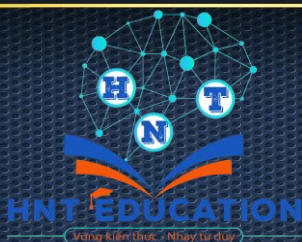
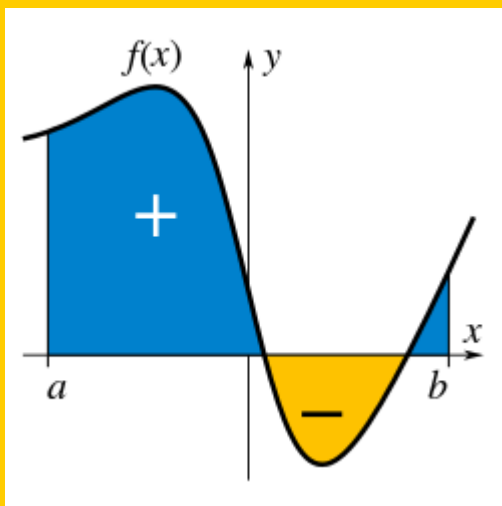


CHUYÊN ĐỀ

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG
TỪ ĐỀ CÁC TRƯỜNG CHUYÊN 2020 - 2021



GV. LƯƠNG ANH NHẬT

NGUYÊN HÀM

ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT – NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

Câu 1: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

(B) $\int e^x dx = e^x + C.$

(C) $\int x dx = \frac{x^2+1}{2} + C.$

(D) $\int \sin x dx = \cos x + C.$

Câu 2: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2$ có họ nguyên hàm là

(A) $F(x) = x^3 - 6x + C.$

(B) $F(x) = x^5 + x^3 + C.$

(C) $F(x) = \frac{x^5}{5} + x^3 + C.$

(D) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 + C.$

Câu 3: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

(A) $F(x) = e^{2x} + C.$

(B) $F(x) = e^{3x} + C.$

(C) $F(x) = 2e^{2x} + C.$

(D) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 4: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{5-3x}$ là:

(A) $\frac{2}{9}\sqrt{(5-3x)^3} + C.$ (B) $-\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C.$ (C) $-\frac{2}{9}\sqrt{(5-3x)^3} + C.$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{5-3x} + C.$

Câu 5: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\int f(x) dx = 4x^4 - x^3 + x^2 - x + C.$

(B) $\int f(x) dx = x^4 - x^3 + x^2 - x + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + C.$

(D) $\int f(x) dx = 12x^4 - 6x^3 + x^2 - x + C.$

Câu 6: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\int f(x) dx = -3\cos 3x + C.$

(B) $\int f(x) dx = 3\cos 3x + C.$

(C) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}\cos 3x + C.$

Câu 7: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

(A) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

(B) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}.$

(C) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}.$

(D) $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

Câu 8: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{2}{x}$.

(A) $\cos x - \frac{2}{x^2} + C$.

(B) $-\cos x + 2 \ln|x| + C$.

(C) $-\cos x - 2 \ln|x| + C$.

(D) $\cos x + 2 \ln|x| + C$.

Câu 9: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho C là một hằng số. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $\int 2x dx = x^2 + C$.

(B) $\int \sin x dx = \cos x + C$.

(C) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

(D) $\int e^x dx = e^x - C$.

Câu 10: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\int f(x) dx = 3 \cos x + C$.

(B) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cos x + C$.

(C) $\int f(x) dx = 3 \cos 3x + C$.

(D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Câu 11: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là:

(A) $e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

(B) $e^x + 1 + C$.

(C) $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + \frac{x^2}{2} + C$.

(D) $\frac{1}{2} e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 12: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tìm họ nguyên hàm $\int \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx$

(A) $x^2 + \ln|x-1| + C$.

(B) $x + \frac{1}{x-1} + C$.

(C) $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$.

(D) $1 - \frac{1}{(x-1)^2} + C$.

Câu 13: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $F(x)$, $f(x)$ liên tục trên khoảng K , khi đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng K nếu với mọi $x \in K$ ta có

(A) $F(x) = f'(x)$.

(B) $F(x) = f''(x)$.

(C) $F'(x) = f(x)$.

(D) $F''(x) = f(x)$.

Câu 14: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\int f(x) dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C$.

(B) $\int f(x) dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$.

(C) $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$.

(D) $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$.

Câu 15: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$.

(A) $\int f(x)dx = 6x + C$.

(B) $\int f(x)dx = x + C$.

(C) $\int f(x)dx = x^3 + C$.

(D) $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 16: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos 2x$.

(A) $x^2 - \sin 2x + C$.

(B) $x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

(C) $x^2 + \sin 2x + C$.

(D) $x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 17: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) $\int \tan x dx$ bằng

(A) $-\frac{1}{\sin^2 x} + C$.

(B) $\ln|\cos x| + C$.

(C) $\frac{1}{\cos^2 x} + C$.

(D) $-\ln|\cos x| + C$.

Câu 18: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ là $F(x)$ bằng

(A) $-\frac{2}{(2x-3)^2}$.

(B) $\frac{1}{2(2x-3)^2}$.

(C) $2\ln|2x-3|$.

(D) $\frac{1}{2}\ln|2x-3|$.

Câu 19: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

(A) $\frac{1}{2}e^x + C$.

(B) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

(C) $2e^{2x} + C$.

(D) $2e^x + C$.

Câu 20: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x - x$ là

(A) $\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{x^2}{2} + C$.

(B) $5^x - x^2 + C$.

(C) $5^x \ln 2 - \frac{x^2}{2} + C$.

(D) $\frac{5^x}{\ln 5} - 1 + C$.

Câu 21: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 4x$ là

(A) $-\cos x + 4x^2 + C$.

(B) $\cos x + 4x^2 + C$.

(C) $-\cos x + 2x^2 + C$.

(D) $\cos x + 2x^2 + C$.

Câu 22: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-2}$.

(A) $\int \frac{dx}{3x-2} = \ln|3x-2| + C$.

(B) $\int \frac{dx}{3x-2} = -\frac{1}{2}\ln|3x-2| + C$.

(C) $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$.

(D) $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$.

Câu 23: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là.

- Ⓐ $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$. Ⓑ $4x^3 - 9x + C$. Ⓒ $4x^4 - 9x + C$. Ⓓ $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Câu 24: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- Ⓐ $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}$. Ⓑ $\int 2e^x dx = 2(e^x + C)$.
 Ⓒ $\int \sin x dx = C - \cos x$. Ⓓ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

Câu 25: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

- Ⓐ $x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$. Ⓑ $x^2 + 2\cos 2x + C$.
 Ⓒ $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. Ⓓ $x^2 - 2\cos 2x + C$.

Câu 26: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- Ⓐ $2x^2 + 3x + C$. Ⓑ $2x^2 + C$. Ⓒ $x^2 + C$. Ⓓ $x^2 + 3x + C$.

Câu 27: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x} + 1$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- Ⓐ $F(x) = x^2 + x + \ln|x| - 2$. Ⓑ $F(x) = x^2 + x + \ln|x| + 2$.
 Ⓒ $F(x) = x^2 + x - \ln|x| - 2$. Ⓓ $F(x) = x^2 - x + \ln|x| + 2$.

Câu 28: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là:

- Ⓐ $6x$. Ⓑ $x^3 + 1$. Ⓒ $x^3 + x$. Ⓓ $3x^3 + x$.

Câu 29: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\int f(x) dx = x^4 + 3x + C$. Ⓑ $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 3x + C$.

- Ⓒ $\int f(x) dx = 4x^4 + 3x + C$. Ⓓ $\int f(x) dx = 12x^3 + 3x + C$.

Câu 30: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- Ⓐ $x + \frac{2}{x^2} + C$. Ⓑ $x - 2\ln x + C$. Ⓒ $x + 2\ln x + C$. Ⓓ $x - \frac{2}{x^2} + C$.

- Câu 31: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là
- Ⓐ $6x - \cos x + C$. Ⓑ $x^3 - \cos x + C$. Ⓒ $x^3 + \cos x + C$. Ⓓ $x^3 - \sin x + C$
- Câu 32: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ (C là hằng số)
- Ⓐ $x^3 - \cos x + C$. Ⓑ $6x + \cos x + C$. Ⓒ $x^3 + \cos x + C$. Ⓓ $6x - \cos x + C$.
- Câu 33: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ (C là hằng số)
- Ⓐ $\int f(x) dx = 3e^{3x} + C$. Ⓑ $\int f(x) dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$.
- Ⓒ $\int f(x) dx = e^{3x} + C$. Ⓓ $\int f(x) dx = \frac{e^{3x+1}}{3x+1} + C$.
- Câu 34: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VĨNG TÀU NĂM 2020-2021)** Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là
- Ⓐ $6x$. Ⓑ $x^3 + 1$. Ⓒ $x^3 + x$. Ⓓ $3x^3 + x$.
- Câu 35: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021)** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau
- Ⓐ $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}$. Ⓑ $\int 2e^x dx = 2(e^x + C)$.
- Ⓒ $\int \sin x dx = C - \cos x$. Ⓓ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.
- Câu 36: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là:
- Ⓐ $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$. Ⓑ $x^2 + 2 \cos 2x + C$. Ⓒ $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. Ⓓ $x^2 - 2 \cos 2x + C$
- Câu 37: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02)** Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$
- Ⓐ $2 \sin 2x + C$. Ⓑ $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$. Ⓒ $\frac{1}{2} \sin 2x + C$. Ⓓ $-2 \sin 2x + C$.
- Câu 38: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02)** Cho $\int f(x) dx = 3x^2 + 2x - 3 + C$. Hỏi $f(x)$ là hàm số nào?
- Ⓐ $f(x) = 6x + 2$. Ⓑ $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + C$.
- Ⓒ $f(x) = 6x + 2 + C$. Ⓓ $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$.

- Câu 39: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$ là
- (A) $1 + \cos x + C$. (B) $1 - \cos x + C$. (C) $x + \cos x + C$. (D) $x - \cos x + C$.
- Câu 40: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là
- (A) $e^x + C$. (B) $e^{2x} + C$. (C) $\frac{e^{2x}}{2} + C$. (D) $\frac{e^x}{2} + C$.
- Câu 41: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01)** Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là
- (A) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$. (B) $-\cos 3x + C$. (C) $\cos 3x + C$. (D) $\frac{1}{3} \cos 3x + C$.
- Câu 42: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04)** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $x \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- (A) $\int f(x) dx = 3 \ln|x-1| + C, \forall x \neq 1$. (B) $\int f(x) dx = 3 \ln(x-1) + C, \forall x \neq 1$.
 (C) $\int f(x) dx = 2x + 3 \ln|x-1| + C, \forall x \neq 1$. (D) $\int f(x) dx = 3 \ln(x-1) + C, \forall x \neq 1$.
- Câu 43:** Biết $\int f(x) dx = x^2 + C$. Tính $\int f(2x) dx$
- (A) $\int f(2x) dx = \frac{1}{2} x^2 + C$. (B) $\int f(2x) dx = \frac{1}{4} x^2 + C$.
 (C) $\int f(2x) dx = 2x^2 + C$. (D) $\int f(2x) dx = 4x^2 + C$.
- Câu 44: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021)** Tìm nguyên hàm $\int (4x^3 + 2x + 1) dx$.
- (A) $4x^4 + 2x^2 + x + C$. (B) $x^4 + 2x^2 + x + C$. (C) $x^4 + x^2 + x + C$. (D) $\frac{x^4}{4} + x^2 + x + C$.
- Câu 45: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021)** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \cos 2x$ trên $\mathbb{R}$ và $F(0) = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- (A) $T = 2$. (B) $T = 3$. (C) $T = \frac{1}{2}$. (D) $T = 1$.
- Câu 46: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01)** Tính nguyên hàm $\int \tan^2 2x dx$.
- (A) $\tan 2x - x + C$. (B) $\frac{1}{2} \tan 2x - x + C$. (C) $\frac{1}{2} \tan 2x + x + C$. (D) $\tan 2x + x + C$.

Câu 47: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, $f(0) = 1$. Giá trị của $f(-1)$ bằng:

- (A) $3\ln 2 + 3$. (B) $2\ln 2 + 1$. (C) $3\ln 2 + 4$. (D) $12\ln 2 + 3$.

Câu 48: (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021 LẦN 01) Với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, cho các khẳng định sau:

(I). $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

(II). $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \left(\int f(x) dx\right) \cdot \left(\int g(x) dx\right)$.

(III). Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.

(IV). $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \in \mathbb{R}$.

Có bao nhiêu khẳng định sai?

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 49: (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021 LẦN 01) Biết rằng $\int (\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x) dx = \frac{a}{b} \cos 4x + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản ($a < 0, b > 0$), tính $2a + b$.

- (A) -13. (B) 13. (C) -10. (D) 10.

Câu 50: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- (A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$. (B) $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.
(C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. (D) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 51: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = 1 - 2\cos^2 x$. Tìm nguyên hàm của $f(x)$?

- (A) $-\frac{\sin 2x}{2} + C$. (B) $\frac{\sin 2x}{2} + C$. (C) $\sin 2x + C$. (D) $-\sin 2x + C$.

Câu 52: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị $F(-2)$ bằng

- (A) $1 + \frac{1}{2} \ln 5$. (B) $\frac{1}{2}(1 + \ln 5)$. (C) $1 + \frac{1}{2} \ln 3$. (D) $1 + \ln 5$.

Câu 53: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả các

nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- Ⓐ $2\ln(4x-3)+C$. Ⓑ $\frac{1}{2}\ln(4x-3)+C$. Ⓒ $\frac{1}{4}\ln(4x-3)+C$. Ⓓ $4\ln(4x-3)+C$.

Câu 54: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x-1}$ là

- Ⓐ $\frac{9^x}{3}+C$. Ⓑ $\frac{9^x}{3\ln 3}+C$. Ⓒ $\frac{9^x}{6\ln 3}+C$. Ⓓ $\frac{9^x}{6}+C$.

Câu 55: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Họ nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

- Ⓐ $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$. Ⓑ $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$.
Ⓒ $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. Ⓓ $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

Câu 56: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính giá trị của $A = 3f^2(3) - 678$.

- Ⓐ 2018. Ⓑ 2021. Ⓒ 2022. Ⓓ 2019.

Câu 57: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) = 2x - 1$ và $f(3) = 5$. Giả sử phương trình $f(x) = 999$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tính tổng $S = \log|x_1| + \log|x_2|$.

- Ⓐ 5. Ⓑ 999. Ⓒ 3. Ⓓ 1001.

Câu 58: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \sin x = 1 - f(x) \cos x$ với mọi số thực x . Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Câu 59: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- Ⓐ $I = 1$. Ⓑ $I = 8$. Ⓒ $I = -8$. Ⓓ $I = -12$.

Câu 60: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tính nguyên hàm $\int x^2(2x^3 - 1)^2 dx$

Ⓐ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{18} + C.$ Ⓑ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{3} + C.$ Ⓒ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{6} + C.$ Ⓓ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{9} + C.$

Câu 61: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

Ⓐ $\int 2u(u^2 - 4)du.$ Ⓑ $\int 2(u^2 - 1)du.$ Ⓒ $\int 2(u^2 - 4)du.$ Ⓓ $\int (u^2 - 4)du.$

Câu 62: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Tính nguyên hàm $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ bằng cách đặt $t = \sqrt{x+4}$ ta thu được nguyên hàm nào?

Ⓐ $\int \frac{2dt}{t^2 - 4}.$ Ⓑ $\int \frac{2tdt}{(t^2 - 4)}.$ Ⓒ $\int \frac{2dt}{(t^2 - 4)t}.$ Ⓓ $\int \frac{dt}{t^2 - 4}.$

Câu 63: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hỏi $F(x^2)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây:

Ⓐ $2x.f(x).$ Ⓑ $x.f(x^2).$ Ⓒ $f(x^2).$ Ⓓ $2x.f(x^2).$

Câu 64: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VĨNG TÀU NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hỏi $F(x^2)$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

Ⓐ $2x.f(x).$ Ⓑ $x.f(x^2).$ Ⓒ $f(x^2).$ Ⓓ $2x.f(x^2).$

Câu 65: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1; 2]$, thỏa mãn $f(x) = xf'(x) - x^2$. Biết $f(1) = 3$. Tính $f(2)$.

Ⓐ 16. Ⓑ 2. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Câu 66: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho $\int f(4x)dx = e^{2x} - x^2 + C$. Khi đó $\int f(-x)dx$ bằng

Ⓐ $\frac{e^{2x}}{4} + 4x^2 + C.$ Ⓑ $4e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}x^2 + C.$ Ⓒ $-4e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}x^2 + C.$ Ⓓ $-e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + C$

Câu 67: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Biết $\int \frac{(mx+1)\ln x}{x^2} dx = \ln^2 x + \frac{n \ln(px)}{x} + C$ với m, n, p, C là các số thực. Khi đó, $m+n+p$ bằng

Ⓐ $e+1.$ Ⓑ $e+2.$ Ⓒ $2e-1.$ Ⓓ $2e-2.$

Câu 68: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của

hàm số $f(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{2021}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ và $F(0) = 1$. Giá trị của $F(1)$ bằng

- (A) $\frac{(1 + \sqrt{2})^{2020} - 2021}{2020}$. (B) $\frac{(1 + \sqrt{2})^{2021} + 2020}{2021}$.
(C) $\frac{(1 + \sqrt{2})^{2020} + 2021}{2020}$. (D) $\frac{(1 + \sqrt{2})^{2021} - 2020}{2021}$.

Câu 69: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$f'(x) + x(e^{f(x)} + 2) + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

- (A) $\ln 3$. (B) $\ln 6$. (C) $\ln 7$. (D) $\ln 5$.

Câu 70: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề đúng?

- (A) $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) + \int u'(x).v'(x) dx$.
(B) $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v'(x) dx$.
(C) $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) + \int u'(x).v(x) dx$.
(D) $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x) dx$.

Câu 71: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tính nguyên hàm $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $A = \int dt$. (B) $A = \int \frac{1}{t^2} dt$. (C) $A = \int \frac{1}{t} dt$. (D) $A = \int t dt$.

Câu 72: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Một nguyên hàm của $\ln x$ bằng

- (A) $x - x \ln x$. (B) $\frac{1}{x}$. (C) $x + x \ln x$. (D) $1 - x + x \ln x$.

Câu 73: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tìm nguyên hàm $\int (2x - 1) \ln x dx$

- (A) $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. (B) $(x - x^2) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
(C) $(x^2 - x) \ln x + \frac{x^2}{2} + x + C$. (D) $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

- Câu 74: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01)** Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a - 2b + 4c$.
- Ⓐ $T = 1012$. Ⓑ $T = -2012$. Ⓒ $T = 1004$. Ⓓ $T = 1018$.

- Câu 75: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03)** Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là
- Ⓐ $-x^2 + 2x + C$. Ⓑ $-x^2 + x + C$. Ⓒ $-2x^2 + 2x + C$. Ⓓ $2x^2 - 2x + C$.

- Câu 76: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01)** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên. Biết rằng $G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x}f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Họ tất cả các nguyên hàm của $e^{-2x}f'(x)$ là
- Ⓐ $-2x^3 + 3x^2 + C$. Ⓑ $2x^3 + 3x^2 + C$. Ⓒ $x^3 + 3x^2 + C$. Ⓓ $-x^3 + 3x^2 + C$.

- Câu 77: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021)** Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + g(x) = x$, $g'(x) + f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = g(0) = 1$, tính $f(1)$.
- Ⓐ $\frac{2}{e} - 2$. Ⓑ $e + \frac{1}{e} - 2$. Ⓒ $\frac{e^2 - 2}{2e}$. Ⓓ $\frac{e^2 + 2}{2e}$.

TÍCH PHÂN

ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT – TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Câu 78: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$,

$\int_0^2 f(x)dx = 1$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 3.

Câu 79: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Cho

$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx = 12$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- (A) -2. (B) 12. (C) 22. (D) 2.

Câu 80: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{\pi}{2}$.

Câu 81: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_{-1}^1 x^{2020} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{2021}$. (B) $\frac{2}{2021}$. (C) $\frac{2}{2020}$. (D) 0.

Câu 82: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

- (A) 10. (B) 4. (C) -4. (D) 21.

Câu 83: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0; 2]$, $f(0) = 1$ và $\int_0^2 f'(x)dx = -3$. Tính $f(2)$

- (A) $f(2) = -4$. (B) $f(2) = -3$. (C) $f(2) = -2$. (D) $f(2) = 4$.

Câu 84: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên R thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 3$;

$\int_0^2 [f(x) - 3g(x)]dx = 4$ và $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]dx = 8$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$.

- (A) $I = 0$. (B) $I = 2$. (C) $I = 1$. (D) $I = 3$.

- Câu 85: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02)** Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$ và $\int_1^2 g(x) dx = 9$ thì $\int_1^2 [2f(x) + g(x)] dx$ bằng
- (A) 19. (B) 28. (C) 14. (D) 4.
- Câu 86: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02)** Nếu $\int_1^3 [f(x) - 2x] dx = 5$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng
- (A) 9. (B) 13. (C) 10. (D) 12.
- Câu 87: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02)** Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ bằng
- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) -2.
- Câu 88: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021)** Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng
- (A) $e^2 - 1$. (B) $\frac{e-1}{2}$. (C) $2(e^2 - 1)$. (D) $\frac{e^2 - 1}{2}$.
- Câu 89: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định sai.
- (A) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. (B) $\int_a^a f(x) dx = 0$.
 (C) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. (D) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.
- Câu 90: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04)** Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = -1$ thì $\int_1^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng
- (A) 2. (B) 9. (C) 3. (D) 0.
- Câu 91: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04)** Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng
- (A) $-\frac{\pi}{2}$. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{\pi}{2}$.
- Câu 92: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021)** Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và $\int_0^1 f(x) dx = -1, \int_0^1 g(x) dx = 2$. Tính $\int_0^1 [2f(x) + 3g(x)] dx$
- (A) 4. (B) 1. (C) -2. (D) 5.

Câu 93: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá trị

của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

- (A) 4. (B) 8. (C) 16. (D) 10.

Câu 94: Tính $I = \int_0^1 e^{3x} dx$.

- (A) $I = e^3 - 1$. (B) $I = e - 1$. (C) $I = \frac{e^3 - 1}{3}$. (D) $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Câu 95: Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_2^5 f(x)dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

- (A) -2. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 96: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^2 x} dx$ bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) $\frac{\pi}{4}$.

Câu 97: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Nếu $\int_2^5 f(x)dx = 10$ và $\int_2^9 f(x)dx = 7$ thì $\int_5^9 f(x)dx$ bằng

- (A) -3. (B) 3. (C) 17. (D) -17.

Câu 98: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$.

- (A) $\frac{14}{3}$. (B) $\frac{13}{3}$. (C) 4. (D) $\frac{11}{3}$.

Câu 99: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Tích phân $\int_0^2 (x^2 + x) dx$ bằng

- (A) $-\frac{14}{3}$. (B) -5. (C) 5. (D) $\frac{14}{3}$.

Câu 100: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_{-2}^0 (6x^5 + 1) dx$ bằng

- (A) -62. (B) 64. (C) 68. (D) -68.

Câu 101: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng bao nhiêu?

- (A) 1. (B) -1. (C) $\frac{\pi}{2}$. (D) 0.

Câu 102: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 7$, $\int_6^{10} f(x) dx = -1$. Tính $I = \int_0^{10} f(x) dx$.

- (A) $I = 5$. (B) $I = 8$. (C) $I = 7$. (D) $I = 6$.

Câu 103: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$.

- (A) $\frac{14}{3}$. (B) $\frac{13}{3}$. (C) 4. (D) $\frac{11}{3}$.

