

Thời gian làm bài: 90 phút
(không kể thời gian phát đề)

(Đề thi có ____ trang)

Họ và tên: Số báo Mã đề
..... danh: **101**

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong trận thi đấu bóng bàn đơn nam giữa vận động viên Nguyễn Đức Tuân (người từng đoạt huy chương vàng đơn nam môn bóng bàn tại Seagames 31) với một vận động viên nước ngoài, trận đấu gồm tối đa 5 set (séc), người nào thắng trước 3 set sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để vận động viên Tuân thắng mỗi set là 0,6. Tính xác suất để vận động viên Tuân giành chiến thắng trong trận đấu (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

- A. 0,21. B. 0,68. C. 0,47. D. 0,89.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , tọa độ ba đỉnh là $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$, hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, khi đó $a+b-2c$ bằng

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 2.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$		3	0	$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-\infty$		

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3+x)+3}$ là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (5;3;-2)$ và $\vec{b} = (m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2025;2025]$ để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

- A. 2026. B. 2025. C. 2028. D. 2027.

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên khoảng $(0;3\pi)$ là

- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 6. Cho 4 điểm $A(1;2;-3)$, $B(4;0;5)$, $C(2;0;1)$ và $D(6;-2;11)$. Gọi $M(x;y;z)$ là điểm sao cho $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $-x + y + z$.

- A. 8. B. 2. C. -3. D. 3.

Câu 7. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức $h(t) = 29 + 3\sin \frac{\pi}{12}(t-9)$ với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

- A. 26°C, lúc 0 giờ. B. 29°C, lúc 9 giờ. C. 32°C, lúc 15 giờ. D. 26°C, lúc 3 giờ.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt

là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{17}{14}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 9. Chị Hoa đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh vàng và chứng khoán. Chị Hoa thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 30 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	[3;5]	[5;7]	[7;9]	[9;11]	[11;13]
ổ tháng đầu tư vào vàng	6	10	7	4	3
Số tháng đầu tư vào chứng khoán	7	7	8	4	4

Chị Hoa đầu tư vào lĩnh vực nào rủi ro hơn?

A. Mức độ rủi ro như nhau.

B. Vàng.

C. Chứng khoán.

D. Không so sánh được.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử 2 điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$ đồng thời $MN \parallel BD'$. Khi đó tỉ số $\frac{MN}{BD'} = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

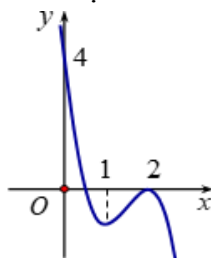
A. 4.

B. 7.

C. 3.

D. 5.

Câu 11. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới.



Tổng $b+c+d$ bằng.

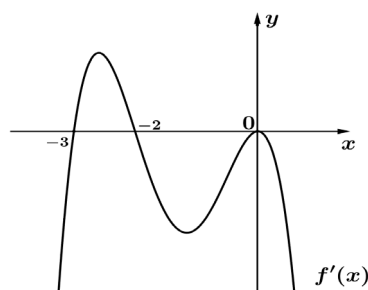
A. 2

B. 3

C. 1

D. 4

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 6; AD = 4; SA = 6; SA \perp (ABCD)$.

Điểm $M \in BD; \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MD}$, điểm $N \in SC; \overrightarrow{NS} = -3\overrightarrow{NC}$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. $\frac{\sqrt{310}}{6}$.

B. $\frac{35}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{190}}{6}$.

D. $\frac{15}{2}$.

Câu 14. Cho (u_n) là cấp số nhân, đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết $S_2 = 4; S_3 = 13$ và $u_2 < 0$, giá trị S_5 bằng

A. $\frac{181}{16}$.

B. $\frac{35}{16}$.

C. 2.

D. 121.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\frac{\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2}{\sqrt{m-2^x}} < 0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương.

A. 121.

B. 128.

C. 129.

D. 120.

Câu 16. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2025)$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{16}$.

A. 2021.

B. 2019.

C. 2016.

D. 2018.

Câu 18. Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{4}{5}$. Giá trị của k bằng

A. 8.

B. 7.

C. 6.

D. 9.

Câu 19. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh như sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 19,37.

B. 19,34.

C. 19,35

D. 19,43.

Câu 20. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2025}$. Tính giá trị

biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} - \frac{1}{\log_{ab} b}$.

A. $P = \sqrt{2026}$.

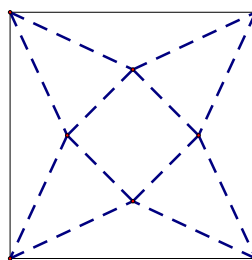
B. $P = -\sqrt{2026}$.

C. $P = -\sqrt{2021}$.

D. $P = \sqrt{2021}$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng - sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích V_0 .



Để mô hình kim tự tháp có thể tích V_0 là lớn nhất, thì diện tích đáy S_0 bằng 3216.

a) Khi $S_0 = 2a^2$, $V_0 = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$ thì chiều cao của hình chóp là $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

b) Khi $V_0 = \frac{a^3}{3}$ và M là trung điểm của SD thì thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng trên là

$\frac{a^3}{9}$.

c) Khi $S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ thì khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{a\sqrt{55}}{11}$.

d) Cho tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích là V_0 (tham khảo hình vẽ).

Câu 2. Một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50.

chia hết cho 8 bằng $\frac{239}{392}$.

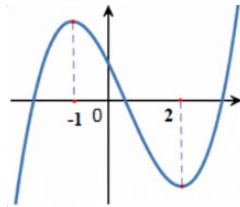
a) Lấy ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp. Xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được lập thành một cấp số cộng bằng $\frac{3}{98}$.

b) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là một số lẻ là 7500.

c) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là số chia hết cho 3 là 6544.

d) Lấy ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $bc > 0$.

b) Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = 1$ thì $f(6) = 43$.

c) Có 5 giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

d) Với $d = 1$ thì phương trình $\sqrt{f(f(x) + 1) + 3} = f(x) + 3$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Điểm thi môn Toán cuối học kì I của lớp 11A như sau:

Điểm thi	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số học sinh	7	12	15	11

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 8.

b) Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 7.

c) Trong bảng trên, thầy giáo muốn xác định nhóm gồm 50% học sinh có điểm thi thấp nhất để phụ đạo thêm, khi đó thầy giáo sẽ chọn các học sinh có điểm từ 5 trở xuống vào nhóm này.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 2,02.

Câu 5. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h = 8 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ với $0 \leq t \leq 24$.

a) Có 2 thời điểm trong 1 ngày chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c) Có 3 thời điểm trong 1 ngày mực nước tại bến cảng cao 11m.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn 11m. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 2)$ và $B(2; 2; 1)$.

a) Hình chiếu của gốc tọa độ O lên đường thẳng AB là điểm có hoành độ dương.

b) Điểm $N(x_1; y_1; z_1)$ thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho N, A, B thẳng hàng thì $x_1 + y_1 + z_1 = 6$.

c) Gọi $K(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $OABK$ là hình thang cân có đáy lớn KO gấp đôi đáy nhỏ AB . Khi đó $a + b + c = 8$

d) Nếu M là điểm nằm trên trục Oz thì giá trị nhỏ nhất của $T = 2MA^2 - MB^2 + |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ bằng 42.

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(7; 10; 6)$. Hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Khi $AM + BN$ nhỏ nhất, tính hiệu hoành độ của N và tung độ của M .

