

NGUYỄN ĐAN TRƯỜNG

BÀI GIẢNG TOÁN 12

CHƯƠNG TRÌNH MỚI



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	2
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	2
(B) VÍ DỤ MINH HỌA.....	3
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	4
Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước.....	4
Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.....	9
Dạng 3. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số.....	11
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	14
Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	18
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	18
(B) VÍ DỤ MINH HỌA.....	19
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	19
Dạng 1. Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền cho bởi công thức $\mathcal{D}$	19
Dạng 2. Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên.....	22
Dạng 3. Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số.....	24
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	28
Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	31
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	31
(B) VÍ DỤ MINH HỌA.....	32
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	36
Dạng 1. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.....	36
Dạng 2. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.....	40
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	44
Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	49
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	49
(B) VÍ DỤ MINH HỌA.....	51
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	51
Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	51

📁 Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ 55

📁 Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ 60

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN 64

Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 64

Ⓑ PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 65

📁 Dạng 1. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng 65

📁 Dạng 2. Bài toán tối ưu hoá đơn giản 66

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 68

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

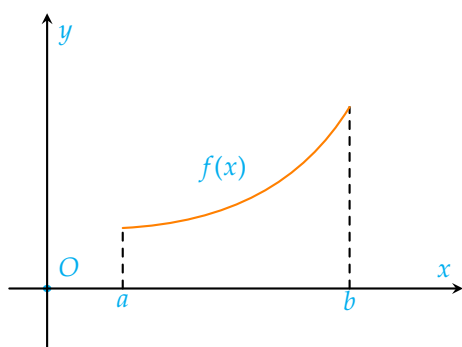
1. Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 1.1. Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

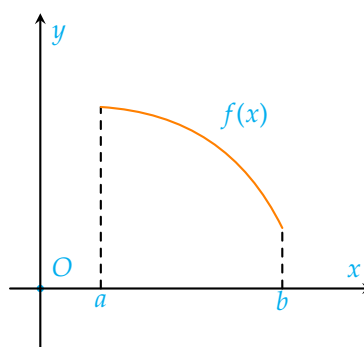
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



- ☑ Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a). Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).



a) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$



a) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

- ☑ Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- ☑ Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Định lý 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- ☑ Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- ☑ Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

2. Cực trị của hàm số

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- ☑ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- ☑ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .



- ☑ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- ☑ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- ☑ Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Phương pháp 1.1. Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
- b) Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- c) Lập bảng biến thiên của hàm số. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

B

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$; | b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; | c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$; |
| d) $y = -2x^4 + 4x^2$; | e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$; | f) $y = -16x^4 + x - 1$. |

Ví dụ 2

Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $y = \frac{2x+1}{x+1}$; | b) $y = \frac{3x+1}{x-1}$; | c) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$; |
| d) $y = x + \frac{4}{x}$; | e) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; | f) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$. |

Ví dụ 3

Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = f(x)$.
- ② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) thuộc $\mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần, xét dấu y' và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = 7x^3 + 5x^2 + x - 1$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(-\infty, +\infty)$.
 ☐ B $\left(-\frac{1}{7}, +\infty\right)$.
 ☐ C $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{7}, +\infty\right)$.
 ☐ D $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right)$.

Câu 2

Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
 ☐ B $(0, +\infty)$.
 ☐ C $(-1; 1)$.
 ☐ D $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{-x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- ☐ A $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 ☐ B $(-\infty; +\infty)$.
 ☐ C $(-1, +\infty)$.
 ☐ D $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 4

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- ☐ A $(0; -2)$.
 ☐ B $x = 0$.
 ☐ C $x = \pm 1$.
 ☐ D $(-1; -1)$ và $(1; -1)$.

Câu 5

Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

- (A) $x = 1$. (B) $x = 3$. (C) $A(3; 30)$. (D) $B(1; 34)$.

Câu 6

Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

- (A) $x = -1$. (B) $x = 5$. (C) $A(-1; -4)$. (D) $B(5; 8)$.

