đến  $B$  gấp đôi thời gian bay từ  $B$  đến  $C$  nên  $AB = 2BC$ .

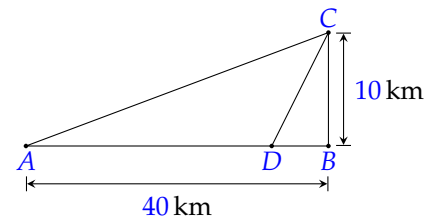
$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left( \frac{940 - 800}{2}; \frac{550 - 500}{2}; \frac{9 - 7}{2} \right) = (70; 25; 1).$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 9) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 70 \\ y - 550 = 25 \\ z - 9 = 1.. \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 10.. \end{cases}$$

Vậy tọa độ  $C(1010; 575; 10)$ .

**Câu 3.** Một người cần đi từ khách sạn  $A$  bên bờ biển đến hòn đảo  $C$ . Biết rằng khoảng cách từ đảo  $C$  đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn  $A$  đến điểm  $B$  trên bờ gần đảo  $C$  nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất?



**Lời giải.**

Đặt  $AD = x$  (km),  $x \in [0; 40]$ .

Khi đó, ta có  $BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2}$ .

Tổng kinh phí đi từ  $A$  đến  $C$  là

$$f(x) = x \cdot 3 + \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \cdot 5 = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}.$$

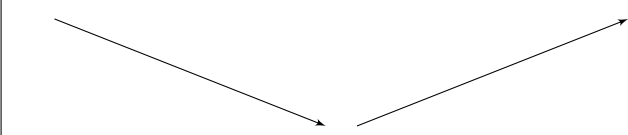
Ta có

$$f'(x) = 3 + 5 \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}.$$

Phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{65}{2}.$$

Bảng biến thiên

| $x$     | 0                                                                                  | $\frac{65}{2}$ | 40 |   |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----|---|
| $f'(x)$ |                                                                                    | -              | 0  | + |
| $f(x)$  |  |                |    |   |

Vậy  $f(x)$  nhỏ nhất khi  $x = \frac{65}{2} = 32,5$ .

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. D   2. A   3. B   4. A   5. A   6. C   7. A   8. D   9. D   10. D   11. C   12. C

### PHẦN II.

Câu 1.      a S   b Đ   c S   d Đ      Câu 2.      a Đ   b S   c Đ   d S

### PHẦN III.

Câu 1.   7               Câu 2.   0   ,   2   5      Câu 3.   1   9            Câu 4.   3   0

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |     |   |      |   |             |
|---------|-----------|---|-----|---|------|---|-------------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0   |   | 3    |   | $+\infty$   |
| $f'(x)$ |           | + | 0   | - | 0    | + |             |
| $f(x)$  | $-\infty$ |   | ↗ 2 |   | ↘ -4 |   | ↗ $+\infty$ |

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. -4.

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

Chọn đáp án **D** ..... □

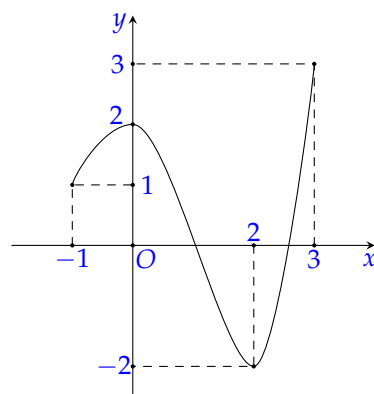
**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

A. 4.

B. 1.

C. 5.

D. 0.



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị, suy ra  $M = f(3) = 3$ ,  $m = f(2) = -2$ .

Vậy  $M - m = 5$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 3.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+1}{x-1}$  có phương trình là

A.  $y = \frac{1}{4}$ .B.  $y = 4$ .C.  $y = 1$ .D.  $y = -1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$ .

Suy ra  $y = 4$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **B** ..... □

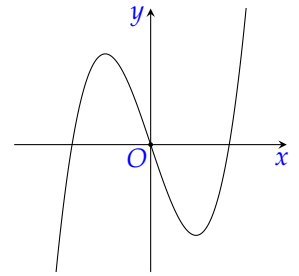
**Câu 4.** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

**A**  $y = x^3 - 3x$ .

**B.**  $y = -x^3 + 3x$ .

**C.**  $y = x^3 + 3x$ .

**D.**  $y = -x^3 - 3x$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị, ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$  nên loại hàm số  $y = -x^3 + 3x$  và loại hàm số  $y = -x^3 - 3x$ .

Xét hàm số  $y = x^3 + 3x$  có  $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số không có cực trị.

Suy ra phương án thỏa mãn là hàm số  $y = x^3 - 3x$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

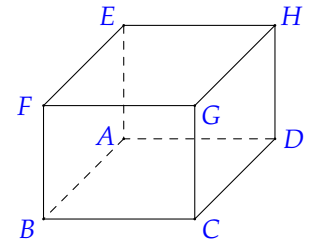
**Câu 5.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.EFGH$  như hình vẽ bên. Khi đó, vectơ  $\overrightarrow{AD}$  bằng

**A.**  $\overrightarrow{HE}$ .

**B.**  $\overrightarrow{CB}$ .

**C.**  $\overrightarrow{BD}$ .

**D**  $\overrightarrow{FG}$ .



**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3;2;1)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

**A.**  $(0;0;1)$ .

**B**  $(3;0;0)$ .

**C.**  $(0;2;0)$ .

**D.**  $(0;2;1)$ .

**Lời giải.**

Điểm  $A'(3;0;0)$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3;2;1)$  trên trục  $Ox$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 7.** Người ta thống kê cân nặng (đơn vị: kg) của 30 học sinh lớp 12A1 thu được bảng số liệu sau:

|             |          |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Cân nặng    | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) | [65; 70) |
| Số học sinh | 5        | 10       | 5        | 8        | 2        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A.** 5.

**B.** 45.

**C.** 70.

**D** 25.

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $R = 70 - 45 = 25$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 8.** Trong mẫu số liệu ghép nhóm, độ lệch chuẩn được tính theo công thức nào dưới đây?

**A.**  $s^2 = \frac{1}{n} \left[ m_1 (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + m_k (x_k - \bar{x})^2 \right]$ .

**B.**  $s = \frac{1}{n} \left[ m_1 (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + m_k (x_k - \bar{x})^2 \right]$ .

**C.**  $s^2 = \frac{1}{n} \left[ m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \cdots + m_k x_k^2 \right] - \bar{x}^2$ .

**D**  $s = \sqrt{\frac{1}{n} \left[ m_1 (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + m_k (x_k - \bar{x})^2 \right]}$ .

**Lời giải.**

Công thức độ lệch chuẩn mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \left[ m_1 (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + m_k (x_k - \bar{x})^2 \right]}.$$

Chọn đáp án **(D)** ..... □

**Câu 9.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $y = \frac{x-1}{x-2}$ .      **B**  $y = x^3 + x$ .      C.  $y = -x^3 - 3x$ .      D.  $y = \frac{x+1}{x+3}$ .

**Lời giải.**

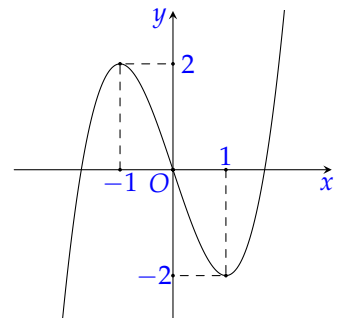
Xét hàm số  $y = x^3 + x$  có  $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Suy ra hàm số  $y = x^3 + x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 10.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = -1$  là

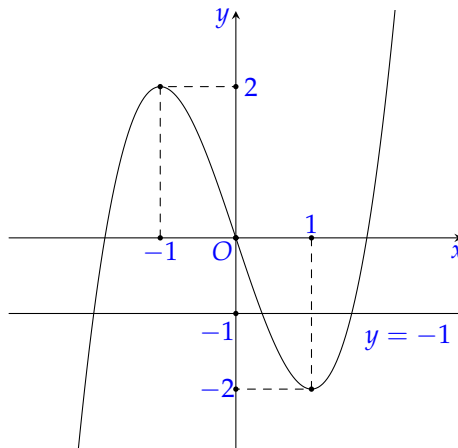
- A. 0.      B. 2.  
**C** 3.      D. 1.



**Lời giải.**

Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = -1$  chính là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = -1$ .

Vẽ đường thẳng  $y = -1$  trên cùng mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ :



Từ hình vẽ, ta thấy 2 đường cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra phương trình  $f(x) = -1$  có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(C)** ..... □

**Câu 11.** Biết rằng hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 - m$  có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng  $-1$ . Giá trị của  $m$  là

- A.  $-6$ .      **B**  $-4$ .      C.  $-3$ .      D.  $-5$ .

**Lời giải.**

Với mọi  $x \in [-1; 1], y' = 6x^2 - 6x$ .

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 1 \in [-1; 1] \end{cases}$$

Mặt khác, ta có  $y(-1) = -5 - m$ ,  $y(0) = -m$ ,  $y(1) = -1 - m$ .  
Ta thấy  $-5 - m < -1 - m < -m$  nên  $\min_{[-1;1]} y = -5 - m$  tại  $x = -1$ .

Theo bài đề bài, ta có  $\min_{[-1;1]} y = -1$  nên  $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$ .

Chọn đáp án **B** .....  $\square$

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$  với  $m$  là tham số thực. Số giá trị của  $m$  để  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$  là

- A. 0.                      B. 1.                      **C** 2.                      D. 3.

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (2; -2; 1)$ .

Khi đó  $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$  và  $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m + 1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$ .

Do đó  $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2. \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

|         |           |           |   |           |
|---------|-----------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0         | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | 2         | $+\infty$ | 2 | $+\infty$ |

- a) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.  
**b** Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là điểm  $I(0; 2)$ .  
**c**  $f(-5) > f(-4)$ .  
d) Phương trình  $|f(x)| = 1$  có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

- a) **S** Do  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  nên  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất.  
b) **D** Do  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  và  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 0$  và có đường tiệm cận ngang là  $y = 2$ .  
Vậy giao điểm của hai đường tiệm cận là điểm  $I(0; 2)$ .  
c) **D** Vì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  và ta có  $-5 < -4 \Rightarrow f(-5) > f(-4)$ .  
d) **S** Ta có  $|f(x)| = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1$ .  
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình  $f(x) = 1$  có đúng một nghiệm và  $f(x) = -1$  cũng có đúng một nghiệm.  
Vậy phương trình  $|f(x)| = 1$  có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c đúng | d sai** .....  $\square$

**Câu 2.** Kiểm tra khối lượng của 30 bao thạch cao (đơn vị: kg) được chọn ngẫu nhiên trước khi xuất xưởng cho kết quả như bảng ghép lớp sau:

|            |            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Khối lượng | [48,5; 49) | [49; 49,5) | [49,5; 50) | [50; 50,5) | [50,5; 51) | [51; 51,5) |
| Số bao     | 6          | 2          | 4          | 4          | 6          | 8          |

- a) Khoảng biến thiên của mẫu ghép nhóm trên là 3.  
b) Khoảng tứ phân vị của bảng ghép nhóm là 3.  
c) Giá trị trung bình của mẫu ghép nhóm là 50,32.  
d) Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu ghép nhóm là 0,7009;  $\sqrt{0,7009}$ .

**Lời giải.**

- a) **D** Khoảng biến thiên của mẫu ghép nhóm là  $R = 51,5 - 48,5 = 3$ .

- b) **S**

|                 |            |            |            |            |            |            |          |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|
| Khối lượng      | [48,5; 49) | [49; 49,5) | [49,5; 50) | [50; 50,5) | [50,5; 51) | [51; 51,5) |          |
| Tần số tích lũy | 6          | 8          | 12         | 16         | 22         | 30         |          |
| Tần số          | 6          | 2          | 4          | 4          | 6          | 8          | $n = 30$ |

Ta có  $\frac{n}{4} = \frac{30}{4}$ .

Nhóm 2: [49; 49,5) là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy là  $cf_2 = 8 > \frac{30}{4}$ .

Khi đó  $s = 49$ ;  $h = 49,5 - 49 = 0,5$ ;  $n_2 = 2$ ;  $cf_1 = 6$ .

Suy ra tứ phân vị thứ nhất là  $Q_1 = s + \frac{\frac{n}{4} - cf_1}{n_2} \cdot h = 49 + \frac{\frac{30}{4} - 6}{2} \cdot 0,5 = 49,375$ .

Ta lại có  $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 30}{4}$ .

Nhóm 6: [51; 51,5) là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy là  $cf_6 = 30 > \frac{3 \cdot 30}{4}$ .

Khi đó  $t = 51$ ;  $h = 51,5 - 51 = 0,5$ ;  $n_6 = 8$ ;  $cf_5 = 22$ .

Suy ra tứ phân vị thứ ba là  $Q_3 = t + \frac{\frac{3n}{4} - cf_5}{n_6} \cdot h = 51 + \frac{\frac{3 \cdot 30}{4} - 22}{8} \cdot 0,5 = 51,03125$ .

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 51,03125 - 49,375 = 1,65625.$$

- c) **S** Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có

|                  |       |       |       |       |       |       |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Giá trị đại diện | 48,75 | 49,25 | 49,75 | 50,25 | 50,75 | 51,25 |
| Số bao           | 6     | 2     | 4     | 4     | 6     | 8     |

Trọng lượng trung bình của các bao thạch cao là

$$\bar{x} = \frac{1}{30} (6 \cdot 48,75 + 2 \cdot 49,25 + 4 \cdot 49,75 + 4 \cdot 50,25 + 6 \cdot 50,75 + 8 \cdot 51,25) \approx 50,18.$$

- d) **S** Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 \approx \frac{6 \cdot (-1,43)^2 + 2 \cdot (-0,93)^2 + 4 \cdot (-0,43)^2 + 4 \cdot (0,07)^2 + 6 \cdot 0,57^2 + 8 \cdot 1,07^2}{30} \approx 0,8622.$$

Độ lệch chuẩn là  $s \approx \sqrt{0,8622}$ .

Chọn đáp án 

|        |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|
| a đúng | b sai | c sai | d sai |
|--------|-------|-------|-------|

 ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Biết ba đỉnh  $A(4; -1; 1)$ ,  $B(2; 0; -1)$ ,  $C(6; 1; 0)$  và hình thang  $ABCD$  có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a; b; c)$ , giá trị của  $a - 2b + c$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$ ;  $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$ .

Theo giả thiết  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  và có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$  nên

$$\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}.$$

Suy ra  $AD = \sqrt{2} = \frac{1}{3}BC$ .

Do  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  nên  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .

Giả sử  $D(a; b; c)$ . Khi đó, ta có 
$$\begin{cases} a - 4 = \frac{4}{3} \\ b + 1 = \frac{1}{3} \\ c - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Suy ra  $a - 2b + c = 8$ .

Đáp án:  ..... □

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(3; 1; -1)$ . Gọi  $M(a; b; c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oxz)$  và cách đều ba điểm  $A, B, C$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng bao nhiêu (làm tròn kết đến hàng phần mười)?

Đáp án:

**Lời giải.**

Vì  $M(a; b; c) \in (Oxz)$  nên  $b = 0$ . Suy ra  $M(a; 0; c)$ .

Vì  $M(a; 0; c)$  cách đều ba điểm  $A, B, C$  nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (1-a)^2 + 1 + (1-c)^2 = (-1-a)^2 + 1 + c^2 \\ (1-a)^2 + 1 + (1-c)^2 = (3-a)^2 + 1 + (-1-c)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -4a - 2c = -1 \\ a - c = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ c = -\frac{7}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $a + b + c = \frac{5}{6} + 0 + \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{1}{3} \approx -0,3$ .

Đáp án:  ..... □

**Câu 3.** Hàm cầu là hàm số thể hiện giá bán  $P$  của mỗi sản phẩm theo lượng sản phẩm  $Q$  mà thị trường muốn mua. Một doanh nghiệp bán một sản phẩm có hàm cầu cho bởi  $P = \frac{60 - Q}{4}$ ,

$0 \leq Q \leq 60$  trong đó  $Q$  là số lượng sản phẩm và  $P$  là giá bán của mỗi sản phẩm. Doanh thu tối đa bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Gọi  $R$  là tổng doanh thu.

Từ đây ta có  $R = PQ = \frac{60-Q}{4} \cdot Q = \frac{60Q - Q^2}{4} = R(Q)$ , trong đó  $0 \leq Q \leq 60$ .

Đạo hàm  $R'(Q) = 0 \Leftrightarrow \frac{60-2Q}{4} = 0 \Leftrightarrow Q = 30$ .

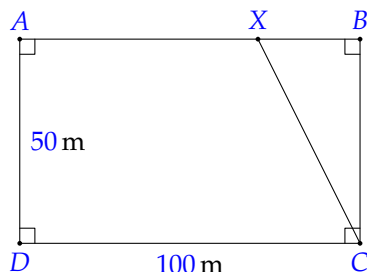
Bảng biến thiên

|         |        |         |         |   |
|---------|--------|---------|---------|---|
| $Q$     | 0      | 30      | 60      |   |
| $R'(Q)$ |        | +       | 0       | - |
| $R(Q)$  | $R(0)$ | $R(30)$ | $R(60)$ |   |

Từ bảng biến thiên, suy ra doanh thu tối đa là  $R(30) = \frac{60 \cdot 30 - 30^2}{4} = 225$ .

Đáp án:  □

**Câu 4.** Một vận động viên thể thao hai môn phối hợp luyện tập với một bể bơi hình chữ nhật rộng 50 m, dài 100 m. Vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm  $A$ , chạy đến điểm  $X$  và bơi từ điểm  $X$  đến điểm  $C$  (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc chạy là 10 km/h và vận tốc bơi là 4 km/h. Hỏi nên chọn điểm  $X$  cách  $A$  gần bằng bao nhiêu mét để vận động viên đến  $C$  nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Đáp án:

**Lời giải.**

Đặt  $BX = x$  (km), ta có  $AX = 0,1 - x$ ;  $XC = \sqrt{(0,05)^2 + x^2} = \sqrt{0,0025 + x^2}$ .

Xét hàm số  $T(x) = \frac{0,1-x}{10} + \frac{\sqrt{0,0025+x^2}}{4}$  ( $0 \leq x < 0,1$ ).

Ta có  $T'(x) = -\frac{1}{10} + \frac{x}{4\sqrt{0,0025+x^2}} = \frac{-2\sqrt{0,0025+x^2} + 5x}{20\sqrt{0,0025+x^2}}$ .

Do đó  $T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = \sqrt{0,0025+x^2}$ .

Bình phương hai vế phương trình ta được  $0,0025 + x^2 = \frac{25x^2}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{21}}{210}$ .

Vì  $0 \leq x < 0,1$  nên  $x = \frac{\sqrt{21}}{210}$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $T(x)$  là

|         |        |                                       |          |
|---------|--------|---------------------------------------|----------|
| $x$     | 0      | $\frac{\sqrt{21}}{210}$               | 0,1      |
| $T'(x)$ | —      | 0                                     | +        |
| $T(x)$  | $T(0)$ | $T\left(\frac{\sqrt{21}}{210}\right)$ | $T(0,1)$ |

Vậy  $T(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $T\left(\frac{\sqrt{21}}{210}\right)$  khi  $AX = 0,1 - \frac{\sqrt{21}}{210} \approx 0,078$  (km) = 78 (m).

Đáp án: 78 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2;2;1)$ ,  $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OMN$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{OM} = (2;2;1)$  và  $\overrightarrow{ON} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot \frac{8}{3} = 0.$$

Suy ra  $OM \perp ON$  hay tam giác  $OMN$  vuông tại  $O$ .

Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OMN$  là trung điểm  $I$  của đoạn  $MN$ .

Vậy  $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{11}{6}\right)$ .

**Câu 2.** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $1 \leq x \leq 18$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa được tính bằng nghìn đồng và cho bởi hàm chi phí  $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$ . Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi  $B(x)$  là số tiền bán được và  $L(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa. Tính lợi nhuận tối đa mà hộ làm nghề dệt vải lụa thu được mỗi ngày.

**Lời giải.**

Số tiền thu được khi bán  $x$  mét vải lụa là  $B(x) = 220x$  nghìn đồng.

Lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa là

$$L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số  $L(x)$  xác định trên  $[1;18]$ , ta có  $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$ .

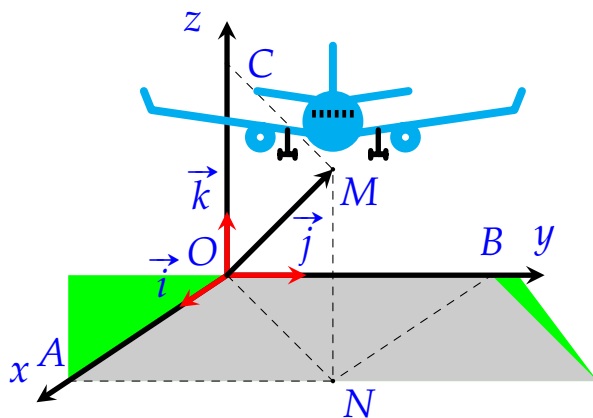
$$\text{Phương trình } L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1;18] \\ x = -8 \notin [1;18]. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |        |         |         |   |
|---------|--------|---------|---------|---|
| $x$     | 1      | 10      | 18      |   |
| $L'(x)$ |        | +       | 0       | − |
| $L(x)$  | $f(1)$ | $f(10)$ | $f(18)$ |   |

Dựa vào bảng biến thiên, lợi nhuận thu được tối đa mỗi ngày của hộ làm nghề dệt vải lụa là  $f(10) = 1\,200$  nghìn đồng.

**Câu 3.** Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  được gắn như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 1 km), trong đó gốc  $O$  là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và  $M(x; y; z)$  biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8 giờ máy bay đang ở vị trí  $(50; 120; 4)$  và chuyển động với vận tốc  $\vec{v} = (300; 400; 3)$  (km/h). Tại thời điểm 10 giờ cùng ngày, khoảng cách giữa máy bay và tháp truyền hình có tọa độ  $F(1\,250; 1\,020; 0)$  là bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



**Lời giải.**

Tại thời điểm 10 giờ, máy bay đã di chuyển với vận tốc  $\vec{v} = (300; 400; 3)$  trong 2 giờ. Do đó vị trí của máy bay là  $M_2$  có tọa độ thỏa mãn

$$\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM} + 2\vec{v} = (650; 920; 10).$$

Suy ra tại thời điểm 10 giờ, máy bay ở vị trí  $M_2(650; 920; 10)$ . Do đó khoảng cách giữa máy bay và tháp truyền hình là

$$M_2F = \left| \overrightarrow{M_2F} \right| = \sqrt{(1\,250 - 650)^2 + (1\,020 - 920)^2 + (-10)^2} \approx 608,36.$$

Vậy khoảng cách giữa máy bay và tháp truyền hình  $F$  xấp xỉ 608 km.

**BẢNG ĐÁP ÁN**

## PHẦN I.

1. D   2. C   3. B   4. A   5. D   6. B   7. D   8. D   9. B   10. C   11. B   12. C

PHẦN II.

**Câu 1.**

a S b Đ c Đ d S

**Câu 2.**

a Đ b S c S d S

### PHẦN III.

Câu 1. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 8 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 2. 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| − | 0 | , | 3 |
|---|---|---|---|

    Câu 3. 

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 2 | 2 | 5 |  |
|---|---|---|--|

    Câu 4. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 7 | 8 |  |  |
|---|---|--|--|

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|------|-----------|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |     | $-2$ |     | $0$  |     | $2$ |     | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |     |      |     | $-1$ |     |     |     | $+\infty$ |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |
|      |           |     |      |     |      |     |     |     |           |

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(-2; 0)$ .B.  $(-17; -1)$ .C.  $(-\infty; -2)$ .D.  $(1; +\infty)$ .

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .

Chọn đáp án (A) ..... □

**Câu 2.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 2]$ . Giá trị của  $M + m$  bằng

A.  $-2$ .B.  $-3$ .C.  $2$ .D.  $0$ .

Lời giải.

Ta có  $y = \frac{x-2}{x+1}$  liên tục trên đoạn  $[0; 2]$ .

Ta lại có  $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 2]$ .

Do đó, hàm số đồng biến trên đoạn  $[0; 2]$ .

Suy ra  $M = \max_{[0; 2]} y = y(2) = 0$  và  $m = \min_{[0; 2]} y = y(0) = -2$ .

Vậy  $M + m = -2$ .

Chọn đáp án (A) ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |      |      |      |           |      |     |      |     |  |           |
|------|-----------|------|------|------|------|-----------|------|-----|------|-----|--|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ |      | $-1$ |      | $1$       |      | $2$ |      | $3$ |  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$  | $0$  | $-$       |      | $-$ |      | $+$ |  | $+$       |
| $y$  | $7$       |      |      |      | $15$ |           | $15$ |     |      |     |  | $+\infty$ |
|      |           |      | $-1$ |      |      | $-\infty$ |      |     | $-5$ |     |  |           |

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là

A.  $1$ .B.  $3$ .C.  $2$ .D.  $4$ .

**Lời giải.**

Ta có

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ , suy ra đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 7$ , suy ra đường thẳng  $y = 7$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án **C** ..... □

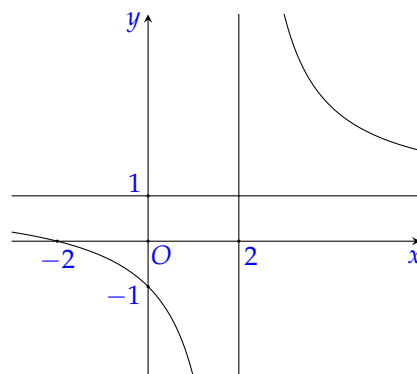
**Câu 4.** Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong trong hình bên?

A.  $y = \frac{2x+1}{x-2}$ .

**B**  $y = \frac{x+2}{x-2}$ .

C.  $y = \frac{x^2-1}{x-2}$ .

D.  $y = x^3 - 3x + 2$ .



**Lời giải.**

Đường cong trong hình là đồ thị hàm nhất biến  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đường tiệm cận đứng  $x = 2$  và đường tiệm cận ngang  $y = 1$ .

Chỉ có hàm số  $y = \frac{x+2}{x-2}$  thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án **B** ..... □

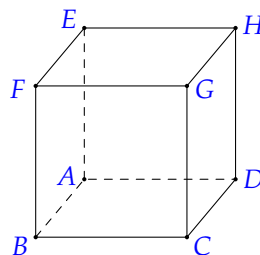
**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Khi đó, hiệu vectơ  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FG}$  bằng

A.  $\overrightarrow{BD}$ .

B.  $\overrightarrow{AE}$ .

**C**  $\overrightarrow{DB}$ .

D.  $\overrightarrow{BH}$ .



**Lời giải.**

Do  $ABCD.EFGH$  là hình hộp nên  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-1; -1; 3)$ ,  $B(0; 2; 0)$  và  $C(5; -2; 1)$ . Tọa độ của điểm  $D$  là

A.  $(-4; -5; 4)$ .

**B**  $(4; -5; 4)$ .

C.  $(4; 5; -4)$ .

D.  $(-4; -5; -4)$ .

**Lời giải.**

Giả sử  $D(x_D; y_D; z_D)$ , ta có  $\overrightarrow{AD} = (x_D + 1; y_D + 1; z_D - 3)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (5; -4; 1)$ .

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 5 \\ y_D + 1 = -4 \\ z_D - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = -5 \\ z_D = 4 \end{cases}$$

Vậy  $D(4; -5; 4)$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 7.** Kết quả điều tra tổng thu nhập trong năm 2024 (đơn vị: triệu đồng) của một số hộ gia đình ở thành phố Nha Trang được ghi lại ở bảng sau:

| Tổng thu nhập  | [200; 250) | [250; 300) | [300; 350) | [350; 400) | [400; 450) |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số hộ gia đình | 24         | 62         | 34         | 21         | 9          |

Tứ phân vị  $Q_3$  bằng

- A

 $Q_3 = \frac{11\,525}{34}.$
- $B. \, Q_3 = \frac{16\,175}{62}.$
- $C. \, Q_3 = \frac{325}{17}.$
- $D. \, Q_3 = \frac{675}{34}.$

Lời giải.

Bảng tần số và tần số tích lũy như sau:

| Nhóm            | [200; 250) | [250; 300) | [300; 350) | [350; 400) | [400; 450) |           |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| Tần số          | 24         | 62         | 34         | 21         | 9          | $n = 150$ |
| Tần số tích lũy | 24         | 86         | 120        | 141        | 150        |           |

Ta có số hộ gia đình là  $n = 150$ .

Tính  $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 150}{4} = 112,5$ .