Câu 2. Cho các tia Ox, Oy, Oz cố định đôi một vuông góc nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A, B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1$ trong đó A, B, C không trùng với O . Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\frac{1}{m(1+\sqrt{n})^3}$ trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu

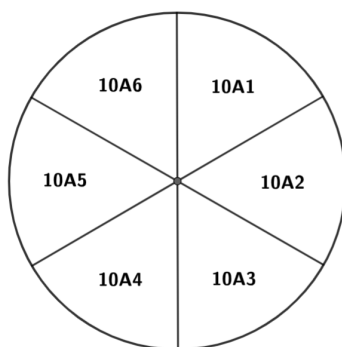
thức $P = m + n$ bằng

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Biết $f(0) = 1; f(2) = -2$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)f(x) - 30}{f(x) - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

Câu 4. Một bồn hoa hình tròn ở giữa sân trường được chia thành 6 phần bằng nhau và giao nhiệm vụ cho 6 lớp 10 chọn trồng một trong 4 loại hoa là hoa cúc, hoa hồng, hoa lan, hoa hướng dương theo các khu vực hình quạt được phân công cụ thể như hình vẽ.



Tính xác suất để hai lớp được phân công hai khu vực cạnh nhau thì không cùng trồng một loại hoa? (làm tròn đến hàng phân trăm)

Câu 5. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0.75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng tế bào của quần thể luôn thuộc nửa khoảng $[\alpha; \beta)$. Khi đó $\alpha + \beta$ bằng bao nhiêu?

Câu 6. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ bằng $a - \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tính ab .

----- **HẾT** -----

(Đề thi có ____ trang)

Họ và tên: Số báo Mã đề
..... danh: **102**

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

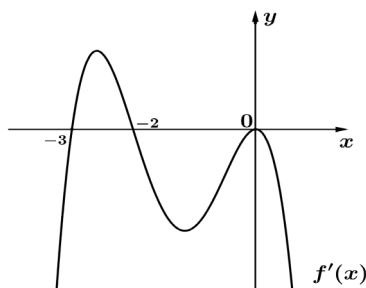
Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2025; 2025]$ để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

- A. 2026. B. 2027. C. 2025. D. 2028.

Câu 2. Cho (u_n) là cấp số nhân, đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết $S_2 = 4; S_3 = 13$ và $u_2 < 0$, giá trị S_5 bằng

- A. $\frac{35}{16}$. B. 2. C. $\frac{181}{16}$. D. 121.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 4. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức $h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t - 9)$ với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

- A. 26°C , lúc 3 giờ. B. 26°C , lúc 0 giờ. C. 32°C , lúc 15 giờ. D. 29°C , lúc 9 giờ.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 6. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh như sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 19,37. B. 19,43. C. 19,35 D. 19,34.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 6; AD = 4; SA = 6; SA \perp (ABCD)$.

Điểm $M \in BD; \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MD}$, điểm $N \in SC; \overrightarrow{NS} = -3\overrightarrow{NC}$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

- A. $\frac{35}{4}$. B. $\frac{\sqrt{190}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{310}}{6}$. D. $\frac{15}{2}$.

Câu 8. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2025}$. Tính giá trị biểu

thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} - \frac{1}{\log_{ab} b}$.

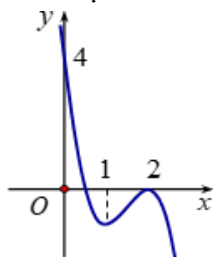
- A. $P = \sqrt{2026}$. B. $P = -\sqrt{2026}$. C. $P = \sqrt{2021}$. D. $P = -\sqrt{2021}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt

là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{17}{14}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới.



Tổng $b + c + d$ bằng.

- A. 3 B. 4 C. 1 D. 2

Câu 11. Chị Hoa đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh vàng và chứng khoán. Chị Hoa thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 30 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	[3;5]	[5;7]	[7;9]	[9;11]	[11;13]
ổ tháng đầu tư vào vàng	6	10	7	4	3
Số tháng đầu tư vào chứng khoán	7	7	8	4	4

Chị Hoa đầu tư vào lĩnh vực nào rủi ro hơn?

- A. Vàng. B. Chứng khoán.
C. Mức độ rủi ro như nhau. D. Không so sánh được.

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 13. Trong trận thi đấu bóng bàn đơn nam giữa vận động viên Nguyễn Đức Tuân (người từng đoạt huy chương vàng đơn nam môn bóng bàn tại Seagames 31) với một vận động viên nước ngoài, trận đấu gồm tối đa 5 set (séc), người nào thắng trước 3 set sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để vận động viên

Tuần thắng mỗi set là 0,6. Tính xác suất để vận động viên Tuấn giành chiến thắng trong trận đấu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. 0,47.

B. 0,68.

C. 0,89.

D. 0,21.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\frac{\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2}{\sqrt{m-2^x}} < 0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương.

A. 121.

B. 120.

C. 128.

D. 129.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử 2 điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$ đồng thời $MN \parallel BD'$. Khi đó tỉ số $\frac{MN}{BD'} = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 16. Cho 4 điểm $A(1;2;-3), B(4;0;5), C(2;0;1)$ và $D(6;-2;11)$. Gọi $M(x;y;z)$ là điểm sao cho $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $-x + y + z$.

A. 8.

B. -3.

C. 3.

D. 2.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Câu 18. Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{4}{5}$. Giá trị của k bằng

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 9.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a thuộc $(0;2025)$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{16}$.

A. 2018.

B. 2016.

C. 2021.

D. 2019.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , tọa độ ba đỉnh là $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$, hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, khi đó $a+b-2c$ bằng

A. 5.

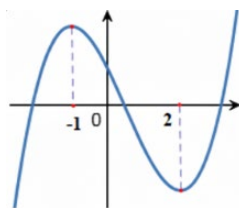
B. 6.

C. 2.

D. 4.

Phần II. Trắc nghiệm đúng - sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $bc > 0$.

b) Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = 1$ thì $f(6) = 43$.

c) Có 5 giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

d) Với $d = 1$ thì phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+3} = f(x)+3$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;2)$ và $B(2;2;1)$.

a) Hình chiếu của gốc tọa độ O lên đường thẳng AB là điểm có hoành độ dương.

b) Điểm $N(x_1; y_1; z_1)$ thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho N, A, B thẳng hàng thì $x_1 + y_1 + z_1 = 6$.

c) Gọi $K(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $OABK$ là hình thang cân có đáy lớn KO gấp đôi đáy nhỏ AB . Khi đó $a + b + c = 8$

d) Nếu M là điểm nằm trên trục Oz thì giá trị nhỏ nhất của $T = 2MA^2 - MB^2 + |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ bằng 42.

Câu 3. Điểm thi môn Toán cuối học kì I của lớp 11A như sau:

Điểm thi	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số học sinh	7	12	15	11

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

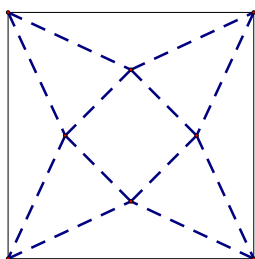
- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 8.
b) Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 7.
c) Trong bảng trên, thầy giáo muốn xác định nhóm gồm 50% học sinh có điểm thi thấp nhất để phụ đạo thêm, khi đó thầy giáo sẽ chọn các học sinh có điểm từ 5 trở xuống vào nhóm này.
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 2,02.

Câu 4. Một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50.

chia hết cho 8 bằng $\frac{239}{392}$.

- a) Lấy ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp. Xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được lập thành một cấp số cộng bằng $\frac{3}{98}$.
b) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là một số lẻ là 7500.
c) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là số chia hết cho 3 là 6544.
d) Lấy ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích V_0 .



Để mô hình kim tự tháp có thể tích V_0 là lớn nhất, thì diện tích đáy S_0 bằng 3216.