Câu 7

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Câu 8

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x - 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
 (B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 (C) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
 (D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9

Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) 0.

Câu 10

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 2. (D) 4.

Câu 11

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-1; 0)$. (B) $(-1; +\infty)$. (C) $(-3; 8)$. (D) $(-\infty; -1)$.

Câu 12

Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 (C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. (D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 13

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- ☐ A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- ☐ B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- ☐ C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- ☐ D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
- ☐ B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- ☐ C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- ☐ D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Câu 15

Cho hàm số $y = x^2 + 4 \ln(3-x)$. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số đã cho.

- ☐ A) $y_{CD} = 2$.
- ☐ B) $y_{CD} = 4$.
- ☐ C) $y_{CD} = 1 + 4 \ln 2$.
- ☐ D) $y_{CD} = 1$.

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐ A) Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến.
- ☐ B) Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
- ☐ C) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
- ☐ D) Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- ☐ A) 1.
- ☐ B) 2.
- ☐ C) 0.
- ☐ D) 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
- d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x + 1}$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- b) Hàm số có 2 điểm cực trị.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
- d) $y_{\text{CD}} > y_{\text{CT}}$.

Câu 3

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm cực trị của (C).

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x + y - 4 = 0$.
- d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của (C).

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- c) Tọa độ điểm $A(-2; -2)$, $B(0; 2)$.
- d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = 2\sqrt{5}$.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khẳng định nào sai?

- a) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
- b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- c) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 4$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- b) Ta có $f'(x) = 24x^3 - 6x$.
- c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- d) Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S												
a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.		X												
b) Bảng biến thiên của hàm số là <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$	2	$+\infty$	y'	-		-	y	1	$+\infty$	1	X	
x	$-\infty$	2	$+\infty$											
y'	-		-											
y	1	$+\infty$	1											
c) Đạo hàm $y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$.	X													
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.		X												

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 8

Gọi y_{CD} , y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của biểu thức $y_{\text{CD}}^2 - 2y_{\text{CT}}^2$ bằng

KQ:

Câu 9

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = (x-3)e^x$.

KQ:

Câu 10

Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính tổng $P = a + b + c + d$.

KQ:

Câu 11

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $AB = \frac{a\sqrt{b}}{b}$. Khi đó $30 \cdot a - b$ bằng

KQ:

Câu 12

Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 13

Goi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC gần bằng bao nhiêu (làm tròn tròn đến phần mười)?

KQ:

Câu 14

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = a$, cực đại tại $x = b$. Khi đó $3 \cdot a + 6 \cdot b$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Dạng 2

Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

- ① Nắm vững các khái niệm liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số.
- ② Dựa vào bảng biến thiên để kết luận tính đơn điệu và cực trị của hàm số.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{35}{9}$		$\frac{73}{9}$		$-\infty$

Ⓐ $\left(\frac{5}{3}; \frac{73}{9}\right)$.

Ⓑ $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{35}{9}\right)$.

Ⓒ $x = -\frac{1}{3}$.

Ⓓ $x = \frac{5}{3}$.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Điểm cực tiểu của hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			6		5		6	
	$-\infty$							$-\infty$

- ☐ A $x = 5$.
 ☐ B $x = 0$.
 ☐ C $x = 6$.
 ☐ D $x = \pm 1$.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			10		$\frac{145}{27}$		$+\infty$

- ☐ A 10.
 ☐ B -2 .
 ☐ C $\frac{145}{27}$.
 ☐ D $-\frac{1}{3}$.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- ☐ A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
☐ B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
☐ C Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
☐ D Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3		0		$+\infty$
	$-\infty$					0	

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			-4		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$				4	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A** Hàm số có hai điểm cực trị.
- B** Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
- C** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- D** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
				$+$	0
					$+$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$		-4		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$	4	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Dạng **3**

Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số

- ① Nắm vững các khái niệm liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số.
- ② Dựa vào đồ thị cùng kiến thức đã học để suy ra tính đơn điệu và cực trị của hàm số