Câu 104: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -2; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- (A) $(3; -3; 4)$. (B) $(-1; 1; 2)$. (C) $(-3; 3; -4)$. (D) $(1; -1; -2)$.

Câu 105: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Tính $I = \int_0^1 e^{3x} dx$

- (A) $I = e^3 - 1$. (B) $I = e - 1$. (C) $I = \frac{e^3 - 1}{3}$. (D) $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Câu 106: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$; $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì

$\int_1^5 f(x) dx$ bằng

- (A) -2. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 107: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$

có $f(2) = 2$, $f(3) = 5$; hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- (A) 3. (B) 10. (C) -3. (D) 7.

Câu 108: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_1^3 g(x) dx = -7$.

Giá trị của $\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- (A) -29. (B) 1. (C) 29. (D) -31.

Câu 109: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn

$$[0; 2] \text{ thỏa mãn } \int_0^1 f(x) dx = 3 \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 2. \text{ Khi đó } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

- (A) 6. (B) 1. (C) -1. (D) 5.

Câu 110: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ và

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{4}{3}. \text{ Khi đó } \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx \text{ bằng}$$

- (A) $-\frac{5}{3}$. (B) $\frac{5}{3}$. (C) -1. (D) 1.

Câu 111: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Nếu

$$\int_{-1}^4 [5f(x) - 3] dx = 5 \text{ thì } \int_{-1}^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) $\frac{14}{5}$.

Câu 112: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Nếu $\int_2^{2021} f(x) dx = 12$ và $\int_{2020}^{2021} f(x) dx = 2$

$$\text{thì } \int_2^{2020} f(x) dx \text{ bằng}$$

- (A) -10. (B) 10. (C) 14. (D) 24.

Câu 113: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho $\int_{-1}^1 [5f(x) + x^{2021} + x] dx = 20$.

$$\text{Tính } \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

- (A) 5. (B) 4. (C) 1. (D) 0.

Câu 114: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tìm giá trị của a để

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln a.$$

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 12. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 115: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Biết rằng

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2 \text{ với } a, b, c \text{ là các số hữu tỉ. Tính } 2a + 3b - 4c.$$

- (A) -19. (B) 19. (C) 5. (D) -5.

Câu 116: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Biết

$$\int_1^8 f(x)dx = -2; \int_1^4 f(x)dx = 3; \int_1^4 g(x)dx = 7. \text{ Mệnh đề nào sau đây là sai?}$$

(A) $\int_4^8 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx = 8.$

(B) $\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = 10.$

(C) $\int_4^8 f(x)dx = -5.$

(D) $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = -2.$

Câu 117: Nếu $\int_0^2 (2x - 3f(x))dx = 3$ thì $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

(A) $-\frac{1}{3}.$

(B) $-\frac{5}{2}.$

(C) $\frac{5}{2}.$

(D) $\frac{1}{3}.$

Câu 118: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho $\int_{-1}^4 f(x)dx = 10.$

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(-1) = -4$. Tính $F(4)$.

(A) $F(4) = 6.$

(B) $F(4) = 14.$

(C) $F(4) = -14.$

(D) $F(4) = -6.$

Câu 119: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Nếu

$$\int_0^1 [3f(x) + x]dx = 2 \quad \text{thì} \quad \int_0^1 f(x)dx = 2 \quad \text{bằng}$$

(A) $-\frac{1}{2}.$

(B) $\frac{1}{2}.$

(C) $2.$

(D) $\frac{2}{3}.$

Câu 120: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$

và $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8$ thì $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

(A) $4.$

(B) $10.$

(C) $6.$

(D) $16.$

Câu 121: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho 2 và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1.$

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]$ bằng?

(A) $I = \frac{11}{2}.$

(B) $I = \frac{7}{2}.$

(C) $I = \frac{17}{2}.$

(D) $I = \frac{5}{2}.$

Câu 122: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Nếu $\int_1^3 f(x)dx = 3$ và

$\int_2^3 f(x)dx = 4$ thì $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

(A) $-7.$

(B) 7

(C) $-1.$

(D) $1.$

Câu 123: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Nếu $\int_0^2 (2x - 3f(x))dx = 3$ thì $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

(A) $-\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{5}{2}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 124: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Biết $F(x) = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^\pi [3f(x) + 2]dx$ bằng

(A) $2\pi - 6$. (B) -4 . (C) 2π . (D) 2 .

Câu 125: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$, và $\int_1^3 f'(x)dx = 6$. Tính $f(1)$

(A) 10. (B) 11. (C) 1. (D) -1.

Câu 126: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]dx = 1$, $\int_1^2 [2f(x) - g(x)]dx = -3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

(A) $\frac{6}{7}$. (B) $\frac{16}{7}$. (C) $\frac{11}{7}$. (D) $-\frac{5}{7}$.

Câu 127: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x) = x^{2021} + \sin x + 2021$. Biết rằng có duy nhất giá trị của $m = -\frac{a}{b}$ để $\int_0^m (x \cdot f'(m-x) - f(x))dx = 1$. Tìm $a+b$.

(A) $a+b = 2021$. (B) $a+b = 2023$. (C) $a+b = 2020$. (D) $a+b = 2022$.

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Câu 128: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x)dx = 10$, thì $\int_0^3 f(2x)dx$ bằng

(A) 30. (B) 20. (C) 10. (D) 5.

Câu 129: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ bằng

(A) 3. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 1. (D) 2.

Câu 130: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ bằng cách đặt

$t = e^x$, ta được:

(A) $I = \int_1^e \frac{dt}{1+t}$ (B) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ (C) $I = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$ (D) $I = \int_0^1 \frac{tdt}{1+t}$

Câu 131: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

bằng cách đặt $t = e^x$, ta được

(A) $I = \int_1^e \frac{dt}{1+t}$ (B) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ (C) $I = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}$ (D) $I = \int_0^1 \frac{tdt}{1+t}$

Câu 132: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x + 5 & \text{khi } x > 2 \end{cases}.$$

Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$ thuộc khoảng

nào dưới đây ?

(A) $(-2; 3)$ (B) $(5; 7)$ (C) $(10; 11)$ (D) $(8; 9)$

Câu 133: (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số thực}).$$

Nếu $\int_0^1 f(e^x+1)e^x dx = e^2$ thì a bằng

(A) $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$ (B) $6e-6$ (C) $6e+6$ (D) $-6e+6$

Câu 134: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số

$$f(x) = |x^2 - 1|. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(3\cos x - 1) \cdot \sin x dx \text{ bằng}$$

(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{10}{9}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{11}{9}$

Câu 135: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị

thực dương của tham số a để $\int_{\ln 3}^{\ln a} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} - 3} dx = \ln \frac{3}{2}$?

(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 1

Câu 136: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x - 5 & \text{khi } x \geq 8 \\ -x + 3 & \text{khi } x < 8 \end{cases}.$$

Tích phân $\int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3)e^x dx$ bằng

(A) $\frac{39}{2}$ (B) $\frac{39}{4}$ (C) $-\frac{123}{2}$ (D) $-\frac{123}{4}$

Câu 137: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có

$$f(0) = 0 \text{ và } f'(x) = \tan^4 x + \tan^2 x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx.$$

- Ⓐ $\frac{1}{12}$. Ⓑ $\frac{1}{6}$. Ⓒ $\frac{1 - \ln 2}{6}$. Ⓓ $\frac{1 - \ln 2}{3}$.

Câu 138: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Biết rằng

$$\int_0^{\ln 4} \frac{dx}{1 + \sqrt{e^x}} = a + b \ln 2 + c \ln 3 \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } a + b + c.$$

- Ⓐ -2. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ -1.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHẦN TỪNG PHẦN

Câu 139: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho

$$I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c} \text{ với } a, b, c \text{ là các số nguyên dương và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối}$$

giản. Tính giá trị $S = \frac{a+b}{c}$

- Ⓐ $S = \frac{2}{3}$. Ⓑ $S = \frac{1}{2}$. Ⓒ $S = \frac{1}{3}$. Ⓓ $S = \frac{5}{6}$.

Câu 140: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$,

ta được kết quả $I = \frac{e^2 + a}{b}$, với a, b là các số nguyên. Tính $a^3 + b^3$.

- Ⓐ 35. Ⓑ 65. Ⓒ 28. Ⓓ 9.

Câu 141: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$$f(x) \text{ có đạo hàm } f'(x) \text{ và thỏa } \int_0^1 (2x+1)f'(x) dx = 10, 3f(1) - f(0) = 12. \text{ Tính}$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

- Ⓐ $I = -1$. Ⓑ $I = 1$. Ⓒ $I = 2$. Ⓓ $I = -2$.

Câu 142: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo

hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21, \int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx$

- Ⓐ $I = 15$. Ⓑ $I = 6$. Ⓒ $I = 12$. Ⓓ $I = 9$.

Câu 143: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0; f'(1)=1$ và $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0;1]$. Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- (A) $-\frac{1}{15}$. (B) $-\frac{2}{3}$. (C) $-\frac{1}{10}$. (D) $-\frac{1}{17}$.

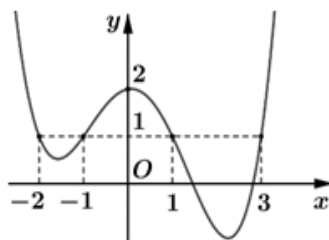
Câu 144: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và

$\int_0^1 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x^2)dx$ bằng

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) -1.

Câu 145: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.

Đặt $K = \int_0^1 xf(x)f'(x)dx$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



- (A) $(-3; -2)$. (B) $(-2; -\frac{3}{2})$. (C) $(-\frac{2}{3}; 0)$. (D) $(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$.

Câu 146: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$

trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $\int_0^1 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x^2)dx$ bằng

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) -1.

Câu 147: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo

hàm liên tục trên khoảng $(0; \pi)$ và $f'(x)\sin x = x + f(x)\cos x, \forall x \in (0; \pi)$. Biết

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{12}(a+b\ln 2+c\pi\sqrt{3})$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$

bằng

- (A) -1. (B) 1. (C) 11. (D) -11.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

Câu 148: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Cho $f(x)$ là hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = 6$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(2x-1) + 2x]dx$.

- (A) $I = 4$. (B) $I = 13$. (C) $I = 7$. (D) $I = 5$.

Câu 149: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo

hàm trên $(0; +\infty)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 1$.

Tính $f(e)$.

- (A) 2. (B) 3. (C) $2e+1$. (D) e .

Câu 150: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên

tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0) = -2$ và $(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx$.

- (A) $I = \frac{5}{2}$. (B) $I = -\frac{3}{2}$. (C) $I = \frac{3}{2}$. (D) $I = -\frac{5}{2}$.

Câu 151: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x.f'(x)dx = -\frac{a}{b}$. Tính

$T = 3a - b$.

- (A) $T = 0$. (B) $T = -48$. (C) $T = 16$. (D) $T = 1$.

Câu 152: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$

có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$\int_1^5 xf'(x)dx$ bằng

- (A) $-\frac{31}{4}$. (B) $\frac{33}{4}$. (C) $\frac{17}{4}$. (D) $\frac{49}{4}$.

Câu 153: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên

$(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$.

Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$.

- (A) $\frac{7}{12}$. (B) $\frac{7}{4}$. (C) $\frac{9}{4}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Câu 154: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$ với mọi x . Tính $f'(0)$.

- (A) 1. (B) -1. (C) e . (D) $\frac{1}{e}$.

Câu 155: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Biết

$$\int_0^8 f(x)dx = 10; \int_0^4 f(x)dx = -4. \text{ Tính } \int_{-1}^3 f(|3x-1|)dx.$$

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 4.

Câu 156: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và

$$f'(x) = \tan^4 x + \tan^2 x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx.$$

- (A) $\frac{1}{12}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1-\ln 2}{6}$. (D) $\frac{1-\ln 2}{3}$.

Câu 157: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + g(x) = x, g'(x) + f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = g(0) = 1$. Tính $f(1)$.

- (A) $\frac{2}{e} - 2$. (B) $e + \frac{1}{e} - 2$. (C) $\frac{e^2 - 2}{2e}$. (D) $\frac{e^2 + 2}{2e}$.

Câu 158: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 4]$, đồng biến trên $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$. Tính $I = \int_1^4 f(x)dx$.

- (A) $\frac{1222}{45}$. (B) $\frac{1201}{45}$. (C) $\frac{1174}{45}$. (D) $\frac{1186}{45}$.

Câu 159: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x^2)dx$ bằng

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $-\frac{4}{3}$. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $-\frac{2}{3}$.

Câu 160: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân

$$I = \int_1^2 xf'(x)dx.$$

- (A) $I = 3$. (B) $I = -1$. (C) $I = 2$. (D) $I = 5$.

Câu 161: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1; f'(x)-xf(x)=xe^{x^2}, \forall x$. Tích phân $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1})dx$ bằng

(A) $e^2 - e$. (B) $4\sqrt{e} - 2e$. (C) 1. (D) e .

Câu 162: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x^2) = 2f(x) + x^4 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$, khi đó $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$ bằng

(A) $\frac{7}{6}$. (B) $\frac{8}{15}$. (C) $\frac{7}{10}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Câu 163: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 x \cdot f'(x)dx$ bằng

(A) $-\frac{10}{3}$. (B) $-\frac{5}{3}$. (C) $-\frac{11}{3}$. (D) $-\frac{7}{3}$.

Câu 164: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow t} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{x^2 - t^2} = 1$ với mọi $t > 0$. Biết rằng $f(1)=1$, tính $f(e)$.

(A) $\frac{3e+1}{2}$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) $-e$.

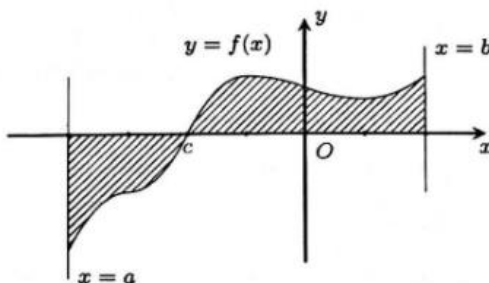
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

Câu 165: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0, x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

- (A) $S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$
 (B) $S = \int_0^{\pi} \cos x dx.$
 (C) $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx.$
 (D) $S = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$

Câu 166: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ trong hình dưới đây (phần gạch sọc có diện tích S bằng

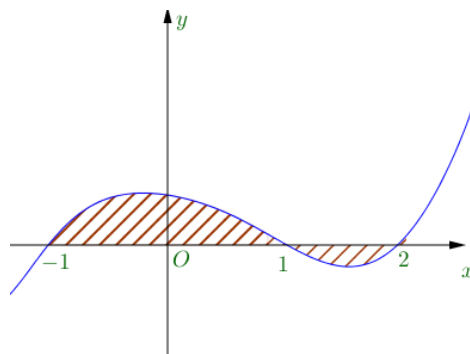


- (A) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$
 (B) $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$
 (C) $-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$
 (D) $-\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$

Câu 167: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Tìm công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^4, y=x^2$.

- (A) $\int_0^1 (x^4 - x^2) dx.$
 (B) $\int_0^1 (x^2 - x^4) dx.$
 (C) $\int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx.$
 (D) $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx.$

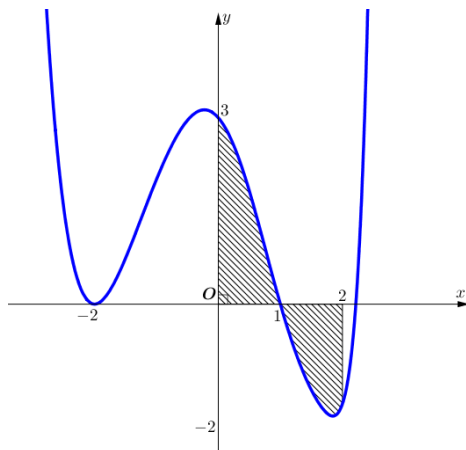
Câu 168: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Gọi S là diện tích miền hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây, với $y=f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$



Công thức tính S là

- (A) $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx.$
 (B) $S = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|.$
 (C) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$
 (D) $S = \int_{-1}^2 f(x) dx.$

Câu 169: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị C là đường cong như hình bên, Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị C , trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là



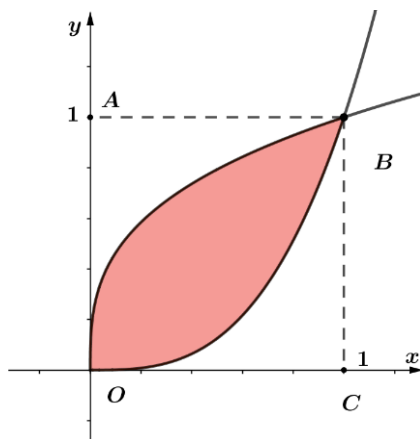
(A) $-\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

(B) $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

(C) $\int_0^2 f(x) dx$.

(D) $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

Câu 170: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$. Tính diện tích phần tô đậm trên viên gạch men.



(A) $\frac{5}{4}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

Câu 171: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

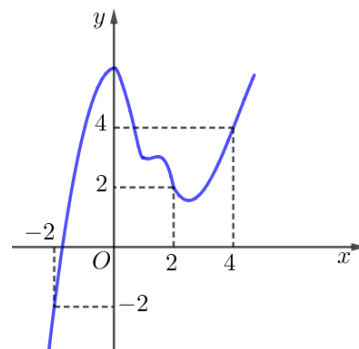
Giá trị của $\int_0^2 f'(x+2) dx + \int_0^4 f'(x-2) dx$ bằng

(A) 4.

(B) 6.

(C) -4.

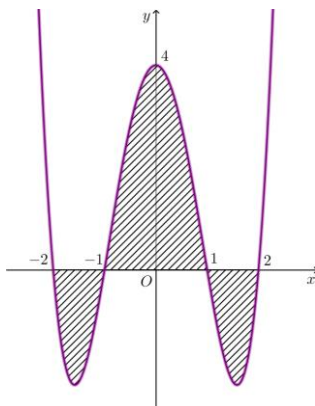
(D) 2.



Câu 172: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ bằng:

- Ⓐ $\frac{13}{6}$. Ⓑ $\frac{9}{2}$. Ⓒ 9. Ⓓ $\frac{13}{3}$.

Câu 173: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



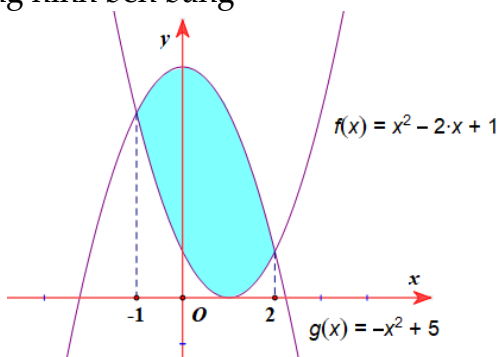
Diện tích S của miền được tô xiên như hình được tính theo công thức nào?

- Ⓐ $S = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. Ⓑ $S = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.
 Ⓒ $S = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$. Ⓓ $S = \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 174: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Tìm công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^4, y = x^2$

- Ⓐ $\int_0^1 (x^4 - x^2) dx$. Ⓑ $\int_0^1 (x^2 - x^4) dx$. Ⓒ $\int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx$. Ⓓ $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx$.

Câu 175: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình bên bằng



- Ⓐ $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x - 4) dx$. Ⓑ $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.
 Ⓒ $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$. Ⓓ $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

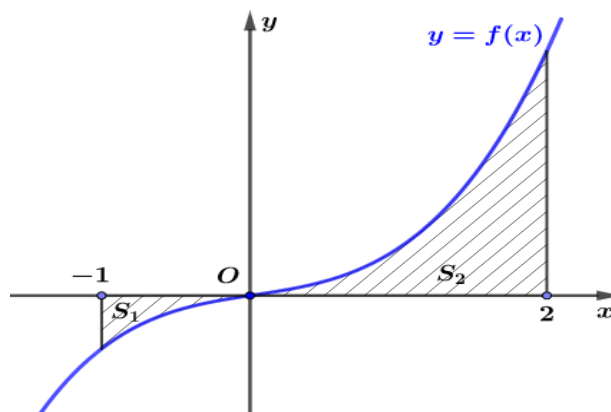
Câu 176: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ và hai trục tọa độ bằng

- Ⓐ $\frac{\pi}{2}$. Ⓑ $\frac{11}{4}$. Ⓒ $\frac{11\pi}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Câu 177: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$, $g(x) = dx^2 + ex + 2$, $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị.

- Ⓐ $\frac{37}{6}$. Ⓑ $\frac{13}{2}$. Ⓒ $\frac{9}{2}$. Ⓓ $\frac{37}{12}$.

Câu 178: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$ có đồ thị như hình bên. Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



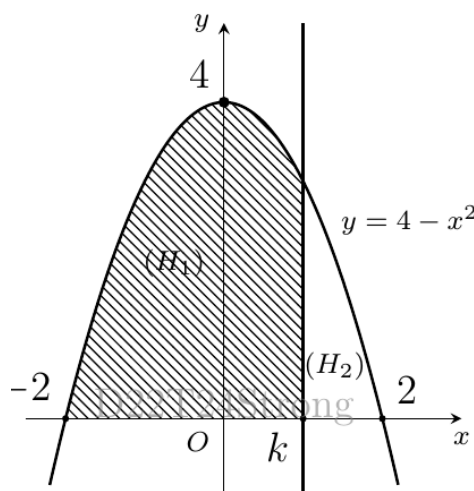
Khi $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{40}$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. Ⓒ $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Câu 179: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;3)$. Giả sử khi đường thẳng d có hệ số góc k thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d nhỏ nhất. Giá trị thực của k thuộc khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;3)$. Ⓒ $(-3;0)$. Ⓓ $(3;+\infty)$.

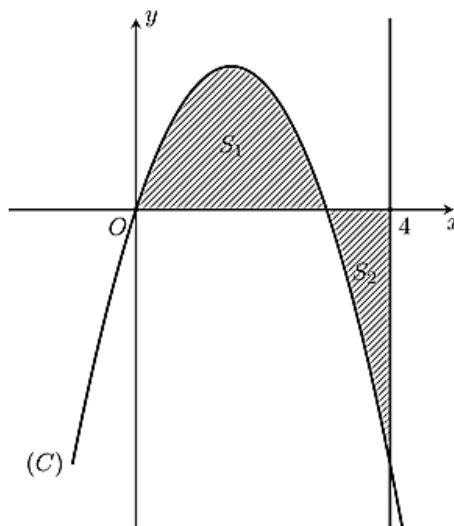
Câu 180: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Trong mặt phẳng Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$ ($-2 < k < 2$) chia (H) thành hai phần (H_1) , (H_2) như hình vẽ



Biết rằng diện tích hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2) , hỏi giá trị k thuộc khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $(-2; -1)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(-1; 0)$. Ⓓ $(1; 2)$.

Câu 181: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = mx - x^2$ ($0 < m < 4$) có đồ thị (C) . Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 4$. Giá trị m để $S_1 = S_2$ là

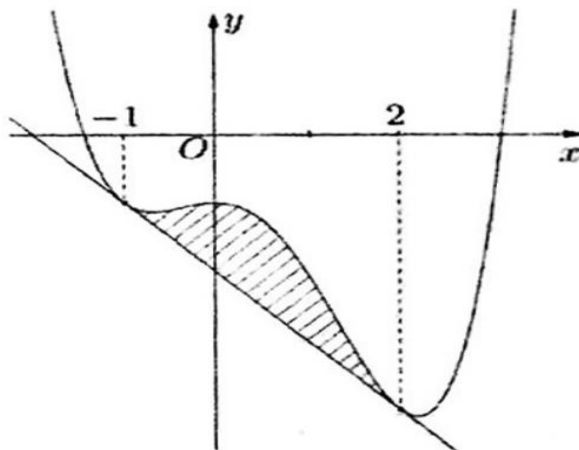


- Ⓐ $m = \frac{10}{3}$. Ⓑ $m = \frac{8}{3}$. Ⓒ $m = 3$. Ⓓ $m = 2$.