Vì  $86 < 112,5 < 120$  nên nhóm thứ 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 112,5. Gọi  $L_3$  là đầu mút trái nhóm 3,  $T_2$  là tần số tích lũy của nhóm 2,  $h_3$  là độ dài nhóm 3, tần số nhóm 3 là  $n_3$ . Khi đó, tứ phân vị thứ ba bằng

$$Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3n}{4} - T_2}{n_3} \cdot h_3 = 300 + \frac{112,5 - 86}{34} \cdot 50 = \frac{11\,525}{34}.$$

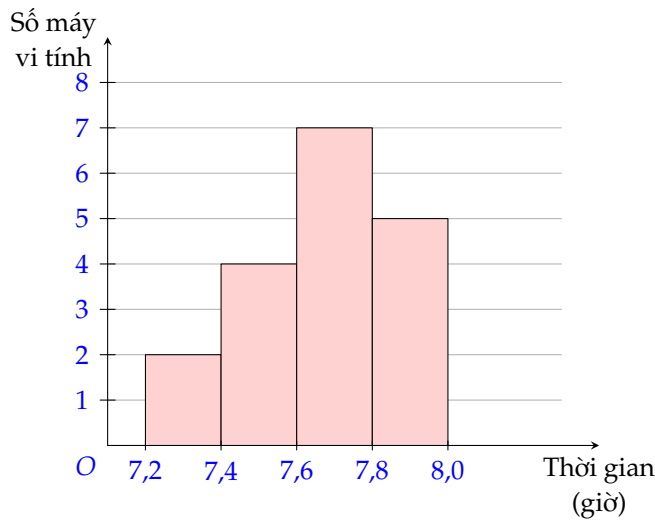
Chọn đáp án 

A

 .....□

**Câu 8.** Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục từ lúc sạc đầy cho đến khi hết pin (đơn vị: giờ) của một số máy vi tính cùng loại được mô tả bằng biểu đồ dưới đây:

Thời gian sử dụng pin của một số máy vi tính



Số trung bình của thời gian sử dụng pin bằng

- A

 $\frac{23}{3}.$
- $B. \, \frac{25}{3}.$
- $C. \, \frac{37}{5}.$
- $D. \, \frac{73}{10}.$

Lời giải.

Từ biểu đồ, ta có bảng thống kê sau:

|                  |           |           |           |           |          |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| Thời gian (giờ)  | [7,2;7,4) | [7,4;7,6) | [7,6;7,8) | [7,8;8,0) |          |
| Giá trị đại diện | 7,3       | 7,5       | 7,7       | 7,9       |          |
| Số máy vi tính   | 2         | 4         | 7         | 5         | $n = 18$ |

Cỡ mẫu là  $n = 2 + 4 + 7 + 5 = 18$ .

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 7,3 + 4 \cdot 7,5 + 7 \cdot 7,7 + 5 \cdot 7,9}{18} = \frac{23}{3}.$$

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ . Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là

**A**  $(-1; 1)$ .      **B.**  $(2; 10)$ .      **C.**  $(3; 9)$ .      **D.**  $(-3; 0)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Ta có  $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ .

Phương trình  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|      |           |      |           |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $3$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$       | $-$       |           |
| $y$  | $-\infty$ |      | $1$       | $+\infty$ | $+\infty$ |
|      |           |      | $-\infty$ | $9$       |           |

Từ bảng biến thiên, ta có tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $(-1; 1)$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 10.** Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau  $t$  phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức  $N(t) = 1\,000 + 30t^2 - t^3$ , với  $0 \leq t \leq 30$ . Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

**A** 20.      **B.** 10.      **C.** 1 200.      **D.** 1 100.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $N(t) = 1\,000 + 30t^2 - t^3$  (với  $0 \leq t \leq 30$ ).

Ta có  $N'(t) = 60t - 3t^2$ .

Phương trình  $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |       |       |       |   |
|---------|-------|-------|-------|---|
| $t$     | 0     | 20    | 30    |   |
| $N'(t)$ |       | +     | 0     | - |
| $N(t)$  | 1 000 | 5 000 | 1 000 |   |

Từ bảng biến thiên, suy ra số vi khuẩn lớn nhất là 5 000 con đạt được sau 20 phút.

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 11.** Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$  trên đoạn  $[0;1]$  bằng  $-7$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $-1 \leq m \leq 1$ .      B.  $0 < m < 1$ .      **C**  $0 < m \leq 2$ .      D.  $-1 < m < 0$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = -\frac{m^2+5}{(x-m)^2} < 0, \forall x \neq m$ .

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; m)$  và  $(m; +\infty)$ .

Vì hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0;1]$  nên  $m \notin [0;1]$  tức là  $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1. \end{cases}$  (1)

Lúc đó, hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0;1]$  là  $f(1) = \frac{m+5}{1-m}$ .

Suy ra  $\frac{m+5}{1-m} = -7 \Rightarrow m = 2$  (thỏa mãn (1)).

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2;3;1)$  và  $B(5;6;2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tỉ số  $\frac{MA}{MB}$  bằng

- A**  $\frac{1}{2}$ .      B. 2.      C.  $\frac{1}{3}$ .      D. 3.

**Lời giải.**

Vì  $M \in (Oxz)$  nên tọa độ có dạng  $M(x;0;z)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (7;3;1)$ ,  $\overrightarrow{AM} = (x+2;-3;z-1)$  và  $AB = \sqrt{59}$ .

Do  $M, A, B$  thẳng hàng nên tồn tại số  $k \in \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ k = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Suy ra  $M(-9;0;0)$ .

Khi đó, ta có  $\overrightarrow{BM} = (-14;-6;-2)$  và  $\overrightarrow{AM} = (-7;-3;-1)$ .

Suy ra

$$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow |\overrightarrow{BM}| = 2|\overrightarrow{AM}| \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **A** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$ .

- a** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(5; +\infty)$ .  
**b** Hàm số đạt giá trị lớn nhất trong khoảng  $(-\infty; 2)$  là 5.  
**c** Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là  $y = x - 1$ .  
**d** Đồ thị hàm số cắt trục  $Oy$  tại điểm  $M$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại  $M$  là  $3x - 4y + 2 = 0$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Ta có  $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$ .

Phương trình  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|      |           |   |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2         | 3 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0         | - |           |
| $y$  | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ | 5 | $+\infty$ |

- a) **Đ** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(3; +\infty)$ .  
 b) **S** Hàm số đạt giá trị lớn nhất trong khoảng  $(-\infty; 2)$  là  $\max_{(-\infty; 2)} y = y(1) = 1$ .

- c) **S** Ta có  $y = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$ .

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 2} = 0.$$

Vậy đường thẳng  $y = x + 1$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

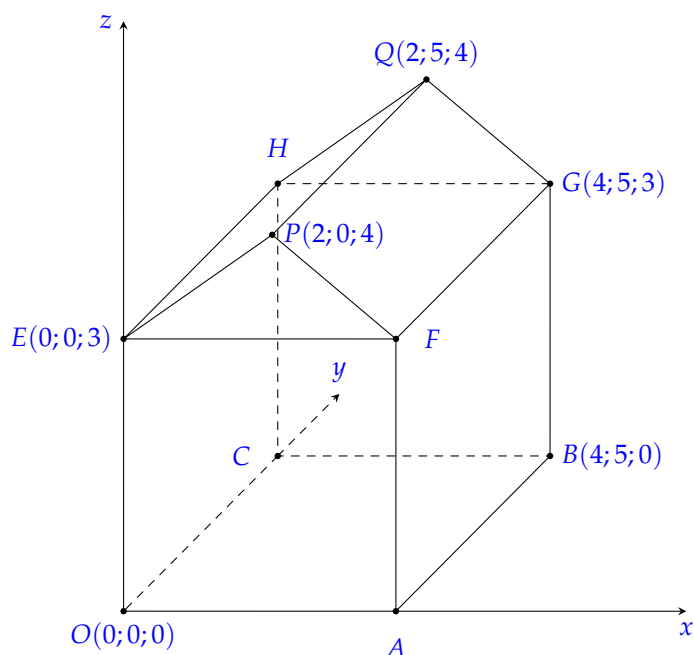
- d) **Đ** Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm  $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$  và  $y'(0) = \frac{3}{4}$ .

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại  $M$  là

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 4y + 2 = 0.$$

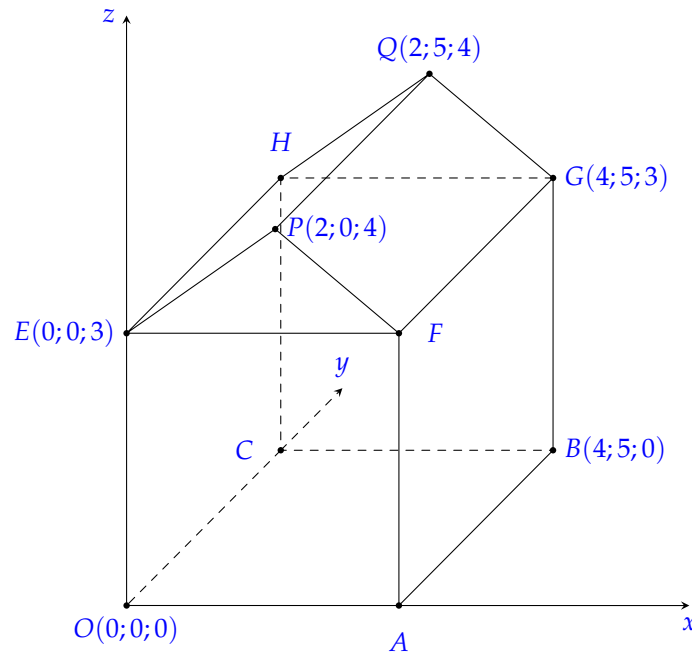
Chọn đáp án a đúng | b sai | c sai | d đúng .....  $\square$

**Câu 2.** Hình dưới đây minh họa mô hình ngôi nhà trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ . Trong đó, nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



- a) Tọa độ điểm  $F(4;0;3)$ .  
b) Tọa độ vectơ  $\overrightarrow{AH} = (4;5;3)$ .  
c)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$ .  
d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  bằng  $26,6^\circ$  (làm tròn đến hàng phần mười của đơn vị độ).

Lời giải.



- a) **Đ** Vì nền nhà là hình chữ nhật nên  $OACB$  là hình chữ nhật, suy ra  $x_A = x_B = 4$ ,  $y_C = y_B = 5$ .  
Do điểm  $A$  nằm trên trục  $Ox$  nên tọa độ điểm  $A(4;0;0)$ , điểm  $C$  nằm trên trục  $Oy$  nên tọa độ điểm  $C(0;5;0)$ .  
Tường nhà là hình chữ nhật nên  $OCHE$  là hình chữ nhật, suy ra  $y_H = y_C = 5$ ,  $z_H = z_E = 3$ .  
Do  $H$  nằm trên mặt phẳng  $(Oyz)$  nên tọa độ điểm  $H(0;5;3)$ .  
Tứ giác  $OAFE$  là hình chữ nhật nên  $x_F = x_A = 4$ ,  $z_F = z_E = 3$ .  
Do  $F$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxz)$  nên tọa độ điểm  $F(4;0;3)$ .  
b) **S** Ta có tọa độ vectơ  $\overrightarrow{AH} = (-4;5;3)$ .  
c) **S** Ta có  $\overrightarrow{AF} = (0;0;3)$ . Suy ra  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 + 0 + 9 = 9$ .  
d) **Đ** Để tính góc dốc của mái nhà, ta tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$ .  
Do mặt phẳng  $(Oxz)$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  nên  $\widehat{PFE}$  là góc phẳng nhị diện cần tìm.  
Ta có  $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1)$ ,  $\overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$ .  
Suy ra

$$\begin{aligned} \cos \widehat{PFE} &= \cos (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) \\ &= \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} \\ &= \frac{(-2)(-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Do đó  $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$ .

Vậy góc dốc mái nhà khoảng  $26,6^\circ$ .

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện đều  $ABCD$  có  $A(5;3;-1)$ ,  $B(2;3;-4)$ ,  $C(1;2;0)$ . Gọi  $D(x;y;z)$ ,  $y > 0$ . Giá trị của  $x + y + z$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta có  $AB = \sqrt{(2-5)^2 + (3-3)^2 + (-4+1)^2} = 3\sqrt{2}$  và

$$\overrightarrow{AD} = (x-5; y-3; z+1);$$

$$\overrightarrow{BD} = (x-2; y-3; z+4);$$

$$\overrightarrow{CD} = (x-1; y-2; z).$$

Vì tứ diện  $ABCD$  đều nên  $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$ .

Suy ra

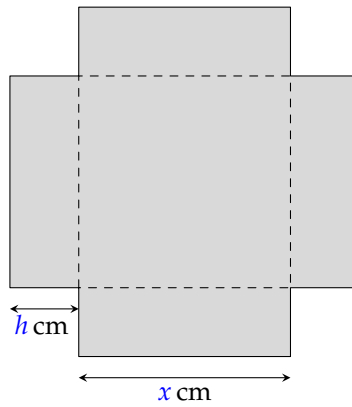
$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 1-x \\ y = 16-5x \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 1-x \\ y = 16-5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = 1-x \\ y = 16-5x \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy  $D(2;6;-1)$  hoặc  $D\left(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ .

Do  $y > 0$  nên chọn  $D(2;6;-1)$  và  $T = 2 + 6 - 1 = 7$ .

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 2.** Một nhóm học sinh được giao nhiệm vụ làm một cái hộp không nắp từ mảnh bìa như hình vẽ dưới đây. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh  $x$  cm, đường cao là  $h$  cm và có thể tích là  $100 \text{ cm}^3$ . Khi diện tích mảnh bìa là nhỏ nhất thì giá trị của  $x$  bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?



Đáp án: 5 , 8 5

**Lời giải.**

Thể tích của hộp là  $V = x^2h = 100 \Rightarrow h = \frac{100}{x^2}$ .

Gọi  $S(x)$  là diện tích của mảnh bìa, ta có  $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{400}{x}$ ,  $x > 0$ .

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của  $S(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Ta có  $S'(x) = \frac{2(x^3 - 200)}{x^2}$ . Phương trình  $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{200}$ .

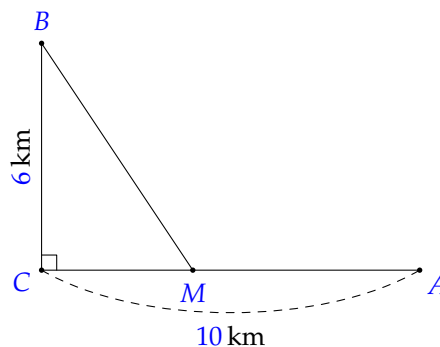
Bảng biến thiên của hàm số  $S(x)$  như sau:

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\sqrt[3]{200}$ | $+\infty$ |
| $S'(x)$ |           | 0               |           |
|         |           | -               | +         |
| $S(x)$  | $+\infty$ | $60\sqrt[3]{5}$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra diện tích của mảnh bìa nhỏ nhất khi  $x = \sqrt[3]{200} \approx 5,85$  (cm).

Đáp án: 5,85 ..... □

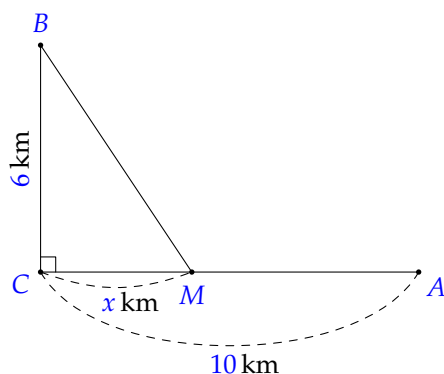
**Câu 3.** Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm  $A$  trên bờ biển đến một điểm  $B$  trên một hòn đảo (tham khảo hình dưới đây).



Giá để xây đường ống trên bờ là 60 000 USD mỗi kilômét và 140 000 USD để xây mỗi kilômét dưới nước. Gọi  $C$  là điểm trên bờ biển sao cho  $BC$  vuông góc với bờ biển,  $BC = 6$  km,  $AC = 10$  km. Gọi  $M$  là vị trí trên đoạn  $AC$  sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc  $AMB$  thì chi phí ít nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là bao nhiêu triệu USD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Đáp án: 1 , 3 6

**Lời giải.**



Đặt  $CM = x$  km với  $0 \leq x \leq 10$ .

Ta có tổng chi phí để xây dựng đường ống dẫn theo đường gấp khúc  $AMB$  là

$$T = 60\,000(10 - x) + 140\,000 \cdot \sqrt{x^2 + 36}.$$

Xét hàm số  $f(x) = 60\,000(10 - x) + 140\,000\sqrt{x^2 + 36}$  trên đoạn  $[0; 10]$ .

Ta có  $f'(x) = -60\,000 + \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{10}}.$

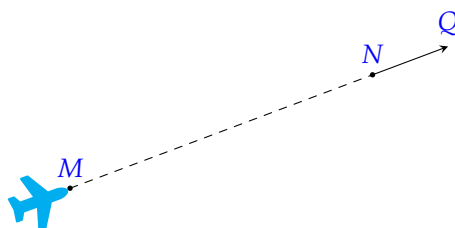
$f(0) = 1\,440\,000; f\left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right) \approx 1\,358\,946,6; f(10) \approx 1\,632\,666,5.$

Vậy  $T_{\min} = 1\,358\,946,6$  USD.

Kết quả sau khi làm tròn là 1,36 triệu USD.

Đáp án: 1,36 ..... □

**Câu 4.** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $M(500; 200; 8)$  đến điểm  $N(800; 300; 10)$  trong 20 phút.



Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay sau 5 phút tiếp theo thì tọa độ của máy bay lúc này là  $Q(a; b; c)$ . Giá trị của biểu thức  $\frac{a+b+c}{2025}$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Đáp án: 0 , 6 5 ..... □

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2); \overrightarrow{NQ} = (a - 800; b - 300; c - 10).$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{NQ}$  cùng hướng. (1)

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ  $M$  đến  $N$  gấp 4 lần thời gian bay từ  $N$  đến  $Q$  nên  $MN = 4NQ$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(a - 800) \\ 100 = 4(b - 300) \\ 2 = 4(c - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 875 \\ b = 325 \\ c = 10,5. \end{cases}$$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là  $Q(875; 325; 10,5).$

Vậy  $\frac{a+b+c}{2025} = \frac{875+325+10,5}{2025} \approx 0,6.$

Đáp án: 0,6 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  trên đoạn  $[-1; 5]$ .

**Lời giải.**

Ta có  $y' = 6x^2 + 6x - 12, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$ .

Suy ra  $y(-1) = 14, y(1) = -6, y(5) = 266$ .

Vậy  $\max_{[-1;5]} y = y(5) = 266, \min_{[-1;5]} y = y(1) = -6$ .

**Câu 2.** Bảng dưới đây cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê tỉ lệ che phủ rừng của 60 tỉnh, thành phố ở Việt Nam (không bao gồm Hưng Yên, Vĩnh Long, Cần Thơ) tính đến ngày 31/12/2020.

| Tỉ lệ (%) | [0; 10) | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) |
|-----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số    | 17      | 6        | 3        | 4        | 9        | 15       | 5        | 1        |

Nguồn: <https://bandolamnghep.com>

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

**Lời giải.**

Ta có bảng sau

| Tỉ lệ (%)       | [0; 10) | [10; 20) | [20; 30) | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) |
|-----------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số          | 17      | 6        | 3        | 4        | 9        | 15       | 5        | 1        |
| Tần số tích lũy | 17      | 23       | 26       | 30       | 39       | 54       | 59       | 60       |

Cỡ mẫu là  $n = 60$ .

Ta có  $\frac{n}{4} = 15$ .

Vì  $15 < 17$  nên nhóm 1 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 15.

Gọi  $L_1$  là đầu mút trái của nhóm 1,  $T_0$  là tần số tích lũy của nhóm 0 (có giá trị bằng 0),  $h_1$  là độ dài nhóm 1 và tần số nhóm 1 là  $n_1$ . Khi đó tứ phân vị thứ nhất bằng

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{n}{4} - T_0}{n_1} \cdot h_1 = 0 + \frac{15 - 0}{17} \cdot (10 - 0) = \frac{150}{17}.$$

Ta có  $\frac{3n}{4} = 45$ .

Vì  $39 < 45 < 54$  nên nhóm 6 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 45.

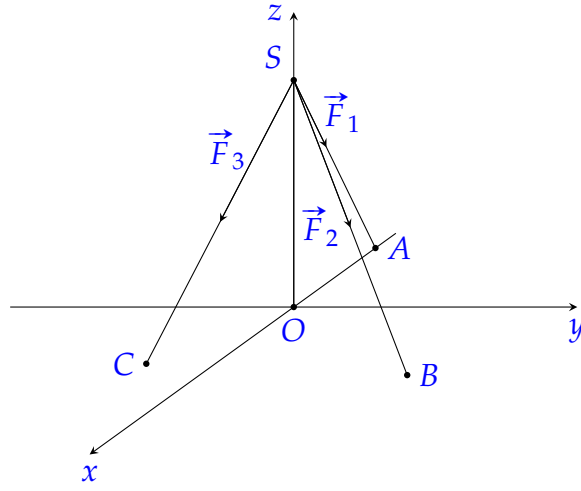
Gọi  $L_6$  là đầu mút trái của nhóm 6,  $T_5$  là tần số tích lũy của nhóm 5,  $h_6$  là độ dài nhóm 6 và tần số nhóm 6 là  $n_6$ . Khi đó tứ phân vị thứ ba bằng

$$Q_3 = L_6 + \frac{\frac{3n}{4} - T_5}{n_6} \cdot h_6 = 50 + \frac{45 - 39}{15} \cdot (60 - 50) = 54.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu bằng

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 54 - \frac{150}{17} \approx 45,18.$$

**Câu 3.** Một chiếc máy đo đặc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt  $S(0; 0; 4)$  và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là  $A(-2; 0; 0)$ ,  $B(1; \sqrt{3}; 0)$ ,  $C(1; -\sqrt{3}; 0)$ . Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là 30 N và được phân bố thành ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của  $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ .



### Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{SA} = (-2; 0; -4).$
- $\overrightarrow{SB} = (1; \sqrt{3}; -4).$
- $\overrightarrow{SC} = (1; -\sqrt{3}; -4).$

Suy ra  $SA = SB = SC = \sqrt{20}.$

Lại có

- $\overrightarrow{AB} = (3; \sqrt{3}; 0).$
- $\overrightarrow{AC} = (3; -\sqrt{3}; 0).$
- $\overrightarrow{BC} = (0; -2\sqrt{3}; 0).$

Suy ra  $AB = AC = BC = \sqrt{12}.$

Do đó  $S.ABC$  là hình chóp đều có đường cao là  $SO = 4$ , với  $O(0; 0; 0)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Gọi  $k \in \mathbb{R}$  thỏa mãn

- $\vec{F}_1 = k\overrightarrow{SA} = (-2k; 0; -4k),$
- $\vec{F}_2 = k\overrightarrow{SB} = (k; \sqrt{3}k; -4k),$
- $\vec{F}_3 = k\overrightarrow{SC} = (k; -\sqrt{3}k; -4k).$

Suy ra  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -12k).$

Mà  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P} = (0; 0; -30)$  nên  $-12k = -30 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}.$

Suy ra  $\vec{F}_1 = (-5; 0; -10), \vec{F}_2 = \left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}; -10\right).$

Vậy  $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = -5 \cdot \frac{5}{2} + (-10) \cdot (-10) = \frac{175}{2}.$

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. A 2. A 3. C 4. B 5. C 6. B 7. A 8. A 9. A 10. A 11. C 12. A

### PHẦN II.

Câu 1. a Đ b S c S d Đ Câu 2. a Đ b S c S d Đ

### PHẦN III.

Câu 1. 7    Câu 2. 5 , 8 5    Câu 3. 1 , 3 6    Câu 4. 0 , 6

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |      |     |           |
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$ |           |
| $f(x)$  |           |      | $0$ |           | $-3$ |     | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |      |     |           |      |     |           |

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

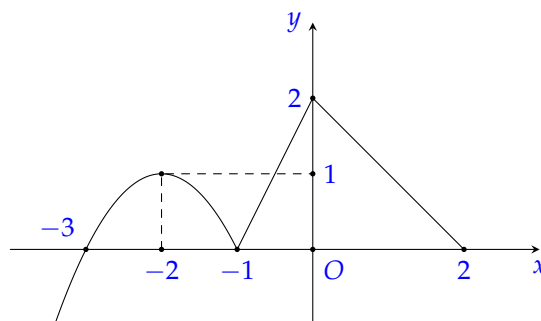
A.  $-2$ .B.  $1$ .C.  $-3$ .D.  $0$ .

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là  $-3$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-3; 0]$ . Giá trị của  $M - m$  là

A.  $2$ .B.  $-2$ .C.  $4$ .D.  $0$ .

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trên đoạn  $[-3; 0]$  ta thấy

- $M = 2$  đạt tại  $x = 0$ .
- $m = 0$  đạt tại  $x = -3$ .

Do đó  $M - m = 2 - 0 = 2$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       |           | $-$       |
| $f(x)$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |
|         |           | $-\infty$ |           |

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là

**A.** 2.

**B.** 3.

**C.** 0.

**D.** 1.

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$  nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là  $y = 2$ .
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -3^+} y = +\infty$  nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là  $x = -3$ .

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án **A** ..... □

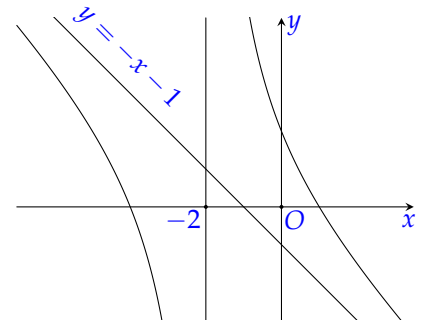
**Câu 4.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

**A.**  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ .

**B.**  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ .

**C.**  $y = \frac{x - 4}{x + 2}$ .

**D.**  $y = x^3 - 3x + 1$ .



**Lời giải.**

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = -2$  nên loại  $y = \frac{-x^2 - 3x + 3}{x - 2}$  và  $y = x^3 - 3x + 1$ .

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là  $y = -x - 1$  nên loại  $y = \frac{x - 4}{x + 2}$ .

Do đó, đường cong đã cho là đồ thị của hàm số  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Vector  $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'}$  bằng vector nào dưới đây?

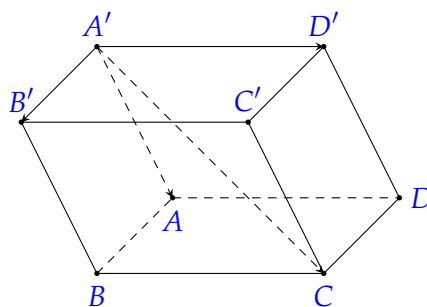
**A.**  $\vec{A'C}$ .

**B.**  $\vec{CA'}$ .

**C.**  $\vec{AC'}$ .

**D.**  $\vec{C'A}$ .

**Lời giải.**



Theo quy tắc hình hộp, ta có  $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'} = \vec{A'C}$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(2; 1; -4)$ ,  $B(5; -3; 3)$ ,  $C(-1; -1; 10)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

**A.**  $(2; 1; -3)$ .

**B.**  $(2; -1; 3)$ .

**C.**  $(2; -1; -3)$ .

**D.**  $(-2; -1; 3)$ .

**Lời giải.**

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên 
$$\begin{cases} x_G = \frac{2+5-1}{3} = 2 \\ y_G = \frac{1-3-1}{3} = -1 \\ z_G = \frac{-4+3+10}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(2; -1; 3).$$

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**Câu 7.** Cô Huyền thống kê đường kính thân gỗ (đơn vị: cm) của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường trong bảng sau:

| Đường kính | [40; 45) | [45; 50) | [50; 55) | [55; 60) | [60; 65) |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số     | 5        | 20       | 18       | 7        | 3        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

- (A)** 25.                      **B.** 30.                      **C.** 6.                      **D.** 69,8.

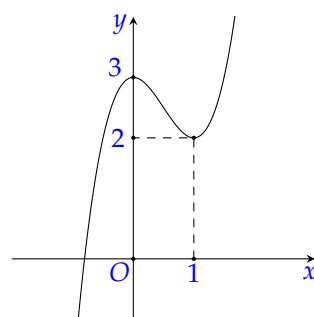
**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $65 - 40 = 25$ .

Chọn đáp án **(A)** .....  $\square$

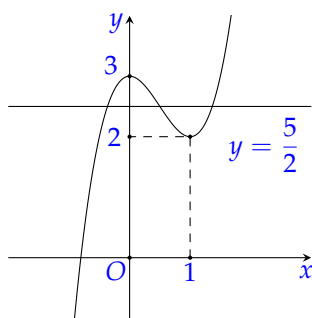
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{5}{2}$  là

- A.** 2.                      **B.** 1.  
**(C)** 3.                      **D.** 0.



**Lời giải.**

Số nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{5}{2}$  tương ứng với số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = \frac{5}{2}$ .



Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , số giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = \frac{5}{2}$  là 3.