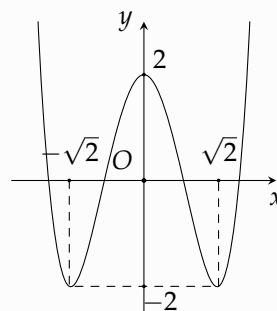
2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

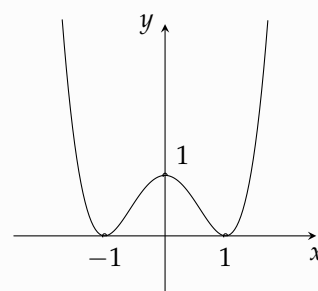
- ☐ A $(\sqrt{2}; +\infty)$.
 ☐ B $(-2; 2)$.
 ☐ C $(-\infty; 0)$.
 ☐ D $(0; \sqrt{2})$.



Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

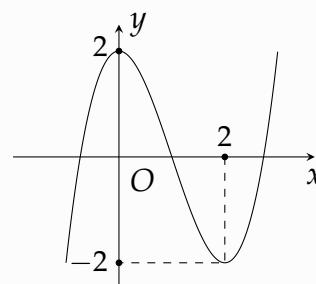
- ☐ A Hàm số $f(x)$ không có cực trị.
 ☐ B Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu.
 ☐ C Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một cực đại.
 ☐ D Hàm số $f(x)$ có 3 cực trị.



Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

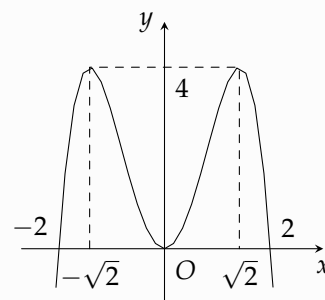
- ☐ A Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 ☐ B Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 .
 ☐ C Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
 ☐ D Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.



Câu 4

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- ☐ A $x = 2$.
 ☐ B $x = 0$.
 ☐ C $x = -2$.
 ☐ D $x = 4$.

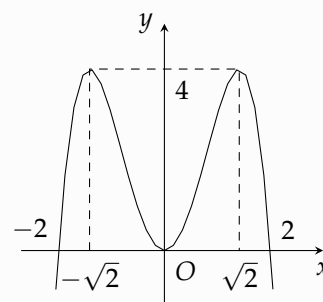


PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hãy chọn khẳng định đúng? khẳng định sai?

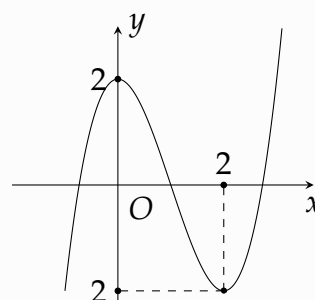
- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\pm\sqrt{2}$.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; \sqrt{2})$.
- d) Giá trị cực đại của hàm số bằng $y_{CD} = 4$.



Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên

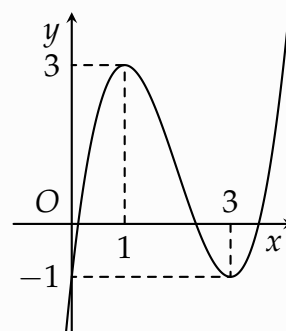
- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.
- b) Giá trị b bằng 0.
- c) Giá trị $c = -2$.
- d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$.



Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

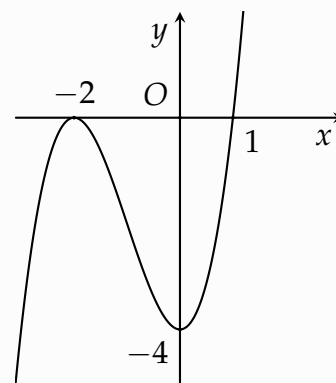
- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- b) Điểm cực tiểu của hàm số là $y = -1$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- d) $f'(2) > 0$.