- a) Khi $S_0 = 2a^2, V_0 = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$ thì chiều cao của hình chóp là $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.
b) Khi $V_0 = \frac{a^3}{3}$ và M là trung điểm của SD thì thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng trên là $\frac{a^3}{9}$.
c) Khi $S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ thì khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{a\sqrt{55}}{11}$.

d) Cho tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích là V_0 (tham khảo hình vẽ).

Câu 6. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h = 8 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ với $0 \leq t \leq 24$.

a) Có 2 thời điểm trong 1 ngày chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c) Có 3 thời điểm trong 1 ngày mực nước tại bến cảng cao 11m.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn 11m. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho các tia Ox, Oy, Oz cố định đôi một vuông góc nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A, B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1$ trong đó A, B, C không trùng với O . Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\frac{1}{m(1+\sqrt{n})^3}$ trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu

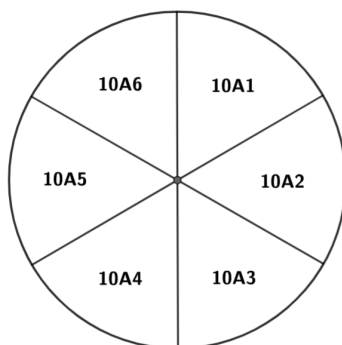
thức $P = m + n$ bằng

Câu 2. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ bằng $a - \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tính ab .

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;3), B(7;10;6)$. Hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Khi $AM + BN$ nhỏ nhất, tính hiệu hoành độ của N và tung độ của M .

Câu 4. Một bồn hoa hình tròn ở giữa sân trường được chia thành 6 phần bằng nhau và giao nhiệm vụ cho 6 lớp 10 chọn trồng một trong 4 loại hoa là hoa cúc, hoa hồng, hoa lan, hoa hướng dương theo các khu vực hình quạt được phân công cụ thể như hình vẽ.



Tính xác suất để hai lớp được phân công hai khu vực cạnh nhau thì không cùng trồng một loại hoa? (làm tròn đến hàng phân trăm)

Câu 5. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng tế bào của quần thể luôn thuộc nửa khoảng $[\alpha; \beta)$. Khi đó $\alpha + \beta$ bằng bao nhiêu?

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Biết $f(0) = 1; f(2) = -2$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)f(x) - 30}{f(x) - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

----- **HẾT** -----

Đáp án Môn thi: TOÁN Tổng điểm bài thi/phần thi: 20 (8-7,2-4,8)

âu\Mã Đ	101	102	103	104	105	106
1	B	D	D	C	D	C
2	D	C	B	B	A	C
3	C	C	B	A	A	B
4	C	A	B	D	A	C
5	C	D	A	C	D	B
6	A	A	D	C	B	B
7	D	B	B	C	D	A
8	C	D	C	A	D	B
9	C	B	D	B	B	B
10	A	C	C	B	C	B
11	C	B	B	A	B	D
12	D	A	B	A	C	D
13	C	B	D	D	C	C
14	A	C	A	A	D	D
15	B	D	A	C	D	D
16	C	A	D	B	D	A
17	A	A	A	D	D	A
18	C	B	A	C	D	A
19	A	C	A	B	B	C
20	C	C	C	B	A	B
1	SSĐS	ĐĐSS	ĐSSĐ	ĐSĐS	ĐSSĐ	ĐĐSS
2	ĐSĐS	ĐSĐS	SSĐS	ĐSĐS	SSĐS	ĐSSĐ
3	ĐĐSS	ĐSSĐ	ĐSSĐ	ĐĐSS	ĐSĐS	SSĐS
4	ĐSSĐ	ĐSĐS	ĐĐSS	ĐSSĐ	ĐSSĐ	ĐSĐS
5	ĐSSĐ	SSĐS	ĐSĐS	ĐSSĐ	ĐĐSS	ĐSĐS
6	ĐSĐS	ĐSSĐ	ĐSĐS	SSĐS	ĐSĐS	ĐSSĐ
1	1	164	8	164	164	164
2	164	25	164	8	0,18	120
3	8	1	0,18	1	25	0,18
4	0,18	0,18	120	120	1	1
5	120	120	1	25	8	8
6	25	8	25	0,18	120	25

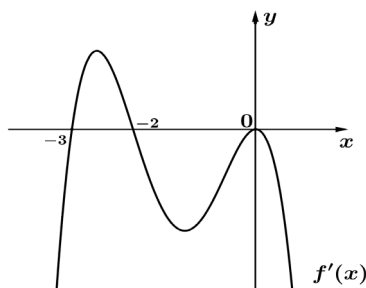
Lưu ý:

1. Không tự ý thay đổi định dạng cấu trúc của file này

2. cột hoặc hàng nào không dùng thì xóa đi
3. nếu là số thực (nôm na là số lẻ) thì dùng dấu chấm động "." **Tuyệt đối không dùng dấu phẩy",**
4. Cần hỗ trợ gọi đ/c Mạnh theo số 0914582696

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

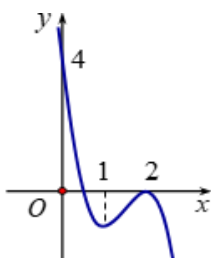
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- B.** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới.



Tổng $b + c + d$ bằng.

A. 1

B. 4

C. 2

D. 3

Lời giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra hàm số có hai điểm cực trị là $x = 1$ và $x = 2$, do đó:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 4)$ và điểm $(2; 0)$ nên ta có: $\begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c = -4 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a = -2$; $b = 9$; $c = -12$; $d = 4$. Do đó $b + c + d = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗ 3	↘ 0	↗ $+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Tính tiệm cận ngang.

Ta có $x^3 + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$

$x^3 + x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = 0$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Tính tiệm cận đứng.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3 + x) + 3 = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x^3 + x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + x) = -3 \Leftrightarrow x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$

Vì hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3 + x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ có 1 tiệm cận đứng.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

Mà $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$ nên $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử 2 điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$ đồng thời $MN \parallel BD'$. Khi đó tỉ số $\frac{MN}{BD'} = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m + n$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Đặt: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.

Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$.

Từ $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$, ta có $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BD})$, suy

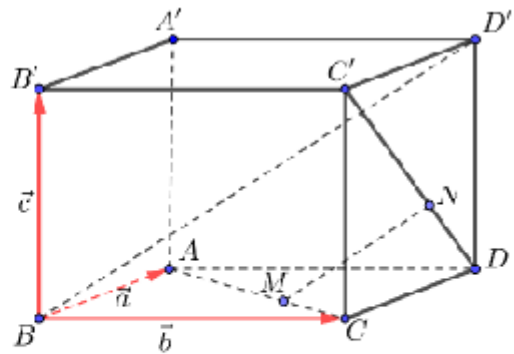
ra: $\overrightarrow{BN} - (\vec{a} + \vec{b}) = y(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b})$.

$\overrightarrow{BN} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$.

Vậy $\overrightarrow{BM} - \vec{a} = x(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1 - x)\vec{a} + x\vec{b}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c} - (1 - x)\vec{a} - x\vec{b} = (x - y)\vec{a} + (1 - x)\vec{b} + y\vec{c}$.



Điều kiện để $MN \parallel BD'$ là $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$ hay $(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c} \quad (*)$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra:

$$\begin{cases} k = x - y \\ k = 1 - x \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; k) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Vậy M và N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$ và

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}.$$

Khi đó $\frac{MN}{BD'} = |k| = \frac{1}{3}$. Suy ra $m = 1; n = 3 \Rightarrow m + n = 4$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 6; AD = 4; SA = 6; SA \perp (ABCD)$.