Vậy số nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{5}{2}$  là 3 nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** .....  $\square$

**Câu 9.** Theo kết quả thống kê điểm kiểm tra giữa kì 2 môn Toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê là  $s^2 = 0,573$ . Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)

- A.** 0,812.                      **(B)** 0,757.                      **C.** 0,936.                      **D.** 0,657.

**Lời giải.**

Ta có công thức tính độ lệch chuẩn là  $s = \sqrt{0,573} \approx 0,757$ .

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**Câu 10.** Sau khi phát hiện dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người bị nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 1 + 18t^2 - \frac{1}{3}t^3$ ,  $t = 0; 1; 2; \dots; 30$ . Nếu xem  $f(t)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0; 30]$  thì  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm  $t$ . Hỏi ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất là ngày thứ bao nhiêu?

- A** 18.                      **B** 30.                      **C** 15.                      **D** 36.

**Lời giải.**

Tốc độ truyền bệnh là  $v(t) = f'(t) = 36t - t^2$  với  $t \in [0; 30]$ .

Đạo hàm  $v'(t) = 36 - 2t$  và  $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 18 \in [0; 30]$ .

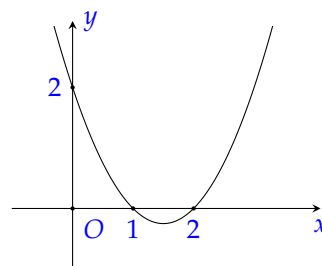
Ta có  $v(0) = 0$ ;  $v(18) = 324$  và  $v(30) = 180$ .

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất là 324 người/ngày tại ngày thứ 18.

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A**  $(-\infty; 0)$ .                      **B**  $(0; 1)$ .  
**C**  $(1; 2)$ .                      **D**  $(0; +\infty)$ .



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  ta có  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in (1; 2)$ .

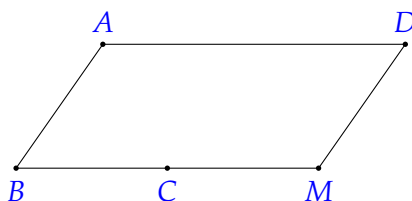
Do đó, hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 2; 3)$  và  $C(3; 2; 1)$ . Gọi  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$ . Để tứ giác  $BMDA$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $D$  là

- A**  $(-9; 1; -3)$ .                      **B**  $(9; 1; 3)$ .                      **C**  $(9; -1; -3)$ .                      **D**  $(9; 1; -3)$ .

**Lời giải.**



Gọi  $D(x; y; z)$ .

Tứ giác  $BMDA$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM}$ .

Mà  $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$  nên  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ .

Ta có  $\overrightarrow{BC} = (4; 0; -2)$  và  $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y - 1; z - 1)$ .

$$\text{Khi đó, } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \cdot 4 \\ y - 1 = 2 \cdot 0 \\ z - 1 = 2 \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \\ z = -3. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm  $D(9; 1; -3)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{2x-1}$  có đồ thị (C).

- a) Đạo hàm của hàm số là  $y' = \frac{-5}{(2x-1)^2}$ .

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

c) Đồ thị (C) có tiệm cận ngang là  $y = \frac{3}{2}$ ; tiệm cận đứng là  $x = \frac{1}{2}$ .

d) Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 0.

**Lời giải.**

a) **S** Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{3(2x-1) - 2(3x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}.$$

b) **S** Ta có  $y' = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$ .

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

c) **Đ** Ta có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x-1} = \frac{3}{2}$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x-1} = \frac{3}{2}$ .

Suy ra  $y = \frac{3}{2}$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x-1}{2x-1} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3x-1}{2x-1} = -\infty.$$

Suy ra  $x = \frac{1}{2}$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) **S** Với  $x = 0 \Rightarrow y = 1$ , do đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☒ c đúng ☐ d sai ..... ☐

**Câu 2.** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

| Giá đóng cửa | [120; 122) | [122; 124) | [124; 126) | [126; 128) | [128; 130) |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Cổ phiếu A   | 8          | 9          | 12         | 10         | 11         |
| Cổ phiếu B   | 16         | 4          | 3          | 6          | 21         |

a) Cỡ mẫu của cổ phiếu A là 50.

b) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm của cổ phiếu A là 7,5216.

c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm của cổ phiếu B là 115,28.

d) Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B.

**Lời giải.**

a) **Đ** Ta có bảng thống kê giá đóng cửa theo giá trị đại diện

| Giá đóng cửa | 121 | 123 | 125 | 127 | 129 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Cổ phiếu A   | 8   | 9   | 12  | 10  | 11  |
| Cổ phiếu B   | 16  | 4   | 3   | 6   | 21  |

Cỡ mẫu của mẫu số liệu cổ phiếu A là  $n_A = 8 + 9 + 12 + 10 + 11 = 50$ .

b) **Đ** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm của cổ phiếu A là

$$\bar{x}_1 = \frac{8 \cdot 121 + 9 \cdot 123 + 12 \cdot 125 + 10 \cdot 127 + 11 \cdot 129}{50} = 125,28.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s_1^2 = \frac{1}{50} \cdot (8 \cdot 121^2 + 9 \cdot 123^2 + 12 \cdot 125^2 + 10 \cdot 127^2 + 11 \cdot 129^2) - (125,28)^2 = 7,5216.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là  $s_1 = \sqrt{7,5216}$ .

- c) **S** Xét mẫu số liệu cổ phiếu **B**. Ta có cỡ mẫu  $n_B = 50$ .

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{16 \cdot 121 + 4 \cdot 123 + 3 \cdot 125 + 6 \cdot 127 + 21 \cdot 129}{50} = \frac{6274}{50} \approx 125,48.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s_2^2 = \frac{1}{50} \cdot (16 \cdot 121^2 + 4 \cdot 123^2 + 3 \cdot 125^2 + 6 \cdot 127^2 + 21 \cdot 129^2) - \left(\frac{6274}{50}\right)^2 \approx 12,4096.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là  $s_2 \approx \sqrt{12,4096}$ .

- d) **D** Mẫu số liệu cổ phiếu **A** có phương sai  $s_1^2 = 7,5216$  và độ lệch chuẩn  $s_1 = \sqrt{7,5216}$ .

Mẫu số liệu cổ phiếu **B** có phương sai  $s_2^2 \approx 12,4096$  và độ lệch chuẩn  $s_2 \approx \sqrt{12,4096}$ .

Vậy nếu đánh giá độ rủi ro theo phương sai và độ lệch chuẩn thì cổ phiếu **A** có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu **B**.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

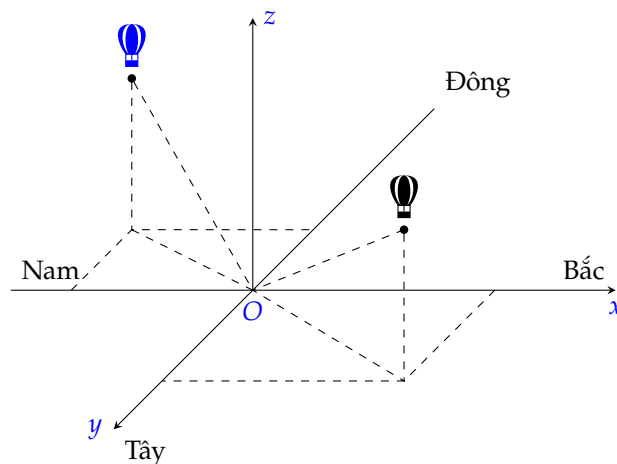
### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một giờ bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 100 km và về phía Nam 80 km, đồng thời cách mặt đất 1 km. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 70 km và về phía Tây 60 km, đồng thời cách mặt đất 800 m. Sau một giờ bay, khoảng cách giữa hai khinh khí cầu bằng bao nhiêu kilomet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Đáp án:

#### Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  hướng về phía Bắc, trục  $Oy$  hướng về phía Tây, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômet (như hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ  $(-80; -100; 1)$ .

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ  $(70; 60; 0,8)$ .

Khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là

$$\sqrt{(70 + 80)^2 + (60 + 100)^2 + (0,8 - 1)^2} \approx 219 \text{ (km)}.$$

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 1)$ ;  $B(2; -1; 3)$  và điểm  $M(a; b; 0)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Giá trị của  $a + b$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta thấy  $M(a; b; 0) \in (Oxy)$  và  $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$ .

Gọi  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= (\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}) \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + 7. \end{aligned}$$

$MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow IM$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow M$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Suy ra  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

Vậy  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  và  $a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ .

Đáp án:  ..... □

**Câu 3.** Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc  $v$  của luồng khí liên hệ với bán kính  $x$  của khí quản theo công thức  $v(x) = (x_0 - x)x^2$  với  $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$ . Trong đó  $x_0$  là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Xét một người trưởng thành sức khỏe tốt có bán kính khí quản ở trạng thái bình thường bằng 10 mm. Khi vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất thì giá trị của  $x$  bằng bao nhiêu milimet (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Đáp án:

**Lời giải.**

Với  $x_0 = 10$ , hàm số vận tốc luồng khí trở thành  $v(x) = (10 - x)x^2 = -x^3 + 10x^2$  với  $5 \leq x \leq 10$ .

Ta có  $v'(x) = -3x^2 + 20x$ . Xét  $v'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{20}{3} \end{cases}$ .

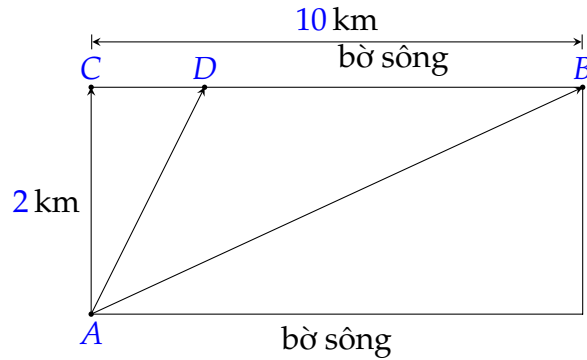
Bảng biến thiên

|         |     |                   |    |
|---------|-----|-------------------|----|
| $x$     | 5   | $\frac{20}{3}$    | 10 |
| $v'(x)$ | +   | 0                 | -  |
| $v(x)$  | 125 | $\frac{4000}{27}$ | 0  |

Khi đó, để vận tốc luồng khí một cơn ho là lớn nhất thì  $x = \frac{20}{3} \approx 6,67$  (mm).

Đáp án: 6,67 ..... □

**Câu 4.** Một người chèo một chiếc thuyền xuất phát từ điểm  $A$  trên bờ một con sông thẳng rộng 2 km và muốn đến điểm  $B$  cách bờ đối diện 10 km. Người này có thể chỉ chèo thuyền hoặc kết hợp chèo thuyền với chạy bộ, càng nhanh càng tốt. Chẳng hạn, anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm  $C$  rồi chạy bộ đến điểm  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền thẳng đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm  $D$  nào đó ở giữa  $C$  và  $B$  rồi chạy bộ đến điểm  $B$  (tham khảo hình minh họa).



Biết rằng vận tốc chèo thuyền của anh ta là 6 km/h (đã tính vận tốc dòng nước), vận tốc chạy bộ của anh ta là 10 km/h. Trong tất cả các phương án đến  $B$  bằng cách chèo thuyền hoặc chèo thuyền rồi chạy bộ, phương án nhanh nhất có tổng thời gian là bao nhiêu giờ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Đáp án: 1 , 2 7

**Lời giải.**

Đặt  $BD = x$  km là quãng đường người đó chạy bộ, với điều kiện  $0 \leq x \leq 10$ .

Khi đó  $CD = BC - BD = x - 10$  (km).

Quãng đường người đó chèo thuyền là  $AD = \sqrt{4 + (10 - x)^2}$  (km).

Gọi  $t_1, t_2$  (giờ) lần lượt là thời gian người đó chèo thuyền và thời gian người đó chạy bộ.

Ta có  $t_1 = \frac{AD}{6} = \frac{\sqrt{4 + (10 - x)^2}}{6}$  và  $t_2 = \frac{BD}{10} = \frac{x}{10}$ .

Tổng thời gian chèo thuyền  $A$  đến  $D$  và đi bộ từ  $D$  đến  $B$  là  $t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4 + (10 - x)^2}}{6} + \frac{x}{10}$ .

Xét hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{4 + (10 - x)^2}}{6} + \frac{x}{10}$  trên đoạn  $[0; 10]$ .

Ta có  $f'(x) = -\frac{10 - x}{6\sqrt{4 + (10 - x)^2}} + \frac{1}{10} = \frac{-5(10 - x) + 3\sqrt{4 + (10 - x)^2}}{30\sqrt{4 + (10 - x)^2}}$ .

Xét

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -5(10 - x) + 3\sqrt{4 + (10 - x)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{4 + (10 - x)^2} = 5(10 - x) \\ &\Leftrightarrow 9(104 - 20x + x^2) = 25(100 - 20x + x^2) \\ &\Leftrightarrow -16x^2 + 320x - 1564 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{2} \in [0; 10] \\ x = \frac{23}{2} \notin [0; 10]. \end{cases} \end{aligned}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$

|         |                       |                 |               |   |
|---------|-----------------------|-----------------|---------------|---|
| $x$     | 0                     | $\frac{17}{2}$  | 10            |   |
| $f'(x)$ |                       | -               | 0             | + |
| $f(x)$  | $\frac{\sqrt{26}}{3}$ | $\frac{19}{15}$ | $\frac{4}{3}$ |   |

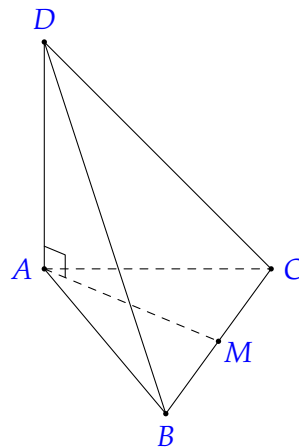
Vậy phương án nhanh nhất là chèo thuyền từ chèo thuyền  $A$  đến  $D$  và đi bộ từ  $D$  đến  $B$  có tổng thời gian là  $\frac{19}{15} \approx 1,27$  (giờ).

Đáp án: 1,27 .....  $\square$

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc và  $AB = AC = AD = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải.**



Do  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$  nên  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .

Ta có  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ .

Do  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc và  $AB = AC = AD = 1$ , nên ta có  $\overrightarrow{AB}^2 = 1$  và

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(0 - 1 + 0 - 0) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - \sqrt{-x^2 + 3x} - \frac{3}{2}x^2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $-x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$  nên tập xác định của hàm số là  $\mathcal{D} = [0; 3]$ .

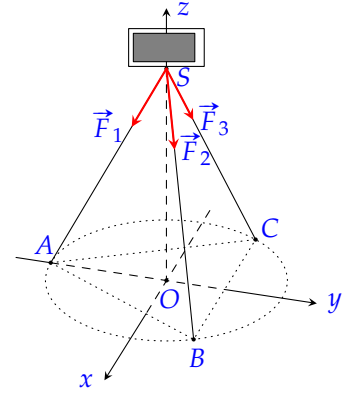
Đạo hàm  $y' = 2x^2 - 3x + \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x}}$ , với  $x \in (0; 3)$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow (2x-3) \left( x + \frac{1}{2\sqrt{-x^2+3x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (vì } x + \frac{1}{2\sqrt{-x^2+3x}} > 0, \forall x \in (0; 3)).$$

Ta có  $f(0) = 0; f(3) = \frac{9}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{21}{8}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $\frac{9}{2}$  tại  $x = 3$  và giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $-\frac{21}{8}$  tại  $x = \frac{3}{2}$ .

**Câu 3.** Một chiếc điện thoại được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt  $S(0;0;20)$  và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là  $A(0;-6;0)$ ,  $B(3\sqrt{3};3;0)$ ,  $C(-3\sqrt{3};3;0)$  (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có độ lớn bằng nhau. Tìm tọa độ của lực  $\vec{F}_1$ .



**Lời giải.**

Theo giả thiết, ta có các điểm  $S(0;0;20)$ ,  $A(0;-6;0)$ ,  $B(3\sqrt{3};3;0)$ ,  $C(-3\sqrt{3};3;0)$ .

Suy ra  $\vec{SA} = (0; -6; -20)$ ;  $\vec{SB} = (3\sqrt{3}; 3; -20)$ ;  $\vec{SC} = (-3\sqrt{3}; 3; -20)$ .

Khi đó  $SA = SB = SC = \sqrt{436}$ .

Mà  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, k > 0$  sao cho 
$$\begin{cases} \vec{F}_1 = k\vec{SA} = (0; -6k; -20k) \\ \vec{F}_2 = k\vec{SB} = (3\sqrt{3}k; 3k; -20k) \\ \vec{F}_3 = k\vec{SC} = (-3\sqrt{3}k; 3k; -20k) \end{cases}$$

Suy ra  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -60k)$ .

Gọi  $\vec{F}$  là trọng lực tác dụng lên điện thoại  $\Rightarrow \vec{F} = (0; 0; -2)$ .

Mặt khác, ta có  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$  suy ra  $-60k = -2 \Rightarrow k = \frac{1}{30}$ .

Vậy  $\vec{F}_1 = \left(0; -\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$ .

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. C   2. A   3. A   4. A   5. A   6. B   7. A   8. C   9. B   10. A   11. C   12. D

### PHẦN II.

Câu 1.      a S   b S   c Đ   d S      Câu 2.      a Đ   b Đ   c S   d Đ

### PHẦN III.

Câu 1.   2   1   9         Câu 2.   2               Câu 3.   6   ,   6   7      Câu 4.   1   ,   2   7

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Hàm số  $y = x^3 - 3x - 2025$  nghịch biến trên khoảng

**A**  $(-1; 1)$ .**B.**  $(0; 3)$ .**C.**  $(-\infty; -1)$ .**D.**  $(1; 3)$ .**Lời giải.**

Hàm số có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 3x^2 - 3$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên của hàm số là

|         |           |         |         |           |     |
|---------|-----------|---------|---------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$    | $1$     | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$     | $-$     | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  |           | $-2023$ |         | $+\infty$ |     |
|         | $-\infty$ |         | $-2027$ |           |     |

Theo bảng biến thiên, ta có  $y' < 0, \forall x \in (-1; 1)$  nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 1$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

**A.** 1.**B.** -1.**C** 3.**D.** 5.**Lời giải.**

Ta có  $y' = -3x^2 + 3$ .

Khi đó  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$ .

Ta có  $y(0) = 1$ ;  $y(1) = 3$ ;  $y(2) = -1$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 1$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3 tại  $x = 1$ .

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |     |     |           |
|------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $-$ | $0$ | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $2$ | $4$ | $6$       |

Tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là

**A** 0.**B.** 1.**C.** 2.**D.** 3.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Ta có  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \end{cases}$  nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(A)** .....  $\square$

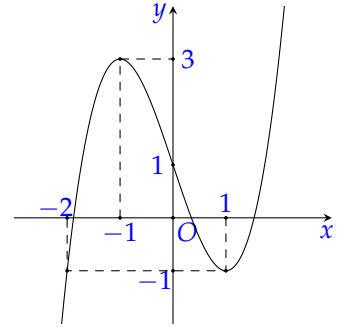
**Câu 4.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A.  $y = \frac{x-1}{x+2025}$ .

B.  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

C.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**D**  $y = x^3 - 3x + 1$ .



**Lời giải.**

Đồ thị là hàm số bậc ba và có hệ số  $a > 0$  nên loại  $y = \frac{x-1}{x+2025}$  và  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

Hàm số đạt cực trị tại  $x = 1, x = -1$  nên chọn  $y = x^3 - 3x + 1$ .

Chọn đáp án **(D)** .....  $\square$

**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

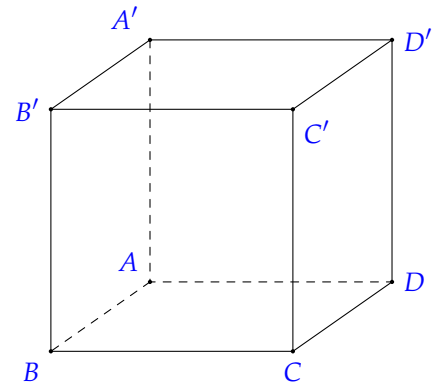
Biểu thức  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{AA'}$  bằng

A.  $\overrightarrow{AC'}$ .

**B**  $\overrightarrow{A'C}$ .

C.  $\overrightarrow{AB'}$ .

D.  $\overrightarrow{AD'}$ .



**Lời giải.**

• Cách 1:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{AA'} &= (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'A}) + \overrightarrow{AA'} \\ &= (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}) + \overrightarrow{A'A} \\ &= \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C}. \end{aligned}$$

• Cách 2:

$$\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C}.$$

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -1)$ ;  $\vec{b} = (1; 3; m)$ . Giá trị của tham số  $m$  để  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$  là

A.  $m = -5$ .

**B**  $m = 5$ .

C.  $m = 1$ .

D.  $m = -2$ .

**Lời giải.**

$$(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot m = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**Câu 7.** Một công ty thống kê tuổi của các nhân viên ở bảng sau:

| Khoảng tuổi | [23; 26) | [26; 29) | [29; 32) | [32; 35) | [35; 38) |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số      | 24       | 57       | 42       | 29       | 8        |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

**A** 4,9.

**B** 4,8.

**C** 5,0.

**D** 5,1.

**Lời giải.**

| Khoảng tuổi     | [23; 26) | [26; 29) | [29; 32) | [32; 35) | [35; 38) |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số          | 24       | 57       | 42       | 29       | 8        |
| Tần số tích lũy | 24       | 81       | 123      | 152      | 160      |

Cỡ mẫu là  $n = 160$ .

Ta có  $\frac{n}{4} = \frac{160}{4} = 40$  nên tứ phân vị thứ nhất nằm ở nhóm 2 là nhóm [26; 29).

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 26 + \frac{\frac{160}{4} - 24}{57} \cdot (29 - 26) = \frac{510}{19}.$$

Ta có  $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 160}{4} = 120$  nên tứ phân vị thứ ba nằm ở nhóm 3 là nhóm [29; 32).

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 29 + \frac{\frac{3 \cdot 160}{4} - (24 + 57)}{42} \cdot (32 - 29) = \frac{445}{14}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{445}{14} - \frac{510}{19} = \frac{1315}{266} \approx 4,9.$$

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 8.** Cự li cú nhảy 3 bước của 40 học sinh lớp 12 được ghi lại ở bảng tần số ghép nhóm sau:

| Độ dài (m) | [9; 10) | [10; 11) | [11; 12) | [12; 13) | [13; 14) |
|------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số     | 18      | 10       | 6        | 4        | 2        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

**A** 1,45.

**B** 1,46.

**C** 1,47.

**D** 1,44.

**Lời giải.**

Ta có bảng thống kê cự li cú nhảy của các học sinh theo giá trị đại diện

| Độ dài đại diện (m) | 9,5 | 10,5 | 11,5 | 12,5 | 13,5 |
|---------------------|-----|------|------|------|------|
| Tần số              | 18  | 10   | 6    | 4    | 2    |

Cỡ mẫu  $n = 40$ .

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 9,5 + 10 \cdot 10,5 + 6 \cdot 11,5 + 4 \cdot 12,5 + 2 \cdot 13,5}{40} = 10,55.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{1}{40} (18 \cdot 9,5^2 + 10 \cdot 10,5^2 + 6 \cdot 11,5^2 + 4 \cdot 12,5^2 + 2 \cdot 13,5^2) - 10,55^2 = 1,4475 \approx 1,45.$$

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 9.** Hàm số  $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$  đạt cực trị tại các điểm  $x_1, x_2$ . Tổng  $x_1 + x_2$  có giá trị bằng

- A.  $-1$ .                      B.  $-\frac{10}{3}$ .                      C.  $1$ .                      **D.  $\frac{10}{3}$ .**

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 3x^2 - 10x + 3$ . Khi đó  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ .

Bảng biến thiên của hàm số là

|         |           |                 |      |           |     |
|---------|-----------|-----------------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$   | $3$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$             | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\frac{40}{27}$ | $-8$ | $+\infty$ |     |

Khi đó hàm số đạt cực trị đại tại  $x = \frac{1}{3}$  và đạt cực tiểu tại  $x = 3$ .

Do đó  $x_1 + x_2 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 10.** Biết rằng đường thẳng  $(d): y = 2x - 3$  cắt đồ thị hàm số  $(C): y = x^3 + x^2 + 2x - 3$  tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ , biết điểm  $B$  có hoành độ âm. Hoành độ điểm  $B$  bằng

- A.  $0$ .                      B.  $-5$ .                      **C.  $-1$ .**                      D.  $-2$ .

**Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng  $(d)$  và đồ thị hàm số  $(C)$  là

$$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Từ đó, suy ra hoành độ điểm  $B$  là  $-1$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 11.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2}$  trên đoạn  $[1; 2]$ . Giá trị  $m + 2M$  bằng

- A.  $36$ .**                      B.  $34$ .                      C.  $35$ .                      D.  $33$ .

**Lời giải.**

Hàm số  $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2}$  liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ .

Ta có  $f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x^3}$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - \frac{4}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [1; 2] \\ x = -1 \notin [1; 2] \end{cases}$ .

$f(1) = 3$ ;  $f(2) = \frac{33}{2}$ .

Suy ra  $M = \max_{[1; 2]} f(x) = \frac{33}{2}$ ,  $m = \min_{[1; 2]} f(x) = 3$ .

Vậy  $m + 2M = 36$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình vuông  $ABCD$  có  $B(3; 0; 8)$  và  $D(-5; -4; 0)$ . Độ dài cạnh của hình vuông  $ABCD$  bằng

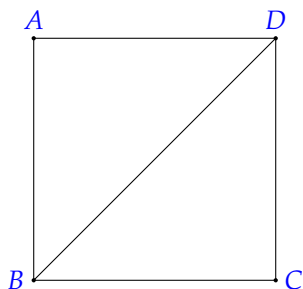
A.  $5\sqrt{2}$ .

**B**  $6\sqrt{2}$ .

C. 6.

D. 12.

Lời giải.



Ta có  $\overrightarrow{BD} = (-8; -4; -8)$  nên  $BD = \sqrt{64 + 16 + 64} = 12$ .

Xét tam giác  $ABD$  vuông tại  $A$ , ta có  $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 144 \Leftrightarrow AB = 6\sqrt{2}$ .

Chọn đáp án **B** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ .

**a** Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ .

**b** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là  $y = x + 2$ .

**c** Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $A(-1; -1)$ .

**d** Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số giao với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng  $\frac{1}{4}$ .

Lời giải.

**a) D** Vì  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = +\infty$  nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ .

**b) D** Ta có  $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$  nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là  $y = x + 2$ .

**c) S** Tập xác định của hàm số  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Ta có  $y' = 1 - \frac{4}{(x - 1)^2}$ , khi đó  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 4 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $3$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $7$ | $+\infty$ |     |

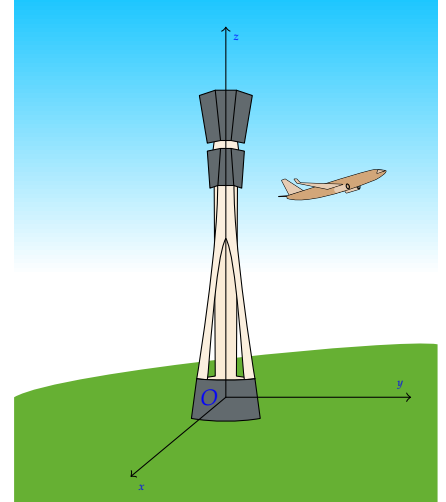
Từ bảng biến thiên ta được điểm  $A(-1; -1)$  là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

- d) **D** Ta có tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là  $A(-1; -1)$  và  $B(3; 7)$ .  
 Khi đó  $\overrightarrow{AB} = (4; 8)$  là vectơ chỉ phương, nên  $\vec{n} = (2; -1)$  là vectơ pháp tuyến của  $AB$ .  
 Vậy phương trình đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng  $AB$  có phương trình:  $2(x - 3) - 1(y - 7) = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1$ .  
 Khi đó, giao điểm của  $d$  với hai trục tọa độ  $Ox, Oy$  lần lượt là  $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  và  $N(0; 1)$ .  
 Tam giác tạo thành là tam giác vuông  $OMN$  có diện tích bằng

$$S = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án a đúng b đúng c sai d đúng ..... □

**Câu 2.** Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 100 m sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi 600 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất sao cho trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên phía trên (hình bên) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí  $F$  cách mặt đất 12 km, cách 400 km về phía tây và 300 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.



- a) **Tọa độ của ra đa đặt trên tháp**  $(0; 0; 0,1)$ .  
 b) Tọa độ của máy bay trong hệ trục tọa độ đã chọn là  $F(400; 300; 12)$ .  
 c) Khoảng cách từ máy bay đến ra đa 264,85 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).  
 d) Ra đa của trung tâm kiểm soát không phát hiện được máy bay tại vị trí  $F$ .