Câu 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- c) $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$.
- d) $f'(-3) < f'(-1)$.



Câu 1

Cho $a \neq 0, b^2 - 3ac > 0$. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

KQ:

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- ☐ A $0 < m \leq 4$. ☐ B $m = 0$. ☐ C $m > 4$. ☐ D $0 \leq m < 4$.

Câu 2

Cho hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - m + 2)x + 3(m^2 + 1) + 2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- ☐ A $m = 1$. ☐ B $m = 2$. ☐ C $m = 3$. ☐ D $m = 4$.

Câu 3

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Khi đó

- ☐ A $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. ☐ B $S = \{0\}$. ☐ C $S = \left\{\frac{3}{2}, 0\right\}$. ☐ D $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 4

Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x = 1$.

- ☐ A $m = 3$. ☐ B $m = 2$. ☐ C $m = 1$. ☐ D $m = 0$.

Câu 5

Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m - 1)x^2 - (m^2 - 8)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x = -1$.

- ☐ A $m = 3$. ☐ B $m = -9$. ☐ C $m = 1$. ☐ D $m = -2$.

Câu 6

Khi hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 2)x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 1$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- ☐ A $(1; 4)$. ☐ B $(-3; 0)$. ☐ C $(0; 3)$. ☐ D $(-2; 0)$.

Câu 7

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 - (5m + 4)x + 10$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

- (A) $m = 3$. (B) $m = -9$. (C) $m = 1$. (D) $m = -2$.

Câu 8

Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 - m + 1)x^2 + (3m^2 - 4)x + m + 2$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 9

Cho biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Khi đó:

- (A) $m \leq -1$. (B) $m \in (2; 3)$. (C) $m \in (1; 2)$. (D) $m \in (0; 1)$.

Câu 10

Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $m_0 \in (-4; -2)$. (B) $m_0 \in (2; 4)$. (C) $m_0 \in (0; 2)$. (D) $m_0 \in (-2; 0)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số.

- a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m .
b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$.
c) Khi đó thì hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$.
d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng có định vị hệ số góc $k = 3$.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.
b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$.
d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng đi qua hai điểm cực trị thì phương trình của đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình $y = 2x - m$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbb{R})$ có một điểm cực trị là $A(-1; 29)$ và đi qua điểm $B(2; 2)$. Tính $a + b + c$. KQ:

Câu 2

Hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ khi $m = \frac{a}{b}$. Tính $S = a^2 + b^2$. KQ:

Câu 3

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + n$ có điểm cực tiểu là $I(1; 3)$. Khi đó $m + n$ bằng. KQ:

Câu 4

Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$ thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 5

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 9}{4x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$? KQ:

Câu 6

Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{-mx - 2025}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$ là bao nhiêu? KQ:

Câu 7

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a, b, c, d có bao nhiêu số âm? KQ:

Câu 8

Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 9

Biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$.

KQ:

§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

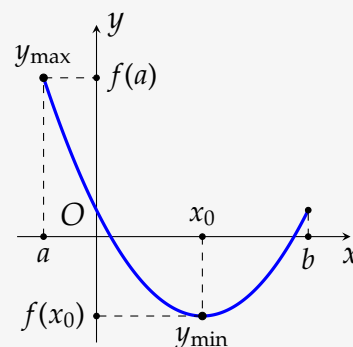
Định nghĩa 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta có

- ① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- ② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



- ① Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- ② Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:
- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.
- ③ Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:
- Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
 - Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
 - Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)
 - Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì

$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

- ④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.
- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a, b :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

- a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-3; 1]$. b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$.
- c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$ d) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$.
- e) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$; f) $f(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.
- g) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$. h) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ trên miền xác định.

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

- a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ b) $y = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$
- c) $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$ d) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^5]$

Ví dụ 3

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

- a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{6}]$. b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1

Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền cho bởi công thức $\mathcal{D}$

- ① Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathcal{D}$ và tìm các điểm $x_j \in \mathcal{D}$ mà tại đó y' không xác định.
- ② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathcal{D}$.
- ③ Từ bảng biến thiên, kết luận:
 - Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-2; 3]$ lần lượt là

- (A) 17, -15. (B) 10, -26. (C) -15, 17. (D) 6, -26.