Câu 182: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hai hàm số

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1 \text{ và } g(x) = ex - 2 \text{ (} a, b, c, d, e \text{ là các số thực cho trước).}$$

Biết rằng đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

Ⓐ $\frac{81}{20}$.

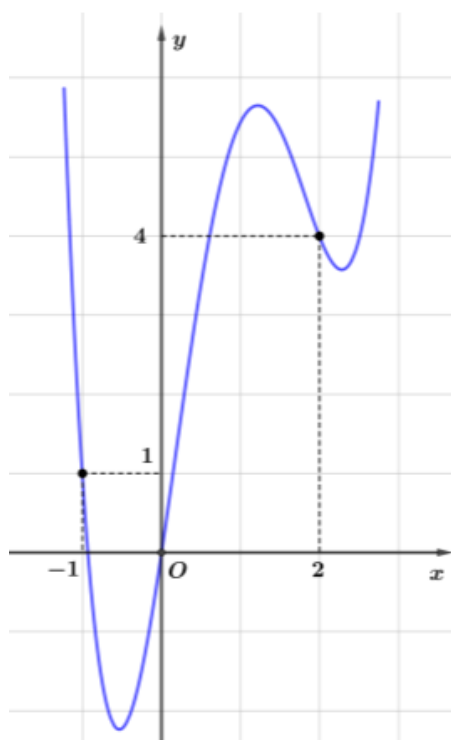
Ⓑ $\frac{81}{4}$.

Ⓒ $\frac{81}{10}$.

Ⓓ $\frac{81}{40}$.

Câu 183: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm

số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = x^3 - 3f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



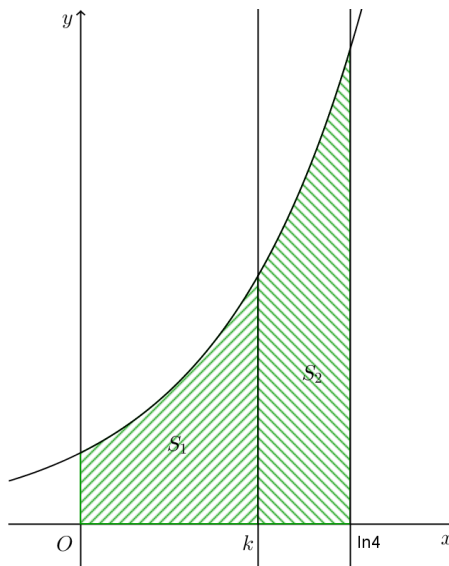
Ⓐ $g(2) < g(-1) < g(0)$.

Ⓑ $g(0) < g(-1) < g(2)$.

Ⓒ $g(-1) < g(0) < g(2)$.

Ⓓ $g(2) < g(0) < g(-1)$.

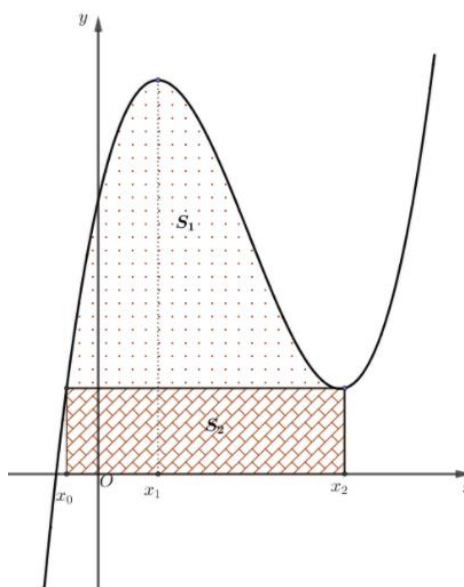
Câu 184: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($k \in \mathbb{R}; 0 < k < \ln 4$) chia hình phẳng (H) thành hai phần có diện tích là S_1 ; S_2 (xem hình vẽ).



Tìm k để $S_2 = 2S_1$.

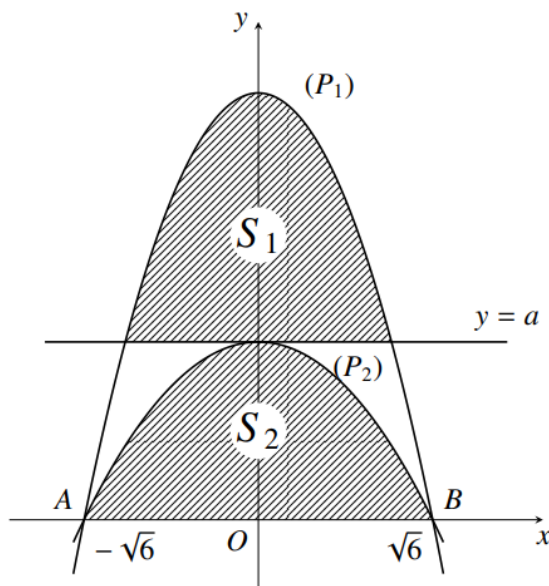
- (A) $k = \ln 3$. (B) $k = \ln \frac{8}{3}$. (C) $k = \frac{2}{3} \ln 4$. (D) $k = \ln 2$.

Câu 185: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong bên dưới. Gọi x_1 ; x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



- (A) $\frac{9}{8}$. (B) $\frac{5}{8}$. (C) $\frac{3}{8}$. (D) $\frac{3}{5}$.

Câu 186: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 6$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ).

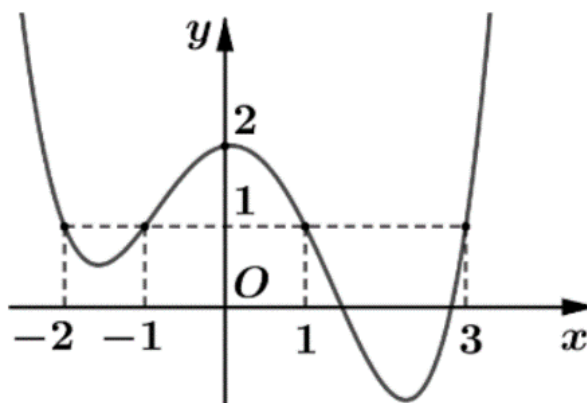


Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 12a^2 + 108a$.

- Ⓐ $T = 218$. Ⓑ $T = 219$. Ⓒ $T = 216$. Ⓓ $T = 217$.

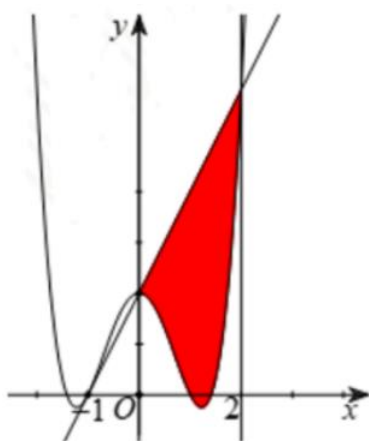
Câu 187: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Biết rằng

tích phân $K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$ có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?



- Ⓐ $(-3; -2)$. Ⓑ $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. Ⓒ $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Ⓓ $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 188: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

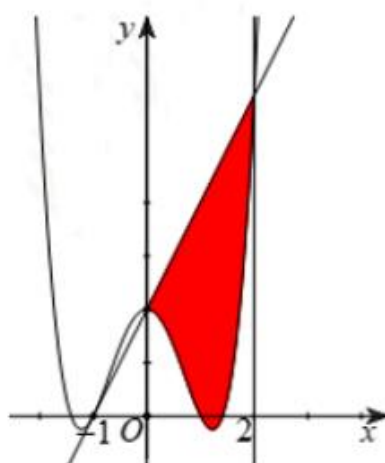
Ⓐ $\frac{2}{5}$.

Ⓑ $\frac{1}{4}$.

Ⓒ $\frac{2}{9}$.

Ⓓ $\frac{6}{5}$.

Câu 189: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

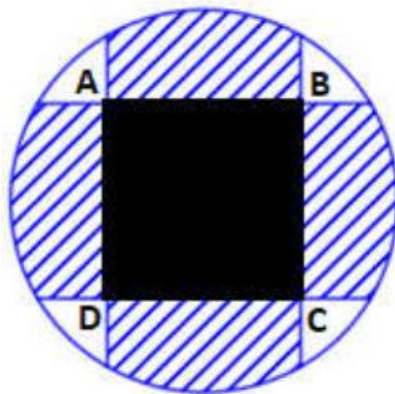
Ⓐ $\frac{2}{5}$.

Ⓑ $\frac{1}{4}$.

Ⓒ $\frac{2}{9}$.

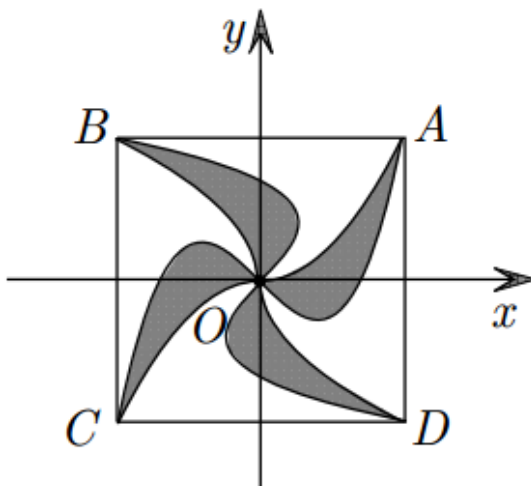
Ⓓ $\frac{1}{5}$.

Câu 190: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa. Phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ. Ở bốn góc còn lại, mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m^2 , giá trồng cỏ là 100.000 đ/m^2 , mỗi cây cọ giá 150.000 đ . Hỏi số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa như miêu tả ở trên gần bằng giá trị nào nhất?



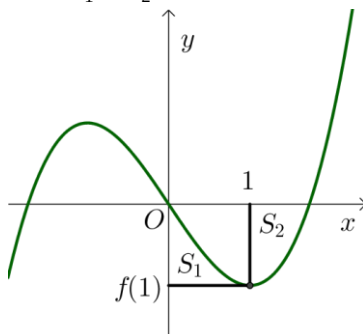
- Ⓐ 14.465.000 đồng. Ⓑ 14.865.000 đồng. Ⓒ 13.265.000 đồng. Ⓓ 12.218.000 đồng.

Câu 191: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Mặt sàn của một thang máy có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $2m$ được lát gạch màu trắng và trang trí bởi một hình 4 cánh giống nhau màu sẫm. Khi đặt trong hệ tọa độ Oxy với O là tâm hình vuông sao cho $A(1;1)$ như hình vẽ bên thì các đường cong OA có phương trình $y = x^2$ và $y = ax^3 + bx$. Tính giá trị ab biết rằng diện tích trang trí màu sẫm chiếm $\frac{1}{3}$ diện tích mặt sàn.



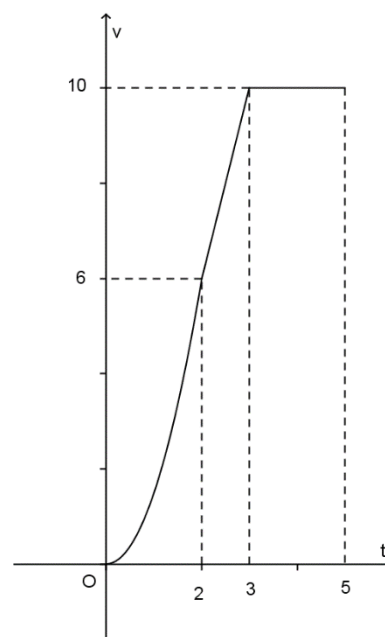
- Ⓐ -2 . Ⓑ -3 . Ⓒ 2 . Ⓓ 3 .

Câu 192: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $[f(x)+1]$ và $[f(x)-1]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng như hình bên dưới. Tính $2S_1 - S_2$



- (A) 4. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

Câu 193: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là 360 km/h . Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu tiên là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O , giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng 3 giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị 10 m/s và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?



- (A) 340 (mét). (B) 420 (mét).
 (C) 400 (mét). (D) 320 (mét).

Câu 194: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$) quay quanh trục Ox được tính theo công thức

- (A) $V = \int_a^b f^2(x) dx$. (B) $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. (C) $V = \int_a^b |f(x)| dx$. (D) $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$

Câu 195: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = \sqrt{x} - x$, $y = 0$ trong mặt phẳng Oxy . Quay hình (H) quanh trục hoành ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

- (A) $\pi \int_0^1 |\sqrt{x} - x| dx$. (B) $\int_0^1 |\sqrt{x} - x| dx$. (C) $\pi \int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx$. (D) $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx$.

Câu 196: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1$ và $y=2-x^2$. Thể tích khối tròn xoay giới hạn được tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

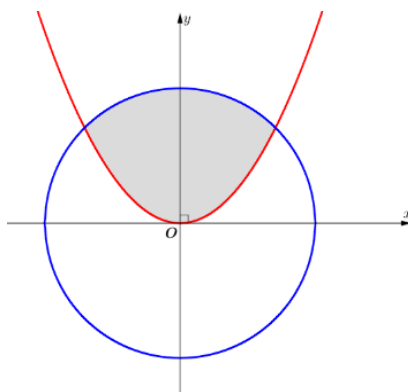
Ⓐ $V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)^2 dx.$

Ⓑ $V = \pi \int_{-1}^1 (2-x^2)^2 dx.$

Ⓒ $V = \pi \int_{-1}^1 (2-x^2)^2 dx - 2\pi.$

Ⓓ $V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)^2 dx - 4\pi.$

Câu 197: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$. Thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là



Ⓐ $V = \frac{44}{15}.$

Ⓑ $V = \frac{5\pi}{3}.$

Ⓒ $V = \frac{44\pi}{15}.$

Ⓓ $V = \frac{\pi}{5}.$

Câu 198: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=3x-2$ và đồ thị hàm số $y=x^2$ quay quanh trục Ox .

Ⓐ $\frac{4\pi}{5}.$

Ⓑ $\frac{1}{6}.$

Ⓒ $\frac{4}{5}.$

Ⓓ $\frac{\pi}{6}.$

Câu 199: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Cho hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho H quanh trục Ox .

Ⓐ $V = \frac{4}{3}\pi.$

Ⓑ $V = \frac{16}{15}.$

Ⓒ $V = \frac{4}{3}.$

Ⓓ $V = \frac{16}{15}\pi.$

Câu 200: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=-x^2+x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

Ⓐ $\frac{\pi}{30}.$

Ⓑ $\frac{\pi}{6}.$

Ⓒ $\frac{1}{30}.$

Ⓓ $\frac{1}{6}.$

Câu 201: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$ quay xung quanh trục Ox là

(A) $2\ln 2 - 1$. (B) $2\pi \ln 2 + \pi$. (C) $2\pi \ln 2 - \pi$. (D) $2\ln 2 - 1$.

Câu 202: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Một vật chuyển động có phương trình vận tốc: $v(t) = t^3 - 3t + 1$. Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ đến khi $t = 3$ là

- (A) $\frac{39}{4}m$. (B) $19m$. (C) $20m$. (D) $\frac{15}{4}$.

Câu 203: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Một chiếc máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 2t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết máy bay đạt vận tốc 120(m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- (A) 1200(m). (B) 1100(m). (C) 430(m). (D) 330(m).

HƯỚNG DẪN GIẢI NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ CHUYÊN 2020-2021

NGUYÊN HÀM

ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT – NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

Câu 1: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

Ⓑ $\int e^x dx = e^x + C.$

Ⓒ $\int x dx = \frac{x^2 + 1}{2} + C.$

Ⓓ $\int \sin x dx = \cos x + C.$

Lời giải

Ta có: $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ Suy ra đáp án D sai.

Câu 2: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2$ có họ nguyên hàm là

Ⓐ $F(x) = x^3 - 6x + C.$

Ⓑ $F(x) = x^5 + x^3 + C.$

Ⓒ $F(x) = \frac{x^5}{5} + x^3 + C.$

Ⓓ $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 + C.$

Lời giải

Áp dụng bảng nguyên hàm, ta có: $\int (x^4 - 3x^2) dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + C.$

Câu 3: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

Ⓐ $F(x) = e^{2x} + C.$

Ⓑ $F(x) = e^{3x} + C.$

Ⓒ $F(x) = 2e^{2x} + C.$

Ⓓ $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Lời giải

Áp dụng bảng nguyên hàm, ta có: $F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 4: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{5-3x}$ là:

Ⓐ $\frac{2}{9}\sqrt{(5-3x)^3} + C.$ Ⓑ $-\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C.$ Ⓒ $-\frac{2}{9}\sqrt{(5-3x)^3} + C.$ Ⓓ $\frac{1}{2}\sqrt{5-3x} + C.$

Lời giải

Ta có: $\int \sqrt{5-3x} dx = \int (5-3x)^{\frac{1}{2}} \frac{d(5-3x)}{-3}$

$$= -\frac{1}{3} \int (5-3x)^{\frac{1}{2}} d(5-3x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(5-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \sqrt{(5-3x)^3} + C.$$

Câu 5: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\int f(x)dx = 4x^4 - x^3 + x^2 - x + C$.

Ⓑ $\int f(x)dx = x^4 - x^3 + x^2 - x + C$.

Ⓒ $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + C$.

Ⓓ $\int f(x)dx = 12x^4 - 6x^3 + x^2 - x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)dx = x^4 - x^3 + x^2 - x + C$.

Câu 6: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\int f(x)dx = -3\cos 3x + C$.

Ⓑ $\int f(x)dx = 3\cos 3x + C$.

Ⓒ $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Ⓓ $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 7: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Ⓐ $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Ⓑ $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$.

Ⓒ $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Ⓓ $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{4} + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 1$.

Vậy $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{6} + 1 = \frac{3}{4}$.

Câu 8: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{2}{x}$.

Ⓐ $\cos x - \frac{2}{x^2} + C$.

Ⓑ $-\cos x + 2\ln|x| + C$.

Ⓒ $-\cos x - 2\ln|x| + C$.

Ⓓ $\cos x + 2\ln|x| + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = -\cos x + 2\ln|x| + C$.

Câu 9: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho C là một hằng số. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

(A) $\int 2x dx = x^2 + C$.

(B) $\int \sin x dx = \cos x + C$.

(C) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

(D) $\int e^x dx = e^x - C$.

Lời giải

Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Câu 10: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\int f(x) dx = 3\cos x + C$.

(B) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}\cos x + C$.

(C) $\int f(x) dx = 3\cos 3x + C$.

(D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 11: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là:

(A) $e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

(B) $e^x + 1 + C$.

(C) $\frac{1}{x+1}e^{x+1} + \frac{x^2}{2} + C$.

(D) $\frac{1}{2}e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

Ta có $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 12: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tìm họ nguyên hàm

$\int \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx$

(A) $x^2 + \ln|x-1| + C$.

(B) $x + \frac{1}{x-1} + C$.

(C) $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$.

(D) $1 - \frac{1}{(x-1)^2} + C$.

Lời giải

Ta có $\int \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$.

Câu 13: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $F(x)$, $f(x)$ liên tục trên khoảng K , khi đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng K nếu với mọi $x \in K$ ta có

- Ⓐ $F(x) = f'(x)$. Ⓑ $F(x) = f''(x)$. Ⓒ $F'(x) = f(x)$. Ⓓ $F''(x) = f(x)$.

Lời giải

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng K nếu với mọi $x \in K$ ta có $F'(x) = f(x)$.

Câu 14: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- Ⓐ $\int f(x)dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C$. Ⓑ $\int f(x)dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$.
 Ⓒ $\int f(x)dx = -2\sin 2x + C$. Ⓓ $\int f(x)dx = 2\sin 2x + C$.

Lời giải

Ta có nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\text{Vậy } \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

Câu 15: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$.

- Ⓐ $\int f(x)dx = 6x + C$. Ⓑ $\int f(x)dx = x + C$.
 Ⓒ $\int f(x)dx = x^3 + C$. Ⓓ $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C = x^3 + C.$$

Câu 16: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos 2x$.

- Ⓐ $x^2 - \sin 2x + C$. Ⓑ $x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C$. Ⓒ $x^2 + \sin 2x + C$. Ⓓ $x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int (2x + \cos 2x) dx = \int 2x dx + \int \cos 2x dx = x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

Câu 17: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) $\int \tan x dx$ bằng

- ☐ A $-\frac{1}{\sin^2 x} + C.$
☐ B $\ln|\cos x| + C.$
☐ C $\frac{1}{\cos^2 x} + C.$
☒ D $-\ln|\cos x| + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

Câu 18: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Một nguyên

hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ là $F(x)$ bằng

- ☐ A $-\frac{2}{(2x-3)^2}.$
☐ B $\frac{1}{2(2x-3)^2}.$
☐ C $2\ln|2x-3|.$
☒ D $\frac{1}{2}\ln|2x-3|.$

Lời giải

Chọn D

$I = \int f(x) dx = \int \frac{1}{2x-3} dx.$ Đặt: $u = 2x-3 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du.$

Khi đó, $I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C.$

Thay $u = 2x-3$ ta được $I = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C.$

Câu 19: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

- ☐ A $\frac{1}{2}e^x + C.$
☒ B $\frac{1}{2}e^{2x} + C.$
☐ C $2e^{2x} + C.$
☐ D $2e^x + C.$

Lời giải

Ta có $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$ Vậy $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$

Câu 20: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x - x$ là

☒ A $\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{x^2}{2} + C.$
☐ B $5^x - x^2 + C.$
☐ C $5^x \ln 2 - \frac{x^2}{2} + C.$
☐ D $\frac{5^x}{\ln 5} - 1 + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (5^x - x) dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{x^2}{2} + C.$

Câu 21: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 4x$ là

☐ A $-\cos x + 4x^2 + C.$
☐ B $\cos x + 4x^2 + C.$
☒ C $-\cos x + 2x^2 + C.$
☐ D $\cos x + 2x^2 + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (\sin x + 4x) dx = -\cos x + 2x^2 + C.$

Câu 22: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-2}.$

☐ A $\int \frac{dx}{3x-2} = \ln|3x-2| + C.$
☐ B $\int \frac{dx}{3x-2} = -\frac{1}{2} \ln|3x-2| + C.$
☒ C $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C.$
☐ D $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|2-3x| + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C = \frac{1}{3} \ln|2-3x| + C.$

Câu 23: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là.

☒ A $\frac{1}{2} x^4 - 9x + C.$
☐ B $4x^3 - 9x + C.$
☐ C $4x^4 - 9x + C.$
☐ D $\frac{1}{4} x^4 + C.$

Lời giải

Ta có $\int (2x^3 - 9) dx = \frac{2}{4} x^4 - 9x + C = \frac{1}{2} x^4 - 9x + C.$

Câu 24: Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

☐ A $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}.$
☐ B $\int 2e^x dx = 2(e^x + C).$

Ⓒ $\int \sin x dx = C - \cos x.$

Ⓓ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có công thức đúng là $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, còn $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ chỉ đúng khi $x > 0$.