Điểm $M \in BD; \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MD}$, điểm $N \in SC; \overrightarrow{NS} = -3\overrightarrow{NC}$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng.

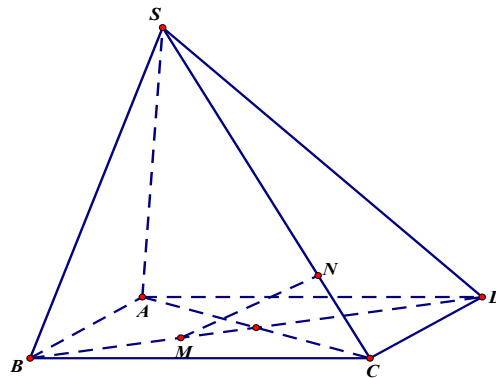
A. $\frac{\sqrt{310}}{6}$.

B. $\frac{15}{2}$.

C. $\frac{35}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{190}}{6}$.

Giải



Ta có $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{NS} = -3\overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AS} + 3\overrightarrow{AC}}{1 + 3} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AS}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{1}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AS}\right)^2 = \frac{1}{144}AB^2 + \frac{25}{144}AD^2 + \frac{1}{16}AS^2 = \frac{36}{144} + \frac{25 \cdot 16}{144} + \frac{36}{16} = \frac{95}{18}$$

$$MN = \frac{\sqrt{190}}{6}$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2025; 2025]$ để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2025.

B. 2028.

C. 2026.

D. 2027.

Lời giải

Ta có $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3m-9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2m^2+6m+10}}$.

Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 3m-9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vậy có 2028 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , tọa độ ba đỉnh là $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$, hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, khi đó $a+b-2c$ bằng

A. 6.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{2} AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3} BC.$$

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có
$$\begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b-2c = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = 2.$$

Câu 9: Cho 4 điểm $A(1;2;-3)$, $B(4;0;5)$, $C(2;0;1)$ và $D(6;-2;11)$. Gọi $M(x;y;z)$ là điểm sao cho $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x + 3y + z$.

A. -3.

B. 8.

C. 3.

D. -5.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(6; -2; 11) \Rightarrow I \equiv D$.

Khi đó $P = MD^4 - 2MD^2 + 2DA^2 - 3DB^2 - DC^2 = (MD^2 - 1)^2 - 1 + 2DA^2 - 3DB^2 - DC^2$
 $\Rightarrow P \geq -1 + 2DA^2 - 3DB^2 - DC^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MD^2 = 1 \Leftrightarrow M \in (S): (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2 = 1$

$Q = x + 2y + 2z - 24 = (x-6) + 2(y+2) + 2(z-11)$

$\Rightarrow Q^2 \leq (1+2^2+2^2)[(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2] = 9 \Rightarrow -3 \leq Q \leq 3$

$\Rightarrow Q_{\min} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-11}{2} \\ x+2y+2z-24 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17}{3}, y = -\frac{8}{3}, z = \frac{31}{3}.$

Câu 10: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh như sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 19,34.

B. 19,37.

C. 19,43.

D. 19,35

Lời giải

Tần số lớn nhất là 24 nên nhóm chứa một là nhóm $[18,5;21,5)$.

Ta có $j = 4$; $a_4 = 18,5$; $m_4 = 24$; $m_3 = 15$; $m_5 = 2$; $h = 21,5 - 18,5 = 3$.

$$\text{Do đó } M_o = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h$$

$$= 18,5 + \frac{24 - 15}{(24 - 15) + (24 - 2)} \cdot 3 = \frac{1\,201}{62} \approx 19,37.$$

Câu 11: Chị Hoa đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh vàng và chứng khoán. Chị Hoa thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 30 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	[3;5]	[5;7]	[7;9]	[9;11]	[11;13]
ổ tháng đầu tư vào vàng	6	10	7	4	3
Số tháng đầu tư vào chứng khoán	7	7	8	4	4

Chị Hoa đầu tư vào lĩnh vực nào rủi ro hơn?

- A.** Cổ phiếu. **B.** Vàng. **C.** Mức độ rủi ro như nhau. **D.** Không so sánh được.

Lời giải

Số tiền trung bình thu được khi đầu tư vào vàng và cổ phiếu tương ứng là:

$$\overline{x_v} = \frac{4.6 + 6.10 + 8.7 + 10.4 + 12.3}{30} = 7,2$$

$$\overline{x_{cp}} = \frac{4.7 + 6.7 + 8.8 + 10.4 + 12.4}{30} = 7,4$$

Độ lệch chuẩn của số tiền thu được hàng tháng khi đầu tư vào các lĩnh vực vàng và cổ phiếu là:

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{30}(6.4^2 + 10.6^2 + 7.8^2 + 4.10^2 + 3.12^2) - 7,2^2} \approx 2,455$$

$$s_{cp} = \sqrt{\frac{1}{30}(7.4^2 + 6.7^2 + 8.8^2 + 4.10^2 + 4.12^2) - 7,4^2} \approx 2,641$$

Như vậy, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về số tiền thu được hàng tháng khi đầu tư vào lĩnh vực cổ phiếu cao hơn khi đầu tư vào lĩnh vực vàng. Do đó, đầu tư vào lĩnh vực cổ phiếu sẽ rủi ro hơn.

Câu 12: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A.** 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 13: Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức: $h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t - 9)$ với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

- A.** 32°C, lúc 15 giờ. **B.** 29°C, lúc 9 giờ. **C.** 26°C, lúc 3 giờ. **D.** 26°C, lúc 0 giờ.

Lời giải

$$\text{Ta có: } -1 \leq \sin \frac{\pi}{12}(t - 9) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 29 + 3 \cdot (-1) \leq 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t - 9) \leq 29 + 3 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 26 \leq 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t-9) \leq 32.$$

$$\Leftrightarrow 26 \leq h(t) \leq 32.$$

Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26°C khi

$$29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t-9) = 26 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12}(t-9) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-9) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 3 + 24k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy vào thời điểm 3 giờ trong ngày thì nhiệt độ thấp nhất của thành phố là 26°C .

Câu 14: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2025}$. Tính giá trị

biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} - \frac{1}{\log_{ab} b}$.

A. $P = -\sqrt{2026}$.

B. $P = \sqrt{2021}$.

C. $P = \sqrt{2026}$.

D. $P = -\sqrt{2021}$.

Lời giải

Do $a > b > 1$ nên $\log_a b > 0$, $\log_b a > 0$ và $\log_b a > \log_a b$.

Ta có: $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2025} \Leftrightarrow \log_a b + \log_b a = \sqrt{2025} \Leftrightarrow \log_a^2 b + \log_b^2 a = 2023$.

Khi đó $P = \log_a ab - \log_b ab = \log_a b - \log_b a < 0$.

Suy ra: $P^2 = (\log_a b - \log_b a)^2 = \log_a^2 b + \log_b^2 a - 2 = 2023 - 2 = 2021 \Rightarrow P = -\sqrt{2021}$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\frac{\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2}{\sqrt{m-2^x}} < 0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương.

A. 120.

B. 128.

C. 129.

D. 121.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} m - 2^x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 m \\ x > 0 \end{cases}$

Ta có: $\frac{\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2}{\sqrt{m-2^x}} < 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < \log_3 x < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 9$.

Xét: $\log_2 m \leq 3 \Leftrightarrow 0 < m \leq 8$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Suy ra có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Xét: $\log_2 m > 3 \Leftrightarrow m > 8$ (1) thì bất phương trình có nghiệm thỏa: $3 < x < \min\{\log_2 m; 9\}$.

Theo yêu cầu đề bài ta có: $\log_2 m \leq 7 \Leftrightarrow m \leq 128$.