**Lời giải.**

- a) **D** Theo giả thiết, ra đa ở vị trí có tọa độ  $(0; 0; 0,1)$ .  
 b) **S** Máy bay cách mặt đất 12 km, nghĩa là tọa độ trên trục  $z$  là 12 km.  
 Máy bay cách 400 km về phía tây so với tháp, tức là tọa độ trên trục  $x$  sẽ là 400 km.  
 Máy bay cách 300 km về phía bắc so với tháp, tức là tọa độ trên trục  $y$  sẽ là  $-300$  km (do trục  $y$  hướng về phía nam). Tọa độ của máy bay là  $(400; -300; 12)$ .  
 c) **S** Vậy khoảng cách từ máy bay đến ra đa là  
 $\sqrt{(400 - 0)^2 + (-300 - 0)^2 + (12 - 0,1)^2} \approx 500,14$  (km).  
 d) **S** Vì  $500,14 < 600$  nên ra đa của trung tâm kiểm soát có phát hiện được máy bay.

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d sai ..... □

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(3; -4; 1)$ . Điểm  $M \in Oy$  sao cho  $T = 2MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tung độ điểm  $M$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến số thập phân thứ hai)?

**Đáp án:** 0 , 6 7

**Lời giải.**

Vì điểm  $M \in Oy$  suy ra  $M(0; b; 0)$ .

Ta có

$$\begin{aligned}MA^2 &= 2^2 + (3 - b)^2 + 1^2 = 4 + (b - 3)^2 + 1; \\MB^2 &= 3^2 + (-4 - b)^2 + 1^2 = 9 + (b + 4)^2 + 1.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}2MA^2 + MB^2 &= 2 \left[ 4 + (b - 3)^2 + 1 \right] + \left[ 9 + (b + 4)^2 + 1 \right] \\&= 2 \left( 4 + b^2 - 6b + 9 + 1 \right) + \left( 9 + b^2 + 8b + 16 + 1 \right) \\&= 2 \left( b^2 - 6b + 14 \right) + \left( b^2 + 8b + 26 \right) \\&= 2b^2 - 12b + 28 + b^2 + 8b + 26 \\&= 3b^2 - 4b + 54 \\&= 3 \left( b - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{158}{3}.\end{aligned}$$

Vì  $\left( b - \frac{2}{3} \right)^2 \geq 0$  với mọi  $b$ .

Nên  $3 \left( b - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{158}{3} \geq \frac{158}{3}$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $b = \frac{2}{3} \approx 0,67$ .

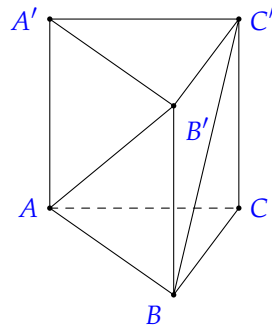
Vậy  $T = 2MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất là  $\frac{158}{3}$  khi  $b = \frac{2}{3} \approx 0,67$ .

Đáp án: 0,67 ..... □

**Câu 2.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = \sqrt{2}a$ . Khi đó góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng bao nhiêu độ?

Đáp án: 6 0      

**Lời giải.**



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) \\&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} \\&= -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = 60^\circ.$$

Vậy  $(\widehat{AB', BC'}) = 60^\circ$ .

Đáp án: 60 ..... □

**Câu 3.** Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50 000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được 25 kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4 000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50 kg. Để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán (đơn vị nghìn đồng) mỗi kg vải là bao nhiêu, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30 000 đồng?

Đáp án:

**Lời giải.**

Gọi  $x$  đồng ( $30\,000 < x < 50\,000$ ) là giá bán vải mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Suy ra giá bán ra đã giảm là  $(50\,000 - x)$  đồng.

Số lượng vải bán ra đã tăng thêm là  $\frac{50(50\,000 - x)}{4\,000} = 625 - 0,0125x$ .

Tổng số vải bán được là  $25 + 625 - 0,0125 \cdot x = 650 - 0,0125x$ .

Doanh thu của cửa hàng là  $(650 - 0,0125 \cdot x)x$ .

Số tiền vốn ban đầu để mua vải là  $(650 - 0,0125x) \cdot 30\,000$ .

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

$$(650 - 0,0125 \cdot x)x - (650 - 0,0125 \cdot x)30\,000 = -0,0125x^2 + 1\,025x - 19\,500\,000.$$

Đặt  $f(x) = -0,0125x^2 + 1\,025x - 19\,500\,000$ .

Khi đó  $f(x) = -0,0125(x - 41\,000)^2 + 1\,512\,500 \leq 1\,512\,500$ .

Suy ra  $\max f(x) = 1\,512\,500$  khi  $x = 41\,000$  đồng.

Vậy giá bán mỗi kg vải là 41 000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 4.** Cho đường thẳng  $d: y = 2x + m$  và đồ thị  $(C): y = \frac{3x+2}{x-1}$ . Biết  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $C, D$  sao cho trọng tâm  $\triangle OCD$  thuộc đường thẳng  $\Delta: 2x - y - 4 = 0$ , với  $O$  là gốc tọa độ. Giá trị của tham số  $m$  bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**

Hoành độ hai điểm  $C, D$  là nghiệm khác 1 của phương trình

$$\begin{aligned} 2x + m &= \frac{3x+2}{x-1} \\ \Leftrightarrow 2x(x-1) + m(x-1) &= 3x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + mx - m &= 3x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (m-5)x - m - 2 &= 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có  $\Delta = m^2 - 2m + 41 > 0, \forall m$  và  $2 \cdot 1^2 + (m-5) \cdot 1 - m - 2 = -5 \neq 0, \forall m$ .

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt và khác 1.

Gọi  $A(x_C; 2x_C + m), B(x_D; 2x_D + m)$  thì trọng tâm của tam giác  $OCD$  là

$$G\left(\frac{x_C + x_D}{3}; \frac{2(x_C + x_D) + 2m}{3}\right).$$

Khi đó  $G \in \Delta \Leftrightarrow 2\left(\frac{x_C + x_D}{3}\right) - \left(\frac{2(x_C + x_D) + 2m}{3}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -6$ .

Đáp án:  ..... ☐

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(3; -1; 4), B(2; 0; -1)$  và  $C(1; -2; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

Gọi  $N(a; b; c)$  là điểm cần tìm. Ta có

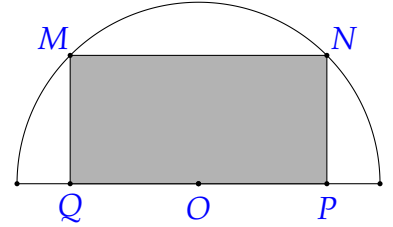
$$\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NB}.$$

Mặt khác  $\overrightarrow{NC} = (1 - a; -2 - b; -c)$ ,  $\overrightarrow{NB} = (2 - a; -b; -1 - c)$ . Do vậy

$$\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 2(2 - a) \\ -2 - b = -2b \\ -c = 2(-1 - c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -2. \end{cases}$$

Vậy  $N(3; 2; -2)$ .

**Câu 2.** Ông An có một tấm tôn có dạng nửa đường tròn có bán kính  $r = 3$  m. Ông muốn cắt ra một hình chữ nhật nội tiếp nửa đường tròn đó để làm bảng quảng cáo (tham khảo hình vẽ bên). Khi biến quảng cáo đó có diện tích lớn nhất thì chiều dài của tấm biển bằng bao nhiêu mét?



**Lời giải.**

Giả sử tấm tôn được cắt thành hình chữ nhật  $MNPQ$ . Đặt cạnh  $OQ = \frac{x}{2}$ , khi đó  $0 < x < 6$ .

Ta có tam giác  $OMQ$  vuông tại  $Q$  nên  $MQ = \sqrt{OM^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$ .

Diện tích của tấm biển hình chữ nhật là  $S = QP \cdot QM = x \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$ .

Đặt  $f(x) = S^2 = x^2 \left(9 - \frac{x^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}x^4 + 9x^2$ .

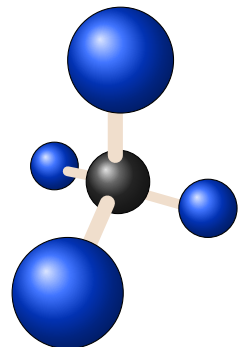
Ta có  $f'(x) = -x^3 + 18x$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 18x = 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$  (vì  $0 < x < 6$ ).

|         |   |             |   |
|---------|---|-------------|---|
| $x$     | 0 | $3\sqrt{2}$ | 6 |
| $f'(x)$ | + | 0           | - |
| $f(x)$  |   | 81          |   |

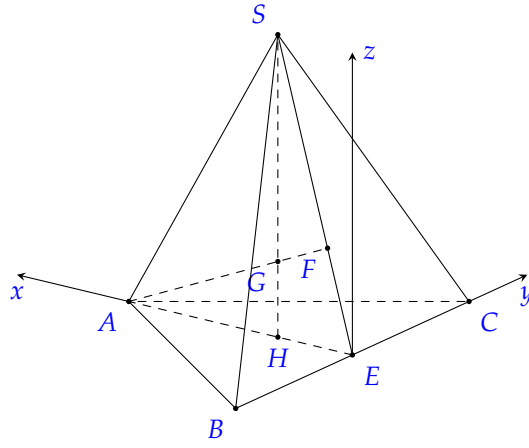
Khi đó  $S^2 \leq 81 \Rightarrow S \leq 9$ . Suy ra giá trị lớn nhất của  $S$  bằng 9 khi  $x = 3\sqrt{2}$ .

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là 9 m khi  $x = 3\sqrt{2} \approx 4,24$ .

**Câu 3.** Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan  $CH_4$  được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết  $H - C - H$ , có số đo bằng góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này theo đơn vị độ.



**Lời giải.**



Một phân tử metan  $CH_4$  được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều. Do đó đặt lần lượt các đỉnh này là  $S, A, B, C$  là các đỉnh của tứ diện đều.

Gọi  $H, F$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $SBC$ . Gọi  $G$  là giao điểm của  $SH$  và  $AF$ . Khi đó  $G$  là trọng tâm của tứ diện đều  $SABC$ , là vị trí của nguyên tử cacbon.

Từ hình vẽ ta thấy góc liên kết là góc  $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS})$ .

$$\text{Ta có } AE \perp BC, SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AE \\ SH \perp BC. \end{cases}$$

Nên ta có hệ trục tọa độ như hình với  $E$  trùng với gốc tọa độ  $O$ , trục  $Ox$  trùng với đường thẳng  $AE$ , trục  $Oy$  trùng với đường thẳng  $BC$ , trục  $Oz$  song song với  $SH$ .

Giả sử các cạnh của tứ diện có độ dài là 1.

$$\text{Ta có } SE = AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right).$$

$$HE = \frac{AE}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow H\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right).$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

$$\text{Lại có } \frac{FE}{SE} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow FH \parallel SA \text{ và } AF \text{ cắt } SH \text{ tại } G.$$

$$\text{Suy ra } \frac{GH}{GS} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH = \frac{1}{4}SH = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow G\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{\sqrt{6}}{12}\right).$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; -\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow GA = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\overrightarrow{GS} = \left(0; 0; \frac{\sqrt{6}}{4}\right) \Rightarrow GS = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS}) = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS}) \approx 109^\circ.$$

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. A   2. C   3. A   4. D   5. B   6. B   7. A   8. A   9. D   10. C   11. A   12. B

### PHẦN II.

Câu 1.      a Đ b Đ c S d Đ      Câu 2.      a Đ b S c S d S

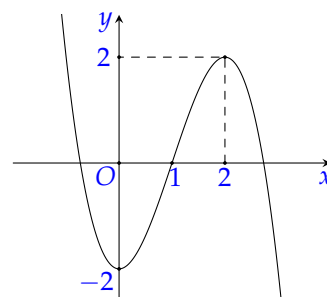
### PHẦN III.

Câu 1.   0 , 6 7      Câu 2.   6 0      Câu 3.   4 1      Câu 4.   - 6

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: ..... Mã đề: 0101  
**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; 0)$ . B.  $(-2; 2)$ .  
 C.  $(2; +\infty)$ . **D**  $(0; 2)$ .



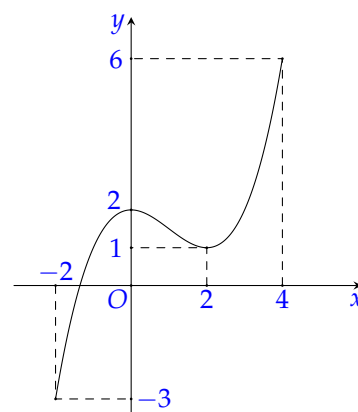
**Lời giải.**

Từ đồ thị ta thấy trên khoảng  $(0; 2)$  thì hàm số đồng biến.

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 4]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 4]$  là

- A**  $-3$ . B. 1.  
 C. 2. D. 6.



**Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng  $-3$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 3.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  là đường thẳng có phương trình là

- A**  $x = 1$ . B.  $x = -1$ . C.  $x = 2$ . D.  $x = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$ .

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  là đường thẳng có phương trình  $x = 1$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

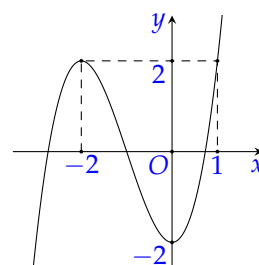
**Câu 4.** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A.  $y = -x^3 - 3x^2 - 2$ .

B.  $y = x^3 - 3x^2 - 2$ .

C.  $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$ .

**D**  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .



**Lời giải.**

Đường cong trong hình vẽ biểu diễn đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số  $a$  dương, có hai điểm cực trị là  $(-2; 2)$  và  $(0; -2)$ .

Suy ra, đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

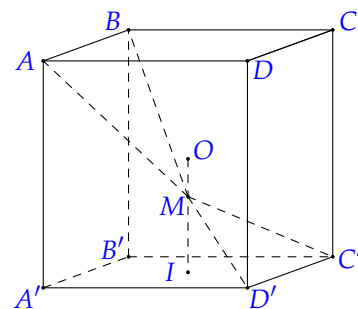
**Câu 5.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là tâm của hình vuông  $A'B'C'D'$  và  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $OI$  sao cho  $OM = \frac{1}{2}MI$  (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $3\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OI}$ .

**B**  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$ .

C.  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MI}$ .

D.  $\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MO}$ .



**Lời giải.**

Vì  $M$  thuộc  $OI$  và  $OM = \frac{1}{2}MI$  suy ra  $MO = \frac{1}{2}IM$ ,  $\overrightarrow{MO}$  cùng hướng  $\overrightarrow{IM}$  nên  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; -2)$  và  $B(2; 2; 1)$ . Vector  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

A.  $(3; 3; -1)$ .

B.  $(-1; -1; -3)$ .

C.  $(3; 3; 1)$ .

**D**  $(1; 1; 3)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 2 - 1; 1 + 2) = (1; 1; 3)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 7.** Khảo sát chiều cao của một nhóm 10 học sinh lớp 12A (đơn vị: cm), ta có được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

|             |            |            |            |            |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| Chiều cao   | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) |
| Số học sinh | 1          | 3          | 4          | 2          |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

**A** 20.

B. 25.

C. 15.

D. 30.

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là  $R = 170 - 150 = 20$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 8.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị: năm) của 10 người dân trong chung cư như sau:

|              |          |          |          |          |
|--------------|----------|----------|----------|----------|
| Tuổi thọ     | [65; 70) | [70; 75) | [75; 80) | [80; 85) |
| Số người dân | 1        | 3        | 4        | 2        |

Tìm tuổi thọ trung bình của người dân trong mẫu số liệu trên.

A. 75.

**B** 76.

C. 75,5.

D. 76,5.

**Lời giải.**

Chọn giá trị đại diện cho mỗi nhóm số liệu ta có bảng sau:



Lại có  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = +\infty$ , do đó  $x = -1$  là tiệm cận đứng đồ thị hàm số.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 1.

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1;2;-3)$ . Điểm đối xứng của  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là

- A.  $(1;0;-3)$ . B.  $(1;0;0)$ . **C**  $(1;2;3)$ . D.  $(0;2;-3)$ .

**Lời giải.**

Hình chiếu vuông góc của  $A(1;2;-3)$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm  $M$  có tọa độ là  $(1;2;0)$ .

Gọi điểm đối xứng của  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm  $A'$  khi đó điểm  $M$  là trung điểm  $A'A$ .

$$\text{Ta suy ra } \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A \\ y_{A'} = 2y_M - y_A \\ z_{A'} = 2z_M - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ y_{A'} = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \\ z_{A'} = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(1;2;3).$$

Chọn đáp án **C** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Kết quả kiểm tra cân nặng (đơn vị: kg) của 20 học sinh nam lớp 11A được cho ở bảng sau:

| Nhóm   | [60;64) | [64;68) | [68;72) | [72;76) | [76;80) |          |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| Tần số | 8       | 9       | 1       | 1       | 1       | $n = 20$ |

- a** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 20.  
**b** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là  $\bar{x} = 65,6$ .  
 c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là  $s^2 = 17,45$ .  
 d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) là 4,1.

**Lời giải.**

- a) **D** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là  $80 - 60 = 20$ .

- b) **D**

| Nhóm             | [60;64) | [64;68) | [68;72) | [72;76) | [76;80) |          |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| Giá trị đại diện | 62      | 66      | 70      | 74      | 78      |          |
| Tần số           | 8       | 9       | 1       | 1       | 1       | $n = 20$ |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 62 + 9 \cdot 66 + 1 \cdot 70 + 1 \cdot 74 + 1 \cdot 78}{20} = 65,6.$$

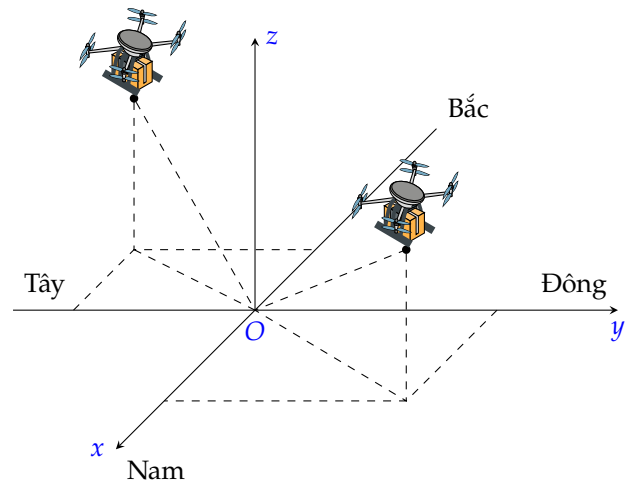
- c) **S** Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{1}{20} (62^2 \cdot 8 + 66^2 \cdot 9 + 70^2 \cdot 1 + 74^2 \cdot 1 + 78^2 \cdot 1) - 65,6^2 = \frac{436}{25} = 17,44.$$

- d) **S** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là  $s = \sqrt{17,44} \approx 4,2$ .

Chọn đáp án a đúng b đúng c sai d sai ..... □

**Câu 2.** Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 3 m về phía Nam và 2 m về phía Đông. Chiếc flycam thứ hai cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 6 m về phía Bắc và 6 m về phía Tây. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất có trục  $Ox$  hướng về phía Nam, trục  $Oy$  hướng về phía Đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét.



- a) Tọa độ của chiếc flycam thứ nhất là  $A(3;2;5)$ . Tọa độ của chiếc flycam thứ hai là  $B(-6;-6;5)$ .
- b) Điểm đối xứng của  $A$  qua mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  là  $A'(3;2;-5)$ .
- c) Tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $M, A', B$  thẳng hàng là  $M(-9;-8;10)$ .
- d) Trên mặt đất, người ta xác định một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất. Khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó là  $7\sqrt{5}$ .

**Lời giải.**

- a) **Đ** Theo giả thiết,  $A(3;2;5)$  và  $B(-6;-6;5)$ .
- b) **Đ** Gọi  $A'$  là điểm đối xứng của  $A$  qua mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ , suy ra  $A'(3;2;-5)$ .
- c) **S** Trên mặt phẳng  $(Oxy)$ , xét điểm  $M(a;b;0)$ .  
Ta có  $\overrightarrow{BM} = (a+6; b+6; -5)$ ,  $\overrightarrow{BA'} = (9; 8; -10)$ .  
Vì ba điểm  $M, A', B$  thẳng hàng suy ra  $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA'}$  cùng phương, tức là  $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{BA'}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).  
Khi đó ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a+6=9k \\ b+6=8k \\ -5=-10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=-2 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -2; 0\right).$$

- d) **S** Gọi  $I$  là điểm cần tìm.  
Ta có  $IA+IB$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow IA'+IB$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow I, A', B$  thẳng hàng (vì  $A', B$  trái phía so với mặt phẳng  $(Oxy)$ ).  
Suy ra  $I \equiv M$ .

Vậy khoảng cách cần tìm là  $OM = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2,5$ .

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $M^2 - 2m$  bằng bao nhiêu?

**Đáp án:**

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

Ta có  $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1. \end{cases}$$

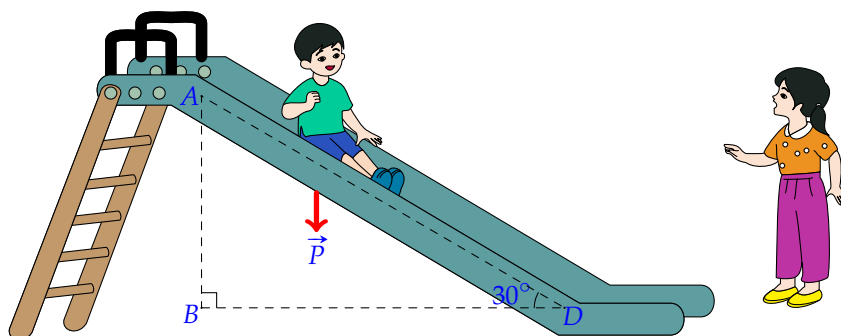
Bảng biến thiên

|      |           |      |           |      |           |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-2$      | $-1$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$       | $-$  | $+$       |
| $y$  | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ | $1$  | $+\infty$ |

Vậy  $M = -3, m = 1 \Rightarrow M^2 - 2m = 7$ .

Đáp án: 7 ..... □

**Câu 2.** Một em nhỏ cân nặng  $m = 35$  kg trượt trên cầu trượt dài 4 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là  $30^\circ$ .



Công  $A$  (J) sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển  $\vec{d}$  được tính bởi công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , cho biết vectơ gia tốc rơi tự do  $\vec{g}$  có độ lớn là  $g = 9,8$  (m/s<sup>2</sup>). Khi đó công sinh bởi trọng lực  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$  khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt bằng bao nhiêu?

Đáp án: 6 8 6  

**Lời giải.**

Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là  $P = mg = 35 \cdot 9,8 = 343$  (N).

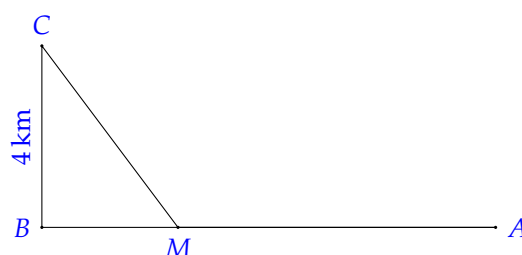
Ta có  $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Công sinh ra bởi trọng lực  $\vec{P}$  khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 343 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 686 \text{ (J)}.$$

Đáp án: 686 ..... □

**Câu 3.** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở  $A$  đến một hòn đảo ở  $C$  như hình vẽ. Khoảng cách từ hòn đảo  $C$  đến bờ biển là đoạn  $CB = 4$  km. Bờ biển chạy thẳng từ  $A$  đến  $B$  với khoảng cách là 12 km. Chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Hỏi cần đặt vị trí nối dây  $M$  trên đoạn  $AB$  (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) cách nhà máy điện ở  $A$  bao nhiêu km để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?



**Lời giải.**

Gọi khoảng cách  $BM$  là  $x$  (km), ( $0 \leq x \leq 12$ ).

Khi đó khoảng cách  $AM$  là  $12 - x$  (km).

Khoảng cách  $CM$  là  $\sqrt{16 + x^2}$  (km).

Khi đó tổng chi phí lắp đặt dây điện là  $f(x) = 30(12 - x) + 50\sqrt{16 + x^2}$  (triệu đồng).

Bài toán trở thành tìm  $x \in [0; 12]$  để  $f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có  $f'(x) = -30 + \frac{50x}{\sqrt{16 + x^2}}$ .

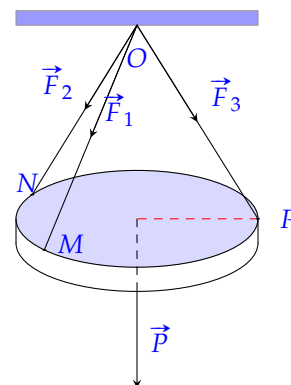
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -30 + \frac{50x}{\sqrt{16 + x^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow -30\sqrt{16 + x^2} + 50x = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{16 + x^2} = 5x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(16 + x^2) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \in (0; 12). \end{aligned}$$

Ta có  $f(0) = 560$ ;  $f(3) = 520$ ;  $f(12) = 200\sqrt{10}$ .

Do đó chi phí nhỏ nhất để lắp dây điện là 520 triệu đồng khi  $M$  cách  $A$  một đoạn 9 km.

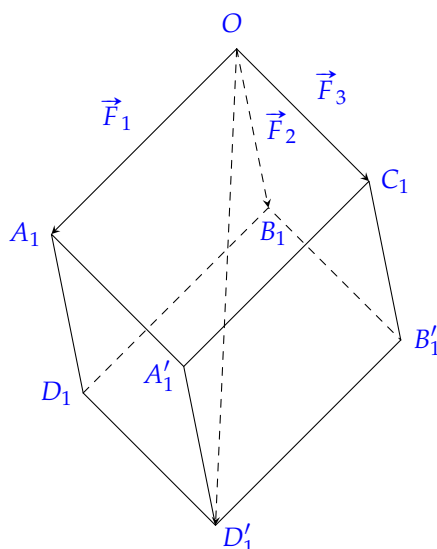
Đáp án:  □

**Câu 4.** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi giây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $M, N, K$  trên đường tròn sao cho lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OM, ON, OK$  đôi một vuông góc với nhau và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 25\sqrt{3}$  (N). Biết trọng lượng của chiếc đèn đó là  $a$  (N). Khi đó giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



Đáp án:

**Lời giải.**



Gọi  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là các điểm sao cho  $\vec{OA_1} = \vec{F_1}, \vec{OB_1} = \vec{F_2}, \vec{OC_1} = \vec{F_3}$ .

Lấy các điểm  $D_1, A'_1, B'_1, D'_1$  sao cho  $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$  là hình hộp (như hình trên). Khi đó, áp

dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_{1'}}.$$

Mặt khác, do các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  đôi một vuông góc và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 25\sqrt{3}$  (N) nên hình hộp  $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$  có ba cạnh  $OA_1, OB_1, OC_1$  đôi một vuông góc và bằng nhau.

Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng  $25\sqrt{3}$ .

Suy ra độ dài đường chéo  $OD'_1$  của hình lập phương đó bằng  $25\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 75$ .

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$ , ở đó  $\vec{P}$  là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

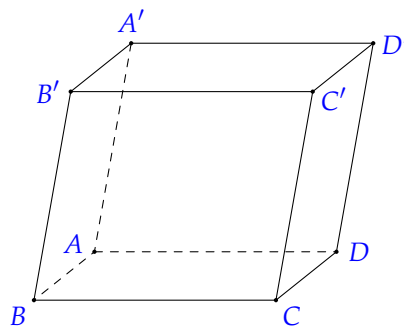
Vậy trọng lượng của chiếc đèn là  $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD_{1'}}| = 75$  (N).

Đáp án: **75** ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết  $A(1; -1; 1), B(1; 0; 1), C(2; 1; 2), D'(4; 5; -5)$ . Một vector  $\vec{v} = (a; b; 1)$  vuông góc với với cả hai vector  $\overrightarrow{DD'}$  và  $\overrightarrow{D'A'}$ . Tính  $-5a + 3b$ .

**Lời giải.**



Ta có  $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB} = (-1; -1; -1)$ .

Ta có  $\overrightarrow{BC} = (1; 1; 1); \overrightarrow{BA} = (0; -1; 0)$ .

Gọi  $D(x; y; z)$  suy ra  $\overrightarrow{BD} = (x - 1; y; z - 1)$ .

Theo quy tắc hình bình hành, ta có  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$  hay

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y = 0 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow D(2; 0; 2).$$

Suy ra  $\overrightarrow{DD'} = (2; 5; -7)$ .

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \overrightarrow{DD'} \\ \vec{v} \perp \overrightarrow{D'A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 5b - 7 = 0 \\ -a - b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy  $-5a + 3b = -5 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 29$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x + 3}$ . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-2024; 2025]$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$  có 5 điểm cực trị.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

Do  $y' = f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x + 3)^2}$  ( $x \neq -3$ ).