Câu 25: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

Ⓐ $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$ Ⓑ $x^2 + 2 \cos 2x + C.$ Ⓒ $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$ Ⓓ $x^2 - 2 \cos 2x + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int 2x + \sin 2x dx = x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

Câu 26: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

Ⓐ $2x^2 + 3x + C.$ Ⓑ $2x^2 + C.$ Ⓒ $x^2 + C.$ Ⓓ $x^2 + 3x + C.$

Lời giải

$$\text{Họ nguyên hàm của } f(x) = 2x + 3 \text{ là } \int (2x + 3) dx = \int 2x dx + \int 3 dx = x^2 + 3x + C.$$

Câu 27: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x} + 1$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

Ⓐ $F(x) = x^2 + x + \ln|x| - 2.$ Ⓑ $F(x) = x^2 + x + \ln|x| + 2.$

Ⓒ $F(x) = x^2 + x - \ln|x| - 2.$ Ⓓ $F(x) = x^2 - x + \ln|x| + 2.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \left(2x + \frac{1}{x} + 1 \right) dx = x^2 + \ln|x| + x + C.$$

$$\text{Do } F(1) = 0, \text{ nên } C = -2. \text{ Vậy } F(x) = x^2 + \ln|x| + x - 2.$$

Câu 28: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là:

- Ⓐ $6x$. Ⓑ $x^3 + 1$. Ⓒ $x^3 + x$. Ⓓ $3x^3 + x$.

Lời giải

Chọn C

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x + C$$

Chọn $C = 0$ thì $F(x) = x^3 + x$.

Câu 29: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\int f(x)dx = x^4 + 3x + C$. Ⓑ $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^4 + 3x + C$.
 Ⓒ $\int f(x)dx = 4x^4 + 3x + C$. Ⓓ $\int f(x)dx = 12x^3 + 3x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } (x^4 + 3x + C)' = 4x^3 + 3.$$

Câu 30: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- Ⓐ $x + \frac{2}{x^2} + C$. Ⓑ $x - 2\ln x + C$. Ⓒ $x + 2\ln x + C$. Ⓓ $x - \frac{2}{x^2} + C$.

Lời giải

$$\text{Trên khoảng } (0; +\infty) \text{ ta có } \int \frac{x-2}{x}dx = \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)dx = x - 2\ln x + C.$$

Câu 31: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là

- Ⓐ $6x - \cos x + C$. Ⓑ $x^3 - \cos x + C$.
 Ⓒ $x^3 + \cos x + C$. Ⓓ $x^3 - \sin x + C$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int (3x^2 - \sin x)dx = x^3 + \cos x + C$$

Câu 32: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 3x^2 + \sin x \quad (C \text{ là hằng số})$$

- Ⓐ $x^3 - \cos x + C$. Ⓑ $6x + \cos x + C$. Ⓒ $x^3 + \cos x + C$. Ⓓ $6x - \cos x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C.$$

Câu 33: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = e^{3x} \quad (C \text{ là hằng số})$$

- Ⓐ $\int f(x) dx = 3e^{3x} + C$. Ⓑ $\int f(x) dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$.
 Ⓒ $\int f(x) dx = e^{3x} + C$. Ⓓ $\int f(x) dx = \frac{e^{3x+1}}{3x+1} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x) dx = \frac{e^{3x}}{3} + C.$$

Câu 34: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VĨNG TÀU NĂM 2020-2021) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- Ⓐ $6x$. Ⓑ $x^3 + 1$. Ⓒ $x^3 + x$. Ⓓ $3x^3 + x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$$

Cho $C = 0$ ta được một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $x^3 + x$. Chọn đáp án Ⓒ

Câu 35: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- Ⓐ $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}$. Ⓑ $\int 2e^x dx = 2(e^x + C)$. Ⓒ $\int \sin x dx = C - \cos x$. Ⓓ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Áp dụng công thức } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

Câu 36: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là:

- Ⓐ $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$. Ⓑ $x^2 + 2 \cos 2x + C$. Ⓒ $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. Ⓓ $x^2 - 2 \cos 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (2x + \sin 2x) dx = x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$;

Câu 37: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$

- Ⓐ $2 \sin 2x + C$. Ⓑ $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$. Ⓒ $\frac{1}{2} \sin 2x + C$. Ⓓ $-2 \sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 38: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho $\int f(x) dx = 3x^2 + 2x - 3 + C$. Hỏi $f(x)$ là hàm số nào?

- Ⓐ $f(x) = 6x + 2$. Ⓑ $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + C$.
Ⓒ $f(x) = 6x + 2 + C$. Ⓓ $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = (3x^2 + 2x - 3 + C)' = 6x + 2$.

Câu 39: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$ là

- Ⓐ $1 + \cos x + C$. Ⓑ $1 - \cos x + C$. Ⓒ $x + \cos x + C$. Ⓓ $x - \cos x + C$.

Lời giải

Chọn D

$F(x) = \int f(x) dx = x - \cos x + C$.

Câu 40: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

- ☐ A $e^x + C$.
 ☐ B $e^{2x} + C$.
 ☒ C $\frac{e^{2x}}{2} + C$.
 ☐ D $\frac{e^x}{2} + C$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm ta chọn C

Câu 41: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

- ☒ A $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$.
 ☐ B $-\cos 3x + C$.
 ☐ C $\cos 3x + C$.
 ☐ D $\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)dx = \int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 42: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $x \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- ☒ A $\int f(x)dx = 3\ln|x-1| + C, \forall x \neq 1$.
 ☐ B $\int f(x)dx = 3\ln(x-1) + C, \forall x \neq 1$.
☐ C $\int f(x)dx = 2x + 3\ln|x-1| + C, \forall x \neq 1$.
 ☐ D $\int f(x)dx = 3\ln(x-1) + C, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{2x+1}{x-1}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1}\right)dx = 2x + 3\ln|x-1| + C, \forall x \neq 1$.

Câu 43: Biết $\int f(x)dx = x^2 + C$. Tính $\int f(2x)dx$

- ☐ A $\int f(2x)dx = \frac{1}{2}x^2 + C$.
 ☐ B $\int f(2x)dx = \frac{1}{4}x^2 + C$.
☒ C $\int f(2x)dx = 2x^2 + C$.
 ☐ D $\int f(2x)dx = 4x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x)dx = x^2 + C \Rightarrow f(x) = 2x$.

Suy ra: $\int f(2x)dx = \int 2 \cdot 2x dx = 2x^2 + C$.

Câu 44: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Tìm nguyên hàm $\int (4x^3 + 2x + 1)dx$.

- Ⓐ $4x^4 + 2x^2 + x + C$. Ⓑ $x^4 + 2x^2 + x + C$. Ⓒ $x^4 + x^2 + x + C$. Ⓓ $\frac{x^4}{4} + x^2 + x + C$.

Lời giải

Ta có:

$$\int (4x^3 + 2x + 1)dx = \int 4x^3 dx + \int 2x dx + \int 1 dx = x^4 + x^2 + x + C.$$

Câu 45: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \cos 2x$ trên $\mathbb{R}$ và $F(0) = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

- Ⓐ $T = 2$. Ⓑ $T = 3$. Ⓒ $T = \frac{1}{2}$. Ⓓ $T = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

$$\text{Mà } F(0) = 0 \text{ nên } C = 0. \text{ Suy ra } F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \pi = 0 \text{ và } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } T = F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 46: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tính nguyên hàm $\int \tan^2 2x dx$.

- Ⓐ $\tan 2x - x + C$. Ⓑ $\frac{1}{2} \tan 2x - x + C$. Ⓒ $\frac{1}{2} \tan 2x + x + C$. Ⓓ $\tan 2x + x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int \tan^2 2x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx - \int dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C.$$

Câu 47: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho

hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, $f(0) = 1$. Giá trị của $f(-1)$ bằng:

- Ⓐ $3\ln 2 + 3$. Ⓑ $2\ln 2 + 1$. Ⓒ $3\ln 2 + 4$. Ⓓ $12\ln 2 + 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| + C$$

$$\text{Vì: } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \ln|3x-1| + 1$$

$$\text{Vậy: } f(-1) = \ln 4 + 1 = 2\ln 2 + 1$$

Câu 48: (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021 LẦN 01) Với mọi hàm số $f(x)$

; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, cho các khẳng định sau:

$$(I). \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

$$(II). \int [f(x) \cdot g(x)] dx = \left(\int f(x) dx \right) \cdot \left(\int g(x) dx \right).$$

$$(III). \text{Nếu } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ thì } \int f(u) du = F(u) + C.$$

$$(IV). \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với mọi hằng số } k \in \mathbb{R}.$$

Có bao nhiêu khẳng định sai?

- Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải

Chọn C

Các khẳng định sai là (II); (IV).

Câu 49: (THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021 LẦN 01) Biết rằng

$$\int (\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x) dx = \frac{a}{b} \cos 4x + C \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản}$$

($a < 0, b > 0$), tính $2a + b$.

- Ⓐ -13. Ⓑ 13. Ⓒ -10. Ⓓ 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned}
& \cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \cos^3 x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x) + \sin^3 x \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x) \\
& = 3\cos^3 x \cdot \sin x - 4\sin^3 x \cdot \cos^3 x + 4\sin^3 x \cdot \cos^3 x + 3\sin^3 x \cdot \cos x \\
& = 3\cos^3 x \cdot \sin x + 3\sin^3 x \cdot \cos x \\
& = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
& = \frac{3}{2} \sin 2x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
& = \frac{3}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{3}{4} \sin 4x \\
& \Rightarrow \int (\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x) dx = \frac{3}{4} \int \sin 4x dx = -\frac{3}{16} \cos 4x + C = \frac{a}{b} \cos 4x + C.
\end{aligned}$$

$$\text{Vì: } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 16 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 10.$$

Câu 50: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

(A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

(B) $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

(C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

(D) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$$

$$\text{Mà } F(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 51: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x) = 1 - 2\cos^2 x$. Tìm nguyên hàm của $f(x)$?

(A) $-\frac{\sin 2x}{2} + C$.

(B) $\frac{\sin 2x}{2} + C$.

(C) $\sin 2x + C$.

(D) $-\sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x) dx = \int (1 - 2 \cos^2 x) dx = -\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$

Câu 52: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị $F(-2)$ bằng

- Ⓐ $1 + \frac{1}{2} \ln 5.$ Ⓑ $\frac{1}{2}(1 + \ln 5).$ Ⓒ $1 + \frac{1}{2} \ln 3.$ Ⓓ $1 + \ln 5.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C.$

Với $F(0) = C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + 1 \Rightarrow F(-2) = \frac{1}{2} \ln 5 + 1.$

Câu 53: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- Ⓐ $2 \ln(4x-3) + C.$ Ⓑ $\frac{1}{2} \ln(4x-3) + C.$ Ⓒ $\frac{1}{4} \ln(4x-3) + C.$ Ⓓ $4 \ln(4x-3) + C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4x - 3 \Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$. Vì $x \in (1; +\infty)$ nên $t > 0$.

Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{2}{t} \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln t + c = \frac{1}{2} \ln(4x-3) + C.$

Câu 54: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x-1}$ là

- Ⓐ $\frac{9^x}{3} + C.$ Ⓑ $\frac{9^x}{3 \ln 3} + C.$ Ⓒ $\frac{9^x}{6 \ln 3} + C.$ Ⓓ $\frac{9^x}{6} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int 3^{2x-1} dx = \frac{3^{2x-1}}{2 \ln 3} + C = \frac{9^x}{6 \ln 3} + C.$

Câu 55: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Họ nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

- (A) $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$
 (B) $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$
 (C) $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$
 (D) $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

Lời giải

Do $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{x} = F'(x) \\ \int \frac{f(x)}{x} dx = F(x) + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x^3} \\ \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2} + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2} + C \end{cases}.$$

Suy ra :

$$\int f'(x)\ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{f(x)}{x} \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$$

Câu 56: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính giá trị của $A = 3f^2(3) - 678$.

- (A) 2018.
 (B) 2021.
 (C) 2022.
 (D) 2019.

Lời giải

$$\text{Ta có } (f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x^2 + 1$$

$$\Rightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 15x^4 + 12x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 4x^3 + x + C_1$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f'(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 0, .$$

$$\text{Do đó ta có : } f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 4x^3 + x$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int (3x^5 + 4x^3 + x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f^2(x) = \frac{1}{2} x^6 + x^4 + \frac{1}{2} x^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f^2(0) = C_2 \Rightarrow C_2 = 0, .$$

$$\text{Do đó ta có } f^2(x) = x^6 + 2x^4 + x^2.$$

$$\text{Vậy } A = 3f^2(3) - 678 = 2022.$$

- Câu 57: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) = 2x - 1$ và $f(3) = 5$. Giả sử phương trình $f(x) = 999$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tính tổng $S = \log|x_1| + \log|x_2|$.
- (A) 5. (B) 999. (C) 3. (D) 1001.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + C.$$

$$\text{Do } f(3) = 5 \text{ nên } 3^2 - 3 + C = 5 \Leftrightarrow C = -1$$

$$\text{Vậy: } f(x) = 999 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 999 \Leftrightarrow x^2 - x - 1000 = 0 (*)$$

Nhận thấy phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1 x_2 = -1000$.

$$\text{Khi đó: } S = \log|x_1| + \log|x_2| = \log|x_1 x_2| = \log 1000 = 3.$$

- Câu 58: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) \sin x = 1 - f(x) \cos x$ với mọi số thực x . Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

(A) -1.

(B) 1.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) \sin x = 1 - f(x) \cos x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \sin x + f(x) \cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow (f(x) \sin x)' = \cos x$$

$$\text{Suy ra: } f(x) \sin x = \sin x + C$$

$$\text{Chọn } x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) \sin x = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

- Câu 59: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- (A) $I = 1$. (B) $I = 8$. (C) $I = -8$. (D) $I = -12$.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$.

Đặt $u = x+1 \Rightarrow du = dx$.

$dv = f'(x) dx$, ta chọn $v = f(x)$.

Khi đó $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = (x+1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$.

Suy ra $\int_0^1 f(x) dx = (x+1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 2f(1) - f(0) - 10 \Leftrightarrow 2 - 10 = -8$.

Vậy $I = \int_0^1 f(x) dx = -8$.

Câu 60: HẾT (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tính nguyên hàm

$\int x^2 (2x^3 - 1)^2 dx$.

Ⓐ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{18} + C$. Ⓑ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{3} + C$. Ⓒ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{6} + C$. Ⓓ $\frac{(2x^3 - 1)^3}{9} + C$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\int x^2 (2x^3 - 1)^2 dx = \frac{1}{6} \int (2x^3 - 1)^2 d(2x^3 - 1) = \frac{(2x^3 - 1)^3}{18} + C$.

Câu 61: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Khi tính

nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

Ⓐ $\int 2u(u^2 - 4) du$. Ⓑ $\int 2(u^2 - 1) du$. Ⓒ $\int 2(u^2 - 4) du$. Ⓓ $\int (u^2 - 4) du$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$. Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Leftrightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow 2u \cdot du = dx$.

Khi đó $I = \int \frac{u^2 - 1 - 3}{u} 2u \cdot du = \int 2(u^2 - 4) \cdot du$.

Câu 62: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Tính nguyên hàm $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

bằng cách đặt $t = \sqrt{x+4}$ ta thu được nguyên hàm nào?

Ⓐ $\int \frac{2dt}{t^2 - 4}$. Ⓑ $\int \frac{2tdt}{(t^2 - 4)}$. Ⓒ $\int \frac{2dt}{(t^2 - 4)t}$. Ⓓ $\int \frac{dt}{t^2 - 4}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow t^2 = x+4 \Rightarrow 2tdt = dx$ và $x = t^2 - 4$. Ta có:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-4)t} = \int \frac{2dt}{t^2-4}.$$

Câu 63: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hỏi $F(x^2)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây:

- Ⓐ $2x.f(x)$. Ⓑ $x.f(x^2)$. Ⓒ $f(x^2)$. Ⓓ $2x.f(x^2)$.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx = d(x^2)$$

$$F(x^2) = F(t) = \int f(t)dt = \int f(x^2).2xdx = \int 2x.f(x^2)dx.$$

Câu 64: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VĨNG TÀU NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hỏi $F(x^2)$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

- Ⓐ $2x.f(x)$. Ⓑ $x.f(x^2)$. Ⓒ $f(x^2)$. Ⓓ $2x.f(x^2)$.

Lời giải

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R} \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } [F(x^2)]' = (x^2)' \cdot F'(x^2) = 2x.f(x^2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $F(x^2)$ là một nguyên hàm của hàm số $2x.f(x^2)$.

Câu 65: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1; 2]$, thỏa mãn $f(x) = xf'(x) - x^2$. Biết $f(1) = 3$. Tính $f(2)$.

- Ⓐ 16. Ⓑ 2. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo bài } f(x) = xf'(x) - x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \int 1 \cdot dx = x + C \Leftrightarrow f(x) = x^2 + Cx.$$

Mà $f(1) = 3 \Leftrightarrow 1^2 + C \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow C = 2$. Vậy $f(x) = x^2 + 2x$. Suy ra $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$.

Câu 66: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho

$\int f(4x)dx = e^{2x} - x^2 + C$. Khi đó $\int f(-x)dx$ bằng

- Ⓐ $\frac{e^{2x}}{4} + 4x^2 + C$. Ⓑ $4e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}x^2 + C$. Ⓒ $-4e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}x^2 + C$. Ⓓ $-e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(4x)dx = e^{2x} - x^2 + C \Rightarrow f(4x) = (e^{2x} - x^2 + C)' = 2e^{2x} - 2x$.

Đặt $x = -\frac{1}{4}t$ suy ra $f(4x) = f(-t) = 2e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}t$.

Khi đó $f(-x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x$.

Ta có $\int f(-x)dx = \int \left(2e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x\right)dx = -4e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}x^2 + C$.

Câu 67: (THPT CHUYÊN PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 02) Biết

$\int \frac{(mx+1)\ln x}{x^2}dx = \ln^2 x + \frac{n \ln(px)}{x} + C$ với m, n, p, C là các số thực. Khi đó, $m+n+p$ bằng

- Ⓐ $e+1$. Ⓑ $e+2$. Ⓒ $2e-1$. Ⓓ $2e-2$.

Lời giải

$\int \frac{(mx+1)\ln x}{x^2}dx = m \int \frac{\ln x}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x^2}dx = I_1 + I_2$.

* Tính $I_1 = m \int \frac{\ln x}{x}dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

$I_1 = m \int t dt = \frac{mt^2}{2} + C_1 = \frac{m \ln^2 x}{2} + C_1$

* Tính $I_2 = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I_2 = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C_2 = \frac{-\ln(ex)}{x} + C_2$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{(mx+1)\ln x}{x^2} dx = \frac{m}{2} \ln^2 x + \frac{-\ln(ex)}{x} + C$$

$$\Rightarrow m=2, n=-1, p=e \Rightarrow m+n+p=1+e.$$

Câu 68: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của

$$\text{hàm số } f(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{2021}}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ và } F(0) = 1. \text{ Giá trị của } F(1) \text{ bằng}$$

(A) $\frac{(1+\sqrt{2})^{2020} - 2021}{2020}.$

(B) $\frac{(1+\sqrt{2})^{2021} + 2020}{2021}.$

(C) $\frac{(1+\sqrt{2})^{2020} + 2021}{2020}.$

(D) $\frac{(1+\sqrt{2})^{2021} - 2020}{2021}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow dt = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{2021}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int t^{2020} dt = \frac{t^{2021}}{2021} + C = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{2021}}{2021} + C.$$

$$\text{Lại có } F(0) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{2021}}{2021} + \frac{2020}{2021}.$$

$$\Rightarrow F(1) = \frac{(1 + \sqrt{2})^{2021} + 2020}{2021}.$$

Câu 69: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$f'(x) + x(e^{f(x)} + 2) + \frac{x}{e^{f(x)}} = 0. \text{ Giá trị của } f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ bằng}$$

(A) $\ln 3.$

(B) $\ln 6.$

(C) $\ln 7.$

(D) $\ln 5.$

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình trên tương đương với:

$$\begin{aligned} f'(x) + x(e^{f(x)} + 2) + \frac{x}{e^{f(x)}} &= +0 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + x e^{f(x)} (e^{f(x)} + 2) + x = 0 \\ \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + x(e^{2f(x)} + 2e^{f(x)} + 1) &= 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + x(e^{f(x)} + 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-e^{f(x)} f'(x)}{(e^{f(x)} + 1)^2} &= x \end{aligned}$$

Đến đây ta nguyên hàm hai vế, ta được như sau:

$$\Rightarrow \int \frac{-e^{f(x)} f'(x)}{(e^{f(x)} + 1)^2} dx = \int x dx \Leftrightarrow \int d\left(\frac{1}{(e^{f(x)} + 1)}\right) = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{1}{(e^{f(x)} + 1)} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \text{ nên ta suy ra } C = 0 \Rightarrow \frac{1}{(e^{f(x)} + 1)} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2} - 1\right)$$

$$\text{Từ đó suy ra } f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 7$$

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 70: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề đúng?

A $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) + \int u'(x).v'(x) dx$.

B $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v'(x) dx$.

C $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) + \int u'(x).v(x) dx$.

D $\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x) dx$.

Lời giải

Ta có theo công thức tính nguyên hàm của hàm hợp ta có

$$\int u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x) dx$$

Câu 71: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tính nguyên hàm

$$A = \int \frac{1}{x \ln x} dx \text{ bằng cách đặt } t = \ln x. \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

A $A = \int dt$.

B $A = \int \frac{1}{t^2} dt$.

C $A = \int \frac{1}{t} dt$.

D $A = \int t dt$.

Lời giải

$$\text{Xét } A = \int \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } A = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{t} dt.$$

Câu 72: (THPT CHUYÊN NAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 01) Một nguyên hàm của $\ln x$ bằng

- Ⓐ $x - x \ln x$. Ⓑ $\frac{1}{x}$. Ⓒ $x + x \ln x$. Ⓓ $1 - x + x \ln x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Vậy một nguyên hàm của $\ln x$ bằng $1 - x + x \ln x$.

Câu 73: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tìm nguyên hàm $\int (2x-1) \ln x dx$

- Ⓐ $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. Ⓑ $(x - x^2) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.
Ⓒ $(x^2 - x) \ln x + \frac{x^2}{2} + x + C$. Ⓓ $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 - x \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \int (2x-1) \ln x dx = (x^2 - x) \ln x - \int (x^2 - x) \frac{1}{x} dx$$

$$= (x^2 - x) \ln x - \int (x-1) dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Câu 74: (THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho

$F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x}$

trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a - 2b + 4c$.

- Ⓐ $T = 1012$. Ⓑ $T = -2012$. Ⓒ $T = 1004$. Ⓓ $T = 1018$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } F(x) = \int (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2020x^2 + 2022x - 1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (4040x + 2022) dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{2} (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int (4040x + 2022)e^{2x} dx + C.$$

$$\text{Đặt } I = \int (4040x + 2022)e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = 4040x + 2022 \\ dv_1 = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 4040 dx \\ v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

Do đó

$$I = \frac{1}{2} (4040x + 2022)e^{2x} - 2020 \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} (4040x + 2022)e^{2x} - 1010e^{2x} = (2020x + 1)e^{2x}.$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (2020x^2 + 2022x - 1)e^{2x} - \frac{1}{2} (2020x + 1)e^{2x} + C$$

$$= 1010x^2 e^{2x} + 1011xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} - 1010xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$= 1010x^2 e^{2x} + xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$$= (1010x^2 + x - 1)e^{2x} + C.$$

Theo đề bài, ta có $a = 1010$, $b = 1$, $c = 1$, $C = 0$. Vậy $T = 1010 - 2 + 4 = 1012$.