Kết hợp với điều kiện (1) ta được: $8 < m \leq 128$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2025)$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{16}$.

A. 2019.

B. 2018.

C. 2021.

D. 2016.

Lời giải

Ta có:

$$\lim \sqrt{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} = \lim \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^a}} = \sqrt{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{(2^a)^2}} = \frac{1}{2^a}.$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^a \geq 16 = 2^4 \Leftrightarrow a \geq 4.$$

Câu 17: Cho (u_n) là cấp số nhân, đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết $S_2 = 4; S_3 = 13$ và $u_2 < 0$, giá trị S_5 bằng

- A. 2. **B.** $\frac{181}{16}$. C. $\frac{35}{16}$. D. 121.

Lời giải

Gọi u_1, q lần lượt là số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân cần tìm.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} S_2 = 4 \\ S_3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q) = 4 \\ u_1(1+q+q^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q) = 4 \\ q = 3 \\ q = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} u_2 < 0 \\ u_3 = S_3 - S_2 = 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_3}{u_2} < 0 \text{ nên cấp số nhân cần tìm có } \begin{cases} u_1 = 16 \\ q = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

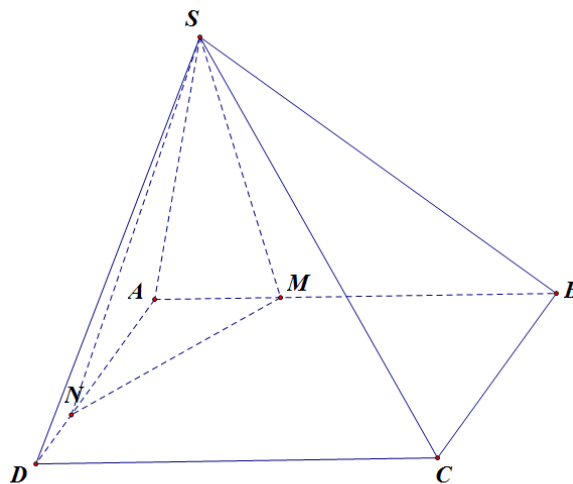
$$\text{Do đó } S_5 = u_1 \left(\frac{1-q^5}{1-q} \right) = \frac{181}{16}.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt

là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

- A.** $\frac{3}{4}$. B. $\frac{17}{14}$. C. $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải



Đặt $\frac{AB}{AM} = x; \frac{AD}{AN} = y$, theo giả thiết ta có $x + 2y = 4$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{DAB}}{AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{DAB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2yx}.$$

$$\text{Theo đầu bài } \frac{AB}{AM} + 2 \frac{AD}{AN} = 4 \Rightarrow x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y.$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2y(4-2y)}; \quad 0 < y < 2.$$

$$\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{1}{2y(4-2y)}; \quad 0 < y < 2.$$

$$\text{Theo BDT Côsi ta có } 2y(4-2y) \leq \left(\frac{2y+4-2y}{2} \right)^2 = 4.$$

$$\text{Nên } \frac{V_1}{V} \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \max \frac{V_1}{V} = \frac{3}{4}.$$

Câu 19: Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{4}{5}$. Giá trị của k bằng:

A. 6.

B. 9.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Gọi biến cố A: Lấy k tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ chia hết cho 4. Với $1 \leq k \leq 10$.

Suy ra $\bar{A}$: Lấy k tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho 4.

$$\text{Ta có: } P(\bar{A}) = \frac{C_8^k}{C_{10}^k} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_8^k}{C_{10}^k} = 1 - \frac{(10-k)(9-k)}{90}.$$

$$\text{Theo đề: } 1 - \frac{(10-k)(9-k)}{90} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow k^2 - 19k + 72 < 0 \Leftrightarrow 5,22 < k < 13,77.$$

Vậy $k = 6$ là giá trị cần tìm.

Câu 20: Trong trận thi đấu bóng bàn đơn nam giữa vận động viên Nguyễn Đức Tuấn (người từng đoạt huy chương vàng đơn nam môn bóng bàn tại Seagames 31) với một vận động viên nước ngoài, trận đấu gồm tối đa 5 set (séc), người nào thắng trước 3 set sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để vận động viên Tuấn thắng mỗi set là 0,6. Tính xác suất để vận động viên Tuấn giành chiến thắng trong trận đấu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. 0,21.

B. 0,68.

C. 0,47.

D. 0,89.

Lời giải

Xét biến cố A: “vận động viên Tuấn giành chiến thắng sau 3 set”

Vận động viên Tuấn toàn thắng trong cả 3 set đầu, suy ra $P(A) = 0,6^3 = 0,216$.

Xét biến cố B: “vận động viên Tuấn giành chiến thắng sau 4 set”

Vận động viên Tuấn thắng set 4, và thua 1 trong 3 set đầu, suy ra $P(B) = C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,6^3 = 0,2592$.

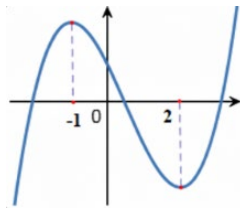
Xét biến cố C: “vận động viên Tuấn giành chiến thắng sau 5 set”

Vận động viên Tuấn thắng set 5, và thua 2 trong 4 set đầu, suy ra $P(C) = C_4^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,20736$.

Vậy xác suất giành chiến thắng của vận động viên Tuấn là: $P(A) + P(B) + P(C) = 0,68256$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng - sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $bc > 0$.

b) Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = 1$ thì $f(6) = 43$.

c) Có 5 giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ thuộc đoạn để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

d) Với $d = 1$ thì phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+3} = f(x)+3$ có 7 nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Ta có $f'(x) = x^2 + 2bx + c = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow bc > 0$$

b) Trên đoạn $[0; 2]$ hàm số nghịch biến $\Rightarrow \max_{[0;2]} f(x) = f(0) = d = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

$$\Rightarrow f(6) = 43$$

c) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

$$\Leftrightarrow g'(x) = (2x-2) \cdot f'(x^2 - 2x + m) \leq 0, \forall x \in (-1; 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (-1; 0) \quad (\text{Do } 2x-2 < 0, \forall x \in (-1; 0))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 2 \\ x^2 - 2x + m \leq -1 \end{cases}, \forall x \in (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 2 - m \\ x^2 - 2x \leq -1 - m \end{cases}, \forall x \in (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \leq 0 \\ -1 - m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$$

Vậy có 16 số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

d) Với $d = 1$ thì $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{17}{6}, f(2) = -\frac{23}{3}$

Đặt $t = f(x) + 1$, từ phương trình tương đương $\sqrt{f(t)+3} = t+2 \Leftrightarrow \begin{cases} t+2 \geq 0 \\ f(t)+3 = (t+2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -2 \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1 + 3 = t^2 + 4t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -2 \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{3(3+\sqrt{41})}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \quad (1) \\ f(x) = \frac{5-3\sqrt{41}}{4} \quad (2) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số suy ra phương trình (1) và (3) đều có 3 nghiệm phân biệt. Vậy pt đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50.

a) Lấy ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp. Xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được lập thành một cấp số cộng bằng $\frac{3}{98}$.

b) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là một số lẻ là 7500.

c) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là số chia hết cho 3 là 6544.

d) Lấy ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8 bằng $\frac{239}{392}$.

Lời giải

a) Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{50}^3$.

Gọi A là biến cố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do a, b, c là ba số theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Rightarrow 2a = b + c$

Có $2a$ là số chẵn, nên b và c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Suy ra số cách chọn b, c là $2C_{25}^2$.