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4. \end{cases}$$

Ta có  $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x-m)$ .

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - m \neq -3 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m = -2 \\ x^2 - 2x - m = -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = m - 2 \quad (1) \\ x^2 - 2x = m - 4 \quad (2). \end{cases}$$

Hàm số  $g(x)$  có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và các nghiệm của 2 phương trình này không trùng nhau.

Xét  $h(x) = x^2 - 2x$  có bảng biến thiên

|         |           |    |           |
|---------|-----------|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1  | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | 0  |           |
| $h(x)$  | $+\infty$ | -1 | $+\infty$ |

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì  $m - 4 > -1 \Leftrightarrow m > 3$ .

Do  $m$  nguyên thuộc  $[-2024; 2025]$  nên có 2022 giá trị thỏa mãn.

**Câu 3.** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:  $N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2}$  (con), trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2}$  với  $t > 0$ .

$$\text{Ta có } N'(t) = \frac{100 \cdot (100 + t^2) - 100t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}.$$

Khi đó, với  $t > 0$ ,  $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$ .

Bảng biến thiên

|         |       |       |           |
|---------|-------|-------|-----------|
| $t$     | 0     | 10    | $+\infty$ |
| $N'(t)$ |       | 0     |           |
| $N(t)$  | 1 000 | 1 005 | 1 000     |

Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , hàm số  $N(t)$  đạt giá trị lớn nhất bằng 1 005 tại  $t = 10$ .

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1 005 con.

BẢNG ĐÁP ÁN

## PHẦN I.

1. D   2. A   3. A   4. D   5. B   6. D   7. A   8. B   9. C   10. C   11. D   12. C

PHẦN II.

**Câu 1.**

a Đ b Đ c S d S

**Câu 2.**

a Đ b Đ c S d S

### PHẦN III.

Câu 1. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 7 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 2. 

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 6 | 8 | 6 |  |
|---|---|---|--|

    Câu 3. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 9 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 4. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 7 | 5 |  |  |
|---|---|--|--|

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |      |           |
|---------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $0$ | $3$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$  | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | $+\infty$ |

Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

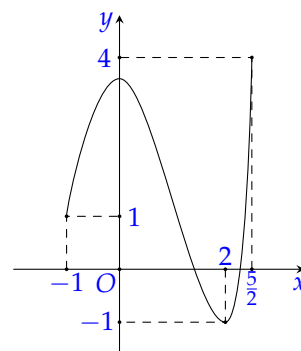
A.  $(-3; 0)$ .B.  $(-3; 3)$ .C.  $(0; 3)$ .D.  $(-\infty; -3)$ .

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$  và  $(3; +\infty)$ .

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$  và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x)$  trên  $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$  là

A.  $M = 4, m = 1$ .B.  $M = 4, m = -1$ .C.  $M = \frac{7}{2}, m = -1$ .D.  $M = \frac{7}{2}, m = 1$ .

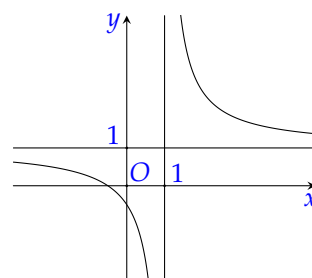
Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  ta có  $M = 4, m = -1$ .

Chọn đáp án **B** ..... ☐

**Câu 3.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

A.  $x = 1$ .B.  $x = 2$ .C.  $y = 1$ .D.  $y = 2$ .

Lời giải.

Quan sát hình vẽ đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = 1$  làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **A** ..... ☐

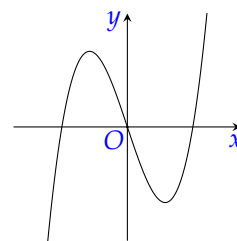
**Câu 4.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

**A**  $y = x^3 - 3x$ .

**B.**  $y = -x^3 + 3x$ .

**C.**  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**D.**  $y = -x^3 + 3x^2$ .



**Lời giải.**

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 dạng  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với hệ số  $a > 0$  đồng thời đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$  nên chỉ có hàm số  $y = x^3 - 3x$  thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 5.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $\vec{SA} - \vec{AB} = \vec{SB}$ .

**B.**  $\vec{SA} - \vec{SB} = \vec{AB}$ .

**C**  $\vec{SA} - \vec{SB} = \vec{BA}$ .

**D.**  $\vec{SA} - \vec{SB} = \vec{SC}$ .

**Lời giải.**

Theo quy tắc hiệu, ta có  $\vec{SA} - \vec{SB} = \vec{BA}$ .

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ hình chiếu của  $M(-2; 1; 4)$  lên mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$  là

**A.**  $(-2; 0; 0)$ .

**B.**  $(0; 1; 0)$ .

**C.**  $(0; 0; 4)$ .

**D**  $(0; 1; 4)$ .

**Lời giải.**

Tọa độ hình chiếu của  $M(-2; 1; 4)$  lên mặt phẳng tọa độ  $(Oyz)$  là  $(0; 1; 4)$ .

Chọn đáp án **D** ..... ☐

**Câu 7.** Bảng thống kê khối lượng (đơn vị: gram) một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng như sau:

|            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Khối lượng | $[80; 82)$ | $[82; 84)$ | $[84; 86)$ | $[86; 88)$ | $[88; 90)$ |
| Số quả     | 17         | 20         | 25         | 16         | 12         |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

**A** 10.

**B.** 12.

**C.** 2.

**D.** 20.

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là  $90 - 80 = 10$  gram.

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 8.** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của mã cổ phiếu  $A$  trong 50 ngày giao dịch liên tiếp như sau:

|                   |              |              |              |              |              |
|-------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Giá đóng cửa      | $[120; 122)$ | $[122; 124)$ | $[124; 126)$ | $[126; 128)$ | $[128; 130)$ |
| Số ngày giao dịch | 8            | 9            | 12           | 10           | 11           |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

**A.** 121,13.

**B.** 123,35.

**C** 125,28.

**D.** 127,19.

**Lời giải.**

Ta có cỡ mẫu của bảng số liệu là  $n = 50$ .

|                   |              |              |              |              |              |
|-------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Giá đóng cửa      | $[120; 122)$ | $[122; 124)$ | $[124; 126)$ | $[126; 128)$ | $[128; 130)$ |
| Giá trị đại diện  | 121          | 123          | 125          | 127          | 129          |
| Số ngày giao dịch | 8            | 9            | 12           | 10           | 11           |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{121 \cdot 8 + 123 \cdot 9 + 125 \cdot 12 + 127 \cdot 10 + 129 \cdot 11}{50} = 125,28.$$

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 9.** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  là

A.  $x = 1$ .

**B**  $(3; 1)$ .

C.  $x = 3$ .

D.  $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = x^2 - 4x + 3$ .

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|      |           |   |               |           |   |   |           |
|------|-----------|---|---------------|-----------|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 3             | $+\infty$ |   |   |           |
| $y'$ |           | + | 0             | -         | 0 | + |           |
| $y$  |           |   | $\frac{7}{3}$ |           | 1 |   | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |   |               |           |   |   |           |

Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là  $(3; 1)$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

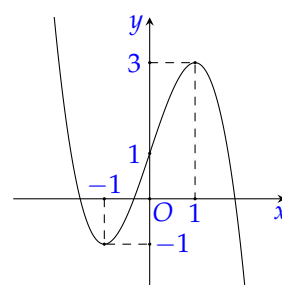
**Câu 10.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 1$  là

A. 0.

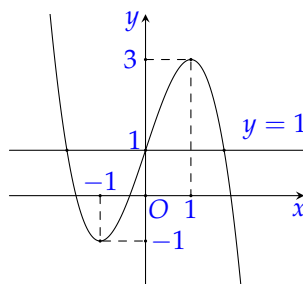
**B** 3.

C. 1.

D. 2.



**Lời giải.**



Ta thấy đường thẳng  $y = 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại 3 điểm phân biệt nên phương trình  $f(x) = 1$  có 3 nghiệm.

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 11.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$  là

A.  $y = 2x + 5$ .

B.  $y = x + 5$ .

**C**  $y = x - 5$ .

D.  $y = 2x - 5$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ .

Ta có

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 - 25 + 9}{x + 5} \\
&= \frac{x^2 - 25}{x + 5} + \frac{9}{x + 5} \\
&= \frac{(x - 5)(x + 5)}{x + 5} + \frac{9}{x + 5} \\
&= x - 5 + \frac{9}{x + 5}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x + 5} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x + 5} = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x - 5$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; 0); B(2; -1; 3)$ . Điểm  $C$  nằm trên trục  $Oy$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có tọa độ là

- A.  $\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ .      B.  $(0; 2; 0)$ .      C.  $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ .      **D**  $\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $C(0; y; 0) \in Oy$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 3); \overrightarrow{AC} = (-1; y - 1; 0)$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , ta có

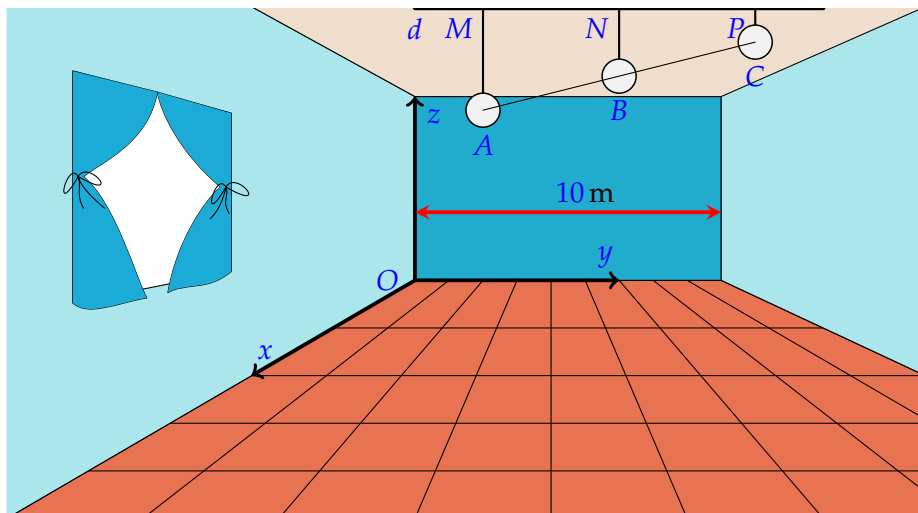
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (y - 1) + 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow -2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là  $C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Trong một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 10 m và cao 4 m, giả sử người ta muốn treo 3 bóng đèn  $A, B, C$  thẳng hàng tại 3 điểm treo  $M, N, P$  trên thanh đỡ  $d$  song song và cách bức tường phía sau 2 m. Chọn hệ trục tọa độ (đơn vị: mét) như hình vẽ sau:



Biết độ dài dây điện treo của đèn  $A, C$  lần lượt là  $MA = 0,7$  m và  $PC = 0,5$  m. Khoảng cách giữa các điểm treo là  $MN = 1,5$  m;  $NP = 1$  m và điểm treo  $M$  cách tường có cửa sổ  $4$  m.

**a** Đ Hoàn độ của điểm  $A$  bằng  $2$ .

**b** Đ Tọa độ của đèn  $A$  là  $\left(2; 4; \frac{33}{10}\right)$ .

**c** Đ Tọa độ đèn  $C$  là  $\left(2; \frac{13}{2}; \frac{7}{2}\right)$ .

**d** Tổng khoảng cách giữa  $3$  đèn đến gốc tọa độ  $O$  là  $19$  m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Lời giải.**

**a)** Đ Điểm treo  $M$  trên thanh đỡ  $d$  song song và cách bức tường phía sau  $2$  m nên  $d(A, (Oyz)) = 2$  và  $x_A > 0$ .

Do đó hoành độ của điểm  $A$  bằng  $2$ .

**b)** Đ Điểm treo  $M$  cách tường có cửa sổ  $(Oxz)$   $4$  m nên điểm treo  $A$  cũng cách tường có cửa sổ  $(Oxz)$   $4$  m.

Suy ra tung độ của điểm  $A$  bằng  $4$ .

Căn phòng cao  $4$  m và  $MA = 0,7$  m nên cao độ của điểm  $A$  bằng  $4 - 0,7 = 3,3$ .

Vậy tọa độ của đèn  $A$  là  $\left(2; 4; \frac{33}{10}\right)$ .

**c)** Đ Ta có  $x_C = x_A = 2$ .

$$y_C = y_A + MN + NP = 4 + 1,5 + 1 = 6,5 = \frac{13}{2}$$

$$z_C = 4 - PC = 4 - 0,5 = 3,5 = \frac{7}{2}.$$

Vậy tọa độ đèn  $C$  là  $\left(2; \frac{13}{2}; \frac{7}{2}\right)$ .

**d)** S Ta có  $\frac{NP}{NM} = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ .

Mà  $A, B, C$  thẳng hàng và  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$  nên suy ra  $3\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$ .

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} 3 \cdot (2 - x_B) = -2 \cdot (2 - x_B) \\ 3 \cdot \left(\frac{13}{2} - y_B\right) = -2 \cdot (4 - y_B) \\ 3 \cdot \left(\frac{7}{2} - z_B\right) = -2 \cdot \left(\frac{33}{10} - z_B\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = \frac{11}{2} \\ z_B = \frac{171}{50} \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ của đèn  $B$  là  $\left(2; \frac{11}{2}; \frac{171}{50}\right)$ .

Ta có

$$OA = \sqrt{2^2 + 4^2 + \left(\frac{33}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{3089}{100}};$$

$$OB = \sqrt{2^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{171}{50}\right)^2} = \sqrt{45,9464};$$

$$OC = \sqrt{2^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{117}{2}}.$$

Tổng khoảng cách giữa  $3$  đèn đến gốc tọa độ  $O$  là  $T = OA + OB + OC \approx 19,98478395$ .

Do vậy khi làm tròn đến hàng đơn vị thì  $T \approx 20$ .

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ..... ☐

**Câu 2.** Thống kê điểm kiểm tra giữa HKI môn Toán của lớp 12A trường THPT X người ta thu được kết quả sau:

| Điểm thi    | [2;3) | [3;4) | [4;5) | [5;6) | [6;7) | [7;8) | [8;9) | [9;10] |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Số học sinh | 2     | 7     | 8     | 3     | 10    | 5     | 3     | 2      |

- a) Lớp 12A có tổng số là 40 học sinh.  
b) Số điểm trung bình môn Toán trong kỳ kiểm tra giữa HKI của lớp 12A là 5,725.  
c) Một của mẫu số liệu là  $\frac{79}{12}$ .  
d) Biết rằng điểm kiểm tra giữa HKI môn Toán của lớp 12B có phương sai 5,32. Khi đó, lớp 12B học đều môn Toán hơn lớp 12A.

**Lời giải.**

a) ☒ Tổng số học sinh của lớp 12A là  $2 + 7 + 8 + 3 + 10 + 5 + 3 + 2 = 40$  (học sinh).

b) ☒

| Điểm thi         | [2;3) | [3;4) | [4;5) | [5;6) | [6;7) | [7;8) | [8;9) | [9;10] |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Giá trị đại diện | 2,5   | 3,5   | 4,5   | 5,5   | 6,5   | 7,5   | 8,5   | 9,5    |
| Số học sinh      | 2     | 7     | 8     | 3     | 10    | 5     | 3     | 2      |

Số điểm trung bình môn Toán trong kỳ kiểm tra giữa HKI của lớp 12A là

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2,5 + 7 \cdot 3,5 + 8 \cdot 4,5 + 3 \cdot 5,5 + 10 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7,5 + 3 \cdot 8,5 + 2 \cdot 9,5}{40} = \frac{229}{40} = 5,725.$$

c) ☒ Nhóm chứa một của mẫu số liệu là [6;7).  
Một của mẫu số liệu là

$$M_0 = 6 + \frac{10 - 3}{(10 - 3) + (10 - 5)} \cdot (7 - 6) = 6 + \frac{7}{12} = \frac{79}{12}.$$

d) ☒ Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm điểm thì giữa HKI môn Toán của lớp 12A là

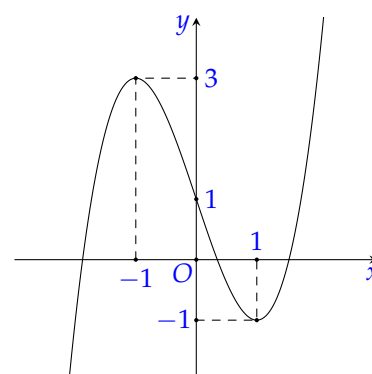
$$s_1^2 = \frac{2 \cdot (\bar{x} - 2,5)^2 + 7 \cdot (\bar{x} - 3,5)^2 + 8 \cdot (\bar{x} - 4,5)^2 + 3 \cdot (\bar{x} - 5,5)^2 + \dots + 2 \cdot (\bar{x} - 9,5)^2}{40} = \frac{5639}{1600} \approx 3,52 < 5,32.$$

Vậy sự biến động điểm số của lớp 12B nhiều hơn so với lớp 12A.  
Do đó lớp 12A học đều hơn so với lớp 12B.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ..... ☐

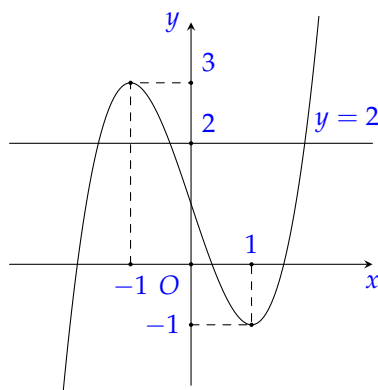
**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm âm phân biệt của phương trình  $f(x) = 2$ .



Đáp án:

Lời giải.



Từ phương trình  $f(x) = 2$ , xét đồ thị  $y = f(x)$  và đường thẳng  $d: y = g(x) = 2$  (tức đường thẳng đi qua tung độ  $y = 2$  và song song với trục hoành  $Ox$ ).

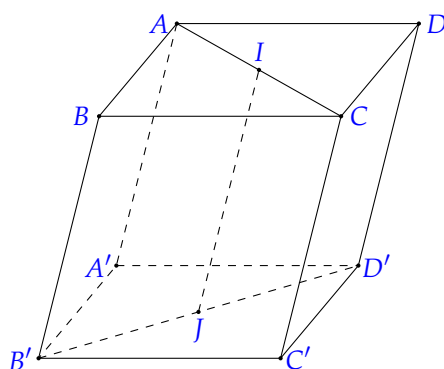
Dựa vào hình vẽ ta có đường thẳng  $d: y = g(x) = 2$  cắt đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm nằm bên trái của trục  $Oy$  nên suy ra có 2 nghiệm âm phân biệt.

Đáp án:  □

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(-3;2;1)$ ,  $C(5;2;1)$ ,  $B'(-2;1;1)$ ,  $D'(4;5;5)$ ,  $A'(a;b;c)$ . Tính giá trị biểu thức  $a + b + c$ .

Đáp án:

Lời giải.



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow I(1;2;1)$ .

Gọi  $J$  là trung điểm của  $B'D' \Rightarrow J(1;3;3)$ .

Ta có  $\vec{IJ} = (0;1;2)$ .

$$\text{Ta có } \vec{AA'} = \vec{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 = 0 \\ b - 2 = 1 \\ c - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 3. \end{cases}$$

Vậy  $a + b + c = 3$ .

Đáp án:  □

**Câu 3.** Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải chi trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi  $x$  ( $x \geq 1$ ) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và  $T(x)$  (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  $x$  đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là  $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ . Khi  $x$  đủ lớn ( $x \rightarrow +\infty$ ) thì chi phí trung bình (USD) cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là bao nhiêu?

Đáp án:

Lời giải.

Tổng chi phí để sản xuất  $x$  sản phẩm đồ chơi A bao gồm chi phí ban đầu là 50 000 USD và chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 5 USD.

Vậy, biểu thức của  $T(x) = 50\,000 + 5x$ .

Chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{50\,000 + 5x}{x} = \frac{50\,000}{x} + 5.$$

Khi đó  $\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{50\,000}{x} + 5 \right) = 5$ .

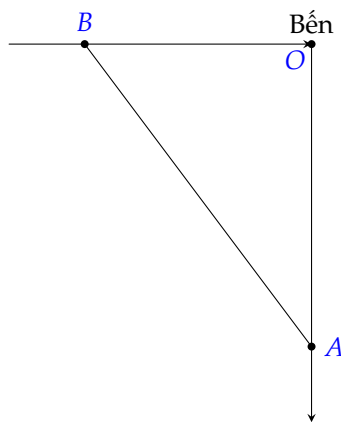
Khi  $x$  đủ lớn, chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là 5 USD.

Đáp án: 5 ..... □

**Câu 4.** Một chiếc tàu rời bến lúc 1 giờ và chạy theo hướng Nam với vận tốc 20 km/h. Một chiếc tàu khác đi theo hướng Đông với vận tốc 15 km/h và cập bến nói trên lúc 2 giờ. Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa hai chiếc tàu là bao nhiêu km?

Đáp án: 1 2

Lời giải.



Gọi khoảng cách hai tàu bằng  $AB$ , vị trí bến là  $O$ .

- Trước 1 giờ,  $AB > 15$  km;
- Đúng 1 giờ,  $AB = 15$  km;
- Đúng 2 giờ,  $AB = 20$  km;
- Sau 2 giờ,  $AB > 20$  km.

Vậy ta chỉ cần xét trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 2 giờ.

Gọi  $t$  là thời gian hai tàu đi kể từ lúc 1 giờ,  $t \in [0; 1]$ .

Ta có  $OA = 20t$  km;  $OB = 15 - 15t$  km.

Vậy khoảng cách hai chiếc tàu là

$$AB = \sqrt{(20t)^2 + (15 - 15t)^2} = \sqrt{625t^2 - 450t + 225} \text{ (km)}.$$

Xét hàm số  $f(t) = 625t^2 - 450t + 225$  trên  $t \in [0; 1]$ .

Ta có đạo hàm  $f'(t) = 1\,250t - 450$ .

Cho  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{25}$ .

Ta tính  $f(0) = 225$ ,  $f(1) = 400$  và  $f\left(\frac{9}{25}\right) = 144$ .

Suy ra  $\min_{t \in [0; 1]} f(t) = 144$  đạt khi  $t = \frac{9}{25}$ .

Vậy khoảng cách ngắn nhất giữa hai chiếc tàu là 12 km.

Đáp án: 12 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Viết phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 3x^2 - 12x + 9$ .

Do đó  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Bảng biến thiên

|      |           |   |   |           |    |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|----|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |    |   |           |
| $y'$ |           | + | 0 | -         | 0  | + |           |
| $y$  | $-\infty$ |   | 3 |           | -1 |   | $+\infty$ |

Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $A(1;3)$  và đạt cực tiểu tại  $B(3;-1)$ .

Từ đó suy ra phương trình đi qua hai điểm cực trị  $A(1;3)$ ,  $B(3;-1)$  là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} \Leftrightarrow -4x+4 = 2y-6 \Leftrightarrow 2x+y-5=0.$$

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;0)$ ,  $B(-2;1;2)$ ,  $C(4;6;-5)$ . Hãy xác định tọa độ của điểm  $M \in (Oyz)$  sao cho biểu thức  $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.**

Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , suy ra  $G(1;3;-1)$ .

Ta có

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 32 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (2 + 2 + 2) \\ &= 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2). \end{aligned}$$

Vì  $M \in (Oyz)$  nên tọa độ có dạng  $M(0;b;c)$ .

Từ đó ta có  $T_{\min} \Leftrightarrow MG_{\min}$  hay  $M$  là hình chiếu của  $G(1;3;-1)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$ .

Suy ra  $M(0;3;-1)$ .

**Câu 3.** Công ty  $A$  dự định tổ chức cho nhân viên đi tham quan Huế trong hai ngày. Công ty  $A$  dự định nếu đặt giá tour là 2 triệu đồng của công ty du lịch  $B$  thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để khuyến khích mọi người tham gia, công ty du lịch  $B$  quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty du lịch  $B$  phải bán giá tour là bao nhiêu (triệu đồng) để doanh thu từ tour là lớn nhất?

**Lời giải.**

Gọi  $x > 0$  (triệu đồng) là giá tour.

Giá đã giảm so với ban đầu là  $2 - x$ .

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán  $x$  là  $\frac{(2-x) \cdot 20}{0,1} = 400 - 200x$ .

Số người sẽ tham gia nếu bán giá  $x$  là  $150 + (400 - 200x) = 550 - 200x$ .

Tổng doanh thu là  $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$ .

Ta có  $f'(x) = -400x + 550$ .

Suy ra  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$ .

Bảng biến thiên

|         |   |                    |     |   |
|---------|---|--------------------|-----|---|
| $x$     | 0 | $\frac{11}{8}$     | 2   |   |
| $f'(x)$ |   | +                  | 0   | – |
| $f(x)$  | 0 | $\frac{3\,025}{8}$ | 300 |   |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = \frac{11}{8} = 1,375$ .

Vậy công ty  $B$  cần bán giá tour  $x = 1,375$  (triệu đồng) thì tổng doanh thu sẽ cao nhất.

**BẢNG ĐÁP ÁN**

## PHẦN I.

1. A   2. B   3. A   4. A   5. C   6. D   7. A   8. C   9. B   10. B   11. C   12. D

PHẦN II.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Câu 1. <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">a</span> Đ <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">b</span> Đ <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">c</span> Đ <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">d</span> S | Câu 2. <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">a</span> Đ <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">b</span> Đ <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">c</span> Đ <span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">d</span> S |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### PHẦN III.

Câu 1. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 2 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 2. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 3 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 3. 

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 5 |  |  |  |
|---|--|--|--|

    Câu 4. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 1 | 2 |  |  |
|---|---|--|--|

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |           |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |      |     |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$ |           |
| $y$  |           |      | $3$ |           | $-1$ |     | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |      |     |           |      |     |           |

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 3)$ .    B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .  
☒ C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .    D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .

Chọn đáp án ☒ C ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn  $[-1; 3]$  như hình dưới.

|      |      |     |     |     |     |
|------|------|-----|-----|-----|-----|
| $x$  | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ |     |
| $y'$ | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$  | $0$  | $5$ | $1$ | $4$ |     |

Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?

- ☒ A.  $M = f(0)$ .    B.  $M = f(3)$ .    C.  $M = f(2)$ .    D.  $M = f(-1)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$  là  $M = f(0) = 5$ .

Chọn đáp án ☒ A ..... □

**Câu 3.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+4}{x-1}$  là đường thẳng có phương trình

- ☒ A.  $x = 1$ .    B.  $x = -1$ .    C.  $x = 2$ .    D.  $x = -2$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

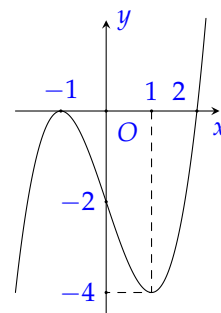
Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ .

Do đó  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 4.** Cho hàm số bậc ba có dạng  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) có đồ thị như hình bên. Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục tung là

- A.  $(-1; 0)$ . B.  $(2; 0)$ .  
C.  $(0; -4)$ . **D**  $(0; -2)$ .



**Lời giải.**

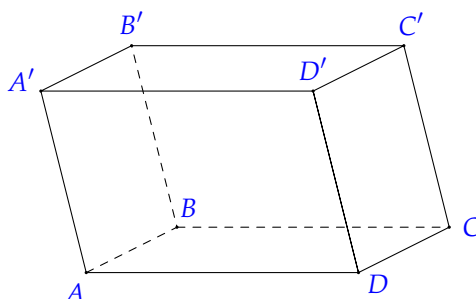
Dựa vào đồ thị đã cho, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ là  $(0; -2)$ .

Chọn đáp án **D** ..... ☐

**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , tổng của  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$  là vectơ nào dưới đây?

- A**  $\overrightarrow{DB'}$ . B.  $\overrightarrow{DB}$ . C.  $\overrightarrow{BD}$ . D.  $\overrightarrow{BD'}$ .

**Lời giải.**



Theo quy tắc hình hộp ta có  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$ .

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(5; -1; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- A.  $(0; -1; 0)$ . B.  $(5; 0; 0)$ . **C**  $(0; -1; 3)$ . D.  $(-1; 3; 0)$ .

**Lời giải.**

Hình chiếu của điểm  $M(5; -1; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là  $(0; -1; 3)$ .

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 7.** Bảng dưới biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hàng ngày của một số người.

| Thời gian (phút) | [30; 60) | [60; 90) | [90; 120) | [120; 150) | [150; 180) |
|------------------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| Số người         | 2        | 4        | 10        | 5          | 3          |

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho.

- A. 120. B. 90. **C** 150. D. 180.

**Lời giải.**

Do đầu mút phải của nhóm ghép cuối cùng là 180 và đầu mút trái của nhóm ghép đầu tiên là 30 nên khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là  $R = 180 - 30 = 150$ .

Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 8.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

|                  |          |          |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 31,77.