Câu 75: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là

- Ⓐ $-x^2 + 2x + C$. Ⓑ $-x^2 + x + C$. Ⓒ $-2x^2 + 2x + C$. Ⓓ $2x^2 - 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f'(x)e^{2x} dx = e^{2x} f(x) - 2 \int f(x)e^{2x} dx = e^{2x} f(x) - 2x^2 + C = I$$

Ta lại có $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x} \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x^2)' = 2x$

$$\Rightarrow I = 2x - 2x^2 + C$$

Câu 76: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên. Biết rằng $G(x) = x^3$ là một nguyên hàm của $g(x) = e^{-2x} f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Họ tất cả các nguyên hàm của $e^{-2x} f'(x)$ là

- Ⓐ $-2x^3 + 3x^2 + C$. Ⓑ $2x^3 + 3x^2 + C$. Ⓒ $x^3 + 3x^2 + C$. Ⓓ $-x^3 + 3x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Dùng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\begin{aligned}\int e^{-2x} f'(x) dx &= e^{-2x} f(x) + 2 \int e^{-2x} f(x) dx \\ &= e^{-2x} f(x) + 2x^3 + C = G'(x) + 2x^3 + C = 3x^2 + 2x^3 + C\end{aligned}$$

Câu 77: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + g(x) = x$,

$g'(x) + f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = g(0) = 1$, tính $f(1)$.

- (A) $\frac{2}{e} - 2$. (B) $e + \frac{1}{e} - 2$. (C) $\frac{e^2 - 2}{2e}$. (D) $\frac{e^2 + 2}{2e}$.

Lời giải

Đặt $h(x) = f(x) + g(x)$.

Từ giả thiết ta có $h'(x) + h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow h'(x).e^x + h(x).e^x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (h(x).e^x)' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $h(x).e^x = C$. Do $f(0) = g(0) \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\text{Do đó } f(x) + g(x) = \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2}{e^x} - f(x) \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{e^x} - f'(x).$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta có: } -\frac{2}{e^x} - f'(x) + f(x) = -x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x - \frac{2}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x).e^{-x} - f(x).e^{-x} = x.e^{-x} - \frac{2}{e^{2x}} \Leftrightarrow (f(x).e^{-x})' = x.e^{-x} - \frac{2}{e^{2x}}.$$

$$\text{Suy ra } f(x).e^{-x} = \int \left(x.e^{-x} - \frac{2}{e^{2x}} \right) dx = \int x.e^{-x} dx - \int \frac{2}{e^{2x}} dx = -\int x d(e^{-x}) + \frac{1}{e^{2x}}$$

$$= -\left(x.e^{-x} - \int e^{-x} dx \right) + \frac{1}{e^{2x}} = -x.e^{-x} - e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}} + C_1.$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \text{ nên ta có } C_1 = 1. \text{ Do đó } f(x) = -x - 1 + \frac{1}{e^x} + e^x.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -2 + \frac{1}{e} + e.$$

TÍCH PHÂN

ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT – TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Câu 78: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$,

$\int_0^2 f(x) dx = 1$. Tích phân $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 1 - 2 = -1.$$

Câu 79: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Cho

$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = 12$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) -2. (B) 12. (C) 22. (D) 2.

Lời giải

$$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = 12 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 12$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 12 + 2 \int_0^1 g(x) dx = 12 + 2 \cdot 5 = 22.$$

Câu 80: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Câu 81: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_{-1}^1 x^{2020} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{2021}$. (B) $\frac{2}{2021}$. (C) $\frac{2}{2020}$. (D) 0.

Lời giải

$$\int_{-1}^1 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2021} - \left(\frac{-1}{2021} \right) = \frac{2}{2021}.$$

Câu 82: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^3 f(x) dx = 7$

thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 10. (B) 4. (C) -4. (D) 21.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 7 - 3 = 4.$$

Câu 83: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0; 2]$, $f(0) = 1$ và $\int_0^2 f'(x) dx = -3$. Tính $f(2)$

- (A) $f(2) = -4$. (B) $f(2) = -3$. (C) $f(2) = -2$. (D) $f(2) = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^2 = f(2) - f(0) = -3 \Rightarrow f(2) = -3 + f(0) = -2$$

Câu 84: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho

$f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên R thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$;

$$\int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx = 4 \text{ và } \int_0^2 [2f(x) + g(x)] dx = 8. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx.$$

- (A) $I = 0$. (B) $I = 2$. (C) $I = 1$. (D) $I = 3$.

Lời giải

$$\text{Do } \int_0^2 [f(x) - 3g(x)] dx = 4 \text{ và } \int_0^2 [2f(x) + g(x)] dx = 8 \text{ nên } \begin{cases} \int_0^2 f(x) dx - 3 \int_0^2 g(x) dx = 4 \\ \int_0^2 2f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx = 8 \end{cases}$$

$$\text{Vì vậy } \int_0^2 f(x) dx = 4.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Câu 85: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Nếu

$$\int_1^2 f(x) dx = 5 \text{ và } \int_1^2 g(x) dx = 9 \text{ thì } \int_1^2 [2f(x) + g(x)] dx \text{ bằng}$$

Ⓐ 19.

Ⓑ 28.

Ⓒ 14.

Ⓓ 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^2 [2f(x) + g(x)] dx = 2 \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 2 \cdot 5 + 9 = 19.$$

Câu 86: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Nếu

$$\int_1^3 [f(x) - 2x] dx = 5 \text{ thì } \int_1^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

Ⓐ 9.

Ⓑ 13.

Ⓒ 10.

Ⓓ 12.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^3 [f(x) - 2x] dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 2x dx = 5 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 5 + x^2 \Big|_1^3 = 5 + 8 = 13.$$

Câu 87: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \text{ bằng}$$

Ⓐ 1.

Ⓑ 0.

Ⓒ 2.

Ⓓ -2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Câu 88: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng

Ⓐ $e^2 - 1$.Ⓑ $\frac{e-1}{2}$.Ⓒ $2(e^2 - 1)$.Ⓓ $\frac{e^2 - 1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Câu 89: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định sai.

Ⓐ $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Ⓑ $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Ⓒ $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

Ⓓ $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.

Lời giải

$$\text{Theo định nghĩa tích phân, ta có } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Vậy D là khẳng định sai.

- Câu 90: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04)** Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 g(x)dx = -1$ thì $\int_1^2 [2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng
- Ⓐ 2. Ⓑ 9. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải

$$\int_1^2 [2f(x) + 3g(x)]dx = 2\int_1^2 f(x)dx + 3\int_1^2 g(x)dx = 2.3 + 3(-1) = 3.$$

- Câu 91: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04)** Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng
- Ⓐ $-\frac{\pi}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ -1. Ⓓ $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

- Câu 92: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021)** Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^1 f(x)dx = -1, \int_0^1 g(x)dx = 2$. Tính $\int_0^1 [2f(x) + 3g(x)]dx$
- Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ -2. Ⓓ 5.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [2f(x) + 3g(x)]dx = 2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_0^1 g(x)dx = 2(-1) + 3.2 = 4.$$

- Câu 93: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;6]$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_2^4 f(x)dx = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.
- Ⓐ 4. Ⓑ 8. Ⓒ 16. Ⓓ 10.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^6 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx = 10$$

$$\text{Suy ra } P = \int_0^2 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx = 10 - \int_2^4 f(x)dx = 10 - 6 = 4.$$

Câu 94: Tính $I = \int_0^1 e^{3x} dx$.

- Ⓐ $I = e^3 - 1$. Ⓑ $I = e - 1$. Ⓒ $I = \frac{e^3 - 1}{3}$. Ⓓ $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} (e^{3x}) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (e^3 - 1).$$

Câu 95: Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_2^5 f(x)dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

- Ⓐ -2 . Ⓑ 4 . Ⓒ 2 . Ⓓ 3 .

Lời giải

Chọn C

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 3 + (-1) = 2.$$

Câu 96: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^2 x} dx$

bằng

- Ⓐ 2 . Ⓑ 3 . Ⓒ 1 . Ⓓ $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Tích phân } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^2 x} dx = -2 \cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 \left(\cot \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{4} \right) = 2.$$

Câu 97: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Nếu $\int_2^5 f(x)dx = 10$ và

$$\int_2^9 f(x)dx = 7 \text{ thì } \int_5^9 f(x)dx \text{ bằng}$$

- ☒ A -3. ☐ B 3. ☐ C 17. ☐ D -17.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_5^9 f(x)dx = \int_2^9 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx = 7 - 10 = -3.$$

Câu 98: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x}dx$.

- ☒ A $\frac{14}{3}$. ☐ B $\frac{13}{3}$. ☐ C 4. ☐ D $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{14}{3}.$$

Câu 99: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Tích phân

$$\int_0^2 (x^2 + x)dx \text{ bằng}$$

- ☒ A $-\frac{14}{3}$. ☐ B -5. ☐ C 5. ☐ D $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 (x^2 + x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

Câu 100: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_{-2}^0 (6x^5 + 1)dx$

bằng

- ☒ A -62. ☐ B 64. ☐ C 68. ☐ D -68.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-2}^0 (6x^5 + 1)dx = (x^6 + x) \Big|_{-2}^0 = -[(-2)^6 - 2] = -62.$

Câu 101: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng bao nhiêu?

- ☒ A 1. ☐ B -1. ☐ C $\frac{\pi}{2}$. ☐ D 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$

Câu 102: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 7, \int_6^{10} f(x)dx = -1$. Tính $I = \int_0^{10} f(x)dx$.

- ☒ A $I = 5$. ☐ B $I = 8$. ☐ C $I = 7$. ☐ D $I = 6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx = 7 - 1 = 6.$

Câu 103: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$

- ☒ A $\frac{14}{3}$. ☐ B $\frac{13}{3}$. ☐ C 4. ☐ D $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Ta có $I = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{14}{3}.$

Câu 104: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -2; 1), B(1; -1; 3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- ☒ A $(3; -3; 4)$. ☐ B $(-1; 1; 2)$. ☐ C $(-3; 3; -4)$. ☐ D $(1; -1; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ của vector $\overline{AB}$ là $(-1; 1; 2)$.

Câu 105: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Tính $I = \int_0^1 e^{3x} dx$

- Ⓐ $I = e^3 - 1$. Ⓑ $I = e - 1$. Ⓒ $I = \frac{e^3 - 1}{3}$. Ⓓ $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}$$

Câu 106: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$; $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì

$\int_1^5 f(x) dx$ bằng

- Ⓐ -2 . Ⓑ 4 . Ⓒ 2 . Ⓓ 3 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 3 - 1 = 2.$$

Câu 107: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$

có $f(2) = 2$, $f(3) = 5$; hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- Ⓐ 3 . Ⓑ 10 . Ⓒ -3 . Ⓓ 7 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_2^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^3 = f(3) - f(2) = 5 - 2 = 3.$$

Câu 108: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 5$ và $\int_1^3 g(x) dx = -7$.

Giá trị của $\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- Ⓐ -29 . Ⓑ 1 . Ⓒ 29 . Ⓓ -31 .

Lời giải

Chọn C

$$\int_1^3 [3f(x) - 2g(x)] dx = \int_1^3 3f(x) dx - \int_1^3 2g(x) dx = 3 \int_1^3 f(x) dx - 2 \int_1^3 g(x) dx = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-7) = 29$$

Câu 109: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn

$$[0; 2] \text{ thỏa mãn } \int_0^1 f(x) dx = 3 \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 2. \text{ Khi đó } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

- (A) 6. (B) 1. (C) -1. (D) 5.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 3 + 2 = 5.$$

Câu 110: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ và

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{4}{3}. \text{ Khi đó } \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx \text{ bằng}$$

- (A) $-\frac{5}{3}$. (B) $\frac{5}{3}$. (C) -1. (D) 1.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1,$$

Câu 111: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Nếu

$$\int_{-1}^4 [5f(x) - 3] dx = 5 \text{ thì } \int_{-1}^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) $\frac{14}{5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^4 [5f(x) - 3] dx = 5 \Leftrightarrow 5 \int_{-1}^4 f(x) dx - 3 \int_{-1}^4 dx = 5 \Leftrightarrow \int_{-1}^4 f(x) dx = 4.$$

Câu 112: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Nếu $\int_2^{2021} f(x)dx = 12$ và $\int_{2020}^{2021} f(x)dx = 2$ thì $\int_2^{2020} f(x)dx$ bằng

- (A) -10. (B) 10. (C) 14. (D) 24.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{2020}^{2021} f(x)dx = 2 \Leftrightarrow \int_{2021}^{2020} f(x)dx = -2$$

$$\int_2^{2020} f(x)dx = \int_2^{2021} f(x)dx + \int_{2021}^{2020} f(x)dx = 12 - 2 = 10. \text{ Vậy } \int_2^{2020} f(x)dx = 10.$$

Câu 113: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho $\int_{-1}^1 [5f(x) + x^{2021} + x]dx = 20$.

$$\text{Tính } \int_{-1}^1 f(x)dx.$$

- (A) 5. (B) 4. (C) 1. (D) 0.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{-1}^1 [5f(x) + x^{2021} + x]dx &= \int_{-1}^1 5f(x)dx + \int_{-1}^1 [x^{2021} + x]dx = 5 \int_{-1}^1 f(x)dx + \left(\frac{x^{2022}}{2022} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 5 \int_{-1}^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } 5 \int_{-1}^1 f(x)dx = 20 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = 4.$$

Câu 114: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tìm giá trị của a để

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln a.$$

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 12. (D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = (\ln(x-2) - \ln(x-1)) \Big|_3^4 = \ln \left(\frac{x-2}{x-1} \right) \Big|_3^4 = \ln \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do đó } \ln a = \ln \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Câu 115: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Biết rằng

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2 \text{ với } a, b, c \text{ là các số hữu tỉ. Tính } 2a + 3b - 4c.$$

Ⓐ -19.

Ⓑ 19.

Ⓒ 5.

Ⓓ -5.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2+x} dx &= \int_1^2 \left(x-1 + \frac{x-1}{x^2+x} \right) dx \\
 &= \int_1^2 \left[x-1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} \right] dx = \int_1^2 \left[x-1 + \frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \right] dx \\
 &= \int_1^2 \left(x-1 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x+1| - \ln|x| \right) \Big|_1^2 \\
 &= 2 - 2 + 2\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - 2\ln 2 = \frac{1}{2} + 2\ln 3 - 3\ln 2 \\
 \Rightarrow a &= \frac{1}{2}; b = 2; c = -3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2a + 3b - 4c = 1 + 6 + 12 = 19$$

Câu 116: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Biết

$$\int_1^8 f(x) dx = -2; \int_1^4 f(x) dx = 3; \int_1^4 g(x) dx = 7. \text{ Mệnh đề nào sau đây là sai?}$$

Ⓐ $\int_4^8 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = 8.$

Ⓑ $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10.$

Ⓒ $\int_4^8 f(x) dx = -5.$

Ⓓ $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2.$

Lời giải

$$\text{Từ } \int_1^8 f(x) dx = -2; \int_1^4 f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_4^8 f(x) dx = -5.$$

$$\text{Do đó } \int_4^8 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = -5 + 7 = 2$$

Câu 117: Nếu $\int_0^2 (2x - 3f(x)) dx = 3$ thì $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

Ⓐ $-\frac{1}{3}.$

Ⓑ $-\frac{5}{2}.$

Ⓒ $\frac{5}{2}.$

Ⓓ $\frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 (2x - 3f(x)) dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^2 2x dx - 3 \int_0^2 f(x) dx = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \Big|_0^2 - 3 \int_0^2 f(x) dx = 3$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 \int_0^2 f(x) dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$$

Câu 118: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho $\int_{-1}^4 f(x) dx = 10$.

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(-1) = -4$. Tính $F(4)$.

- A $F(4) = 6$. B $F(4) = 14$. C $F(4) = -14$. D $F(4) = -6$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_{-1}^4 f(x) dx = 10 \Rightarrow F(4) - F(-1) = 10 \Rightarrow F(4) = 10 + F(-1) = 10 - 4 = 6.$$

Câu 119: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Nếu

$$\int_0^1 [3f(x) + x] dx = 2 \quad \text{thì} \quad \int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{bằng}$$

- A $-\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{2}$. C 2. D $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^1 [3f(x) + x] dx = 2 \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x dx = 2 \Rightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx + \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx = 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Câu 120: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Nếu $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = 8 \quad \text{thì} \quad \int_1^2 f(x) dx \quad \text{bằng}$$

- A 4. B 10. C 6. D 16.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = 8 - \int_{-1}^1 f(x) dx = 8 - 2 = 6.$$

Câu 121: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho 2 và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$.

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]$ bằng?

(A) $I = \frac{11}{2}$.

(B) $I = \frac{7}{2}$.

(C) $I = \frac{17}{2}$.

(D) $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2.2 + 3.(-1) = \frac{5}{2}.$$

Câu 122: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 3$ và

$$\int_2^3 f(x) dx = 4 \text{ thì } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng:}$$

(A) -7 .

(B) 7

(C) -1 .

(D) 1 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 3 - 4 = -1.$$

Câu 123: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Nếu $\int_0^2 (2x - 3f(x)) dx = 3$ thì $\int_0^2 f(x) dx$

bằng

(A) $-\frac{1}{3}$.

(B) $-\frac{5}{2}$.

(C) $\frac{5}{2}$.

(D) $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^2 (2x - 3f(x)) dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^2 2x dx - 3 \int_0^2 f(x) dx = 3 \Leftrightarrow 4 - 3 \int_0^2 f(x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

Câu 124: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Biết $F(x) = \cos x$ là một nguyên

hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^\pi [3f(x) + 2] dx$ bằng

Ⓐ $2\pi - 6$.

Ⓑ -4 .

Ⓒ 2π .

Ⓓ 2 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_0^{\pi} [3f(x) + 2] dx = 3 \int_0^{\pi} f(x) dx + 2 \int_0^{\pi} dx = 3F(x)|_0^{\pi} + 2x|_0^{\pi} = 3\cos x|_0^{\pi} + 2x|_0^{\pi} = 2\pi - 6.$$

Câu 125: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên

tục trên đoạn $[1; 3]$, và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Tính $f(1)$

Ⓐ 10 .

Ⓑ 11 .

Ⓒ 1 .

Ⓓ -1 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = f(3) - 6 = 5 - 6 = -1$$

Câu 126: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục

trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1, \int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3$. Khi đó,

$\int_1^2 f(x) dx$ bằng

Ⓐ $\frac{6}{7}$.

Ⓑ $\frac{16}{7}$.

Ⓒ $\frac{11}{7}$.

Ⓓ $-\frac{5}{7}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo đề: } \begin{cases} \int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1 \\ \int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \int_1^2 f(x) dx + 2 \int_1^2 g(x) dx = 1 \\ 2 \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^2 f(x) dx = -\frac{5}{7} \\ \int_1^2 g(x) dx = \frac{11}{7} \end{cases}.$$

Câu 127: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số

$f(x) = x^{2021} + \sin x + 2021$. Biết rằng có duy nhất giá trị của

$m = -\frac{a}{b}$ để $\int_0^m (x.f'(m-x) - f(x)) dx = 1$. Tìm $a + b$.

Ⓐ $a + b = 2021$.

Ⓑ $a + b = 2023$.

Ⓒ $a + b = 2020$.

Ⓓ $a + b = 2022$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^m (x \cdot f'(m-x) - f(x)) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^m x \cdot f'(m-x) dx - \int_0^m f(x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[-x \cdot f(m-x) \right]_0^m + \int_0^m f(m-x) dx - \int_0^m f(x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -mf(0) - \int_m^0 f(t) dt - \int_0^m f(x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -2021m + \int_0^m f(t) dt - \int_0^m f(x) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2021}. \text{ Vậy } a=1; b=2021 \Rightarrow a+b=2022.$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Câu 128: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên

$\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x) dx = 10$, thì $\int_0^3 f(2x) dx$ bằng

(A) 30.

(B) 20.

(C) 10.

(D) 5.

Lời giải

$$\text{Xét } I = \int_0^3 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0.$$

$$x=3 \Rightarrow t=6.$$

$$\text{Lúc đó: } I = \int_0^6 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^6 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Câu 129: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Tích phân $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$

bằng

(A) 3.

(B) $\frac{3}{2}$.

(C) 1.

(D) 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_e^{e^2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 130: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ bằng cách đặt

$t = e^x$, ta được:

(A) $I = \int_1^e \frac{dt}{1+t}$. (B) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$. (C) $I = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$. (D) $I = \int_0^1 \frac{tdt}{1+t}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=e \end{cases}$

Ta có: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$.

Câu 131: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

bằng cách đặt $t = e^x$, ta được

(A) $I = \int_1^e \frac{dt}{1+t}$. (B) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$. (C) $I = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}$. (D) $I = \int_0^1 \frac{tdt}{1+t}$.

Lời giải

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$.

$x=1 \Rightarrow t=e$.

Khi đó: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{e^x \cdot dx}{e^x(1+e^x)} = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$.

Câu 132: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{ khi } x \leq 2 \\ x + 5 & \text{ khi } x > 2 \end{cases}$. Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx$ thuộc khoảng

nào dưới đây ?

(A) $(-2; 3)$. (B) $(5; 7)$. (C) $(10; 11)$. (D) $(8; 9)$.

Lời giải

Đặt $u = \ln(x^2+1) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=0$; $x=\sqrt{e^4-1} \Rightarrow u=4$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\sqrt{e^4-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)] dx = \int_0^4 \frac{1}{2} f(u) du = \int_0^2 \frac{1}{2} f(u) du + \int_2^4 \frac{1}{2} f(u) du \\
 &= \int_0^2 \frac{1}{2} (u^2 + 2u - 1) du + \int_2^4 \frac{1}{2} (u + 5) du = \frac{31}{3}.
 \end{aligned}$$

Suy ra: $I \in (10; 11)$.

Câu 133: (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số thực}). \text{ Nếu } \int_0^1 f(e^x+1)e^x dx = e^2 \text{ thì } a \text{ bằng}$$

- Ⓐ $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. Ⓑ $6e-6$ Ⓒ $6e+6$ Ⓓ $-6e+6$

Lời giải

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$. Nếu $x=0 \Rightarrow t=2$, Nếu $x=1 \Rightarrow t=e+1$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(e^x+1)e^x dx &= \int_2^{e+1} f(t)dt = \int_2^3 f(t)dt + \int_3^{e+1} f(t)dt = \int_2^3 (at-3a+7)dt + \int_3^{e+1} (2t+1)dt \\ &= \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t \right) \Big|_2^3 + \left(t^2 + t \right) \Big|_3^{e+1} = \\ &= \left(\frac{a \cdot 3^2}{2} - 3a \cdot 3 + 7 \cdot 3 \right) - \left(\frac{a \cdot 2^2}{2} - 3a \cdot 2 + 7 \cdot 2 \right) + \left((e+1)^2 + e+1 \right) - (3^2 + 3) \\ &= \frac{-a}{2} + e^2 + 3e - 3 \end{aligned}$$

Theo giả thiết: $\int_0^1 f(e^x+1)e^x dx = e^2$ nên ta có phương trình:

$$\frac{-a}{2} + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 3e - 3 \Leftrightarrow a = 6e - 6$$

Câu 134: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số

$$f(x) = |x^2 - 1|. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(3\cos x - 1) \cdot \sin x dx \text{ bằng}$$

- Ⓐ $\frac{8}{9}$. Ⓑ $\frac{10}{9}$. Ⓒ $\frac{7}{9}$. Ⓓ $\frac{11}{9}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty) \\ -x^2 + 1, & \forall x \in [-1; 1] \end{cases}.$$

Đặt $3\cos x - 1 = t \Rightarrow -3\sin x dx = dt$.

Khi $x=0$ thì $t=2$; Khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=-1$.

Vậy

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(3\cos x - 1) \cdot \sin x dx &= -\frac{1}{3} \int_2^{-1} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right) = \frac{1}{3} \left(\int_{-1}^1 (-t^2 + 1) dt + \int_1^2 (t^2 - 1) dt \right) = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Câu 135: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị

thực dương của tham số a để $\int_{\ln 3}^{\ln a} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} - 3} dx = \ln \frac{3}{2}$?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 1.