Mỗi cách chọn cặp b, c thì có duy nhất một cách chọn a sao cho $2a = b + c$

Xác suất thỏa yêu cầu bài là $P(A) = \frac{2C_{25}^2}{C_{50}^3} = \frac{3}{98}$

b) Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là một số lẻ là $C_{25}^2 \cdot C_{25}^1 + C_{25}^3 = 9800$. Vậy b sai

c) Trong 50 quả cầu có 16 quả chia hết cho 3, 17 quả chia 3 dư 1, 17 quả chia 3 dư 2.

Số cách lấy ra ba quả cầu từ hộp sao cho tổng số ghi trên ba quả cầu lấy được là số chia hết cho 3 là $C_{16}^3 + 2C_{17}^3 + C_{16}^1 C_{17}^1 C_{17}^1 = 6544$. Vậy c đúng.

d) Số cách lấy ra 3 quả cầu từ trong hộp: C_{50}^3

Số chia hết cho 8 có dạng $8k, (k \in \mathbb{N})$. $1 \leq 8k \leq 50 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{50}{8} \Rightarrow$ có 6 số.

Số chia hết cho 4 có dạng $4k, (k \in \mathbb{N})$. $1 \leq 4k \leq 50 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{25}{2} \Rightarrow$ có 12 số.

Suy ra có 6 số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8 và 13 số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.

Chia 50 quả cầu thành 4 nhóm:

Nhóm 1: Gồm 25 quả cầu mang số lẻ.

Nhóm 2: Gồm 13 quả cầu mang số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.

Nhóm 3: Gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8.

Nhóm 4: Gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 8.

Xét biến cố $A =$ “Tích ba số là một số chia hết cho 8”

Biến cố $\bar{A} =$ “Tích ba số là một số không chia hết cho 8”

Để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số không chia hết cho 8 thì có 4 trường hợp sau:

TH1: 1 quả nhóm 1 và 2 quả nhóm 2 có: $C_{25}^1 \cdot C_{13}^2$ cách lấy

TH2: 2 quả nhóm 1 và 1 quả nhóm 2 có: $C_{25}^2 \cdot C_{13}^1$ cách lấy

TH3: 2 quả nhóm 1 và 1 quả nhóm 3 có: $C_{25}^2 \cdot C_6^1$ cách lấy

TH4: 3 quả nhóm 1: C_{25}^3 cách lấy

Vậy xác suất cần tính: $P_{(\bar{A})} = 1 - P_{(A)} = 1 - \frac{C_{25}^1 \cdot C_{13}^2 + C_{25}^2 \cdot C_{13}^1 + C_{25}^2 \cdot C_6^1 + C_{25}^3}{C_{50}^3} = \frac{193}{392}$.

Vậy d sai.

Câu 3: Điểm thi môn Toán cuối học kì I của lớp 11A như sau:

Điểm thi	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
Số học sinh	7	12	15	11

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 8.
- b) Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là 7.
- c) Trong bảng trên, thầy giáo muốn xác định nhóm gồm 50% học sinh có điểm thi thấp nhất để phụ đạo thêm, khi đó thầy giáo sẽ chọn các học sinh có điểm từ 5 trở xuống vào nhóm này.
- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 2,02.

Lời giải

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là: $R = 10 - 2 = 8$.

Chọn ĐÚNG.

- b) Gọi $x_1; \dots; x_{45}$ là điểm của 45 học sinh và giả sử dãy này sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Khi đó, trung vị là x_{23} . Do giá trị x_{23} thuộc nhóm $[6; 8)$ nên nhóm này chứa trung vị.

Do đó $p = 3$, $a_3 = 6$, $m_3 = 15$, $m_1 + m_2 = 7 + 12 = 19$, $a_4 - a_3 = 2$ và ta có

$$M_e = 6 + \frac{\frac{45}{2} - 19}{15} \cdot 2 \approx 6,47.$$

Chọn SAI.

- c) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ bằng trung vị của mẫu số liệu gốc, chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

Do đó, thầy giáo muốn xác định nhóm gồm 50% học sinh có điểm thi thấp nhất để phụ đạo, khi đó thầy giáo sẽ chọn các học sinh có điểm từ 6,47 trở lên vào nhóm này.

Chọn SAI.

- d) Điểm trung bình môn Toán của lớp 11A là: $\bar{X} = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 15 + 9 \cdot 11}{45} = \frac{57}{9} \approx 6,3$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$s^2 = \frac{1}{45} \left[7 \cdot \left(3 - \frac{57}{9} \right)^2 + 12 \cdot \left(5 - \frac{57}{9} \right)^2 + 15 \cdot \left(7 - \frac{57}{9} \right)^2 + 11 \cdot \left(9 - \frac{57}{9} \right)^2 \right] = \frac{184}{45}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là: $\sqrt{\frac{184}{45}} \approx 2,02$.

Chọn ĐÚNG.

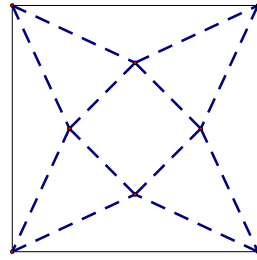
Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích V_0 .

- a) Khi $S_0 = 2a^2, V_0 = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$ thì chiều cao của hình chóp là $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

- b) Khi $V_0 = \frac{a^3}{3}$ và M là trung điểm của SD thì thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng trên là $\frac{a^3}{9}$.

- c) Khi $S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ thì khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{a\sqrt{55}}{11}$.

- d) Cho tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều có diện tích đáy bằng S_0 , thể tích là V_0 (tham khảo hình vẽ).

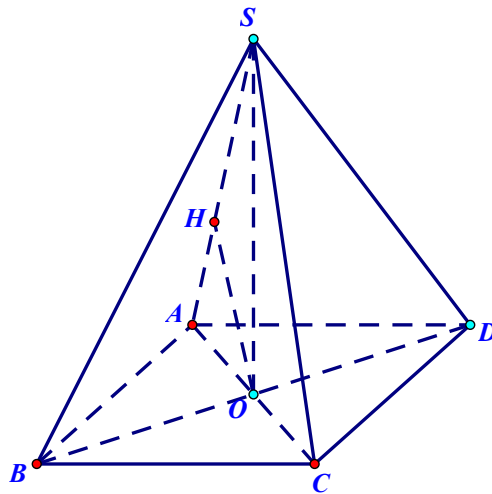


Để mô hình kim tự tháp có thể tích V_0 là lớn nhất, thì diện tích đáy S_0 bằng 3216.

Lời giải

GVSB: Hoàng Nhân; GVPB: Tuan Pham; GVPB2: ...

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ, $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.



- a) Chiều cao của khối chóp là $h = \frac{3V_0}{S_0} = a\sqrt{5}$.

Chọn SAI.

- b) Ta có $V_{M.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(M, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} d(S, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} SO = \frac{1}{4} V_0 = \frac{a^3}{12}$.

Chọn SAI.

- c) Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, $AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAO)$.

