

Câu 1. (2,0 điểm) Giải phương trình sau: $\sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho công thức truy hồi của dãy số cấp số cộng (u_n) : $\begin{cases} u_{11} + u_{12} = 23 \\ u_{27} - u_{23} = 4 \end{cases}$

Tìm số hạng đầu tiên và số hạng tổng quát của dãy số.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \frac{1}{u_3 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Biết góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 45° .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD .

Câu 5. (1,0 điểm) Ta có ba số a, b, c lần lượt lập thành một cấp số cộng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ ba và thứ năm. Mặt khác, ba số đó cũng lập thành một cấp số nhân với a là số hạng thứ nhất, b là số hạng thứ năm và c là số hạng thứ bảy. Tính giá trị của biểu thức $T = 2a + b + c$

Câu 6. (1,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^{2020} x + 2020}{\cos x}$, $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $f(x)$ là một hàm số chẵn.

Câu 7. (0,5 điểm) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, luôn tồn tại số thực $m \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ sao cho:

$$f\left(m + \frac{1}{n}\right) = f(m)$$

-----HẾT-----

Câu 1. (1,0 điểm) Giải phương trình hàm số mũ sau đây trên tập số thực $\mathbb{R}$: $3^x + 5^x = 2 \cdot 4^x$

Câu 2. (2,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình sau có hệ nghiệm duy nhất là hệ nghiệm $(x; y)$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 1 + \log_2(xy + 1) \\ x + y = m \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Tính giá trị biểu thức $P = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Câu 4. (1,0 điểm) Ta có dãy số (x_n) thỏa mãn $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{5}$. Chứng minh rằng dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông tại B , cạnh $AB = a$ và cạnh $AC = a\sqrt{5}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB .

- a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a
- b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC)

Câu 6. (2,0 điểm) Một lớp học có **40 học sinh**. Trong đó, có 22 học sinh thích môn Toán, 18 học sinh thích môn Vật lý, và 15 học sinh thích môn Hóa học. Biết rằng có 9 học sinh thích cả Toán và Vật lý, 7 học sinh thích cả Vật lý và Hóa học, 6 học sinh thích cả Hóa học và Toán. Ngoài ra, có 3 học sinh thích cả 3 môn học trên.

- a) Tính số học sinh của lớp ít nhất thích một trong ba môn học (Toán, Lý, Hóa).
- b) Nhà trường cần chọn ngẫu nhiên từ lớp học đó một nhóm gồm **3 học sinh**. Tính số cách chọn nhóm sao cho có ít nhất 1 học sinh không thích bất kỳ môn học nào trong ba môn trên.

Câu 7. (1,0 điểm) Tìm tất cả đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x^2) = x^3 \cdot P(x)$ với mọi x số thực

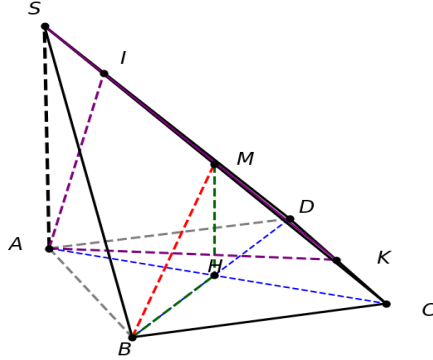
Câu 8. (1,0 điểm) Cho đa thức $A(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Chứng minh $A(x)$ bất khả quy.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

- Chấm đúng theo ý
- Nếu thí sinh làm cách khác, vẫn chấm như bình thường, đúng theo từng ý