Lời giải

Xét $I = \int_{\ln 3}^{\ln a} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận

x	$\ln 3$	$\ln a$
t	3	a

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln a} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_3^a \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^a \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \ln \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \Big|_3^a = \ln \left| \frac{a-2}{a-1} \right| - \ln \frac{1}{2}$$

$$I = \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln \left| \frac{a-2}{a-1} \right| - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln \left| \frac{a-2}{a-1} \right| = \ln \frac{3}{4}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a-2}{a-1} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-2}{a-1} = \frac{3}{4} \\ \frac{a-2}{a-1} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-8=3a-3 \\ 4a-8=-3a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=\frac{11}{7} \end{cases}$$

Khi $a = \frac{11}{7}$ thì hàm số $f(t) = \frac{1}{(t-1)(t-2)}$ không liên tục trên khoảng $\left[\frac{11}{7}; 3 \right]$ nên

không thỏa mãn.

Vậy có 1 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 136: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x - 5 & \text{khi } x \geq 8 \\ -x + 3 & \text{khi } x < 8 \end{cases}. \text{ Tích phân } \int_0^4 f(2e^x + 3) e^x dx \text{ bằng}$$

(A) $\frac{39}{2}$.

(B) $\frac{39}{4}$.

(C) $-\frac{123}{2}$.

(D) $-\frac{123}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3)e^x dx$.

Đặt $u = 2e^x + 3 \Rightarrow du = 2e^x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 5; x = \ln 4 \Rightarrow u = 11$

$$\begin{aligned} I &= \int_5^{11} f(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_5^{11} f(u) du = \frac{1}{2} \int_5^{11} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_5^8 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_8^{11} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_5^8 (-x+3) dx + \frac{1}{2} \int_8^{11} (x^2 - 8x - 5) dx = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_5^8 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 - 5x \right) \Big|_8^{11} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-8 - \frac{5}{2} - \frac{286}{3} + \frac{376}{3} \right) = \frac{39}{4}. \end{aligned}$$

Đổi đề do hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 8 \\ -x + 3 & \text{khi } x < 8 \end{cases}$ không liên tục tại $x = 8$.

Câu 137: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có

$f(0) = 0$ và $f'(x) = \tan^4 x + \tan^2 x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$.

A $\frac{1}{12}$.

B $\frac{1}{6}$.

C $\frac{1 - \ln 2}{6}$.

D $\frac{1 - \ln 2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x) dx = \int (\tan^4 x + \tan^2 x) dx = \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) dx = \int \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$
 $= \int \tan^2 x d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + C$.

Suy ra $f(x) = \frac{\tan^3 x}{3} + C; f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Do đó $f(x) = \frac{\tan^3 x}{3}$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{3} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \right]$
 $= \frac{1}{3} \left[\frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\cos x| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1 - \ln 2}{6}$.

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1 - \ln 2}{6}$.

Câu 138: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Biết rằng

$$\int_0^{\ln 4} \frac{dx}{1+\sqrt{e^x}} = a + b \ln 2 + c \ln 3 \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } a + b + c.$$

(A) -2.

(B) 3.

(C) 2.

(D) -1.

Lời giải

$$\circ \text{ Ta có: } I = \int_0^{\ln 4} \frac{dx}{1+\sqrt{e^x}} = \int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{e^x(1+\sqrt{e^x})} dx.$$

$$\circ \text{ Đặt } t = 1 + \sqrt{e^x} \Rightarrow e^x = (t-1)^2.$$

$$\circ \text{ Suy ra: } e^x dx = 2(t-1)dt.$$

$$\circ \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=2 \text{ và } x=\ln 4 \Rightarrow t=3.$$

$$\circ \text{ Khi đó: } I = \int_2^3 \frac{2(t-1)dt}{(t-1)^2 t} = 2 \int_2^3 \frac{1}{(t-1)t} dt = 2 \ln \left(\frac{t-1}{t} \right) \Big|_2^3 = 2 \ln \frac{2}{3} - 2 \ln \frac{1}{2} \\ = 2 \ln 2 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2 = 4 \ln 2 - 2 \ln 3.$$

$$\circ \text{ Vậy: } a=0, b=4, c=-2 \rightarrow a+b+c=2.$$

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Câu 139: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho

$$I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c} \text{ với } a, b, c \text{ là các số nguyên dương và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối}$$

$$\text{giản. Tính giá trị } S = \frac{a+b}{c}$$

(A) $S = \frac{2}{3}.$

(B) $S = \frac{1}{2}.$

(C) $S = \frac{1}{3}.$

(D) $S = \frac{5}{6}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x+1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$\text{Ta được } I = -\frac{1}{x+1} (x + \ln x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3} (2 + \ln 2) + \frac{1}{2} + \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}.$$

$$\text{Suy ra: } a=2, b=3, c=6. \quad \text{Vậy } S = \frac{5}{6}.$$

Câu 140: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$,

ta được kết quả $I = \frac{e^2 + a}{b}$, với a, b là các số nguyên. Tính $a^3 + b^3$.

(A) 35.

(B) 65.

(C) 28.

(D) 9.

Lời giải

$$I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = \left. \frac{x^2 \ln x}{2} \right|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left. \frac{x^2}{4} \right|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Suy ra $a = 1, b = 4$.

Vậy $a^3 + b^3 = 1^3 + 4^3 = 65$.

Câu 141: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa $\int_0^1 (2x+1)f'(x) dx = 10, 3f(1) - f(0) = 12$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

(A) $I = -1$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = 2$.

(D) $I = -2$.

Lời giải

Từ giả thiết: $\int_0^1 (2x+1)f'(x) dx = 10$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $\int_0^1 (2x+1)f'(x) dx = 10 \Leftrightarrow (2x+1)f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 10$.

$$\Leftrightarrow 3f(1) - f(0) - 2 \int_0^1 f(x) dx = 10 \Leftrightarrow I = \frac{12-10}{2} = 1.$$

Câu 142: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo

hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21, \int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx$

Ⓐ $I = 15.$

Ⓑ $I = 6.$

Ⓒ $I = 12.$

Ⓓ $I = 9.$

Lời giải

$$\text{Xét có: } I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx = \frac{1}{9} \int_0^1 3x \cdot f'(3x) d(3x) = \frac{1}{9} \int_0^3 t \cdot f'(t) dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } 9I = t \cdot f(t) \Big|_0^3 - \int_0^3 f(t) dt = 3f(3) - \int_0^3 f(x) dx = 3 \cdot 21 - 9 = 54 \Leftrightarrow I = 6.$$

Câu 143: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$; $f'(1)=1$ và $10f(x) - 5xf'(x) + x^2 f''(x) = 0$ với mọi $x \in [0;1]$. Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

Ⓐ $\frac{-1}{15}.$

Ⓑ $\frac{-2}{3}.$

Ⓒ $\frac{-1}{10}.$

Ⓓ $\frac{-1}{17}.$

Lời giải

$$\text{Ta đặt } I = \int_0^1 f(x) dx; \quad J = \int_0^1 xf'(x) dx; \quad K = \int_0^1 x^2 f''(x) dx.$$

Theo đề ta có $10I = 5J - K$. Hơn nữa, dùng phương pháp tích phân từng phần ta được :

$$K = x^2 f'(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xf'(x) dx = 1 - 2J$$

$$J = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 0 - I = -I$$

$$\text{Suy ra } 10I = -5I - (1 + 2I) = -7I - 1. \text{ Do đó } I = \frac{-1}{17}.$$

Câu 144: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và

$$\int_0^1 f(x) dx = 3. \text{ Tích phân } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx \text{ bằng}$$

Ⓐ $-\frac{1}{2}.$

Ⓑ $1.$

Ⓒ $\frac{1}{2}.$

Ⓓ $-1.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

Khi đó $\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot f'(t) dt.$

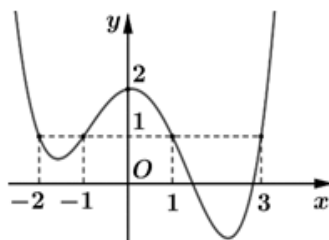
Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 t \cdot f'(t) dt = t \cdot f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = 4 - 3 = 1.$

Vậy $\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx = \frac{1}{2}$

Câu 145: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.

Đặt $K = \int_0^1 x f(x) f'(x) dx$, khi đó K thuộc khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-3; -2).$

Ⓑ $(-2; -\frac{3}{2}).$

Ⓒ $(-\frac{2}{3}; 0).$

Ⓓ $(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}).$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f(x) f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f^2(x)}{2} \end{cases}$

Khi đó $K = \int_0^1 x f(x) f'(x) dx = \frac{x f^2(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx.$

Từ đồ thị ta thấy:

.

$f(x) > 2 - x, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > \int_0^1 \frac{(2-x)^2}{2} dx = \frac{7}{6} \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx < -\frac{2}{3}.$

.

$f(x) < 2, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx < \int_0^1 2 dx = 2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx > -\frac{3}{2}.$

$$\text{Vậy } -\frac{3}{2} < K < -\frac{2}{3}.$$

Câu 146: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $\int_0^1 f(x)dx=3$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x^2)dx$ bằng

Ⓐ $-\frac{1}{2}$.

Ⓑ 1.

Ⓒ $\frac{1}{2}$.

Ⓓ -1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=1.$$

Do đó

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot f'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} \left(x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{1}{2} (f(1) - 3) = \frac{1}{2} (4 - 3) = \frac{1}{2}.$$

Câu 147: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01) Giả sử $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; \pi)$ và $f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x, \forall x \in (0; \pi)$. Biết

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{12}(a+b \ln 2+c \pi \sqrt{3}), \text { với } a, b, c \text { là các số nguyên. Giá trị } a+b+c$$

bằng

Ⓐ -1.

Ⓑ 1.

Ⓒ 11.

Ⓓ -11.

Lời giải

Chọn A

$$\forall x \in (0; \pi), \text{ ta có: } f'(x) \sin x = x + f(x) \cos x, \forall x \in (0; \pi).$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \sin x - f(x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x} \right)' = \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$\Rightarrow f(x) = -x \cdot \cos x + \sin x \cdot \ln |\sin x| + C \cdot \sin x$$

$$\text{Ta lại có: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} (6 - 6\ln 2 - \pi\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow a = 6, b = -6, c = -1.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = -1.$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

Câu 148: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Cho $f(x)$ là hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(2x-1) + 2x] dx$.

A $I = 4$.

B $I = 13$.

C $I = 7$.

D $I = 5$.

Lời giải

Ta có :

$$I = \int_0^1 [f(2x-1) + 2x] dx = \int_0^1 f(2x-1) dx + \int_0^1 2x dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^1 f(2x-1) dx \text{ đặt } u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du.$$

Đổi cận:

x	0	1
u	-1	1

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 3. \text{ Vậy } I = 3 + 1 = 4.$$

Câu 149: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo

hàm trên $(0; +\infty)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 1$.

Tính $f(e)$.

Ⓐ 2.

Ⓑ 3.

Ⓒ $2e+1$.Ⓓ e .**Lời giải**

Vì x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ nên ta có

$$x^2 f'(x) = (x^2)' = 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^e f'(x) dx = \int_1^e \frac{2}{x} dx = 2 \ln x \Big|_1^e = 2 \ln e - 2 \ln 1 = 2 = f(e) - f(1).$$

$$\Rightarrow 2 = f(e) - 1 \Rightarrow f(e) = 2 + 1 = 3.$$

Câu 150: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0) = -2$ và $(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x$,

$$\forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x) dx.$$

Ⓐ $I = \frac{5}{2}$.Ⓑ $I = -\frac{3}{2}$.Ⓒ $I = \frac{3}{2}$.Ⓓ $I = -\frac{5}{2}$.**Lời giải**

$$\bullet (x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) \right]' = \left(-\sqrt{x^2 + 1} \right)'$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} + C.$$

$$\bullet f(0) = -2 \Rightarrow \sqrt{1} \cdot f(0) = -\sqrt{1} + C \Rightarrow C = -1.$$

$$\bullet \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - 1 \Rightarrow f(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x) dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left[-x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{3}} = \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3+1} \right) - (-0-1) = -\frac{5}{2}.$$

Câu 151: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = -\frac{a}{b}$. Tính

$$T = 3a - b.$$

Ⓐ $T = 0$.

Ⓑ $T = -48$.

Ⓒ $T = 16$.

Ⓓ $T = 1$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x \cdot d f(x) = I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx$.

Theo giả thiết: $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x) \Rightarrow$

$$\int_0^1 [5f(x) - 7f(1-x)] dx = 3 \int_0^1 (x^2 - 2x) dx$$

$$\Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx - 7 \int_0^1 f(1-x) dx = 3 \int_0^1 (x^2 - 2x) dx \Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx - 7 \int_0^1 f(1-x) dx = -2.$$

Bằng cách đổi biến $t = 1-x$, ta có $\int_0^1 f(1-x) dx = - \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$.

Thay vào, ta có $5 \int_0^1 f(x) dx - 7 \int_0^1 f(x) dx = -2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1$.

Mặt khác do $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$ nên lần lượt chọn $x=0, x=1$ ta có

$$\begin{cases} 5f(0) - 7f(1) = 0 \\ 5f(1) - 7f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \frac{5}{8}.$$

Thay $f(1) = \frac{5}{8}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 1$ vào ta có $I = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{8} - 1 = -\frac{3}{8}$.

Vậy $a=3; b=8 \Rightarrow T = 3a - b = 9 - 8 = 1$.

Câu 152: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$

có đạo hàm liên tục trên R và thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in R$. Tích phân

$$\int_1^5 x f'(x) dx \text{ bằng}$$

Ⓐ $\frac{-31}{4}$.

Ⓑ $\frac{33}{4}$.

Ⓒ $\frac{17}{4}$.

Ⓓ $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Ta có $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Leftrightarrow (3x^2 + 3) f'(x^3 + 3x + 1) = (3x^2 + 3)(3x + 2)$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (3x^2 + 3) f(x^3 + 3x + 1) dx = \int_0^1 (3x^2 + 3)(3x + 2) dx = \frac{59}{4}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x^3 + 3x + 1) d(x^3 + 3x + 1) = \frac{59}{4} \text{ hay } \int_1^5 f(t) dt = \int_1^5 f(x) dx = \frac{59}{4}.$$

$$\text{Do đó } \int_1^5 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx = 5f(5) - f(1) - \frac{59}{4} = 5.5 - 2 - \frac{59}{4} = \frac{33}{4}.$$

Câu 153: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên

$(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$.

Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$.

Ⓐ $\frac{7}{12}$.

Ⓑ $\frac{7}{4}$.

Ⓒ $\frac{9}{4}$.

Ⓓ $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } 2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow 4f(x) + 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{t} \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}f(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{3}$$

$$\text{Khi đó: } \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2x-1}{3} dx = \left(\frac{x^2-x}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Câu 154: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên

$\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$ với mọi x . Tính $f'(0)$.

Ⓐ 1.

Ⓑ -1.

Ⓒ e .

Ⓓ $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x} \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(1) \Leftrightarrow e^x xf'(x) + e^x (x+1)f(x) = 1 \Leftrightarrow e^x xf'(x) + (e^x x + e^x)f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x x f'(x) + (e^x x)' f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^x x \cdot f(x))' = 1.$$

$$\text{Suy ra: } \int (e^x x \cdot f(x))' dx = \int dx \Rightarrow e^x x \cdot f(x) = x + C \quad (2).$$

Do đẳng thức (1) đúng với mọi x nên (1) cũng đúng với $x = 0$.

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(0) = 1$.

Thay $x = 0$ vào (2) $\Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow e^x x f(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x}$ với $x \neq 0$.

$$\text{Mà: } f(0) = \frac{1}{e^0} \Rightarrow f(x) = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra: } f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -1.$$

Câu 155: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Biết

$$\int_0^8 f(x) dx = 10; \int_0^4 f(x) dx = -4. \text{ Tính } \int_{-1}^3 f(|3x-1|) dx.$$

A 2.

B 1.

C 0.

D 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^3 f(|3x-1|) dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 f(3x-1) dx + \int_{-1}^{\frac{1}{3}} f(1-3x) dx$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{3}}^3 f(3x-1) d(3x-1) - \frac{1}{3} \int_{-1}^{\frac{1}{3}} f(1-3x) d(1-3x)$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^8 f(u) du - \frac{1}{3} \int_4^0 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^8 f(u) du + \frac{1}{3} \int_0^4 f(t) dt = \frac{10-4}{3} = 2$$

Câu 156: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = \tan^4 x + \tan^2 x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx.$$

A $\frac{1}{12}$.

B $\frac{1}{6}$.

C $\frac{1-\ln 2}{6}$.

D $\frac{1-\ln 2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = \tan^4 x + \tan^2 x$

Nguyên hàm hai vế, ta được $f(x) = \int (\tan^4 x + \tan^2 x) dx = \int \tan^2 x \cdot (\tan^2 x + 1) dx$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$

Khi đó: $f(x) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \tan^3 x + C$, mà $f(0) = 0$ nên $C = 0$. Vậy $f(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x$

Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^1 t dt - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t dt - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} d(1+t^2)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \ln|t^2+1| \Big|_0^1 = \frac{1-\ln 2}{6}.$$

Câu 157: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + g(x) = x$, $g'(x) + f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = g(0) = 1$.

Tính $f(1)$.

- Ⓐ $\frac{2}{e} - 2$. Ⓑ $e + \frac{1}{e} - 2$. Ⓒ $\frac{e^2 - 2}{2e}$. Ⓓ $\frac{e^2 + 2}{2e}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} f'(x) + g(x) = x \\ g'(x) + f(x) = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) + g(x) + g'(x) + f(x) = 0 \\ f'(x) + g(x) - g'(x) - f(x) = 2x \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} e^x f'(x) + e^x g(x) + e^x g'(x) + e^x f(x) = 0 \\ e^{-x} f'(x) + e^{-x} g(x) - e^{-x} g'(x) - e^{-x} f(x) = 2xe^{-x} \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} e^x [f(x) + g(x)]' + (e^x)' [f(x) + g(x)] = 0 \\ e^{-x} [f(x) - g(x)]' + (e^{-x})' [f(x) - g(x)] = 2xe^{-x} \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} [e^x (f(x) + g(x))]' = 0 \\ [e^{-x} (f(x) - g(x))]' = 2xe^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [e^x (f(x) + g(x))]' dx = 0 \\ \int_0^1 [e^{-x} (f(x) - g(x))]' dx = \int_0^1 2xe^{-x} dx \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} e[f(1) + g(1)] - [f(0) + g(0)] = 0 \\ e^{-1}[f(1) - g(1)] - [f(0) - g(0)] = \frac{-4}{e} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) + g(1) = \frac{2}{e} \\ f(1) - g(1) = -4 + 2e \end{cases} \\
& \Rightarrow f(1) = e + \frac{1}{e} - 2.
\end{aligned}$$

Câu 158: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 4]$, đồng biến trên $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$. Tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A $\frac{1222}{45}$.

B $\frac{1201}{45}$.

C $\frac{1174}{45}$.

D $\frac{1186}{45}$.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 4]$, đồng biến trên $[1; 4]$; $f(1) = \frac{3}{2}$.

Nên từ đẳng thức $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x(1+2f(x))} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C, \text{ mà } f(1) = \frac{3}{2} \text{ nên } C = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}.$$

Câu 159: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó

$$\int_1^2 f(x^2) dx \text{ bằng}$$

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $-\frac{4}{3}$.

(C) $\frac{4}{3}$.

(D) $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = [g(x)]' = x - 1 \Rightarrow f(x^2) = x^2 - 1.$$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 f(x^2) dx = \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 160: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo

hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_1^2 xf'(x) dx.$$

(A) $I = 3$.

(B) $I = -1$.

(C) $I = 2$.

(D) $I = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_1^2 xf'(x) dx = \int_1^2 x d(f(x)) = xf(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx.$$

Từ giả thiết

$$f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1 \Rightarrow \int_0^1 f(2x) dx - \int_0^1 xf(x^2) dx = \int_0^1 (5x - 2x^3 - 1) dx = 1.$$

$$\text{Đặt } K = \int_0^1 f(2x) dx. \text{ Đổi biến } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow K = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } L = \int_0^1 xf(x^2) dx. \text{ Đổi biến } t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow L = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right) = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Từ giả thiết } f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1 \text{ ta suy ra } f(2) = 3.$$

Như vậy: $I = xf(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx = 2.f(2) - 1.f(1) - \int_1^2 f(x) dx = 2.3 - 1.1 - 2 = 3.$

Câu 161: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1; f'(x)-xf(x)=x.e^{x^2}, \forall x$. Tích phân $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1})dx$ bằng

- Ⓐ $e^2 - e$. Ⓑ $4\sqrt{e} - 2e$. Ⓒ 1. Ⓓ e .

Lời giải

Ta có $f'(x) - xf(x) = x.e^{x^2} \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} f'(x) - x e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = x.e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = x.e^{\frac{x^2}{2}}$

$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = \int x.e^{\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + C.$

Theo bài ra $f(0)=1 \Rightarrow C=0$. Từ đó suy ra $f(x) = e^{x^2}$.

Do đó $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1})dx = \int_0^1 x.e^{x+1}dx = \int_0^1 xd(e^{x+1}) = x.e^{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = e^2 - e^{x+1} \Big|_0^1 = e^2 - e^2 + e = e$

Câu 162: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $f(x)$

có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x^2) = 2f(x) + x^4 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$, khi

đó $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$ bằng

- Ⓐ $\frac{7}{6}$. Ⓑ $\frac{8}{15}$. Ⓒ $\frac{7}{10}$. Ⓓ $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x^2) = 2f(x) + x^4 - 4x \Rightarrow 2xf(x^2) = 4xf(x) + 2x^5 - 8x^2.$

$\Rightarrow \int_0^1 2xf(x^2)dx = 4 \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (2x^5 - 8x^2)dx.$

Đặt: $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow \int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} xdx = dv \\ f(x) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = v \\ f'(x)dx = du \end{cases}. \text{ Nên } \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}x^2 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x)dx.$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = 2x^2 f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^2 f'(x)dx + \int_0^1 (2x^5 - 8x^2)dx$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = 2f(1) - 2 \int_0^1 x^2 f'(x)dx - \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 x^2 f'(x)dx = -\frac{11}{3} + 2f(1)$$

$$\text{Với } f(1) = 2f(1) + 1 - 4 \Rightarrow f(1) = 3.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 x^2 f'(x)dx = \frac{7}{6}.$$

Câu 163: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$

có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 x \cdot f'(x)dx$ bằng

A $-\frac{10}{3}$.

B $-\frac{5}{3}$.

C $-\frac{11}{3}$.

D $-\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 x \cdot f'(x)dx = xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x)dx.$$

$$\text{Ta có } f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2 \text{ thế } x=0 \text{ vào ta được } f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = -1 \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Mặt khác đặt } t = 2-x \text{ ta có } \int_0^2 f(x)dx = -\int_2^0 f(2-t)dt = \int_0^2 f(2-t)dt = \int_0^2 f(2-x)dx$$

$$\text{Nên suy ra } \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = 2 \int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x) dx = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

Câu 164: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow t} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{x^2 - t^2} = 1$ với mọi $t > 0$. Biết rằng $f(1) = 1$, tính $f(e)$.

Ⓐ $\frac{3e+1}{2}$.

Ⓑ $3e$.

Ⓒ $2e$.

Ⓓ $-e$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{x^2 - t^2} &= \lim_{x \rightarrow t} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(t) + t \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{(x-t)(x+t)} = \lim_{x \rightarrow t} \left[\frac{f(t)}{x+t} + \frac{t(f(t) - f(x))}{(x-t)(x+t)} \right] \\ &= \frac{f(t)}{2t} - \frac{f'(t)}{2}. \end{aligned}$$

Theo đề $\lim_{x \rightarrow t} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{x^2 - t^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(t)}{2t} - \frac{f'(t)}{2} = 1 \Leftrightarrow f(t) - t \cdot f'(t) = 2t, \forall t > 0$.