**B. 31,25.**

C. 31,44.

D. 32,25.

**Lời giải.**

Ta có cỡ mẫu  $n = 18$ .

|                  |          |          |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
| Giá trị đại diện | 22,5     | 27,5     | 32,5     | 37,5     | 42,5     |
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$\bar{x} = \frac{22,5 \cdot 6 + 27,5 \cdot 6 + 32,5 \cdot 4 + 37,5 \cdot 1 + 42,5 \cdot 1}{6 + 6 + 4 + 1 + 1} = \frac{85}{3}.$$

Phương sai của mẫu là

$$S^2 = \frac{1}{18} \left( 22,5^2 \cdot 6 + 27,5^2 \cdot 6 + 32,5^2 \cdot 4 + 37,5^2 \cdot 1 + 42,5^2 \cdot 1 \right) - \left( \frac{85}{3} \right)^2 = 31,25.$$

Chọn đáp án **B** ..... □

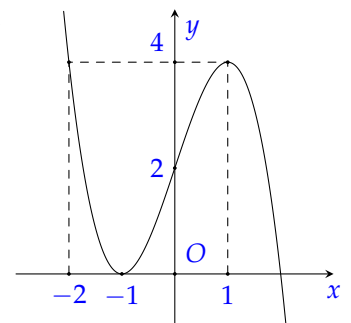
**Câu 9.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

**A. (-1; 0).**

B. (0; -1).

C. (1; 4).

D. (0; 2).



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là  $(-1; 0)$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 10.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $P(n) = 480 - 20n$  (gam),  $0 \leq n \leq 24$ . Số con cá phải thả trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất là

A. 14.

B. 15.

**C. 12.**

D. 13.

**Lời giải.**

Cân nặng của  $n$  con cá được biểu thị qua hàm số

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2.$$

Xét hàm số  $y = f(n) = -20n^2 + 480n$  trên  $[0; 24]$ .

Ta có  $f'(n) = -40n + 480$ .

$$f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12.$$

Ta có bảng biến thiên sau

|         |   |      |    |   |
|---------|---|------|----|---|
| $n$     | 0 | 12   | 24 |   |
| $f'(n)$ |   | +    | 0  | - |
| $f(n)$  | 0 | 2880 | 0  |   |

Vậy thu hoạch sản lượng cá nhiều nhất thì phải thả trên một đơn vị diện tích mặt hồ là 12 con cá.  
 Chọn đáp án **C** ..... ☐

**Câu 11.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$  là

A. 0.

B. -2.

C. -1.

**D**  $-\sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

|      |           |             |           |     |
|------|-----------|-------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$        | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $-$         | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-1$      | $-\sqrt{2}$ | $1$       |     |

Từ bảng biến thiên ta thấy được  $\min_{\mathbb{R}} y = y(-1) = -\sqrt{2}$ .

Chọn đáp án **D** ..... ☐

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (2; -1; 1)$  và  $\vec{v} = (-3; 4; -5)$ . Số đo của góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là

**A**  $150^\circ$ .

B.  $120^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } (\vec{u}, \vec{v}) = 150^\circ.$$

Chọn đáp án **A** ..... ☐

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

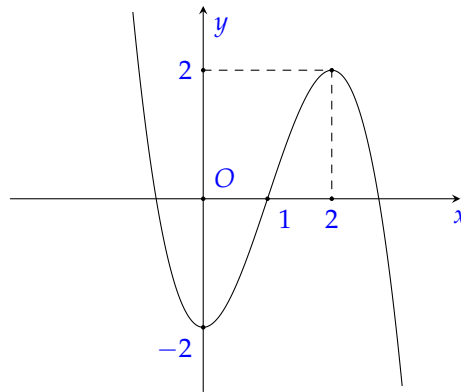
**a**  $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$ .

b) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$  và nghịch biến trên  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

c) Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  là

|         |           |     |      |           |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |     |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$       | $0$ | $-$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     | $-2$ |           | $2$ |     | $-\infty$ |

d) Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  là



Lời giải.

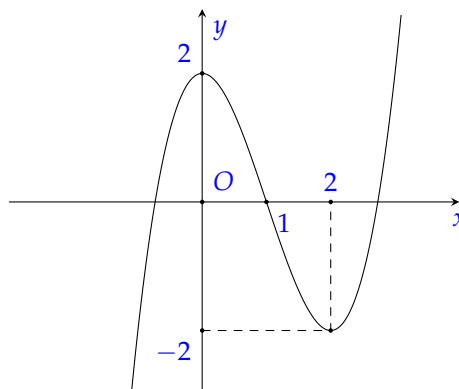
a) **Đ** Ta có  $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$ .

b) **S** Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .  
Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .

c) **S** Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 2$ .  
Ta có bảng biến thiên sau

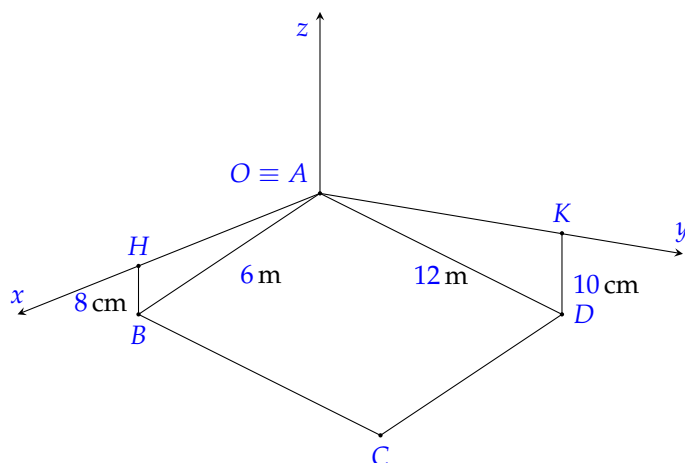
|         |           |     |      |           |           |     |
|---------|-----------|-----|------|-----------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |           |     |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$  | $-$       | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  |           | $2$ |      | $+\infty$ |           |     |
|         | $-\infty$ |     | $-2$ |           | $+\infty$ |     |

d) **S** Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  là



Chọn đáp án a đúng b sai c sai d sai ..... □

**Câu 2.** Bác An dự định xây một sân trước cửa nhà có dạng hình chữ nhật  $ABCD$  có độ dài các cạnh  $AB = 6$  m và  $AD = 12$  m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí  $B$  và  $D$  thấp hơn vị trí  $A$  lần lượt là 8 cm và 10 cm. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ bên và làm tròn các kết quả đến đơn vị cm.



- a) Độ dài  $AK = 1\,200$  cm.  
b) Tọa độ điểm  $D(0; 1\,200; 10)$ .  
c) Gọi  $I$  là tâm hình chữ nhật  $ABCD$ . Tọa độ tâm  $I(300; 600; 9)$ .  
d) Vị trí  $C$  thấp hơn vị trí  $A$  là 18 cm.

**Lời giải.**

- a) **Đ** Ta có  $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{1\,200^2 - 10^2} \approx 1\,200$  (cm).  
b) **S** Điểm  $D$  có tọa độ là  $(0; 1\,200; -10)$ .  
c) **S** Ta có  $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{600^2 - 8^2} \approx 600$  (cm).  
Suy ra  $B(600; 0; -8)$ .  
Do đó  $I(300; 600; -9)$ .  
d) **Đ** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (600; 0; -8)$ ;  $\overrightarrow{DC} = (x_C; y_C - 1\,200; z_C + 10)$ .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 600 \\ y_C - 1\,200 = 0 \\ z_C + 10 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 600 \\ y_C = 1\,200 \\ z_C = -18. \end{cases}$$

Suy ra  $C(600; 1\,200; -18)$ .

Vậy  $C$  thấp hơn  $A$  là 18 cm.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vector  $\vec{a} = (-3; 2; 4)$  và  $\vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$  cùng phương với vector  $\vec{a}$ . Biết  $\vec{b}$  tạo với  $\vec{j}$  một góc tù  $\alpha$  và  $|\vec{b}| = \sqrt{29}$ . Giá trị biểu thức  $P = x_0 + y_0 + z_0$  bằng bao nhiêu?

**Đáp án:**

**Lời giải.**

Do  $\vec{b}$  cùng phương với  $\vec{a}$  nên tồn tại số thực  $k$  thỏa mãn

$$\vec{b} = k\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3k \\ y_0 = 2k \\ z_0 = 4k. \end{cases}$$

Lại có  $|\vec{b}| = \sqrt{29} \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2 + (2k)^2 + (4k)^2} = \sqrt{29} \Leftrightarrow k = \pm 1$ .

- Với  $k = 1$ , ta có  $\vec{b} = (-3; 2; 4)$ .

Khi đó  $\cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}$ , trong đó  $\vec{b} \cdot \vec{j} = (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2 > 0$ .

Suy ra  $\alpha$  là góc nhọn.

- Với  $k = -1$ , ta có  $\vec{b} = (3; -2; -4)$ .

Khi đó  $\cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{j}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{j}|}$ , trong đó  $\vec{b} \cdot \vec{j} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = -2 < 0$ .

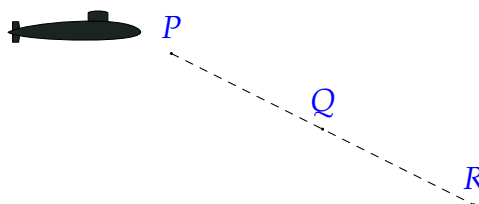
Suy ra  $\alpha$  là góc tù.

Vậy  $\vec{b} = (3; -2; -4)$  hay  $x_0 = 3, y_0 = -2$  và  $z_0 = -4$ .

Do đó  $P = x_0 + y_0 + z_0 = -3$ .

Đáp án: -3 ..... □

**Câu 2.** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo mét), trên màn hình radar phát hiện một chiếc tàu ngầm đang di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $P(-150; -150; -50)$  đến điểm  $Q(-250; -250; -150)$  trong 20 phút.



Nếu tàu ngầm tiếp tục di chuyển với cùng vận tốc và hướng đi, thì tọa độ điểm  $R(x; y; z)$  của tàu ngầm sau 20 phút tiếp theo (tính từ thời điểm tàu ngầm ở điểm Q). Khi đó  $S = x - y + z$  bằng

Đáp án: - 2 5 0

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{PQ} = (-250 + 150; -250 + 150; -150 + 50) = (-100; -100; -100)$ .

Vì tàu ngầm di chuyển cùng vận tốc và hướng đi và cùng thời gian 20 phút, nên  $\vec{PQ} = \vec{QR}$ .

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} x + 250 = -100 \\ y + 250 = -100 \\ z + 150 = -100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -350 \\ y = -350 \\ z = -250. \end{cases}$$

Vậy  $S = x - y + z = -350 + 350 - 250 = -250$ .

Đáp án: -250 ..... □

**Câu 3.** Một cửa hàng trà sữa sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc trà sữa. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 14 000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 3 000 cốc, còn từ mức giá 14 000 đồng mà cứ tăng thêm 1 000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc trà sữa không thay đổi là 12 000. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc trà sữa với giá bao nhiêu nghìn đồng để đạt được lợi nhuận lớn nhất?

Đáp án: 2 8

**Lời giải.**

Gọi  $x$  (đồng) là giá bán mỗi cốc trà sữa.

Khi đó, số cốc trà sữa bán được là

$$3\,000 - \frac{x - 14\,000}{1\,000} \cdot 100 = 4\,400 - \frac{x}{10}.$$

Lợi nhuận được tính bằng hàm  $f(x) = \left(4\,400 - \frac{x}{10}\right) \cdot (x - 12\,000) = -\frac{x^2}{10} + 5\,600x - 52\,800\,000$ .

Ta có  $f'(x) = -\frac{x}{5} + 5\,600$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 28\,000$ .

Bảng biến thiên

|         |        |            |           |   |
|---------|--------|------------|-----------|---|
| $x$     | 0      | 28 000     | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ |        | +          | 0         | - |
| $f(x)$  | $f(0)$ | 25 600 000 | $-\infty$ |   |

Vậy để đạt lợi nhuận lớn nhất, cửa hàng nên bán cốc trà sữa với giá 28 nghìn đồng.

Đáp án: 28 □

**Câu 4.** Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t$  (giờ) ( $0 \leq t \leq 24$ ) trong ngày được xác định bởi công thức  $h = 2 \cos \left( \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) + 5$ . Gọi  $(a; b)$  là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Giá trị của  $a + b$  lớn nhất bằng bao nhiêu?

Đáp án: 2 8

**Lời giải.**

Ta có  $h(t) = 2 \cos \left( \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) + 5 \Rightarrow h'(t) = -\frac{\pi}{6} \sin \left( \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right)$ .

Xét  $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = -4 + 12k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Mà  $0 \leq t \leq 24$  nên  $0 \leq -4 + 12k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{3}$ .

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $\begin{cases} k = 1 \Rightarrow t = 8 \\ k = 2 \Rightarrow t = 20. \end{cases}$

Do đó  $h'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 20. \end{cases}$

|         |   |   |    |    |   |   |   |
|---------|---|---|----|----|---|---|---|
| $t$     | 0 | 8 | 20 | 24 |   |   |   |
| $h'(t)$ |   | - | 0  | +  | 0 | - |   |
| $h(t)$  | 6 |   | 3  |    | 7 |   | 6 |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng  $(8; 20)$ .

Vậy  $a = 8$ ;  $b = 20$  và  $a + b = 28$ .

Đáp án: 28 □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Nhà ông An muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng  $576 \text{ m}^3$ . Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ là  $480 000$  đồng/ $\text{m}^2$ . Tính chi phí thuê nhân công ít nhất để xây được hồ nước cho ông An.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là chiều rộng của hồ chứa nước ( $x > 0$ ), đơn vị m.

Suy ra chiều dài của hình chữ nhật là  $2x$ .

Thể tích hồ nước là  $V = x \cdot 2x \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{2x^2} = \frac{288}{x^2}$ .

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước

$$S(x) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot \frac{288}{x^2} + 2 \cdot 2x \cdot \frac{288}{x^2} = 4x^2 + \frac{1728}{x}.$$

Để chi phí nhân công ít nhất thì diện tích xây dựng hồ phải nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } S'(x) = 8x - \frac{1728}{x^2} = \frac{8x^3 - 1728}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | 0         | 6     | $+\infty$ |
| $S'(x)$ |           | - 0 + |           |
| $S(x)$  | $+\infty$ | 432   | $+\infty$ |

Vậy chi phí thấp nhất để xây hồ cho ông An là  $480\,000 \cdot 432 = 207\,360\,000$  (đồng).

**Câu 2.** Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 6 tại một trạm quan trắc đặt ở một tỉnh trong các năm từ 2004 đến 2023 được thống kê trong bảng số liệu ghép nhóm như sau:

| Số giờ có nắng | [90; 100) | [100; 110) | [110; 120) | [120; 130) | [130; 140) | [140; 150) |
|----------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số năm         | 2         | 3          | 4          | 6          | 3          | 2          |

- Tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Tính tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm.

**Lời giải.**

- Ta có bảng sau

| Số giờ có nắng   | [90; 100) | [100; 110) | [110; 120) | [120; 130) | [130; 140) | [140; 150) |
|------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Giá trị đại diện | 95        | 105        | 115        | 125        | 135        | 145        |
| Số năm           | 2         | 3          | 4          | 6          | 3          | 2          |

Cỡ mẫu  $n = 2 + 3 + 4 + 6 + 3 + 2 = 20$ .

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 95 + 3 \cdot 105 + 4 \cdot 115 + 6 \cdot 125 + 3 \cdot 135 + 2 \cdot 145}{20} = 120,5.$$

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

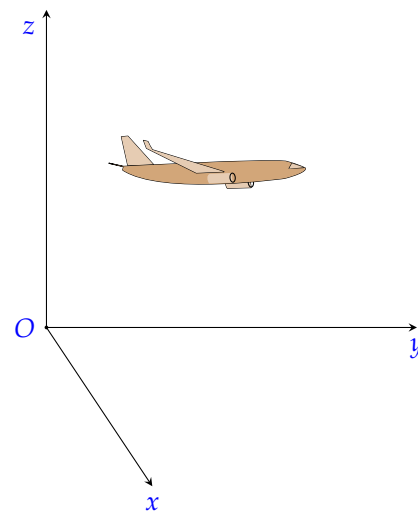
$$S^2 = \frac{1}{20} \left( 2 \cdot 95^2 + 3 \cdot 105^2 + 4 \cdot 115^2 + 6 \cdot 125^2 + 3 \cdot 135^2 + 2 \cdot 145^2 \right) - 120,5^2 = 204,75.$$

- Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là  $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})$ .

Ta có  $x_{15} \in [120; 130)$  và  $x_{16} \in [130; 140)$ .

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là  $Q_3 = 120 + \frac{15 - 9}{6} \cdot (130 - 120) = 130$ .

**Câu 3.** Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  được gắn như hình vẽ, trong đó gốc  $O$  là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và gọi bộ số  $(x; y; z)$  là tọa độ điểm biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Biết các đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  theo đơn vị km. Tại thời điểm 8 giờ, máy bay đang ở vị trí  $A(50; 120; 4)$  và chuyển động với vận tốc  $\vec{v}_1 = (300; 400; 3)$  (km/h). Khi đạt độ cao 10 km, máy bay ở vị trí  $B$  thì máy bay đổi vận tốc mới là  $\vec{v}_2 = (a; b; c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , để hướng đến sân bay tại điểm  $C(1\,450; 1\,520; 0)$ . Biết rằng máy bay đó đến sân bay tại vị trí  $C(1\,450; 1\,520; 0)$  vào lúc 12 giờ cùng ngày. Giả thiết máy bay đó khi bay trên từng chặng  $AB$  và  $BC$  là giữ nguyên vận tốc và hướng bay. Tìm tọa độ vectơ vận tốc  $\vec{v}_2$ .



### Lời giải.

Gọi  $t$  giờ là thời gian máy bay từ vị trí  $A(50; 120; 4)$  đến vị trí  $B(c; d; 10)$  - tại nơi máy bay đạt độ cao 10 km.

Ta có  $\vec{OA} + t\vec{v}_1 = \vec{OB} = (c; d; 10) = (50 + 300t; 120 + 400t; 4 + 3t)$ .

Suy ra  $4 + 3t = 10 \Leftrightarrow t = 2$ .

Khi đó  $B(650; 920; 10)$ .

Vậy tại thời điểm 10 giờ cùng ngày, tọa độ của máy bay ở vị trí là  $B(650; 920; 10)$ .

Vì máy bay đáp xuống sân bay  $C(1\,450; 1\,520; 0)$  vào lúc 12 giờ cùng ngày nên thời gian máy bay bay từ vị trí  $B(650; 920; 10)$  (máy bay ở độ cao 10 km) đến sân bay  $C(1\,450; 1\,520; 0)$  là 2 giờ.

Do đó  $\vec{OB} + 2\vec{v}_2 = \vec{OC} = (1\,450; 1\,520; 0)$ .

Suy ra  $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$ .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

PHẦN I.

1. C   2. A   3. A   4. D   5. A   6. C   7. C   8. B   9. A   10. C   11. D   12. A

## PHẦN II.

**Câu 1.**                      **a** Đ **b** S **c** S **d** S                      **Câu 2.**                      **a** Đ **b** S **c** S **d** Đ

### PHẦN III.

Câu 1. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| — | 3 |  |  |
|---|---|--|--|

    Câu 2. 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| — | 2 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|

    Câu 3. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 2 | 8 |  |  |
|---|---|--|--|

    Câu 4. 

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 2 | 8 |  |  |
|---|---|--|--|

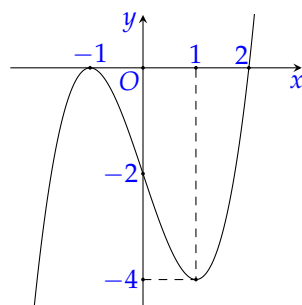
Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A.  $-1$ .B.  $1$ .C.  $2$ .D.  $-4$ .**Lời giải.**

Từ đồ thị suy ra điểm cực tiểu của hàm số  $y = f(x)$  là  $x = 1$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn  $[-1; 3]$  như sau

|         |      |     |     |     |     |
|---------|------|-----|-----|-----|-----|
| $x$     | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ |     |
| $f'(x)$ | $+$  | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$  | $0$  | $5$ | $1$ | $4$ |     |

Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định đúng là

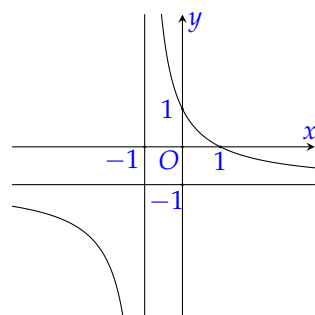
A.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$ . B.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$ . C.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$ . D.  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$ .

**Lời giải.**

Từ bảng biến thiên ta có  $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0) = 5$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng

A.  $x = 1$ .B.  $x = -1$ .C.  $y = 1$ .D.  $y = -1$ .**Lời giải.**

Từ hình vẽ suy ra đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là  $y = -1$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

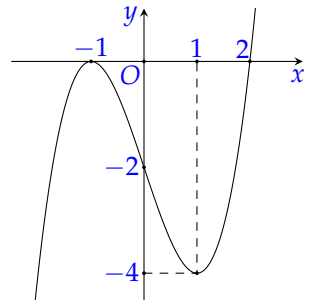
**Câu 4.** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A.  $y = x^3 - 3x + 2$ .

B.  $y = -x^3 + 3x - 2$ .

**C**  $y = x^3 - 3x - 2$ .

D.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{3}x - 2$ .



**Lời giải.**

Từ hình vẽ ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ .

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-2$  nên  $d = -2$ .

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm  $(-1; 0)$ ,  $(1; -4)$  và  $(2; 0)$ , nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b - c - 2 = 0 \\ a + b + c - 2 = -4 \\ 8a + 4b + 2c - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 8a + 4b + 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3. \end{cases}$$

Vậy đồ thị của hàm số trong hình vẽ là đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x - 2$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{k} - 3\vec{j} + 4\vec{i}$  là

A.  $(2; -3; 4)$ .

B.  $(2; 3; 4)$ .

C.  $(4; 3; 2)$ .

**D**  $(4; -3; 2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{u} = 2\vec{k} - 3\vec{j} + 4\vec{i} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Suy ra  $\vec{u} = (4; -3; 2)$ .

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{u}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ . Vectơ  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$  có tọa độ là

A.  $(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$ .

**B**  $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ .

C.  $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ .

D.  $(x_1 - x_2; y_1 + y_2; z_1 - z_2)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 7.** Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

| Nhóm   | $[a_1; a_2)$ | $[a_2; a_3)$ | $\dots$ | $[a_m; a_{m+1})$ |     |
|--------|--------------|--------------|---------|------------------|-----|
| Tần số | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_m$            | $n$ |

Biết  $n_1 \cdot n_m \neq 0$ . Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

**A**  $a_{m+1} - a_1$ .

B.  $a_{m+1} - a_m$ .

C.  $n_m - n_1$ .

D.  $n - n_m$ .

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là  $a_{m+1} - a_1$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 8.** Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho như sau:

| Nhóm             | $[a_1; a_2)$ | $[a_2; a_3)$ | $\dots$ | $[a_m; a_{m+1})$ |     |
|------------------|--------------|--------------|---------|------------------|-----|
| Giá trị đại diện | $x_1$        | $x_2$        | $\dots$ | $x_m$            |     |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_m$            | $n$ |

Gọi  $\bar{x}$  là số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó được tính bằng công thức

$$\text{A. } s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}.$$

$$\text{B. } s = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{m}}.$$

$$\text{C. } s = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}}.$$

$$\text{D. } s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{m}.$$

**Lời giải.**

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}}.$$

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 9.** Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$  và tồn tại  $a \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(a) = m$  thì

A. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $m$ .

B. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị cực tiểu bằng  $m$ .

**C** Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $m$ .

D. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị cực đại bằng  $m$ .

**Lời giải.**

Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$  và tồn tại  $a \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(a) = m$  thì hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $m$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 10.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = -t^3 + 6t^2$  với  $t$  là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động ( $t$  tính theo đơn vị giây),  $s(t)$  là quãng đường đi được trong khoảng thời gian  $t$  ( $s(t)$  tính theo đơn vị mét). Vận tốc chất điểm đạt được tại thời điểm  $t = 2$  giây là

A.  $\frac{21}{4}$  m/s.

B.  $\frac{45}{4}$  m/s.

C. 9 m/s.

**D** 12 m/s.

**Lời giải.**

Ta có  $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$ .

Suy ra  $v(2) = 12$  (m/s).

Chọn đáp án **D** ..... □

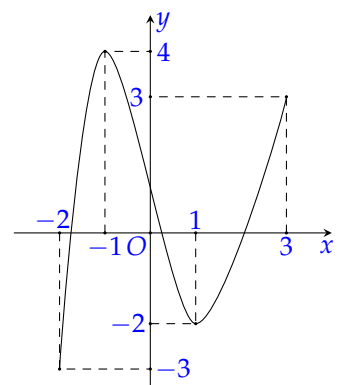
**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 3]$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-2; 3]$ . Giá trị của  $2m - 3M$  bằng

A. -13.

**B** -18.

C. -16.

D. -15.



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

- $m = \min_{[-2;3]} f(x) = f(-2) = -3.$
- $M = \max_{[-2;3]} f(x) = f(-1) = 4.$

Vậy  $2m - 3M = -18.$

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**Câu 12.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ . Độ dài vectơ  $3\vec{a} + 5\vec{b}$  bằng

- A.  $6\sqrt{2}.$                       **(B)**  $\sqrt{226}.$                       C. 16.                      D.  $\sqrt{124}.$

**Lời giải.**

Ta có  $(3\vec{a} + 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 \cdot 2^2 + 30 \cdot 3 + 25 \cdot 2^2 = 226.$

Suy ra  $|3\vec{a} + 5\vec{b}| = \sqrt{226}.$

Chọn đáp án **(B)** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

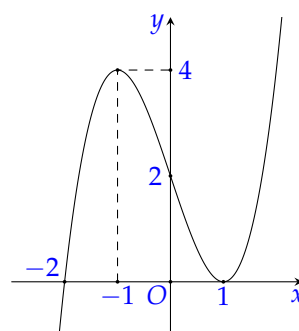
**Câu 1.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$  có đồ thị là đường cong như hình bên.

**a)** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty).$

**b)**  $y_{CD} + y_{CT} = 4.$

**c)** Giá trị biểu thức  $a + b - c + d = -6.$

**d)** Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$  có tất cả 5 đường tiệm cận đứng.



**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

**a)** **(Đ)** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty).$

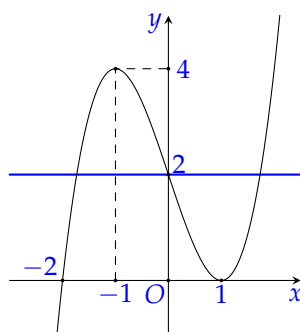
**b)** **(Đ)** Ta có  $y_{CD} + y_{CT} = 4 + 0 = 4.$

**c)** **(S)** Đồ thị hàm số đi qua 4 điểm  $A(0;2), B(1;0), C(-1;4), D(-2;0).$   
Thay tọa độ 4 điểm vào công thức hàm số ta có

$$\begin{cases} d = 2 \\ a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 4 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy  $a + b - c + d = 6.$

**d)** **(S)** Ta xét phương trình  $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2. & (2) \end{cases}$



- Phương trình (1) có nghiệm  $x_1 = -2$  (nghiệm đơn) và  $x_2 = 1$  (nghiệm kép). Suy ra

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2.$$

- Phương trình (2) có nghiệm  $x_3 = \alpha \in (-2; -1)$ ,  $x_4 = 0$  và  $x_5 = \beta > 1$ . Suy ra

$$f(x) - 2 = (x - \alpha)x(x - \beta).$$

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+2)(x-1)^2 \cdot (x-\alpha)x(x-\beta)}.$$

Vậy đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có 4 đường tiệm cận đứng là  $x = -2$ ;  $x = 0$ ;  $x = \alpha \in (-2; -1)$ ;  $x = \beta$ ,  $\beta > 1$ .

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai ..... ☐

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  và hai điểm  $N(0; -1; 2)$ ,  $P(1; 2; 3)$ .

**a**  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ .

**b** Điểm  $M$  có tọa độ là  $(2; 1; 3)$ .

**c** Vectơ  $\overrightarrow{MN}$  có tọa độ là  $(2; 0; 1)$ .

**d** Tam giác  $MNP$  có diện tích lớn hơn 3 (đvdt).

**Lời giải.**

**a)** ☒ Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ .

**b)** ☒ Vì  $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  nên  $M(2; -1; 3)$ .

**c)** ☒ Ta có  $M(2; -1; 3)$ ,  $N(0; -1; 2)$  nên  $\overrightarrow{MN} = (-2; 0; -1)$ .

**d)** ☒ Ta có

$$\bullet \overrightarrow{MN} = (-2; 0; -1) \Rightarrow MN = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

$$\bullet \overrightarrow{NP} = (1; 3; 1) \Rightarrow NP = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}.$$

$$\bullet \overrightarrow{PM} = (1; -3; 0) \Rightarrow PM = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Suy ra } p = \frac{MN + NP + PM}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{11} + \sqrt{10}}{2}.$$

Vậy diện tích tam giác  $MNP$  là

$$S = \sqrt{p(p - MN)(p - NP)(p - PM)} = \frac{\sqrt{46}}{2} > 3 \text{ (đvdt)}.$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $1 \leq x \leq 18$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi  $L(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày?