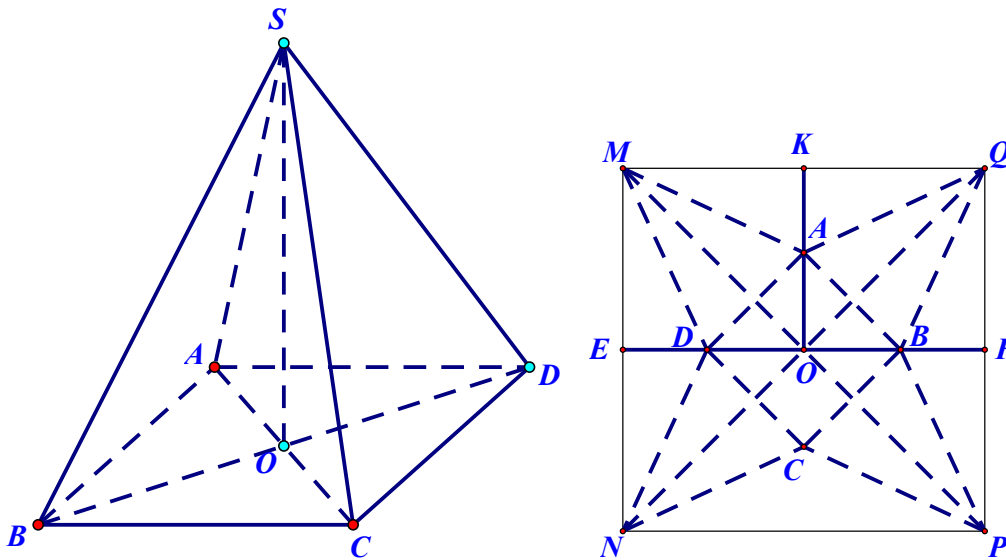
Dựng $OH \perp SA, H \in SA \Rightarrow BD \perp OH$. Suy ra $d(BD, SA) = OH = \frac{OA \cdot SO}{\sqrt{OA^2 + SO^2}}$.

Vì $S_0 = a^2, V_0 = \frac{a^3 \sqrt{5}}{3} \Rightarrow AB = a, OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \frac{3V_0}{S_0} = a\sqrt{5}$.

$$d(BD, SA) = OH = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + 5a^2}} = \frac{a\sqrt{55}}{11}.$$

Chọn ĐÚNG.

- d) Ta có $a = 180, h = 98$.



Gọi cạnh đáy của mô hình kim tự tháp bằng $x = AB = BC = CD = AD$.

Gọi O là tâm hình vuông $MNPQ$ cạnh 50 cm $\Rightarrow O$ cũng là tâm hình vuông $ABCD$.

Xét tam giác OAD vuông cân tại O nên $OD = OA = \frac{x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AK = OK - OA = 25 - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác vuông MKA có: $MA = \sqrt{MK^2 + KA^2} = \sqrt{625 + \left(25 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$

Giả sử sau khi gấp lên (với $S \equiv M \equiv N \equiv P \equiv Q$), ta được hình chóp $S.ABCD$, có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{MA^2 - OA^2} = \sqrt{625 + \left(25 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{625 + \left(25 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$$

$$= \frac{5}{3} \sqrt{x^4 (50 - \sqrt{2}x)} = \frac{40}{3} \sqrt{\frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4} \cdot (50 - \sqrt{2}x)} \leq \frac{40}{3} \sqrt{\frac{50}{5}} = \frac{40\sqrt{10}}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20\sqrt{2}$.

Vậy V_0 đạt giá trị lớn nhất là $\frac{40\sqrt{10}}{3}$ khi đó $S_0 = 3200$.

Chọn SAI.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm

$A(1; -2; 2)$ và $B(2; 2; 1)$.

a) Hình chiếu của gốc tọa độ O lên đường thẳng AB là điểm có hoành độ dương.

b) Điểm $N(x_1; y_1; z_1)$ thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho N, A, B thẳng hàng thì $x_1 + y_1 + z_1 = 6$.

c) Gọi $K(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $OABK$ là hình thang cân có đáy lớn KO gấp đôi đáy nhỏ AB . Khi đó $a + b + c = 8$

d) Nếu M là điểm nằm trên trục Oz thì giá trị nhỏ nhất của $T = 2MA^2 - MB^2 + |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ bằng 42.

Câu 6. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước

theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h = 8 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ với $0 \leq t \leq 24$.

a) Có 2 thời điểm trong 1 ngày chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c) Có 3 thời điểm trong 1 ngày mực nước tại bến cảng cao 11m .

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn 11m . Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 1$ nên $8-6 \leq 8+6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 8+6$,

hay $2 \leq h \leq 14$. Vậy chiều cao của mực nước tại bến cảng cao nhất bằng 14m khi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $t = 3$ & $t = 15$.

Vậy **a) Đúng**

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất bằng 2m khi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $t = 9$ & $t = 21$.

Vậy **b) Sai**

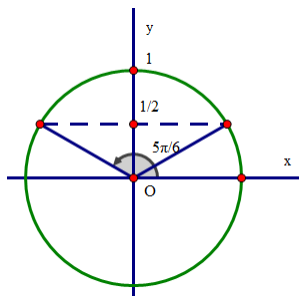
c) Xét phương trình: $8 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 11$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{6}t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 12k \\ t = 5 + 12k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $t \in \{1; 5; 13; 17\}$.

Vậy **c) sai**

d) Để tàu vào được cảng thì $8 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \geq 11 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \geq \frac{1}{2}$.



Từ đường tròn lượng giác ta suy ra $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}t \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 5$

Trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 5 giờ, mực nước tại bến cảng lớn hơn hoặc bằng 11m . Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Vậy **d) Đúng**

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Biết $f(0)=1; f(2)=-2$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)f(x)-30}{f(x)-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

Lời giải

Đáp án: 8

Hàm số $y = \frac{(m+1)f(x)-30}{f(x)-m}$ Đk: $f(x) \neq m, \forall x \in (0;2)$

$$\text{có } y' = f'(x) \cdot \left[\frac{-m(m+1)+30}{(f(x)-m)^2} \right]$$

Do $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (0;2)$.

Và khi $x \in (0;2) \Rightarrow f(x) \in (-2;1)$.

Hàm số $y = \frac{(m+1)f(x)-30}{f(x)-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

$$\Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (0;2) \quad \text{và} \quad m \neq f(x) \quad \forall x \in (0;2).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1)+30 > 0 \\ m \notin (-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 5 \\ \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-6; -2] \cup [1; 5)$$

Vậy có 8 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 2: Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng tế bào của quần thể luôn thuộc nửa khoảng $[\alpha; \beta)$. Khi đó $\alpha + \beta$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75aa^{-0,75t}}{(b+e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

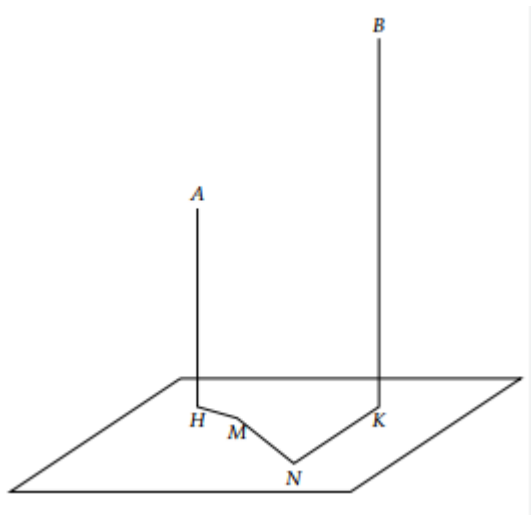
Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{(\frac{1}{4}+e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4}+e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Theo mô hình này số lượng tế bào của quần thể luôn thuộc nửa khoảng $[20;100) \Rightarrow \alpha + \beta = 120$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;3), B(7;10;6)$. Hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Khi $AM + BN$ nhỏ nhất, tính hiệu hoành độ của N và tung độ của M



Gọi H, K tương ứng là hình chiếu của A, B trên (Oxy)
 Khi đó $H(1; 2; 0), K(7; 10; 0), AH = 3, BK = 6$

Ta có: $HM + MN + NK \geq HK = 10 \Rightarrow HM + NK \geq 6$

Lại có: $AM + BN = \sqrt{AH^2 + HM^2} + \sqrt{BK^2 + NK^2} = \sqrt{3^2 + HM^2} + \sqrt{6^2 + NK^2}$