Như vậy ta có

$$f(x) - x \cdot f'(x) = 2x, \forall x > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{x} f'(x) = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} f(x) \right)' = -\frac{2}{x}.$$

Suy ra $\frac{1}{x} f(x) = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln x + C$.

Theo đề $f(1) = 1$ nên $C = 1$. Suy ra $f(x) = x(-2 \ln x + 1)$.

Vậy $f(e) = -e$.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

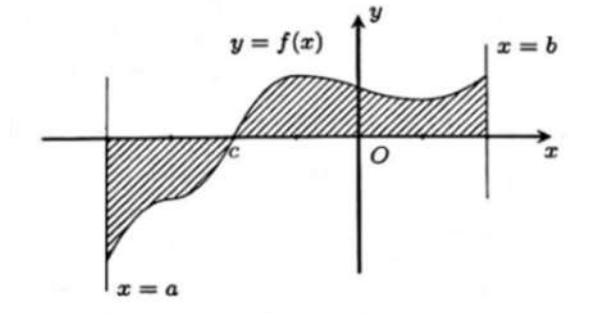
Câu 165: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐÀKLẮC NĂM 2020-2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0, x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

- Ⓐ $S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$ Ⓑ $S = \int_0^{\pi} \cos x dx.$ Ⓒ $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx.$ Ⓓ $S = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0, x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là $S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$

Câu 166: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ trong hình dưới đây (phần gạch sọc có diện tích S bằng



- Ⓐ $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$ Ⓑ $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$
- Ⓒ $-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$ Ⓓ $-\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$

Lời giải

Từ hình ta thấy :

$$S = \int_a^c -f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 167: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VŨNG TÀU NĂM 2020-2021) Tìm công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^4, y=x^2$.

- Ⓐ $\int_0^1 (x^4 - x^2) dx.$ Ⓑ $\int_0^1 (x^2 - x^4) dx.$ Ⓒ $\int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx.$ Ⓓ $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx.$

Lời giải

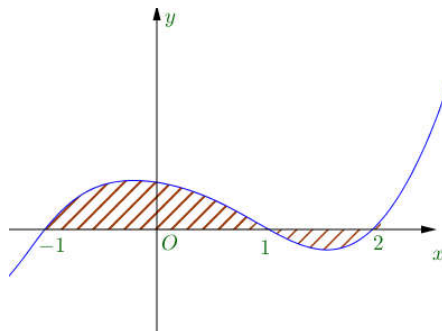
Hoàn chỉnh giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^4, y=x^2$ là nghiệm của phương

$$\text{trình: } x^4 = x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có $x^4 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 1) \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính là: $\int_{-1}^1 |x^4 - x^2| dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx$.

Câu 168: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 02) Gọi S là diện tích miền hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây, với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$



Công thức tính S là

(A) $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$.

(B) $S = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|$.

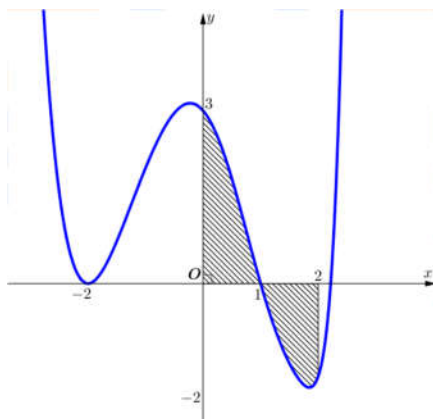
(C) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

(D) $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C

Câu 169: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên, Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là



(A) $-\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

(B) $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

(C) $\int_0^2 f(x) dx$.

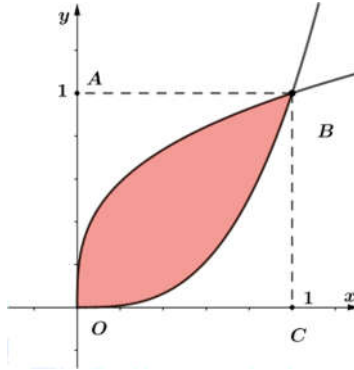
(D) $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$

Câu 170: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính diện tích phần tô đậm trên viên gạch men.



Ⓐ $\frac{5}{4}$.

Ⓑ $\frac{1}{3}$.

Ⓒ $\frac{1}{2}$.

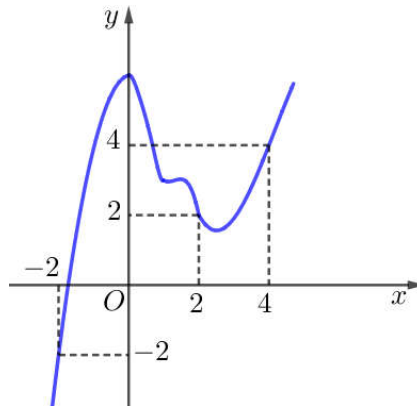
Ⓓ $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Phần tô đậm là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$.

Suy ra diện tích phần hình phẳng là $S = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3) dx = \frac{1}{2}$.

Câu 171: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $\int_0^2 f'(x+2) dx + \int_0^4 f'(x-2) dx$ bằng

Ⓐ 4.

Ⓑ 6.

Ⓒ -4.

Ⓓ 2.

Lời giải

+) Xét $I = \int_0^2 f'(x+2) dx$. Đặt $t = x+2 \Rightarrow dt = dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

$$\Rightarrow I = \int_2^4 f'(t) dt = \int_2^4 f'(x) dx.$$

+) Xét $J = \int_0^4 f'(x-2) dx$. Đặt $t = x-2 \Rightarrow dt = dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = -2$ và $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

$$\Rightarrow J = \int_{-2}^2 f'(t) dt = \int_{-2}^2 f'(x) dx.$$

Suy ra:

$$I + J = \int_2^4 f'(x) dx + \int_{-2}^2 f'(x) dx = \int_{-2}^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-2}^4 = f(4) - f(-2) = 4 - (-2) = 6.$$

Câu 172: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ bằng:

Ⓐ $\frac{13}{6}$.

Ⓑ $\frac{9}{2}$.

Ⓒ 9.

Ⓓ $\frac{13}{3}$.

Lời giải

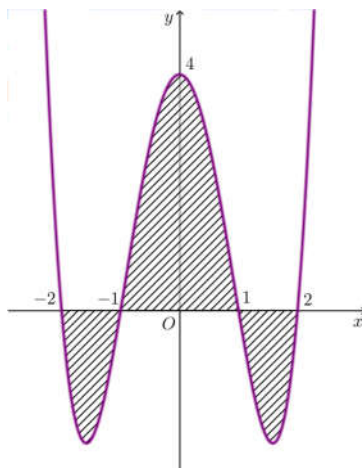
Chọn C

Xét phương trình: $x + 3 = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S = \int_{-1}^1 |2x^2 - 2x - 4| dx = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9$.

Câu 173: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích S của miền được tô xen như hình được tính theo công thức nào?

- Ⓐ $S = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. Ⓑ $S = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.
- Ⓒ $S = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$. Ⓓ $S = \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích S của miền được tô xen như hình là:

$$S = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-1} |f(x)| dx + \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$$

Câu 174: (SGD&ĐT LAI CHÂU NĂM 2020-2021) Tìm công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^4$, $y = x^2$

- Ⓐ $\int_0^1 (x^4 - x^2) dx$. Ⓑ $\int_0^1 (x^2 - x^4) dx$. Ⓒ $\int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx$. Ⓓ $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx$.

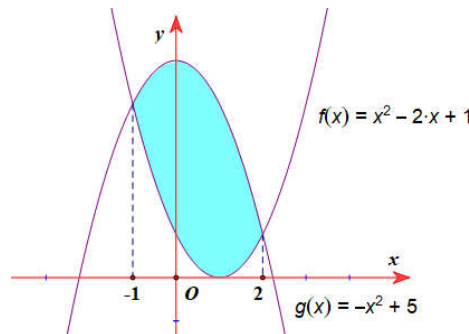
Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Do đó diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1}^1 |x^4 - x^2| dx = \int_{-1}^1 x^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx$.

Câu 175: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình bên bằng



- Ⓐ $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x - 4) dx$. Ⓑ $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.
- Ⓒ $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$. Ⓓ $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

Lời giải

Chọn D

Trên $[-1; 2]$ ta có $g(x) \geq f(x)$ nên diện tích hình phẳng là:

$$\int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 176: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$ và hai trục tọa độ bằng

Ⓐ $\frac{\pi}{2}$.

Ⓑ $\frac{11}{4}$.

Ⓒ $\frac{11\pi}{4}$.

Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi
$$\begin{cases} y = (x-1)(x^2 - 5x + 6) \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 |(x-1)(x^2 - 5x + 6)| dx \\ &= \int_0^1 |(x-1)(x^2 - 5x + 6)| dx + \int_1^2 |(x-1)(x^2 - 5x + 6)| dx + \int_2^3 |(x-1)(x^2 - 5x + 6)| dx \\ &= \left| \int_0^1 (x-1)(x^2 - 5x + 6) dx \right| + \left| \int_1^2 (x-1)(x^2 - 5x + 6) dx \right| + \left| \int_2^3 (x-1)(x^2 - 5x + 6) dx \right| \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Câu 177: (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2020-2021 LẦN 04) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$, $g(x) = dx^2 + ex + 2$, $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị.

Ⓐ $\frac{37}{6}$.

Ⓑ $\frac{13}{2}$.

Ⓒ $\frac{9}{2}$.

Ⓓ $\frac{37}{12}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0 \quad (*)$$

Ta có $-2; -1; 1$ là ba nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = 4 \\ -a + (b-d) - (c-e) = 4 \\ a + (b-d) + (c-e) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b-d = 4 \\ c-e = -2 \end{cases}$$

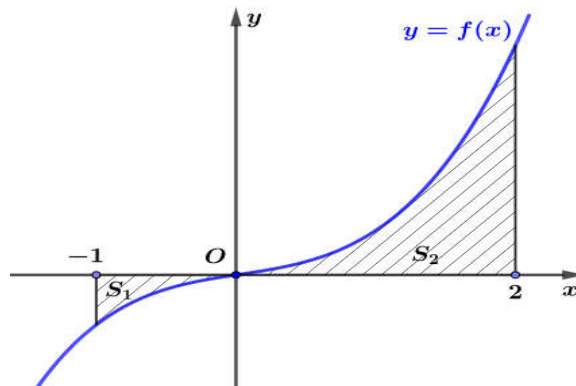
$$\text{Do đó } f(x) - g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{-2}^1 |2x^3 + 4x^2 - 2x - 4| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4) dx + \int_{-1}^1 -(2x^3 + 4x^2 - 2x - 4) dx \\ &= \frac{5}{6} + \frac{16}{3} = \frac{37}{6}. \end{aligned}$$

Câu 178: (CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2020-2021) Cho hàm số

$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$ có đồ thị như hình bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



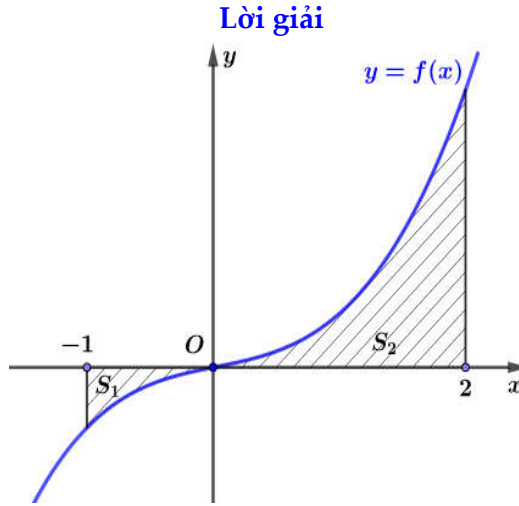
Khi $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{40}$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

☒ A $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

☐ B $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

☐ C $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

☐ D $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.



Dựa vào đồ thị suy ra:
$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} - a < 0 \\ \frac{8}{3} + 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{3} \\ a > -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a > -\frac{1}{3}.$$

Ta có:
$$S_1 = \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{3}x^3 + ax \right| dx = \left| \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3}x^3 + ax \right) dx \right| = - \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3}x^3 + ax \right) dx = - \left(\frac{x^4}{12} + \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{12} + \frac{a}{2}.$$

$$S_2 = \int_0^2 \left| \frac{1}{3}x^3 + ax \right| dx = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + ax \right) dx \right| = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + ax \right) dx = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} + 2a.$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{40} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{12} + \frac{a}{2}}{\frac{4}{3} + 2a} = \frac{7}{40} \Leftrightarrow a = 1. \text{ Vậy } a \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right).$$

Câu 179: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;3)$. Giả sử khi đường thẳng d có hệ số góc k thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d nhỏ nhất. Giá trị thực của k thuộc khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;3)$. Ⓒ $(-3;0)$. Ⓓ $(3;+\infty)$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;3)$, có hệ số góc k có phương trình dạng $y = kx - k + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) : $x^2 = kx - k + 3$
 $\Leftrightarrow x^2 - kx + k - 3 = 0 (*)$.

Do $\Delta = k^2 - 4k + 12 > 0, \forall k$ nên d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$, $(x_1 < x_2)$.

Ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = k - 3 \\ x_2 - x_1 = \sqrt{k^2 - 4k + 12} \end{cases}.$$

Gọi S diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d .

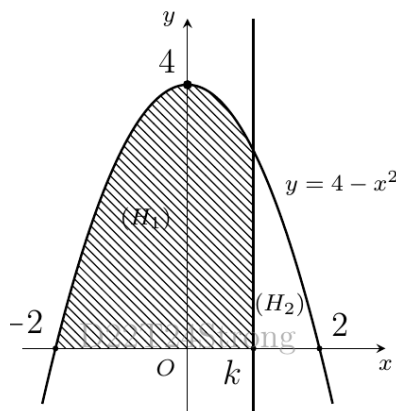
Parabol (P) quay bề lõm lên trên suy ra

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |x^2 - (kx - k + 3)| dx = \int_{x_1}^{x_2} [(kx - k + 3) - x^2] dx$$

$$\begin{aligned} S &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}kx^2 + (3-k)x \right]_{x_1}^{x_2} = (x_2 - x_1) \left[-\frac{1}{3}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{3}x_1 x_2 + \frac{1}{2}k(x_1 + x_2) + 3 - k \right] \\ &= \sqrt{k^2 - 4k + 12} \cdot \left[-\frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{3}(k-3) + \frac{1}{2}k^2 + 3 - k \right] \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{k^2 - 4k + 12})^3 = \frac{1}{6} \cdot [\sqrt{(k-2)^2 + 8}]^3 \geq \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{8})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}, \forall k \end{aligned}$$

Do đó $\min S = \frac{8\sqrt{2}}{3}$, đạt được khi $k = 2$.

Câu 180: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Trong mặt phẳng Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$ ($-2 < k < 2$) chia (H) thành hai phần (H_1) , (H_2) như hình vẽ



Biết rằng diện tích hình (H_1) gấp $\frac{20}{7}$ lần diện tích của hình (H_2) , hỏi giá trị k thuộc khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $(-2; -1)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(-1; 0)$. Ⓓ $(1; 2)$.

Lời giải

Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích hình (H_1) , (H_2) .

Khi đó

$$S_1 = \int_{-2}^k (4-x^2) dx = -\frac{k^3}{3} + 4k + \frac{16}{3} \text{ và } S_2 = \int_k^2 (4-x^2) dx = \frac{k^3}{3} - 4k + \frac{16}{3}.$$

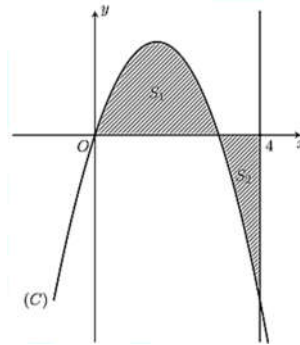
Theo giả thiết, có

$$S_1 = \frac{20}{7} S_2 \Leftrightarrow -\frac{k^3}{3} + 4k + \frac{16}{3} = \frac{20}{7} \left(\frac{k^3}{3} - 4k + \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow 27k^3 - 324k + 208 = 0.$$

Giải phương trình trên, ta có $k = \frac{2}{3}; k = \frac{-1 \pm \sqrt{105}}{3}$.

Đối chiếu với điều kiện, suy ra $k = \frac{2}{3}$.

Câu 181: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y = mx - x^2$ ($0 < m < 4$) có đồ thị (C) . Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 4$. Giá trị m để $S_1 = S_2$ là



A $m = \frac{10}{3}$.

B $m = \frac{8}{3}$.

C $m = 3$.

D $m = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là:

$$mx - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases} \quad (0 < m < 4)$$

Ta có: $S_1 = \int_0^m |mx - x^2| dx = \int_0^m (mx - x^2) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^3}{6}.$

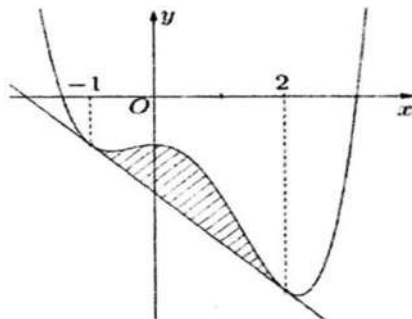
Lại có: $S_2 = \int_m^4 |mx - x^2| dx = \int_m^4 (x^2 - mx) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} \right) \Big|_m^4 = \frac{m^3}{6} - 8m + \frac{64}{3}.$

Theo giả thiết ta có: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{m^3}{6} = \frac{m^3}{6} - 8m + \frac{64}{3} \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}.$

Câu 182: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho hai hàm số

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1 \text{ và } g(x) = ex - 2 \quad (a, b, c, d, e \text{ là các số thực cho trước}).$$

Biết rằng đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

Ⓐ $\frac{81}{20}$.

Ⓑ $\frac{81}{4}$.

Ⓒ $\frac{81}{10}$.

Ⓓ $\frac{81}{40}$.

Lời giải

$$\text{Hình phẳng } (H): \begin{cases} y = f(x), y = g(x) \\ x = -1, x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Dựa vào hình vẽ trên diện tích hình phẳng } (H) \text{ là: } S = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{Ta có: } f(x) - g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d - e)x + 1$$

Do đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2$ nên $x = -1, x = 2$ là hai nghiệm bội chẵn của phương trình $f(x) - g(x) = 0$.

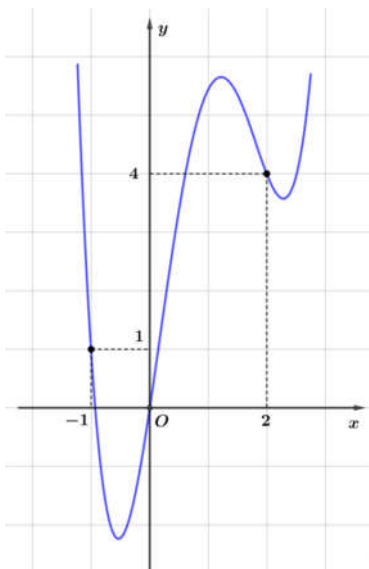
$$\text{Suy ra } f(x) - g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + (d - e)x + 1 = a(x + 1)^2(x - 2)^2.$$

$$\text{Đồng nhất hệ số tự do ta được: } 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Do đó } f(x) - g(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2(x - 2)^2 \text{ hay } S = \int_{-1}^2 \frac{1}{4}(x + 1)^2(x - 2)^2 dx = \frac{81}{40}.$$

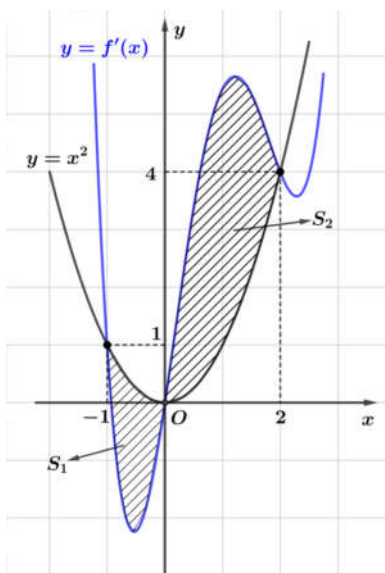
Câu 183: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm

số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = x^3 - 3f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- (A) $g(2) < g(-1) < g(0)$. (B) $g(0) < g(-1) < g(2)$.
 (C) $g(-1) < g(0) < g(2)$. (D) $g(2) < g(0) < g(-1)$.

Lời giải



Ta có: $g'(x) = 3x^2 - 3f'(x) = 3(x^2 - f'(x))$. Suy ra: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

BBT:

x	-1	0	2
g'	+	0	-
g	$g(-1)$	$g(0)$	$g(2)$

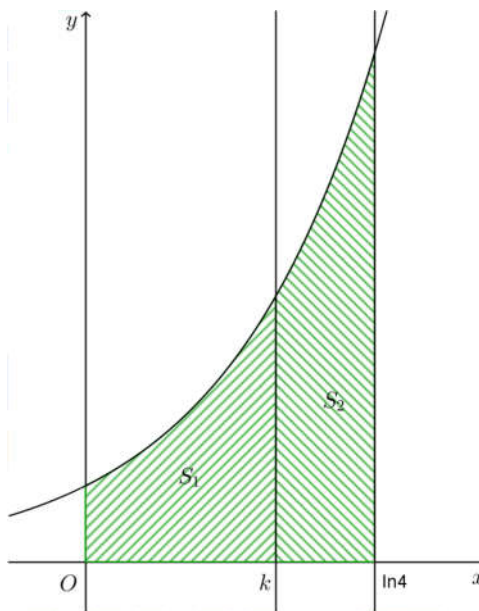
Từ BBT suy ra $\max_{[-1;2]} g(x) = g(0)$.

Theo hình vẽ thì

$$\begin{aligned} S_1 < S_2 &\Leftrightarrow \int_{-1}^0 (x^2 - f'(x)) dx < -\int_0^2 (x^2 - f'(x)) dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 3(x^2 - f'(x)) dx < -\int_0^2 3(x^2 - f'(x)) dx \\ &\Leftrightarrow \int_{-1}^0 g'(x) dx < -\int_0^2 g'(x) dx \\ &\Leftrightarrow g(0) - g(-1) < -g(2) + g(0) \\ &\Leftrightarrow g(-1) > g(2). \end{aligned}$$

Tóm lại: $g(0) > g(-1) > g(2)$. Ta chọn đáp án **A**

Câu 184: (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2020-2021) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($k \in \mathbb{R}; 0 < k < \ln 4$) chia hình phẳng (H) thành hai phần có diện tích là S_1 ; S_2 (xem hình vẽ).



Tìm k để $S_2 = 2S_1$.

- A** $k = \ln 3$. **B** $k = \ln \frac{8}{3}$. **C** $k = \frac{2}{3} \ln 4$. **D** $k = \ln 2$.

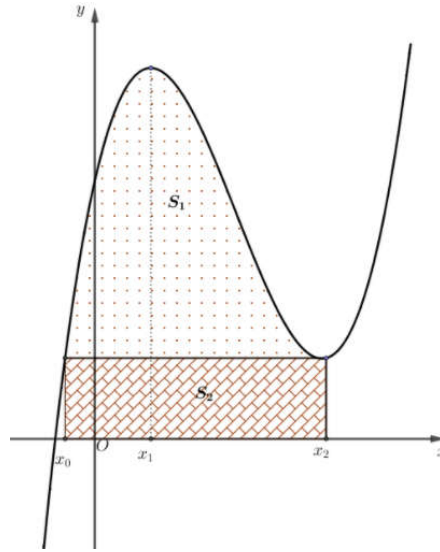
Lời giải

Chọn D

Ta có

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow \int_k^{\ln 4} e^x dx = 2 \int_0^k e^x dx \Leftrightarrow e^x \Big|_k^{\ln 4} = 2e^x \Big|_0^k \Leftrightarrow 4 - e^k = 2e^k - 2 \Leftrightarrow e^k = 2 \Leftrightarrow k = \ln 2.$$

Câu 185: (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2020-2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong bên dưới. Gọi $x_1; x_2$ lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A $\frac{9}{8}$.