Đáp án:

**Lời giải.**

Số tiền thu về khi bán  $x$  mét vải lụa là  $220x$ . Lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa là

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500.$$

Xét hàm số  $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$  với  $x \in [1; 18]$ . Ta có

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $L(x)$ :

|         |      |       |        |   |
|---------|------|-------|--------|---|
| $x$     | 1    | 10    | 18     |   |
| $L'(x)$ |      | +     | 0      | - |
| $L(x)$  |      | 1 200 |        |   |
|         | -258 |       | -1 040 |   |

Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1 200 nghìn đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Đáp án:  ..... □

**Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta có  $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$ .

Ta xét các trường hợp sau:

TH 1:  $m = 1$ .

Ta có  $y = -x + 4$  là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó nhận  $m = 1$ .

TH 2:  $m = -1$ .

Ta có  $y = -2x^2 - x + 4$  là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó loại  $m = -1$ .

TH 3:  $m \neq \pm 1$ .

Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)(4m+2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$$

Suy ra  $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Vậy có 2 giá trị nguyên của  $m$ .

Đáp án: 2 ..... □

**Câu 3.** Ông Thanh dự định sử dụng hết  $7 \text{ m}^2$  kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu  $\text{m}^3$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Đáp án: 1 , 6 8

**Lời giải.**

Gọi chiều rộng của bể cá là  $x$ , chiều cao là  $h$ ,  $x > 0, h > 0$ .

Ông Thanh dùng hết  $7 \text{ m}^2$  kính để làm bể cá nên  $7 \text{ m}^2$  kính chính là diện tích toàn phần của bể (trừ 1 nắp) hay

$$2x^2 + 6xh = 7 \Leftrightarrow h = \frac{7 - 2x^2}{6x}.$$

Do  $x > 0$  và  $h > 0$  nên  $0 < x < \frac{\sqrt{14}}{2}$ .

Thể tích bể cá là  $V(x) = x \cdot 2x \cdot h = x \cdot 2x \cdot \frac{7 - 2x^2}{6x} = \frac{1}{3} (7x - 2x^3)$ .

Ta có  $V'(x) = \frac{1}{3} (7 - 6x^2)$ ,  $V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{42}}{6}$ .

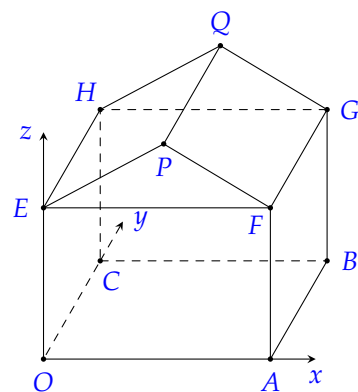
Bảng biến thiên của  $V$  như sau:

|         |   |                         |                       |
|---------|---|-------------------------|-----------------------|
| $x$     | 0 | $\frac{\sqrt{42}}{6}$   | $\frac{\sqrt{14}}{2}$ |
| $V'(x)$ | + | 0                       | -                     |
| $V(x)$  | 0 | $\frac{7\sqrt{42}}{27}$ | 0                     |

Từ bảng biến thiên suy ra bể cá có thể tích lớn nhất bằng  $\frac{7\sqrt{42}}{27} \approx 1,68 (\text{m}^3)$ .

Đáp án: 1,68 ..... □

**Câu 4.** Hình bên minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật, có tọa độ các điểm  $A(4;0;0)$ ,  $C(0;3;0)$ ,  $E(0;0;3)$  và  $P(2;0;4)$ . Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của đơn vị độ).



**Đáp án:** 2 6 , 6

**Lời giải.**

Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$ .

Do mặt phẳng  $(Ozx)$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  nên góc  $\widehat{PFE}$  là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có

- Điểm  $F \in (Oxz)$  suy ra  $F(4;0;3)$ .
- $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1)$ ,  $\overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$ .

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó,  $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$ .

Vậy góc dốc của mái nhà khoảng  $26,6^\circ$ .

Đáp án: 26,6 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $-x^4 + 2x^2 + m = 0$  có bốn nghiệm phân biệt.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ .

Tập xác định của hàm số  $y = f(x)$  là  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|         |           |     |      |     |      |     |      |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $0$  |     | $1$  |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$  | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     | $-2$ |     |      |     | $+\infty$ |
|         |           |     | $-3$ |     |      |     | $-3$ |     |           |

Mặt khác, xét phương trình  $-x^4 + 2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 2 = m - 2$ . (\*)

Khi đó, số nghiệm phương trình (\*) chính là số giao điểm của đường thẳng  $d: y = m - 2$  (cùng phương với trục hoành) và đồ thị hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ .

Do đó, dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình  $-x^4 + 2x^2 + m = 0$  có 4 nghiệm khi và chỉ khi

$$-3 < m - 2 < -2 \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Vậy  $-1 < m < 0$  thì phương trình  $-x^4 + 2x^2 + m = 0$  có bốn nghiệm thực phân biệt.

**Câu 2.** Thống kê tổng lượng khách hàng (đơn vị: người) đến cửa hàng WINMART vào tháng 8 từ năm 2000 đến 2024 đặt ở Vĩnh Phúc có kết quả như sau:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 143 | 273 | 543 | 343 | 423 |
| 584 | 296 | 477 | 403 | 202 |
| 638 | 339 | 413 | 530 | 252 |
| 303 | 243 | 524 | 614 | 414 |
| 188 | 389 | 557 | 434 | 289 |

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là  $[140; 240)$  và độ dài mỗi nhóm bằng 100. Tính khoảng tứ phân vị của bảng số liệu ghép nhóm vừa lập.

**Lời giải.**

Từ bảng thống kê ban đầu, ta lập được bảng tần số ghép nhóm như sau:

| Lượng khách hàng | $[140; 240)$ | $[240; 340)$ | $[340; 440)$ | $[440; 540)$ | $[540; 640)$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số tháng         | 3            | 7            | 7            | 3            | 5            |

Gọi  $x_1, x_2, \dots, x_{25}$  là tổng thu nhập trong năm 2024 của cửa hàng WINMART được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có

- Số năm được khảo sát (cỡ mẫu) là  $n = 3 + 7 + 7 + 3 + 5 = 25$ .
- $x_1; x_2; x_3 \in [140; 240)$ .
- $x_4; \dots; x_{10} \in [240; 340)$ .
- $x_{11}; \dots; x_{17} \in [340; 440)$ .
- $x_{18}; x_{19}; x_{20} \in [440; 540)$ .
- $x_{21}; \dots; x_{25} \in [540; 640)$ .

Khi đó

- Tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  là  $\frac{x_6 + x_7}{2} \in [240; 340)$ . Suy ra

$$Q_1 = 240 + \frac{\frac{25}{4} - 3}{7} \cdot (340 - 240) = \frac{2005}{7}.$$

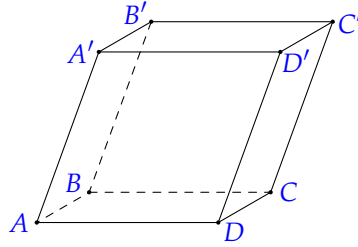
- Tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  là  $\frac{x_{19} + x_{20}}{2} \in [440; 540)$ . Suy ra

$$Q_3 = 440 + \frac{\frac{3 \cdot 25}{4} - (3 + 7 + 7)}{3} \cdot (540 - 440) = \frac{1495}{3}.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của bảng số liệu trên là  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{4450}{21}$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;0)$ ,  $B(3;0;0)$ ,  $D(0;3;0)$ ,  $D'(0;3;-3)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C'$ . Biết tọa độ vectơ  $\overrightarrow{AG} = (a; b; c)$ . Tính giá trị của biểu thức  $S = a + b + c$ .

**Lời giải.**



Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$ .

- Gọi  $C(x; y; z)$ , ta có  $\overrightarrow{DC} = (x; y - 3; z)$ .

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 0. \end{cases}$

Suy ra  $C(3; 3; 0)$ .

- Gọi  $A'(x'; y'; z')$ , ta có  $\overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$ .

Vì  $ADD'A'$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = -3. \end{cases}$

Suy ra  $A'(0; 0; -3)$ .

- Gọi  $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$ .

Vì  $ABB'A'$  là hình bình hành nên  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = -3. \end{cases}$

Suy ra  $B'(3; 0; -3)$ .

Gọi  $G(x_G; y_G; z_G)$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C$ , ta có 
$$\begin{cases} x_G = \frac{0 + 3 + 3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0 + 0 + 3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3 - 3 + 0}{3} = -2. \end{cases}$$

Suy ra  $G(2; 1; -2)$ .

Vậy  $\overrightarrow{AG} = (2; 1; -2) \Rightarrow S = a + b + c = 2 + 1 - 2 = 1$ .

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. B 2. A 3. D 4. C 5. D 6. B 7. A 8. C 9. C 10. D 11. B 12. B

### PHẦN II.

Câu 1. a Đ b Đ c S d S      Câu 2. a Đ b S c S d Đ

### PHẦN III.

Câu 1. 1 2 0 0      Câu 2. 2      Câu 3. 1 , 6 8      Câu 4. 2 6 , 6

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số **không** có cực trị là

A.  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 4}$ .    **B**  $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$ .    C.  $y = 2x^2 - x + 4$ .    D.  $y = -2x^2 + x + 5$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có  $y' = \frac{5}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$ .

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Vậy hàm số  $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$  không có cực trị.

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 2.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2x^3 - 5x^2 + 3$  trên đoạn  $[-1; 1]$ . Giá trị của tổng  $M + m$  là

A.  $-4$ .    **B**  $-1$ .    C.  $0$ .    D.  $3$ .

**Lời giải.**

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ .

Ta có  $y' = 6x^2 - 10x$ .

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = \frac{5}{3} \notin [-1; 1] \end{cases}$ .

Ta tính được  $y(0) = 3, y(1) = 0, y(-1) = -4$ .

Suy ra  $M = 3, m = -4$ .

Vậy  $M + m = -1$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 3.** Đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{1 - 4x}{2x + 1}$  có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

**A**  $x = -\frac{1}{2}$  và  $y = -2$ .    B.  $x = -\frac{1}{2}$  và  $y = \frac{1}{2}$ .    C.  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = -2$ .    D.  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.**

Tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ .

Ta có

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 4x}{2x + 1} = -2$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x}{2x + 1} = -2$ .

Suy ra  $y = -2$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{1-4x}{2x+1} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{1-4x}{2x+1} = +\infty.$$

Suy ra  $x = -\frac{1}{2}$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận là  $y = -2$  và  $x = -\frac{1}{2}$ .

Chọn đáp án **(A)** .....  $\square$

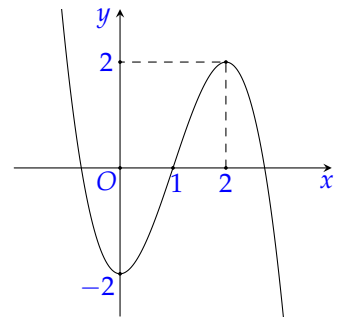
**Câu 4.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

**A.**  $y = x^3 - 3x - 2$ .

**B.**  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ .

**C.**  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .

**D.**  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .



**Lời giải.**

Gọi hàm số cần tìm là  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ .

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-2$  nên  $d = -2$ .

Ta có  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0$  nên  $y'(0) = c = 0$ .

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$  nên  $y'(2) = 12a + 4b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a$ .

Vậy hàm số cần tìm là  $y = ax^3 - 3ax^2 - 2$ .

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(1; 0)$  nên  $0 = a - 3a - 2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3$ .

Vậy  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .

Chọn đáp án **(C)** .....  $\square$

**Câu 5.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Trong các khẳng định bên dưới, khẳng định đúng là

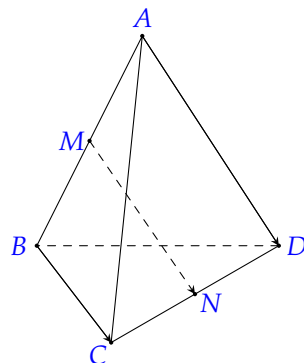
**A.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ .

**B.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ .

**C.**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$ .

**D.**  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải.**



Ta có

$$\bullet \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

•  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ .

Do đó

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$

Vậy  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (3; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (1; 4; -2)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$  là

- A.  $\vec{c} = (5; -9; 6)$ .      **(B)**  $\vec{c} = (1; -9; 6)$ .      C.  $\vec{c} = (1; 9; 6)$ .      D.  $\vec{c} = (5; -9; -6)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = (3 - 2 \cdot 1; -1 - 2 \cdot 4; 2 - 2 \cdot (-2)) = (1; -9; 6)$ .

Vậy  $\vec{c} = (1; -9; 6)$ .

Chọn đáp án **(B)** ..... □

**Câu 7.** Bạn An rất thích tập thể dục nhịp điệu. Thời gian tập mỗi ngày (đơn vị: phút) trong thời gian gần đây của bạn An được thống kê ở bảng sau:

|           |          |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Thời gian | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) |
| Số ngày   | 5        | 6        | 4        | 2        | 1        |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- (A)**  $R = 25$ .      B.  $R = 20$ .      C.  $R = 15$ .      D.  $R = 30$ .

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là  $R = 40 - 15 = 25$ .

Chọn đáp án **(A)** ..... □

**Câu 8.** Mỗi ngày bác Nam đều chạy bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Nam trong 30 ngày được thống kê ở bảng sau:

|             |            |            |            |            |            |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Quãng đường | [2,5; 3,0) | [3,0; 3,5) | [3,5; 4,0) | [4,0; 4,5) | [4,5; 5,0) |
| Số ngày     | 7          | 7          | 8          | 5          | 3          |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) là

- A.  $s^2 = 0,6$ .      B.  $s^2 = 0,5$ .      **(C)**  $s^2 = 0,4$ .      D.  $s^2 = 0,3$ .

**Lời giải.**

|                  |            |            |            |            |            |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Quãng đường      | [2,5; 3,0) | [3,0; 3,5) | [3,5; 4,0) | [4,0; 4,5) | [4,5; 5,0) |
| Giá trị đại diện | 2,75       | 3,25       | 3,75       | 4,25       | 4,75       |
| Số ngày          | 7          | 7          | 8          | 5          | 3          |

Giá trị trung bình

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + n_5x_5) \\ &= \frac{1}{30}(7 \cdot 2,75 + 7 \cdot 3,25 + 8 \cdot 3,75 + 5 \cdot 4,25 + 3 \cdot 4,75) \\ &= \frac{43}{12}.\end{aligned}$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2 + n_4x_4^2 + n_5x_5^2) - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{30} (7 \cdot 2,75^2 + 7 \cdot 3,25^2 + 8 \cdot 3,75^2 + 5 \cdot 4,25^2 + 3 \cdot 4,75^2) - \left(\frac{43}{12}\right)^2 \approx 0,4.$$

Vậy phương sai của mẫu số liệu là  $s^2 \approx 0,4$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^3 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Trong các khẳng định bên dưới, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ . **B** Hàm số đồng biến trên  $(2; +\infty)$ .  
C. Hàm số đồng biến trên  $(-2; 2)$ . D. Hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = x^3 - 4x$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

|         |           |      |     |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ |     |     | $0$ | $2$ |     |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 10.** Trong các hàm số bên dưới, hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  là

- A.  $y = -2x^3 + 6x + 3$ . B.  $y = x^3 + 4x$ . **C**  $y = -2x^3 - x$ . D.  $y = -x^3 - 4x^2$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $y = -2x^3 - x$ .

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = -6x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy hàm số  $y = -2x^3 - x$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 11.** Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+3}{x^2-9}$  là

- A. 2. B. 1. **C** 3. D. 0.

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ .

Ta có

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x^2-9} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2-9} = 0. \end{cases}$$

Suy ra  $y = 0$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} y = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+3}{x^2-9} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x+3}{x^2-9} = +\infty. \end{cases}$$

Suy ra  $x = -3$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+3}{x^2-9} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+3}{x^2-9} = +\infty. \end{cases}$$

Suy ra  $x = 3$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận gồm hai tiệm cận đứng là  $x = 3, x = -3$  và một tiệm cận ngang  $y = 0$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; -2; 3)$  và  $B(1; -1; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ , tọa độ của  $M$  là

A.  $M\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{15}{4}\right)$ .      B.  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .      **C**  $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$ .      D.  $M(3; -1; 9)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M(x_M; y_M; z_M)$ .

Do đó  $\overrightarrow{MA} = (-x_M; -2 - y_M; 3 - z_M)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (1 - x_M; -1 - y_M; 4 - z_M)$ .

Theo giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_M = 3(1 - x_M) \\ -2 - y_M = 3(-1 - y_M) \\ 3 - z_M = 3(4 - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = -\frac{1}{2} \\ z_M = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Vậy  $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao  $h$  của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm  $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ , với  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $h$  là độ cao tính bằng kilômét.

(Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016)

**a** Vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm  $t$  (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm được xác định bởi  $v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$  ( $0 \leq t \leq 50$ ).

**b** Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm  $t = 25$  (giây) là 6,25 km/s.

c) Tại thời điểm  $t = 25$  (giây), vận tốc tức thời của con tàu tiếp tục giảm.

d) Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt Mặt Trăng là 10 km.

**Lời giải.**

a) **D** Vận tốc tức thời của con tàu  $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30, \forall t \in [0; 50]$ .

b) **D** Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm  $t = 25$  (giây) là

$$v(25) = -0,03 \cdot 25^2 + 2,2 \cdot 25 - 30 = 6,25.$$

- c) **S** Xét hàm số  $v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30, \forall t \in [0; 50]$ .  
Ta có  $v'(t) = -0,06t + 2,2, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{110}{3} \in [0; 50]$ .

Bảng biến thiên của  $v(t)$  như hình bên dưới

|         |   |    |                 |    |
|---------|---|----|-----------------|----|
| $t$     | 0 | 25 | $\frac{110}{3}$ | 50 |
| $v'(t)$ |   | +  | 0               | -  |
| $v(t)$  |   |    |                 |    |

Vậy tại thời điểm  $t = 25$  s thì vận tốc của con tàu đang tăng.

- d) **S** Xét hàm số  $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250, \forall t \in [0; 50]$ .  
Ta có  $h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30, h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 18,11 \in [0; 50] \\ t \approx 55,23 \notin [0; 50] \end{cases}$ .

Bảng biến thiên  $h(t)$  như hình bên dưới

|         |     |       |      |     |
|---------|-----|-------|------|-----|
| $t$     | 0   | 18,11 | 50   |     |
| $h'(t)$ |     | -     | 0    | +   |
| $h(t)$  | 250 |       | 8,07 | 250 |

The diagram illustrates the function  $h(t)$  and its derivative  $h'(t)$  over the interval  $t \in [0, 50]$ . The function  $h(t)$  starts at 250 at  $t=0$ , decreases to a minimum of 8,07 at  $t=18,11$ , and then increases back to 250 at  $t=50$ . The derivative  $h'(t)$  is negative for  $t < 18,11$ , zero at  $t=18,11$ , and positive for  $t > 18,11$ .

Vậy con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt Mặt Trăng là  $8,07$  km.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai ..... ☐

**Câu 2.** Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12 được cho ở bảng sau:

| Điểm | [6,5;7) | [7;7,5) | [7,5;8) | [8;8,5) | [8,5;9) | [9;9,5) | [9,5;10) |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 12A  | 3       | 6       | 12      | 10      | 8       | 1       | 2        |
| 12B  | 8       | 10      | 6       | 5       | 4       | 7       | 4        |

- a) Một của bảng số liệu ghép nhóm thuộc nhóm  $[7,5;8)$ .  
b) Lớp 12B có nhiều học sinh đạt điểm trung bình thuộc nhóm  $[7;7,5)$  hơn so với lớp 12A.  
c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với lớp 12A là 3,5.  
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với lớp 12A là 1,5.

**Lời giải.**

- a) **Đ** Ta thấy trong lớp 12A, khoảng điểm  $[7,5;8)$  có số lượng học sinh là 12, nhiều nhất so với các khoảng điểm khác.  
Vậy một của bảng số liệu ghép nhóm thuộc nhóm  $[7,5;8)$ .  
b) **Đ** Theo bảng, lớp 12A có 6 học sinh đạt điểm thuộc nhóm  $[7;7,5)$ , lớp 12B có 10 học sinh đạt điểm trong khoảng này.  
Vậy lớp 12B có nhiều học sinh đạt điểm trung bình thuộc nhóm  $[7;7,5)$  hơn so với lớp 12A.  
c) **Đ** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với lớp 12A là  $R = 10 - 6,5 = 3,5$ .  
d) **S** Cỡ mẫu  $n = 42$ .  
Gọi  $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{42}$  là điểm trung bình môn Toán của học sinh lớp 12A được xếp theo thứ

tự không giảm.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là  $x_{11} \in [7,5; 8)$ . Do đó

$$Q_1 = 7,5 + \frac{\frac{42}{4} - 9}{12} \cdot (8 - 7,5) = \frac{121}{16}.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là  $x_{32} \in [8,5; 9)$ . Do đó

$$Q_3 = 8,5 + \frac{\frac{3 \cdot 42}{4} - 31}{8} \cdot (9 - 8,5) = \frac{273}{32}.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{31}{32} \approx 0,97$ .

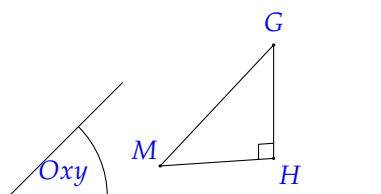
Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 2; 5)$ ,  $B(2; 4; -3)$ ,  $C(3; 3; 1)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $M$  là điểm thay đổi trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Độ dài  $GM$  ngắn nhất bằng bao nhiêu?

Đáp án:

**Lời giải.**



Ta có  $G\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{2+4+3}{3}; \frac{5-3+1}{3}\right) = (2; 3; 1)$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $G$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ , suy ra  $H(2; 3; 0)$ .

Khi đó, ta có  $GM \geq GH = 1$ .

Vậy  $GM_{\min} = 1$  khi và chỉ khi  $M \equiv H(2; 3; 0)$ .

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đạt cực trị tại điểm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 \in (-1; 0)$ ,  $x_2 \in (1; 2)$ . Biết hàm số đồng biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ . Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số  $a, b, c$  và  $d$  có bao nhiêu số âm?

Đáp án:

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên có  $d < 0$ .

Do hàm số đạt cực trị tại các điểm  $x_1, x_2$  nên  $a \neq 0$ .

Suy ra  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ .

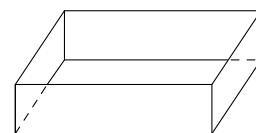
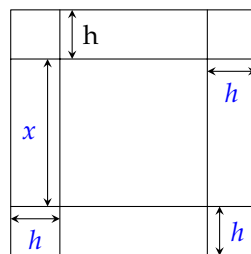
Ta lại có hàm số đồng biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$  nên  $a < 0$ .

$$\text{Vì } x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2) \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0. \end{cases}$$

Vậy trong các hệ số  $a, b, c, d$  ta có 2 hệ số âm.

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 3.** Một hộp chữ nhật không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là hình vuông cạnh  $x$  (cm), chiều cao là  $h$  (cm) và thể tích là  $4\,000\text{ cm}^3$ . Tìm độ dài cạnh hình vuông  $x$  sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Đáp án:

**Lời giải.**

Thể tích khối hộp  $V = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h = 4\,000 \Rightarrow h = \frac{4\,000}{x^2}$ .

Để chiếc hộp làm ra ít tốn bìa các tông nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất. Diện tích toàn phần của hộp (không nắp) là

$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{đáy}} + S_{\text{xung quanh}} = x^2 + 4x \cdot \frac{4\,000}{x^2} = x^2 + \frac{16\,000}{x}.$$

Xét hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{16\,000}{x}$  với  $x > 0$ .

Ta có  $f'(x) = 2x - \frac{16\,000}{x^2}$  với  $x > 0$ .

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{16\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 20$ .

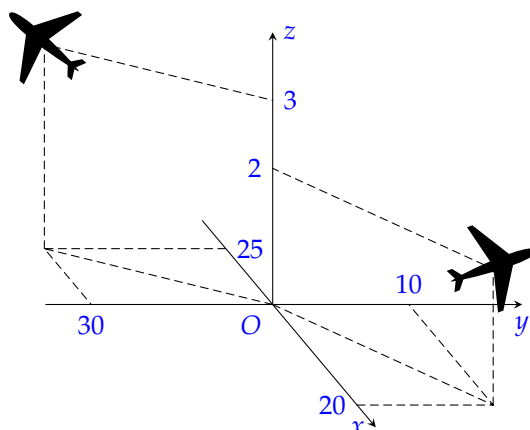
Bảng biến thiên:

|         |           |    |           |           |
|---------|-----------|----|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | 20 | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ |           | –  | 0         | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |    | $f(20)$   | $+\infty$ |

Vậy độ dài cạnh hình vuông là  $x = 20$  cm thì chiếc hộp làm ra ít tốn bìa các tông nhất.

Đáp án:  ..... ☐

**Câu 4.** Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên từ một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát về phía bắc  $20$  km và về phía tây  $10$  km, đồng thời cách mặt đất  $2$  km. Chiếc thứ hai cách điểm xuất phát về phía đông  $30$  km và về phía nam  $25$  km, đồng thời cách mặt đất  $3$  km. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía bắc, trục  $Oy$  hướng về phía tây và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Sau thời gian bay nêu trên, hai máy bay đó cùng bắn một mục tiêu di động trên mặt đất. Biết tổng khoảng cách từ mỗi máy bay đến mục tiêu là nhỏ nhất. Khoảng cách từ mục tiêu đó đến điểm xuất phát của hai máy bay bằng bao nhiêu km (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Đáp án: 6 , 3

### Lời giải.

Sau thời gian bay nêu trên, máy bay thứ nhất ở vị trí  $A(20;10;2)$  và máy bay thứ hai ở vị trí  $B(-25;-30;3)$ .

Mục tiêu ở trên mặt đất thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Do đó ta gọi tọa độ của mục tiêu là  $X(x;y;0)$ .

Gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $(Oxy)$  nên  $B'(-25;-30;-3)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AX} = (x-20; y-10; -2)$ ,  $\overrightarrow{AB'} = (-45; -40; -5)$ .

Tổng khoảng cách từ mỗi máy bay đến mục tiêu là  $AX + XB'$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $A, X, B'$  thẳng hàng.

Khi đó, ta có

$$\frac{x-20}{-45} = \frac{y-10}{-40} = \frac{-2}{-5} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-20}{-45} = \frac{-2}{-5} \\ \frac{y-10}{-40} = \frac{-2}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6. \end{cases}$$

Suy ra tọa độ mục tiêu trên mặt đất là  $X(2;-6;0)$ .

Vậy khoảng cách từ mục tiêu tới vị trí xuất phát của hai máy bay là

$$OX = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 0^2} = 2\sqrt{10} \approx 6,3 \text{ (km)}.$$

Đáp án: 6,3 ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi hai điểm cực trị của  $(C)$  là  $A, B$ .

Tính khoảng cách từ gốc tọa độ  $O(0;0)$  đến đường thẳng  $AB$ .

### Lời giải.

Tập xác định của hàm số  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Ta có  $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 5. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |     |     |     |           |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $0$ | $-$ | $0$       | $+$       |
| $f(x)$  |           |     | $1$ |     | $+\infty$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |     |     | $5$ |           |           |

Nên đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là  $A(0;1)$  và  $B(2;5)$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A(0;1), B(2;5)$  có phương trình là

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0.$$

$$\text{Khoảng cách } d(O, d) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

**Câu 2.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu  $\text{cm}^2$ ?

**Lời giải.**

Nửa chu vi hình chữ nhật là 8 cm.

Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là  $x$  (cm),  $8 - x$  (cm) với  $x \in (0; 8)$ .

Diện tích hình chữ nhật là  $S = x(8 - x) = -x^2 + 8x$ .

Xét hàm số  $f(x) = -x^2 + 8x, \forall x \in (0; 8)$ .

Ta có  $f'(x) = -2x + 8, \forall x \in (0; 8)$ .

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in (0; 8)$ .

Bảng biến thiên

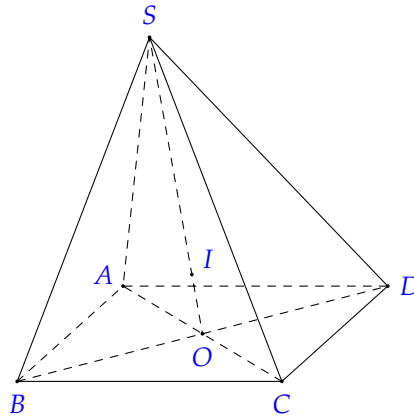
|         |   |    |   |   |
|---------|---|----|---|---|
| $x$     | 0 | 4  | 8 |   |
| $f'(x)$ |   | +  | 0 | - |
| $f(x)$  | 0 | 16 | 0 |   |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất là 16 tại  $x = 4$ .