Theo BĐT Minkowski ta có

$$\sqrt{3^2 + HM^2} + \sqrt{6^2 + NK^2} \geq \sqrt{(HM + NK)^2 + (3 + 6)^2} \geq \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} H, M, N, K \text{ thẳng hàng} \\ \frac{NK}{HM} = \frac{6}{3} = 2 \\ HM + NK = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} HM = 2 \\ NK = 4 \\ H, M, N, K \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{HK} \\ \overrightarrow{NK} = \frac{2}{5} \overrightarrow{HK} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\frac{11}{5}; \frac{18}{5}; 0\right) \\ N\left(\frac{23}{5}; \frac{34}{5}; 0\right) \end{cases}$$

Vậy hiệu hoành độ của N và tung độ của M bằng 1

Câu 4. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \text{ gần nhất với số nào dưới đây (Kết quả làm tròn 1 chữ số sau dấu phẩy)}$$

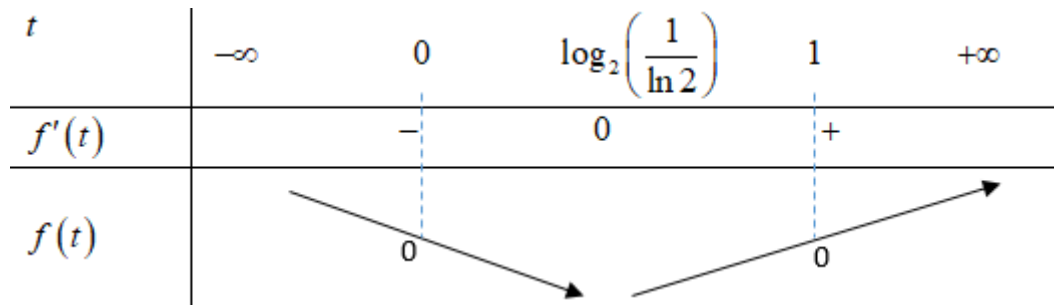
Nhận xét $x^2 + y^2 - 2x + 2 > 0 \forall x, y$

$$\text{Bất phương trình } 2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2). \text{Đặt } t = x^2 + y^2 - 2x + 1$$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t \leq t+1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \leq 0$; Đặt $f(t) = 2^t - t - 1$. Ta thấy $f(0) = f(1) = 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 2^t \ln 2 - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2 = 1 \Leftrightarrow t = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) \approx 0,52$$



Quan sát BBT ta thấy $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (1) \text{ Xét } P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow 2Px - Py + P = 8x+4$$

$$\Leftrightarrow P-4 = (8-2P)x + Py \Leftrightarrow P-4+2P-8 = (8-2P)x + 2P-8+Py$$

$$\Leftrightarrow 3P-12 = (8-2P)(x-1) + Py \Leftrightarrow (3P-12)^2 = [(8-2P)(x-1) + Py]^2 \leq [(8-2P)^2 + P^2][(x-1)^2 + y^2]$$

$$\text{Thế (1) vào ta có } (3P-12)^2 \leq [(8-2P)^2 + P^2] \Leftrightarrow 4P^2 - 40P + 80 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \leq P \leq 5 + \sqrt{5}.$$

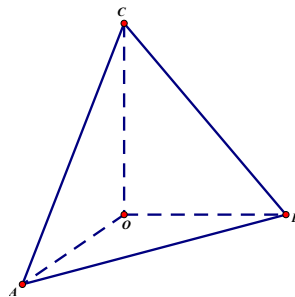
$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{8-2P}{P} = \frac{x-1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y \\ \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y \\ y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{-\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5 - \sqrt{5} \approx 2,8$

Câu 5. Cho các tia Ox, Oy, Oz cố định đôi một vuông góc nhau. Trên các tia đó lần lượt lấy các điểm A, B, C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1$ trong đó A, B, C không trùng với O . Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $OABC$ bằng $\frac{1}{m(1+\sqrt{n})^3}$ trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $P = m + n$ bằng

Lời giải

Đáp án: 164



Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$ ($a, b, c > 0$).

Khi đó $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$

và $OA + OB + OC + AB + BC + CA = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

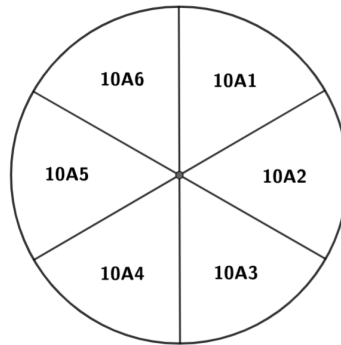
$$1 = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq a + b + c + \frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{b+c}{\sqrt{2}} + \frac{c+a}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq (1 + \sqrt{2})(a + b + c) \Leftrightarrow a + b + c \leq \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$\text{Theo BĐT Cô-si: } V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \leq \frac{1}{6} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \leq \frac{1}{162(1+\sqrt{2})^3}.$$

$$\text{Do đó } \max V_{OABC} = \frac{1}{162(1+\sqrt{2})^3} \Rightarrow m = 162, n = 2 \Rightarrow P = 164.$$

Câu 6: Một bồn hoa hình tròn ở giữa sân trường được chia thành 6 phần bằng nhau và giao nhiệm vụ cho 6 lớp 10 chọn trồng một trong 4 loại hoa là hoa cúc, hoa hồng, hoa lan, hoa hướng dương theo các khu vực hình quạt được phân công cụ thể như hình vẽ.



Tính xác suất để hai lớp được phân công hai khu vực cạnh nhau thì không cùng trồng một loại hoa? (làm tròn đến hàng phân trăm)

Lời giải:

Gọi số phương án trồng hoa cần tìm là a_6 (ứng với 6 lớp).

Lớp 10A1 có 4 cách chọn hoa để trồng.

Lớp 10A2 có 3 cách chọn hoa để trồng khác với hoa mà lớp 10A1 đã chọn.

Tương tự cho các lớp 10A3, 10A4, 10A5, 10A6 cũng có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $4 \cdot 3^5$ cách mà các lớp chọn hoa để trồng, tính luôn trường hợp lớp 10A6 và 10A1 chọn cùng loại hoa để trồng.

Ta xét trường hợp: lớp 10A6 và 10A1 chọn cùng loại hoa. Ta xem khu vực trồng hoa của 2 lớp này là một nhóm và xem như chỉ còn 5 khu vực (nhóm này và 4 khu vực của các lớp 10A2, 10A3, 10A4 và 10A5). Khi đó sẽ có a_5 cách trồng.

Ta có $a_6 = 4 \cdot 3^5 - a_5$.

Lớp 10A6 và 10A1 có 4 cách. Lớp 10A2 có 3 cách, lớp 10A3 có 3 cách, lớp 10A4 có 3 cách và lớp 10A5 có 3 cách.

Do đó có tất cả $4 \cdot 3^4$ cách mà các lớp chọn hoa để trồng, tính luôn trường hợp lớp 10A5, 10A6 và 10A1 chọn cùng loại hoa để trồng.

Ta có $a_5 = 4 \cdot 3^4 - a_4$.

$$a_4 = 4 \cdot 3^3 - a_3$$

Với a_3 là số phương án trồng hoa ứng với 3 khu vực nên $a_3 = A_4^3 = 24$.

$$\text{Do đó } a_6 = 4 \cdot 3^5 - a_5 = 4 \cdot 3^5 - (4 \cdot 3^4 - a_4) = 4 \cdot 3^5 - 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 - a_3 = 732.$$

Vậy xác suất để hai lớp được phân công hai khu vực cạnh nhau thì không cùng trồng một loại hoa là

$$\frac{732}{4^6} \approx 0,18$$

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>