Câu	Ý	Nội dung
1 (2,0 điểm)		Ta có: $\sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x$ Đặt $\sin x + \cos x = t$ ($t \leq \sqrt{2}$) $\Leftrightarrow t^2 - 2t\cos x + t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2\cos x - 1 \end{cases}$ + Với $t = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) + Với $t = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$) Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
2 (1,0 điểm)		Do (u_n) là cấp số cộng nên ta có hệ thức truy hồi: $\begin{cases} 2u_1 + 21d = 23 \\ 4d = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$. Vậy số hạng đầu tiên là $u_1 = 1$ và số hạng tổng quát là $u_n = n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$
3 (2,0 điểm)		Ta có $u_{n+1} = u_n^2 + u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ Vậy ta có $S_n = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} = 2 - \frac{1}{u_{n+1}}$ Do $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ và $u_{n+1} = u_n^2 + u_n > u_n$, nên $u_n > 0$ và dãy số (u_n) là một dãy số tăng nghiêm ngặt. + Giả sử (u_n) bị chặn trên, suy ra $L = L^2 + L \Leftrightarrow L = 0$ (vô lí) Nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$

4 (2,0 điểm)	a)	
	0,5đ	+ Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Do đó, giao tuyến của chúng là $SA \perp (ABCD)$. Vậy SA là đường cao của hình chóp + Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Suy ra ABC là tam giác đều, nên $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
	0,25đ	Gọi H là trung điểm của AC. Vì M là trung điểm của SC và $SA \perp (ABCD) \Rightarrow MH \parallel SA$, do đó $MH \perp (ABCD)$ Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ là H, nên hình chiếu của đường thẳng BM lên đáy là BH Góc giữa BM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MBH} = 45^\circ$. Do đó, MBH là tam giác vuông cân tại H, nên $MH = BH$
	0,25đ	Trong tam giác đều ABC cạnh a, đường trung tuyến $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Nên $MH = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do MH là đường trung bình của tam giác SAC nên $SA = 2 \cdot MH = a\sqrt{3}$ Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}$
	b) 0,25	Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$, do đó $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$ Kẻ $AK \perp CD$ tại K. Vì $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 60^\circ$ Tam giác ADC đều cạnh a, nên K chính là trung điểm của CD và $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
	0,25	Ta có $CD \perp AK$ và $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAK)$ Kẻ $AI \perp SK$ tại I (I thuộc SK). Vì $CD \perp (SAK)$ nên $CD \perp AI$, vậy suy ra rằng $AI \perp (SCD)$ Vậy $d(A, (SCD)) = AI$ Ta có hệ thức lượng trong tam giác SAK vuông tại A, đường cao AI: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Leftrightarrow AI = \frac{a\sqrt{15}}{5} \text{ (Kết luận)}$

5 (1,0 điểm)	0,25	Ta có a, b, c là cấp số cộng nên $a = u_1$, $b = u_1 + 2d$ và $c = u_1 + 4d$ Từ đó suy ra $2b = a + c$ (*) Mặt khác a, b, c là cấp số nhân nên $a = v_1$, $b = a.q^4$, $c = a.q^6$ Thay vào (*) ta được: $2(aq)^4 = a + aq^6$
	0,5	Trường hợp 1: Nếu $a = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow T = 0$ Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0 \Leftrightarrow q^6 - 2q^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (q^2 - 1)(q^4 - q^2 + 1) = 0$ i) $q^2 = 1 \Leftrightarrow q = \pm 1 \Leftrightarrow a = b = c$, nên $T = 4a$ ii) $q^4 - q^2 + 1 = 0$. Đặt $q^2 = x$ ($x \geq 0$) $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ $\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$ + Với $q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow T = a \cdot \left(\frac{11 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$ Với $T = 4a$ và $T = a \cdot \left(\frac{11 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$ thì biểu thức bị phụ thuộc vào a và a chạy vô hạn và giá trị T thay đổi liên tục. Mặt khác ta có định lý rằng nếu a, b, c cùng lập thành cấp số cộng và cấp số nhân thì $a = b = c$. Hơn nữa, a, b, c là các số hạng có thứ tự nên trường hợp 1 thỏa mãn là $a = b = c = 0$. Vậy giá trị $T = 0$
6 (1,5 điểm)		Ta có tập xác định là $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ Ta có với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ và $f(x)$ là hàm số chẵn khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ \forall x, (-x) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases}$ Xét $f(-x) = \frac{\sin^{2020n}(-x) + 2020}{\cos(-x)}$ Ta luôn có: $\sin(-x) = -\sin x$; Do $2020n$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên n, nên $\sin^{2020n}(-x) = \sin^{2020n}x$ và $\cos(-x) = \cos x \Leftrightarrow f(-x) = \frac{\sin^{2020n}x + 2020}{\cos x}$ Vậy $f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số là một hàm số chẵn
7 (0,5 điểm)		Xét hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ Xét tổng sau: $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ Suy ra $S = f(1) - f(0) = 0$