Vậy diện tích lớn nhất là  $16 \text{ cm}^2$ .

**Câu 3.** Trong không gian, cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thay đổi trên  $SO$ . Tính tỉ số  $\frac{SM}{SO}$  khi giá trị của  $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  nhỏ nhất.

**Lời giải.**



Gọi  $I$  là điểm thỏa mãn  $\vec{SI} = 4\vec{IO}$ .

Do đó

$$\begin{aligned}
 P &= (\vec{MI} + \vec{IS})^2 + (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 + (\vec{MI} + \vec{ID})^2 \\
 &= 5\vec{MI}^2 + \vec{IS}^2 + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 + \vec{IC}^2 + \vec{ID}^2 + 2\vec{MI}(\vec{IS} + \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}) \\
 &= 5\vec{MI}^2 + \vec{IS}^2 + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 + \vec{IC}^2 + \vec{ID}^2 + 2\vec{MI}(\vec{IS} + 4\vec{IO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) \\
 &= 5\vec{MI}^2 + \vec{IS}^2 + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 + \vec{IC}^2 + \vec{ID}^2.
 \end{aligned}$$

Vậy  $P_{\min}$  khi  $M$  trùng  $I$  nên  $\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SO} = \frac{4}{5}$ .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

PHẦN I.

1. B   2. B   3. A   4. C   5. B   6. B   7. A   8. C   9. B   10. C   11. C   12. C

## PHẦN II.

**Câu 1.**

a Đ b Đ c S d S

**Câu 2.**

a Đ b Đ c Đ d S

### PHẦN III.

Câu 1.          Câu 2.          Câu 3.          Câu 4.

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Mã đề: 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | $1$       |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | + |           | + |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ |   | $+\infty$ |   | $+\infty$ |

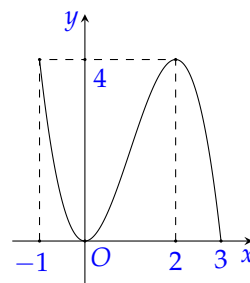
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

**A**  $(-\infty; 1)$ .**B**  $(0; +\infty)$ .**C**  $(-\infty; +\infty)$ .**D**  $(-\infty; 2)$ .**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 1)$  nên hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$  có đồ thị là đường cong ở trong hình bên. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[-1; 3]$ . Hiệu số  $M - m$  bằng

**A** 4.**B** 3.**C** 2.**D** 6.**Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$  ta có

- Hàm số có giá trị lớn nhất  $M = 4$  tại điểm  $x = -1$  và  $x = 2$ ;
- Hàm số có giá trị nhỏ nhất  $m = 0$  tại điểm  $x = 0$  và  $x = 3$ .

Vậy  $M - m = 4$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 3.** Đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

**A**  $y = x^3 - 3x + 1$ .**B**  $y = 2x + \frac{2}{x-1}$ .**C**  $y = \frac{x}{x^2+1}$ .**D**  $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ .**Lời giải.**

Ta có

- Các hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  và  $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$  là hàm số đa thức nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

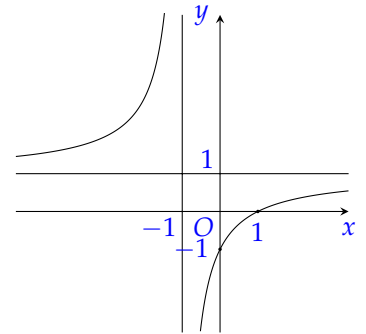
- Hàm số  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  nên đồ thị không có tiệm cận đứng.
- Với hàm số  $y = 2x + \frac{2}{x-1}$ , ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$  nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = 1$ .

Vậy đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = 2x + \frac{2}{x-1}$ .

Chọn đáp án **B** ..... □

**Câu 4.** Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị là đường cong gồm hai nhánh phân biệt như hình vẽ bên?

- A.  $y = x^3 - 1$ . B.  $y = x + \frac{1}{x}$ .  
**C**  $y = \frac{x-1}{x+1}$ . D.  $y = -x^3 + 3x - 1$ .



**Lời giải.**

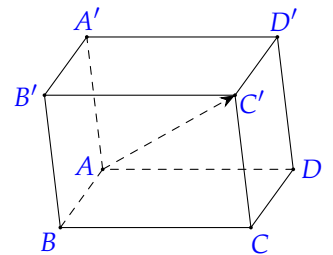
Đồ thị hàm số trong hình vẽ là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $(ad-bc \neq 0)$ .

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Vectơ  $\overrightarrow{AC'}$  là kết quả của phép tính tổng nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ . B.  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'}$ .  
**C**  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ . D.  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'C'}$ .



**Lời giải.**

Do  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp nên theo quy tắc hình hộp, ta có  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'}$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(5;6;4)$ . Gọi  $M_1$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên trục  $Oy$ , tọa độ điểm  $M_1$  bằng

- A.  $(0; -6; 0)$ . B.  $(5; 0; 4)$ . **C**  $(0; 6; 0)$ . D.  $(5; 6; 0)$ .

**Lời giải.**

Hình chiếu vuông góc của  $M(x_0; y_0; z_0)$  trên trục tung là điểm  $M_1(0; y_0; 0)$ .

Vì  $M(5; 6; 4)$  nên  $M_1(0; 6; 0)$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 7.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

| Nhóm   | [40; 47) | [47; 54) | [54; 61) | [61; 68) | [68; 75) |          |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Tần số | 1        | 6        | 21       | 21       | 11       | $n = 60$ |

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho bằng

- A. 7. B. 60. **C** 35. D. 20.

**Lời giải.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là  $R = 75 - 40 = 35$ .

Chọn đáp án **C** ..... □

**Câu 8.** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

| Độ dài quãng đường | [50; 100) | [100; 150) | [150; 200) | [200; 250) | [250; 300) |          |
|--------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|----------|
| Giá trị trung bình | 75        | 125        | 175        | 225        | 275        |          |
| Số ngày            | 5         | 10         | 9          | 4          | 2          | $n = 30$ |

Phương sai của mẫu số liệu trên được thực hiện bởi phép tính nào sau đây?

A.  $s^2 = 155$ .

B.  $s^2 = \frac{(75 - 155)^2 + (125 - 155)^2 + (175 - 155)^2 + (225 - 155)^2 + (275 - 155)^2}{30}$ .

C.  $s^2 = 5(75 - 155)^2 + 10(125 - 155)^2 + 9(175 - 155)^2 + 4(225 - 155)^2 + 2(275 - 155)^2$ .

**D.**  $s^2 = \frac{5(75 - 155)^2 + 10(125 - 155)^2 + 9(175 - 155)^2 + 4(225 - 155)^2 + 2(275 - 155)^2}{30}$ .

**Lời giải.**

Số trung bình  $\bar{x} = \frac{5 \cdot 75 + 10 \cdot 125 + 9 \cdot 175 + 4 \cdot 225 + 2 \cdot 275}{30} = 155$ .

Phương sai của mẫu số liệu trên được thực hiện bởi phép tính

$$s^2 = \frac{5(75 - 155)^2 + 10(125 - 155)^2 + 9(175 - 155)^2 + 4(225 - 155)^2 + 2(275 - 155)^2}{30}.$$

Chọn đáp án **D** ..... □

**Câu 9.** Hàm số  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A**  $(0; 2)$ .

B.  $(-\infty; -2)$ .

C.  $(-2; 2)$ .

D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Lời giải.**

Tập xác định:  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ta có  $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ .

Xét  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$

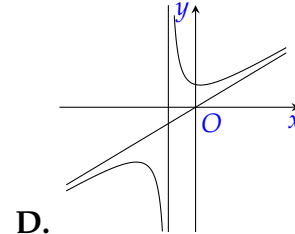
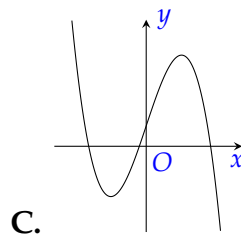
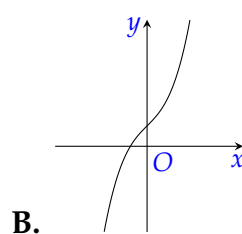
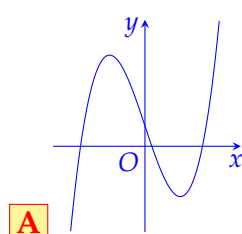
Bảng biến thiên

|         |           |      |           |     |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$       | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-4$ | $+\infty$ | $4$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

Chọn đáp án **A** ..... □

**Câu 10.** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 1$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ nào dưới đây?



**Lời giải.**

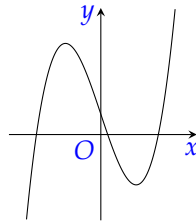
Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 1$  là hàm số bậc ba, có  $y' = x^2 - 3$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|         |           |               |               |           |     |
|---------|-----------|---------------|---------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$   | $\sqrt{3}$    | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$           | $-$           | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $1+2\sqrt{3}$ | $1-2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |     |

Vậy đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 1$  là



Chọn đáp án **A** .....  $\square$

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$ . Biết rằng  $\min_{(4; +\infty)} f(x) = b$  tại  $x = a$ . Tỉ số  $\frac{b}{a}$  bằng

**A** 1,6.

**B** 2.

**C** 1,7.

**D** 1,3.

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 4) - (x^2 - 2x - 7)}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2}$ .

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \in (4; +\infty) \\ x = 3 \notin (4; +\infty) \end{cases}$ .

Bảng biến thiên

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | 4         | 5 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 8 | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có  $\min_{(4; +\infty)} f(x) = 8$  tại  $x = 5$  suy ra  $a = 5$  và  $b = 8$ .

Vậy  $\frac{b}{a} = 1,6$ .

Chọn đáp án **A** .....  $\square$

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn vectơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ ,  $\vec{c} = (2; 2; 0)$  và  $\vec{d} = 4\vec{j}$ . Vectơ có độ dài ngắn nhất là

A.  $\vec{a}$ .

**B.  $\vec{b}$ .**

C.  $\vec{c}$ .

D.  $\vec{d}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6};$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8};$$

$$|\vec{d}| = 4|\vec{j}| = 4 \cdot 1 = 4.$$

Vậy  $\vec{b}$  có độ dài ngắn nhất.

Chọn đáp án **B** .....  $\square$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ .

a) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $y = -1$  là tiệm cận đứng.

**b** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -4)$ .

**c** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 2025]$  là  $-1$ .

d) Biết đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị lần lượt là  $M, N$ . Đường thẳng đi qua hai điểm  $M, N$  trên có phương trình là  $y = 3x - 4$ .

**Lời giải.**

Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|      |           |      |      |           |           |      |           |
|------|-----------|------|------|-----------|-----------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$       | $+\infty$ |      |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$  | $-$       | $0$       | $+$  |           |
| $y$  |           |      | $-9$ |           | $+\infty$ |      | $+\infty$ |
|      | $-\infty$ |      |      | $-\infty$ |           | $-1$ |           |

a) **S** Ta có  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ .

Vậy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -1$ .

b) **Đ** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(1; +\infty)$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -4)$ .

c) **Đ** Trên đoạn  $[0; 2025]$ , hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $-1$  tại  $x = 1$ .

d) **S** Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị lần lượt là  $M(-3; -9)$  và  $N(1; -1)$ .

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm  $M(-3; -9), N(1; -1)$  là  $d: y = ax + b$ .

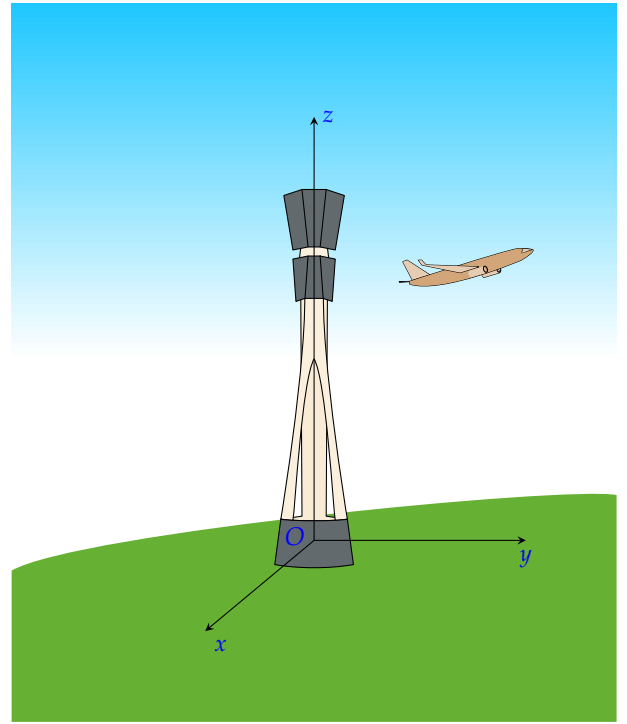
Khi đó, ta có

$$\begin{cases} -3a + b = -9 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3. \end{cases}$$

Vậy  $d: y = 2x - 3$ .

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ..... ☐

**Câu 2.** Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất sao cho trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên phía trên (Hình vẽ) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí  $A$  cách mặt đất 10 km, cách 80 km về phía đông và 100 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.



- a) Radar ở vị trí có tọa độ  $(0;0;0)$ .  
 b) Vị trí  $A$  có tọa độ  $(80;100;10)$ .  
 c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 128,45 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).  
 d) Biết máy bay di chuyển từ điểm  $A$  đến điểm  $B(-200;-200;15)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 24 phút bay kể từ điểm  $A$  radar không còn phát hiện được máy bay.

**Lời giải.**

- a) ☒ Theo giả thiết, radar ở vị trí có tọa độ  $(0;0;0,08)$ .  
 b) ☒ Vị trí điểm  $A(-80;-100;10)$ .  
 c) ☒ Gọi  $M$  là vị trí của radar. Khoảng cách từ máy bay đến radar là

$$MA = \sqrt{(-80 - 0)^2 + (-100 - 0)^2 + (10 - 0,08)^2} \approx 128,45 \text{ (km)}.$$

- d) ☒ Gọi  $N(x;y;z)$  là tọa độ của máy bay sau 24 phút bay từ  $A$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-120;-100;5)$ ;  $\overrightarrow{AN} = (x+80;y+100;z-10)$ .

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AN}$  cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc nên

$$\overrightarrow{AN} = \frac{24}{10} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+80 = \frac{24}{10} \cdot (-120) \\ y+100 = \frac{24}{10} \cdot (-100) \\ z-10 = \frac{24}{10} \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -368 \\ y = -340 \\ z = 22. \end{cases}$$

Suy ra  $N(-368;-340;22)$ . Khi đó, ta có

$$MN = \sqrt{(-368 - 0)^2 + (-340 - 0)^2 + (22 - 0,08)^2} \approx 501,5 \text{ (km)}.$$

Do radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp và  $MN > 500$  nên sau 24 phút radar không còn phát hiện được máy bay.

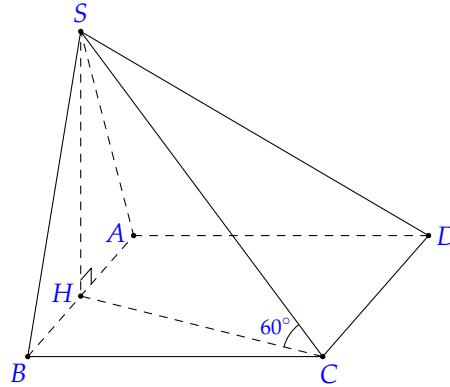
Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d đúng ..... ☐

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4.

**Câu 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Hình chiếu vuông góc  $H$  của đỉnh  $S$  trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh  $AB$ , góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng đáy bằng  $60^\circ$ . Tính cosin góc giữa hai vectơ  $\vec{SB}$  và  $\vec{AC}$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án:

**Lời giải.**



Ta có  $(SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \widehat{SCH} = 60^\circ$ .

Xét

$$\begin{aligned}\vec{SB} \cdot \vec{AC} &= (\vec{SH} + \vec{HB}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \vec{SH} \cdot \vec{AB} + \vec{SH} \cdot \vec{BC} + \vec{HB} \cdot \vec{AB} + \vec{HB} \cdot \vec{BC} \\ &= 0 + 0 + \vec{HB} \cdot \vec{AB} + 0 \\ &= \frac{1}{2}AB^2 = 2a^2.\end{aligned}$$

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ ;
- $CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ ;
- $SH = CH \cdot \tan \widehat{SCH} = a\sqrt{6}$ ;
- $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 + a^2} = a\sqrt{7}$ .

Vậy  $\cos(\vec{SB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{SB} \cdot \vec{AC}}{SB \cdot AC} = \frac{2a^2}{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{35}} \approx 0,3$ .

Đáp án:  .....

**Câu 2.** Khảo sát tuổi thọ của một loại bóng đèn của một dây chuyền được cho ở bảng sau:

| Tuổi thọ (tháng) | [24; 27) | [27; 30) | [30; 33) | [33; 36) | [36; 39) |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số bóng đèn      | 4        | 8        | 10       | 6        | 2        | $n = 30$ |

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án:

**Lời giải.**

Ta có bảng tính giá trị đại diện như sau:

| Tuổi thọ (tháng) | [24; 27) | [27; 30) | [30; 33) | [33; 36) | [36; 39) |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Giá trị đại diện | 25,5     | 28,5     | 31,5     | 34,5     | 37,5     |          |
| Số bóng đèn      | 4        | 8        | 10       | 6        | 2        | $n = 30$ |

Tuổi thọ trung bình của bóng đèn là

$$\bar{x} = \frac{25,5 \cdot 4 + 28,5 \cdot 8 + 31,5 \cdot 10 + 34,5 \cdot 6 + 37,5 \cdot 2}{30} = 30,9.$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{1}{30} (25,5^2 \cdot 4 + 28,5^2 \cdot 8 + 31,5^2 \cdot 10 + 34,5^2 \cdot 6 + 37,5^2 \cdot 2) - 30,9^2 = 11,04.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là  $s = \sqrt{11,04} \approx 3,32$ .

Đáp án: 3,32 ..... □

**Câu 3.** Một công ty sản xuất đồ chơi dự tính sản xuất một loại đồ chơi mới cho trẻ em. Biết rằng hàm chi phí trung bình cho mỗi đồ chơi của công ty là  $f(x) = 2x + 140 + \frac{1800}{x}$ , trong đó  $x$  ( $x > 0$ ) là số lượng đồ chơi được sản xuất. Hỏi công ty phải sản xuất bao nhiêu đồ chơi để chi phí trung bình mỗi sản phẩm là thấp nhất?

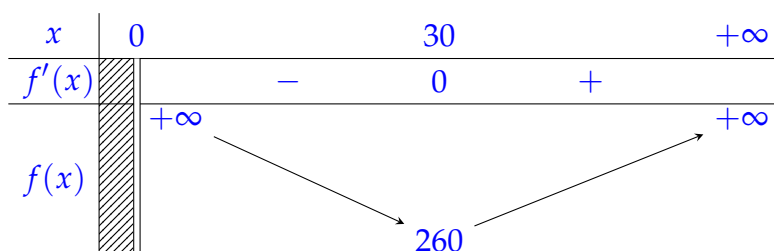
Đáp án: 3 0

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = 2 - \frac{1800}{x^2}$ .

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1800}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 30 & (\text{nhận}) \\ x = -30 & (\text{loại}). \end{cases}$$

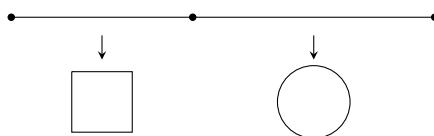
Bảng biến thiên:



Vậy, công ty cần sản xuất 30 sản phẩm để chi phí trung bình mỗi sản phẩm là thấp nhất.

Đáp án: 30 ..... □

**Câu 4.** Một sợi dây đồng dài 60 dm được cắt thành hai đoạn.



Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh  $a$ , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính  $r$ . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì  $a + r$  bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Đáp án: 1 2 , 6

**Lời giải.**

- Chu vi hình vuông là  $4a$  (dm);
- Chu vi đường tròn là  $2\pi r$  (dm);
- Diện tích hình vuông  $a^2$  (dm<sup>2</sup>);
- Diện tích hình tròn là  $r^2\pi$  (dm<sup>2</sup>).

Theo đề ta có

$$4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow \pi r = 30 - 2a \Leftrightarrow r = \frac{30 - 2a}{\pi}.$$

Điều kiện  $0 < 4a < 60 \Leftrightarrow 0 < a < 15$ .

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là

$$S = a^2 + r^2\pi = a^2 + \left(\frac{30-2a}{\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{\pi} \left[ (\pi+4)a^2 - 120a + 900 \right].$$

Xét  $f(a) = (\pi+4)a^2 - 120a + 900$  với  $a \in (0; 15)$ .

Ta có  $f'(a) = 2(\pi+4)a - 120$ .

Cho  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{60}{\pi+4}$ .

Bảng biến thiên:

|         |     |                        |          |   |
|---------|-----|------------------------|----------|---|
| $a$     | 0   | $\frac{60}{\pi+4}$     | 15       |   |
| $f'(a)$ |     | -                      | 0        | + |
| $f(a)$  | 900 | $\frac{900\pi}{\pi+4}$ | $225\pi$ |   |

$S = \frac{1}{\pi}f(a)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $a = \frac{60}{\pi+4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi+4}$ .

Khi đó  $a + r = \frac{60}{\pi+4} + \frac{30}{\pi+4} = \frac{90}{\pi+4} \approx 12,6$ .

Đáp án: **12,6** ..... □

**PHẦN IV. Câu hỏi tự luận.** Thí sinh trình bày bài giải từ câu 1 đến câu 3.

**Câu 1.** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một thời gian nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{10+4e^{-t}}{1+4e^{-t}}$ ,  $t \geq 0$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng ngày, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ bán hàng.

- Tìm hàm số biểu thị tốc độ bán hàng.
- Tìm thời gian kể từ khi phát hành sản phẩm tốc độ bán hàng đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải.**

- Hàm số biểu thị tốc độ bán hàng

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(10+4e^{-t})'(1+4e^{-t}) - (10+4e^{-t})(1+4e^{-t})'}{(1+4e^{-t})^2} \\ &= \frac{(-4e^{-t})(1+4e^{-t}) - (10+4e^{-t})(-4e^{-t})}{(1+4e^{-t})^2} \\ &= \frac{36e^{-t}}{(1+4e^{-t})^2}. \end{aligned}$$

- Đặt  $v(t) = f'(t) = \frac{36e^{-t}}{(1+4e^{-t})^2}$  là hàm biểu thị tốc độ bán hàng là

$$v'(t) = \frac{36(4e^{-t}-1)e^{-t}}{(1+4e^{-t})^3}.$$

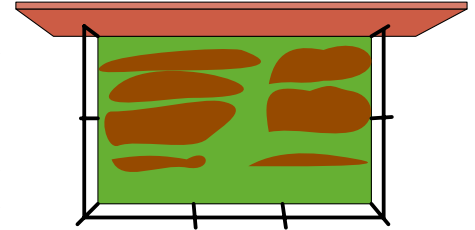
Cho  $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 4e^{-t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \ln 4$ .

Bảng biến thiên

|         |                 |               |           |   |
|---------|-----------------|---------------|-----------|---|
| $t$     | 0               | $\ln 4$       | $+\infty$ |   |
| $v'(t)$ |                 | +             | 0         | - |
| $v(t)$  | $\frac{36}{25}$ | $\frac{9}{4}$ | 0         |   |

Vậy, tốc độ bán hàng đạt giá trị lớn nhất khi  $t = \ln 4$  ngày.

**Câu 2.** Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích  $200 \text{ m}^2$  để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn như hình bên dưới. Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá  $15 \text{ m}$ . Hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



**Lời giải.**

Gọi  $x$  (m) là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào. Điều kiện:  $0 < x \leq 15$ .

Diện tích khu đất này là  $200 \text{ (m}^2\text{)}$  nên chiều dài của khu đất là  $\frac{200}{x}$  (m).

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là  $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$  (m).

Xét hàm số  $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$ ,  $x \in (0; 15]$ .

Ta có  $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$ .

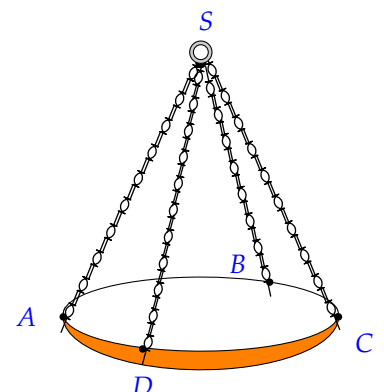
Cho  $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$  (do  $x > 0$ ).

Bảng biến thiên:

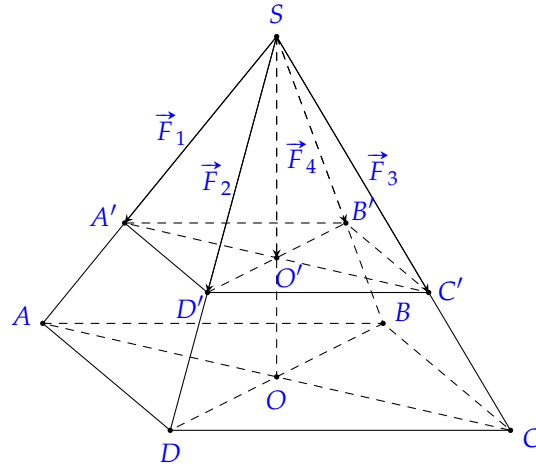
|         |           |    |    |                 |
|---------|-----------|----|----|-----------------|
| $x$     | 0         | 10 | 15 |                 |
| $L'(x)$ |           | -  | 0  | +               |
| $L(x)$  | $+\infty$ |    | 40 | $\frac{130}{3}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là  $40 \text{ m}$  khi chiều rộng khu đất này là  $x = 10 \text{ m}$ .

**Câu 3.** Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5 \text{ kg}$  được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có góc  $\widehat{ASC} = 60^\circ$  như hình bên. Sử dụng công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10 \text{ m/s}^2$ ,  $\vec{P}$  là trọng lực tác động lên chiếc đèn chùm. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích, biết khối lượng của bốn đoạn xích là không đáng kể so với khối lượng đèn chùm.



**Lời giải.**



Ta có  $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow |\vec{P}| = m|\vec{g}| = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$ .

Vậy độ lớn của trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên chiếc đèn chùm là  $50 \text{ N}$ .

Giả sử đèn chùm được minh họa như hình vẽ trên.

Gọi  $O$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên  $(ABCD)$ . Ta có  $SA = SB = SC = SD$  nên các tam giác vuông  $SOA, SOB, SOC, SOD$  bằng nhau. Suy ra  $OA = OB = OC = OD$  hay  $O$  là tâm hình chữ nhật  $ABCD$ .

Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là các điểm sao cho  $\vec{SA'} = \vec{F_1}, \vec{SB'} = \vec{F_2}, \vec{SC'} = \vec{F_3}$  và  $\vec{SD'} = \vec{F_4}$ .

Vì  $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = |\vec{F_4}|$  nên  $SA' = SB' = SC' = SD'$ . Do đó  $S.A'B'C'D'$  là hình chóp có đáy  $A'B'C'D'$  là hình chữ nhật.

Gọi  $O'$  là tâm hình chữ nhật  $A'B'C'D'$ , ta có  $O'$  thuộc  $SO$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} &= \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} + \vec{SD'} \\ &= (\vec{SA'} + \vec{SC'}) + (\vec{SB'} + \vec{SD'}) \\ &= 4\vec{SO'}. \end{aligned}$$

Do đèn ở vị trí cân bằng nên

$$\vec{P} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 4\vec{SO'}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{P}|} = \frac{SA'}{4SO'} = \frac{SA'}{4SA' \sin \widehat{SA'O'}} = \frac{1}{4 \sin \widehat{SA'O'}}.$$

Lại có  $\triangle SAC$  đều nên  $\widehat{SAO} = \widehat{SA'O'} = 60^\circ$ .

$$\text{Vậy cường độ của lực căng cho mỗi sợi xích là } |\vec{F_1}| = \frac{|\vec{P}|}{4 \sin 60^\circ} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}.$$

## BẢNG ĐÁP ÁN

### PHẦN I.

1. A 2. A 3. B 4. C 5. C 6. C 7. C 8. D 9. A 10. A 11. A 12. B

### PHẦN II.

Câu 1. a S b Đ c Đ d S      Câu 2. a S b S c Đ d Đ

### PHẦN III.

Câu 1. 0 , 3      Câu 2. 3 , 3 2      Câu 3. 3 0      Câu 4. 1 2 , 6