B $\frac{5}{8}$.

C $\frac{3}{8}$.

D $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Do $f(x)$ là hàm số bậc ba nên

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a > 0) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Mặt khác do hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ nên

$$f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1).$$

Mặt khác $f(x) = \int f'(x) dx \Rightarrow f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C$, khi đó $f(x_1) = C$ và

$$f(x_2) = f(x_1 + 2) = a(x_1 + 2 - x_1)^3 - 3a(x_1 + 2 - x_1)^2 + C = -4a + C.$$

Mà $f(x_1) - 3f(x_2) = 0 \Leftrightarrow C - 3(-4a + C) = 0 \Leftrightarrow C = 6a \Rightarrow f(x_2) = 2a$.

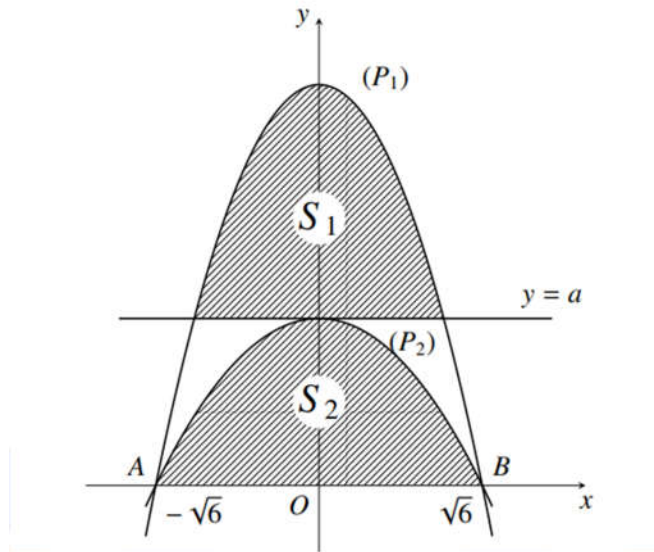
$$\Rightarrow f(x) = a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 6].$$

$$\text{Do } S_1 = \int_{x_0}^{x_2} [f(x) - f(x_2)] dx = a \int_{x_1-1}^{x_1+2} [(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 4] dx = \frac{27}{4}a.$$

$$S_2 = \int_{x_0}^{x_2} f(x_2) dx = \int_{x_1-1}^{x_1+2} 2a dx = 6a.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{8}.$$

Câu 186: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021 LẦN 02) Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 6$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ).



Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 12a^2 + 108a$.

- Ⓐ $T = 218$. Ⓑ $T = 219$. Ⓒ $T = 216$. Ⓓ $T = 217$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 6 = a$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 - a$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6-a}.$$

$$\text{Khi đó } S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{6-a}} (-x^2 + 6 - a) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + 6x - ax \right) \Big|_0^{\sqrt{6-a}} = \frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a}.$$

$$\text{Tọa độ giao điểm } A, B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} y = -x^2 + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \Rightarrow y = 0 \\ x = -\sqrt{6} \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } A(-\sqrt{6}; 0), B(\sqrt{6}; 0).$$

Gọi $(P_2): y = mx^2 + nx + p$.

Vì parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$ nên

$$\begin{cases} 6m + \sqrt{6}n + p = 0 \\ 6m - \sqrt{6}n + p = 0 \\ p = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ p = a \\ m = -\frac{a}{6} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{a}{6}x^2 + a.$$

$$\text{Do đó } S_2 = 2 \int_0^{\sqrt{6}} \left(-\frac{a}{6}x^2 + a \right) dx = 2 \left(-\frac{ax^3}{18} + ax \right) \Big|_0^{\sqrt{6}} = 2 \left(-\frac{\sqrt{6}a}{3} + \sqrt{6}a \right) = \frac{4\sqrt{6}a}{3}.$$

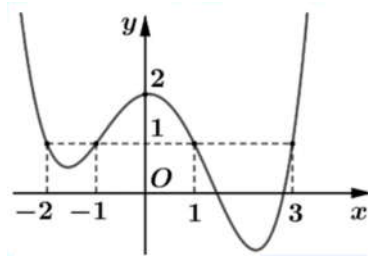
Theo đề bài

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a} = \frac{4\sqrt{6}a}{3} \Leftrightarrow (6-a)^3 = 6a^2 \Leftrightarrow 216 - 108a + 18a^2 - a^3 = 6a^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 12a^2 + 108a = 216.$$

Câu 187: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Biết

rằng tích phân $K = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$ có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?



- Ⓐ $(-3; -2)$. Ⓑ $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. Ⓒ $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Ⓓ $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

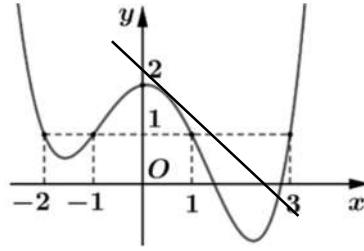
Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = f(x) \cdot f'(x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} [f(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } K = \frac{x}{2} [f(x)]^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 [f(x)]^2 dx.$$

Cách 1. Từ đồ thị ta thấy



Đồ thị $y = f(x)$ nằm trên đường thẳng $y = 2 - x$ trên $[0; 1]$.

$$\text{Nên } f(x) > 2 - x \Rightarrow \int_0^1 \frac{[f(x)]^2}{2} dx > \int_0^1 \frac{(2-x)^2}{2} dx = \frac{7}{6} \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{[f(x)]^2}{2} dx < -\frac{2}{3}.$$

Đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2$ trên $[0; 1]$.

$$\text{Nên } f(x) > 2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{[f(x)]^2}{2} dx < \int_0^1 \frac{(2)^2}{2} dx = 2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{[f(x)]^2}{2} dx > -\frac{3}{2}.$$

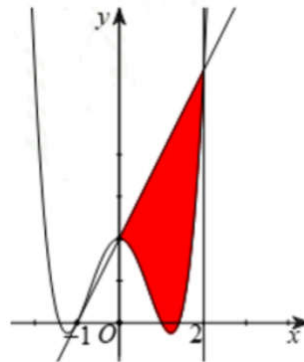
Cách 2. [Khi có rất nhiều điểm thuộc đồ thị trên hình]

Chọn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Dựa vào đồ thị ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(-2) = 1 \\ f(-1) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f(1) = 1 \\ f(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{6}, c = -\frac{7}{6}, d = \frac{1}{6}, e = 2.$$

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 2 \right]^2 dx \approx -0,968. \text{ Suy ra } K \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3} \right).$$

Câu 188: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ có diện tích bằng

Ⓐ $\frac{2}{5}$.

Ⓑ $\frac{1}{4}$.

Ⓒ $\frac{2}{9}$.

Ⓓ $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$a(x+1)^2(x-2)x=0 \Leftrightarrow ax^4-3ax^2-2ax=0, (a>0)$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ bằng

$$\frac{28}{8} \text{ nên: } \int_0^2 |ax^4-3ax^2-2ax| dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow \left| -\frac{ax^5}{5} + ax^3 - ax^2 \right|_0^2 = \frac{28}{5} \Leftrightarrow a=1$$

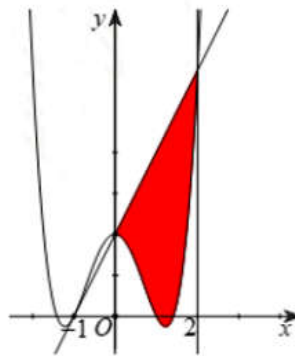
Suy ra phương trình hoành độ giao điểm là: $x^4-3x^2-2x=0$

Từ đồ thị ta thấy d đi qua điểm $A(-1;0)$ và $B(0;k)$ nên phương trình đường thẳng d là:

$y=kx+k$. Suy ra hàm số (C) có dạng: $y=x^4-3x^2-(2-k)x+k=0$. Mà đồ thị hàm số (C) là hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ nên $2-k=0 \Rightarrow k=2$

Vậy diện tích cần tìm là: $\int_{-1}^0 (x^4-3x^2+2) dx = \frac{6}{5}$.

Câu 189: (THPT CHUYÊN BẾN TRE NĂM 2020-2021) Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

Ⓐ $\frac{2}{5}$.

Ⓑ $\frac{1}{4}$.

Ⓒ $\frac{2}{9}$.

Ⓓ $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $y = mx + n$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là

$$\int_0^2 |ax^4 + bx^2 + c - mx - n| dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow -\int_0^2 (ax^4 + bx^2 + c - mx - n) dx = \frac{28}{5} (*)$$

Vì (C) và d tiếp xúc tại điểm $x = -1$ và giao nhau tại các điểm có hoành độ $x = 0; x = 2$ nên ta có $ax^4 + bx^2 + c - mx - n = a(x-2)x(x+1)^2 = a(x^4 - 3x^2 - 2x)$.

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow -a \int_0^2 (x^4 - 3x^2 - 2x) dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow -a \left(\frac{x^5}{5} - x^3 - x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{28}{5} \Leftrightarrow \frac{28}{5} a = \frac{28}{5} \Leftrightarrow a = 1.$$

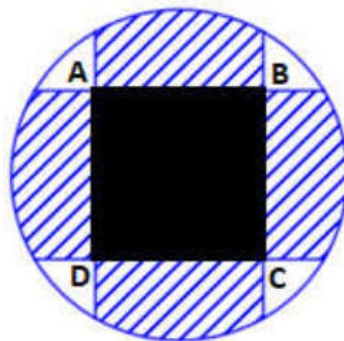
Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , d và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$ là

$$S = \int_{-1}^0 |x^4 - 3x^2 - 2x| dx = \frac{1}{5}.$$

Lưu ý: Đề bài trên đã bổ sung thêm yếu tố giới hạn bởi đồ thị (C) với đường thẳng d vào câu hỏi so với đề bài gốc vì nếu đề bài gốc là tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1; x = 0$ là không hợp lí vì hình phẳng hở nên không tính được diện tích, nếu chọn bổ sung giới hạn với trục Ox thì đáp án là $\frac{6}{5}$ không có trong 4 đáp án.

BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

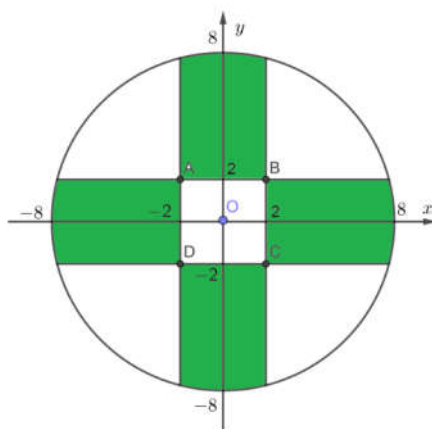
Câu 190: (CHUYÊN LONG AN NĂM 2020-2021 LẦN 03) Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa. Phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ. Ở bốn góc còn lại, mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/ m^2 , giá trồng cỏ là 100.000 đ/ m^2 , mỗi cây cọ giá 150.000 đ. Hỏi số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa như miêu tả ở trên gần bằng giá trị nào nhất?



- Ⓐ 14.465.000 đồng. Ⓑ 14.865.000 đồng. Ⓒ 13.265.000 đồng. Ⓓ 12.218.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với tâm hình tròn, suy ra phương trình

đường tròn là: $x^2 + y^2 = 64$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16 \text{ (m}^2\text{)}$.

$\Rightarrow$ Số tiền để trồng hoa là: $T_1 = 16 \times 200.000 = 3.200.000$.

Diện tích trồng cỏ là: $S = 4 \int_{-2}^2 (\sqrt{64 - x^2} - 2) dx \approx 94,654 \text{ (m}^2\text{)}$.

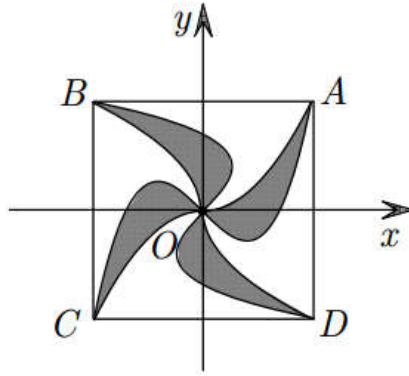
$\Rightarrow$ Số tiền trồng cỏ là: $T_2 = 94,654 \times 100.000 = 9.465.000$.

Số tiền trồng 4 cây cọ là: $T_3 = 150.000 \times 4 = 600.000$.

Vậy tổng số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa là:

$T = T_1 + T_2 + T_3 = 13.265.000$.

Câu 191: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Mặt sàn của một thang máy có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $2m$ được lát gạch màu trắng và trang trí bởi một hình 4 cánh giống nhau màu sẫm. Khi đặt trong hệ tọa độ Oxy với O là tâm hình vuông sao cho $A(1;1)$ như hình vẽ bên thì các đường cong OA có phương trình $y = x^2$ và $y = ax^3 + bx$. Tính giá trị ab biết rằng diện tích trang trí màu sẫm chiếm $\frac{1}{3}$ diện tích mặt sàn.



A -2.

B -3.

C 2.

D 3.

Lời giải

Vì đường cong OA có phương trình $y = ax^3 + bx$ đi qua điểm $A(1;1)$ nên

$$a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$$

$$\Rightarrow y = ax^3 + (1 - a)x$$

Diện tích mặt sàn hình vuông là: $S_{ABCD} = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích hình một cánh màu sẫm là:

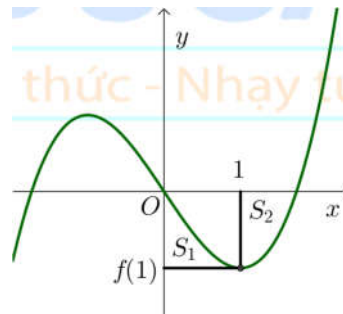
$$S = \int_0^1 [x^2 - [ax^3 + (1 - a)x]] dx = \int_0^1 (x^2 - ax^3 + ax - x) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^4}{4} + \frac{ax^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{4} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = \frac{a}{4} - \frac{1}{6}$$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } 4S = \frac{1}{3} S_{ABCD} \Leftrightarrow 12S = S_{ABCD} \Leftrightarrow 12 \left(\frac{a}{4} - \frac{1}{6} \right) = 4 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = -1$$

Do đó: $ab = -2$.

Câu 192: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NINH NĂM 2020-2021) Cho hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ và thỏa mãn $[f(x)+1]$ và $[f(x)-1]$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng như hình bên dưới. Tính $2S_1 - S_2$



A 4.

B $\frac{3}{4}$.

C $\frac{1}{2}$.

D $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} [f(x)+1]:(x-1)^2 \\ [f(x)-1]:(x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [f(x)+1]':(x-1) \\ [f(x)-1]':(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x):(x-1) \\ f'(x):(x+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ có dạng: } f'(x) = a(x+1)(x-1) = a(x^2 - 1) (a > 0)$$

$$\text{Và } f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C$$

$$\text{Theo hình vẽ, } f(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

$$\begin{cases} [f(x)+1]:(x-1)^2 \\ [f(x)-1]:(x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)+1=0 \\ f(-1)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2a}{3}+1=0 \\ \frac{2a}{3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x$$

* Phương trình giao điểm của của $(C): y = f(x)$ với trục hoành:

$$\frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \left| \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x \right| dx = \frac{5}{8}$$

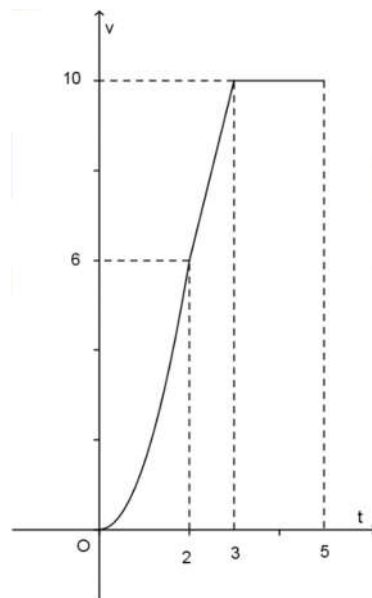
$$\text{Diện tích hình phẳng } S_2 = \int_1^{\sqrt{3}} |f(x)| dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left| \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x \right| dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } 2S_1 - S_2 = 2 \cdot \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Câu 193: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 01)

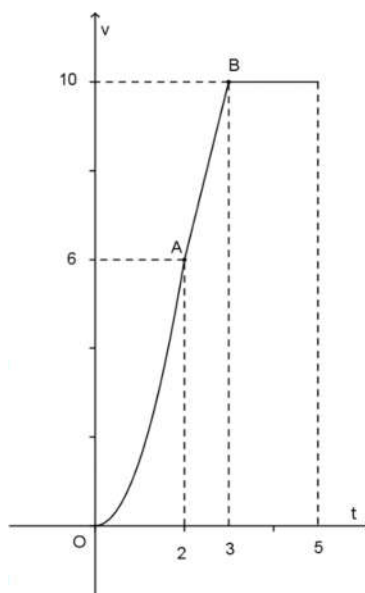
Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là 360 km/h . Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu tiên là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O , giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng 3 giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị 10 m/s và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?

- Ⓐ 340 (mét). Ⓑ 420 (mét).
Ⓒ 400 (mét). Ⓓ 320 (mét).



Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(2;6)$; $B(3;10)$ 

Theo gt thì phương trình của parabol là $y = \frac{3}{2}x^2$; phương trình đường thẳng AB là $y = 4x - 2$

Vậy trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là:

$$S = 10 \left(\int_0^2 \frac{3}{2}x^2 dx + \int_2^3 (4x - 2) dx + 2 \cdot 10 \right) = 320 \text{ (mét).}$$

THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ (TRÒN XOAY)

Câu 194: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$) quay quanh trục Ox được tính theo công thức

Ⓐ $V = \int_a^b f^2(x) dx$. Ⓑ $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Ⓒ $V = \int_a^b |f(x)| dx$. Ⓓ $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$

Lời giải

Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$) quay quanh trục Ox được tính theo công

thức $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 195: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2020-2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = \sqrt{x} - x, y = 0$ trong mặt phẳng Oxy . Quay hình (H) quanh trục hoành ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

- Ⓐ $\pi \int_0^1 |\sqrt{x} - x| dx$. Ⓑ $\int_0^1 |\sqrt{x} - x| dx$. Ⓒ $\pi \int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx$. Ⓓ $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } \sqrt{x} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có thể tích khối tròn xoay là

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x)^2 dx = \pi \int_0^1 [\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})]^2 dx = \pi \int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx.$$

Câu 196: (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2020-2021 LẦN 02) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1$ và $y = 2 - x^2$. Thể tích khối tròn xoay giới hạn được tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

- Ⓐ $V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^2 dx$. Ⓑ $V = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx$.
 Ⓒ $V = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx - 2\pi$. Ⓓ $V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^2 dx - 4\pi$.

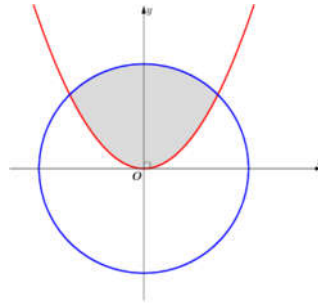
Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $1 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Thể tích khối tròn xoay giới hạn được tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left| (2 - x^2)^2 - 1^2 \right| dx = \pi \int_{-1}^1 \left((2 - x^2)^2 - 1 \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 1 dx = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx - \pi x \Big|_{-1}^1 = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx - 2\pi. \end{aligned}$$

Câu 197: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$. Thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là



Ⓐ $V = \frac{44}{15}$.

Ⓑ $V = \frac{5\pi}{3}$.

Ⓒ $V = \frac{44\pi}{15}$.

Ⓓ $V = \frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ y = -\sqrt{2-x^2} \end{cases}$.

Hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2-x^2}$ và $y = x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{2-x^2} = x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có $V = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (2-x^2-x^4) dx = \pi \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{44\pi}{15}$.

Câu 198: (THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020-2021 LẦN 01) Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = 3x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^2$ quay quanh trục Ox .

Ⓐ $\frac{4\pi}{5}$.

Ⓑ $\frac{1}{6}$.

Ⓒ $\frac{4}{5}$.

Ⓓ $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Mà $x^2 \leq 3x - 2$ với $\forall x \in [1; 2] \Rightarrow$ Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = 3x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^2$ quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_1^2 [(3x-2)^2 - x^4] dx = \pi \int_1^2 (-x^4 + 9x^2 - 12x + 4) dx = \pi \left(-\frac{x^5}{5} + 3x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{5}$$

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là $\frac{4\pi}{5}$.

Câu 199: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TPHCM NĂM 2020-2021) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quanh trục Ox .

Ⓐ $V = \frac{4}{3}\pi$.

Ⓑ $V = \frac{16}{15}$.

Ⓒ $V = \frac{4}{3}$.

Ⓓ $V = \frac{16}{15}\pi$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16}{15} \pi.$$

Câu 200: (CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2020-2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 + x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

- Ⓐ $\frac{\pi}{30}$. Ⓑ $\frac{\pi}{6}$. Ⓒ $\frac{1}{30}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + x$ và trục hoành là

$$-x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $V = \pi \int_0^1 (-x^2 + x)^2 dx = \frac{\pi}{30}$.

Câu 201: (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2020-2021 LẦN 02) Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$ quay xung quanh trục Ox là

- Ⓐ $2 \ln 2 - 1$. Ⓑ $2\pi \ln 2 + \pi$. Ⓒ $2\pi \ln 2 - \pi$. Ⓓ $2 \ln 2 - 1$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích mặt tròn xoay:

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{\ln x})^2 dx = \pi \int_1^2 \ln x dx = \pi \left(x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx \right) = \pi \left(x \cdot \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 \right) = 2\pi \ln 2 - \pi.$$

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN VÀO CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 202: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮKLẮC NĂM 2020-2021) Một vật chuyển động có phương trình vận tốc: $v(t) = t^3 - 3t + 1$. Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ đến khi $t = 3$ là

- Ⓐ $\frac{39}{4} m$. Ⓑ $19 m$. Ⓒ $20 m$. Ⓓ $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ đến khi $t = 3$ là:

$$S = \int_0^3 (t^3 - 3t + 1) dt = \left(\frac{t^4}{4} - 3\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^3 = \frac{39}{4} (m).$$

Câu 203: (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2020-2021 LẦN 03) Một chiếc máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 2t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết máy bay đạt vận tốc 120(m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- Ⓐ 1200(m). Ⓑ 1100(m). Ⓒ 430(m). Ⓓ 330(m).

Lời giải

Chọn C

Máy bay đạt vận tốc 120(m/s) tại thời điểm thỏa mãn pt: $t^2 + 2t - 120 = 0 \Leftrightarrow t = 10$.

Khi đó quãng đường máy bay di chuyển là $s = \int_0^{10} (t^2 + 2t) dt = \frac{1300}{3} (m) \approx 430(m)$.

VỮNG KIẾN THỨC – NHẢY TỰ DO

CƠM CHÀO MẸ CHỮ THẦY --- GẮNG CỘNG MÀ HỌC CỎ NGÀY THÀNH DANH

HNT EDUCATION

VỮNG KIẾN THỨC – NHẠY TƯ DUY

Giảng dạy Toán lớp 6 – 12 + Luyện thi đại học

Điện thoại: 0968 373 054

Nguyên hàm – Tích phân – Ứng dụng

LƯU HÀNH NỘI BỘ

HNT.E - 20082021