		Giả sử rằng $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ Do $g(x)$ liên tục nên chỉ có thể luôn dương hoặc âm trên đoạn xác định + Nếu $g(x) > 0$ thì: $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ Mâu thuẫn vì $S = 0$ + Nếu $g(x) < 0$ thì: $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) < 0$ Mâu thuẫn vì $S = 0$ Vì vậy luôn tồn tại ít nhất một điểm $m \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ sao cho $g(m) = 0$ $\Leftrightarrow f\left(m + \frac{1}{n}\right) = f(m)$ (điều phải chứng minh) ---HẾT---
--	--	---

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

- Chấm đúng theo ý
- Nếu thí sinh làm cách khác, vẫn chấm như bình thường, đúng theo từng ý

Câu	Ý	Nội dung
1 (1,0 điểm)		Ta có: $3^x + 5^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x = 2$ (do $4^x > 0$ với mọi x) Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x$, do đây là một hàm số tổng của hai hàm mũ cơ số dương nên $f(x)$ là một hàm lồi. Do $f(x)$ giao với đường thẳng $y = 2$, theo tính chất hàm lồi thì chỉ giao với đường thẳng ngang tối đa 2 nghiệm + Xét $x = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$ (đúng) + Xét $x = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$ (đúng) Cho nên phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$
2 (2,0 điểm)		Ta có điều kiện là: $x^2 + y^2 + 2 > 0$ (luôn đúng) và $xy + 1 > 0$ Xét: $\log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 1 + \log_2(xy + 1)$ $\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq \log_2(2) + \log_2(xy + 1)$ $\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq \log_2(2xy + 1)$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 0$ Do $(x - y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ Ta có: $\begin{cases} x = y \\ x + y = m \end{cases}$ Suy ra $x = \frac{m}{2}; y = \frac{m}{2}$. Xét điều kiện $xy + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} + 1 > 0$ (đúng) Vì vậy điều kiện của m là $m \in \mathbb{R}$

	0,25	+ Xét tam giác vuông tại B: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$ + Diện tích đáy ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2$ + Thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{2a^3}{3}$
	b) 0,25	Vì M là trung điểm của AB, nên: $d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} \cdot d(A, (SBC))$ Gọi H thuộc cạnh SB sao cho AH là đường cao hạ xuống SB, nên ta dễ dàng suy ra $AH \perp SB$ tại H. Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó $AH \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AH$ Xét tam giác SAB vuông tại A, hệ thức lượng cho đường cao AH: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow d(M, (SBC)) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$
6 (2,0 điểm)	a) 0,5	Gọi A là tập hợp học sinh thích Toán $\Rightarrow n(A) = 22$ Gọi B là tập hợp học sinh thích Vật lý $\Rightarrow n(B) = 18$ Gọi C là tập hợp học sinh thích Hóa học $\Rightarrow n(C) = 15$ Suy ra: Thích cả Toán và Lý: $n(A \cap B) = 9$ Thích cả Lý và Hóa: $n(B \cap C) = 7$ Thích cả Toán và Hóa: $n(A \cap C) = 6$ Thích cả ba môn: $n(A \cap B \cap C) = 3$
	0,5	Số học sinh thích ít nhất một trong ba môn là: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 36 \text{ (học sinh)}$
	b) 1,0	Từ câu a) số học sinh không thích môn nào là: $40 - 36 = 4$ Không gian mẫu chọn ngẫu nhiên 3 bạn từ 40 bạn: $C_{40}^3 = 9880$ (cách) Ta có số cách chọn 3 học sinh thích ít nhất một môn là: $C_{36}^3 = 7140$ (cách) Vậy số cách chọn 3 học sinh không thích ít nhất một môn là: $9880 - 7140 = 2740$ (cách)
7 (1,0 điểm)	0,5	Trước tiên, ta xét $P(x)$ đồng nhất với 0, thay vào ta được $0 = 0.0$ (luôn đúng) Xét trường hợp $P(x)$ không đồng nhất với 0, đặt $\deg P(x) = n$ ($n \geq 0$) Ta xét bậc của hai vế: $\deg(P(x^2)) = 2 \cdot \deg P = 2n$ Đặt $Q(x) = x^3$ và $\deg Q = m = 3$, vì vậy:

		$\deg(x^3.P(x)) = \deg(Q.P) = \deg Q + \deg P = 3 + n$ Vì vậy ta có được $2n = 3 + n \Leftrightarrow n = 3$
	0,5	Chính vì vậy $P(x)$ là một đa thức bậc 3, nên có dạng tổng quát: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\Leftrightarrow P(x^2) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$ $\Leftrightarrow x^3 \cdot P(x) = x^3 \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3$ Ta cân bằng hệ số: So sánh các hệ số của x^6: $ax^6 = ax^6$ (luôn đúng với mọi a) So sánh các hệ số của x^5: $bx^4 = bx^5 \Leftrightarrow b = 0$ So sánh các hệ số của x^4: $cx^2 = cx^4 \Leftrightarrow c = 0$ So sánh các hệ số của x^3: $d = dx^3 \Leftrightarrow d = 0$ Vì vậy đa thức thỏa mãn là $P(x) = ax^3$ (a là số thực tùy ý) Thử lại $P(x^2) = ax^6$ và $x^3.P(x) = ax^6$ (đúng)
8 (1,0 điểm)	0,5	Ta có $A(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ Ta nhân hai vế với một lượng $(x + 1) \Leftrightarrow A(x) \cdot (x + 1) = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ ($x \neq -1$) Áp dụng tính chất: $(x + 1)(x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \dots + 1) = x^{n+1} + (-1)^n$ Từ đa thức $A(x)$ ta thấy $n = 6$, suy ra ta có được: $A(x) = \frac{x^7 + 1}{x + 1}$ ($x \neq -1$) Ta thay $x = y - 1$ vào $A(x)$ ta được: $Q(y) = A(y - 1) = \frac{(y-1)^7 + 1}{y}$
	0,5	Từ phân tử thức, ta khai triển nhị thức Newton: $\sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot y^{7-k} \cdot (-1)^k$ Suy ra ta được: $(y - 1)^7 + 1 = y^7 - 7y^6 + 21y^5 - 35y^4 + 35y^3 - 21y^2 + 7y$ Từ đó ta rút y cho tử mẫu, suy ra: $Q(y) = y^6 - 7y^5 + 21y^4 - 35y^3 + 35y^2 - 21y + 7$ Chọn số nguyên tố $p = 7$, ta có các yếu tố như sau: (1) Hệ số cao nhất là 1 không chia hết cho 7 (2) Các hệ số còn lại 7, 21, 35 đều chia hết cho 7 (3) Hệ số tự do là 7 thì chia hết cho 7, nhưng không chia hết cho bình phương của 7 là 49

		Vậy tồn tại số nguyên tố là $p = 7$ thỏa mãn các điều kiện trên theo tiêu chuẩn Eisenstein nên $Q(y)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ Mà đa thức mới $Q(y)$ bất khả quy, dẫn đến đa thức gốc $A(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ (<i>đpcm</i>) ---HẾT---
--	--	---