Câu 2

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

- (A) 12. (B) 98. (C) 17. (D) 73.

Câu 3

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- (A) 33. (B) 37. (C) 12. (D) 1.

Câu 4

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng

- (A) 57. (B) 56. (C) 54. (D) 55.

Câu 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- (A) $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. (B) $\min_{[0;3]} y = -3$. (C) $\min_{[0;3]} y = 1$. (D) $\min_{[0;3]} y = -1$.

Câu 6

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- (A) 2. (B) $\frac{7}{5}$. (C) 3. (D) $\frac{11}{5}$.

Câu 7

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ bằng

- (A) 4. (B) -3. (C) $-\frac{7}{2}$. (D) $-\frac{13}{3}$.

Câu 8

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ là

- (A) $M = -2$. (B) $M = 2$. (C) $M = 4$. (D) $M = 0$.

Câu 9

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

- (A) $M = 4$. (B) $M = \sqrt{7}$. (C) $M = 7$. (D) $M = 3$.

Câu 10

Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

- (A) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$. (B) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.
(C) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e$. (D) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = \frac{1}{2} + \ln 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.

Câu 2

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-26; +\infty)$.
b) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; +\infty)$ là -26 .
d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $4\sqrt{65}$.

Câu 3

Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $M - N$.

- (A) $M - N = 4\ln 2$. (B) $M - N = -1$.
(C) $M - N = 4\ln 2 - 1$. (D) $M - N = 4\ln 3 - 4$.

Câu 4

Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = e^{3x^2 - 2x^3} - f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

- (A) $e - f(1)$. (B) $f(1)$. (C) $f(0)$. (D) $1 - f(0)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thoả mãn $\min_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của m bằng

KQ:

Câu 2

Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng -5 .

KQ:

Câu 3

Có bao nhiêu giá trị m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

KQ:

Câu 4

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

KQ:

Câu 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 2019$ là

KQ:

Dạng 2

Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên

- ② Dựa vào bảng biến thiên của hàm số trên $[a; b]$.
- ③ Từ bảng biến thiên, kết luận:
 - Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

Câu 1

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau.

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $M = f(0)$. (B) $M = f(-1)$.
(C) $M = f(3)$. (D) $M = f(2)$.

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y			5		1	4
	0				1	

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 3]$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	+
$f(x)$				1		5

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $M - m$ là

- (A) 5. (B) 7. (C) -1. (D) 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		3		4	
	$-\infty$							$-\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Cực đại của hàm số là 4. b) Cực tiểu của hàm số là 3.
c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$. d) $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 b) Giá trị cực tiểu của hàm số là -3 .
 c) $\min_{\mathbb{R}} y = -4$.
 d) $\max_{\mathbb{R}} y = -3$.

Câu 3

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau. Khi đó ta có

- a) Trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.
 b) Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.
 c) Trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
 d) $f(2) = 1$.

x	-1	0	2	3
y'	$+$	0	$-$	0
y	0	5	1	4

Dạng 3 Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số

- ② Dựa vào đồ thị của hàm số trên $[a; b]$.
 ③ Từ đồ thị, kết luận:
- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

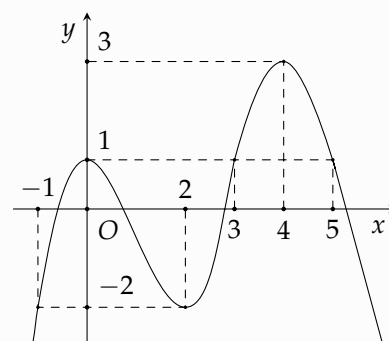
3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

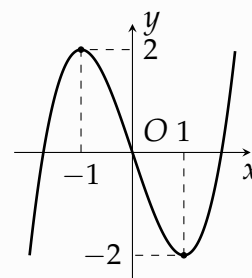
- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 1.



Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

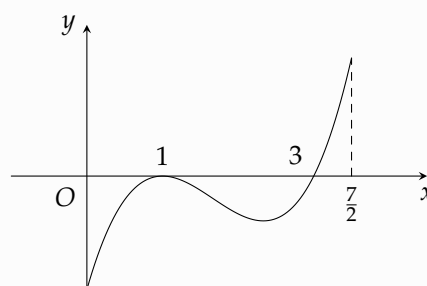
- ☐ A $m = 2$. ☐ B $m = -2$.
☐ C $m = 1$. ☐ D $m = -1$.



Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; \frac{7}{2}]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \frac{7}{2}]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

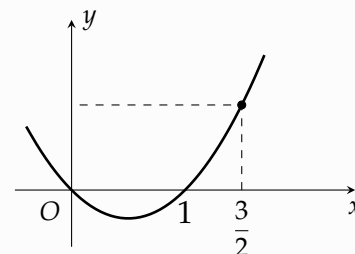
- ☐ A $x_0 = 3$. ☐ B $x_0 = 2$. ☐ C $x_0 = 1$. ☐ D $x_0 = 0$.



Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ tại điểm nào sau đây?

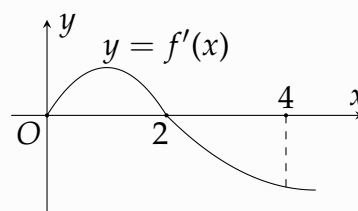
- ☐ A $x = \frac{3}{2}$. ☐ B $x = \frac{1}{2}$.
☐ C $x = 1$. ☐ D $x = 0$.



Câu 5

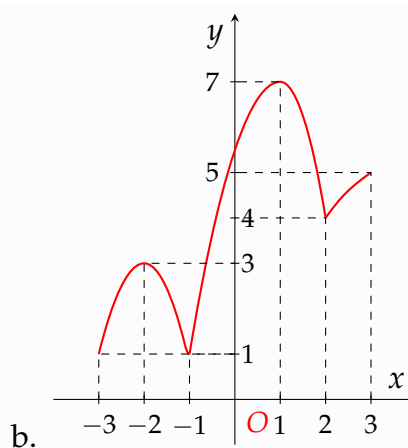
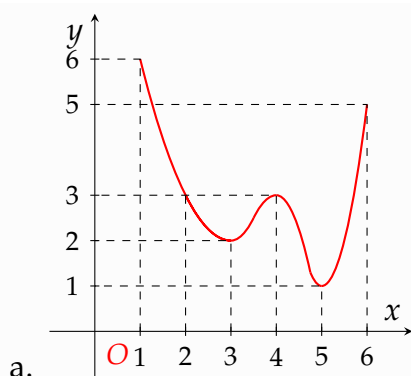
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- ☐ A $m = f(4), M = f(1)$. ☐ B $m = f(4), M = f(2)$.
☐ C $m = f(1), M = f(2)$. ☐ D $m = f(0), M = f(2)$.



Bài 1

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5.

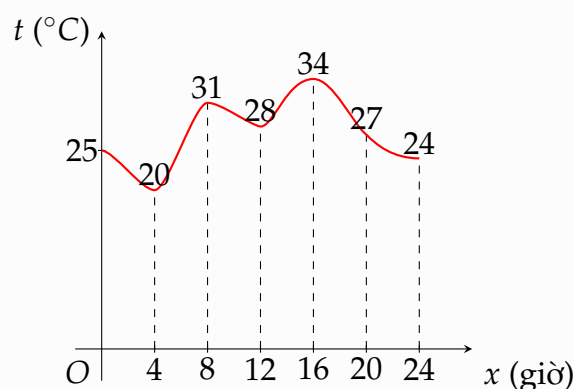


PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

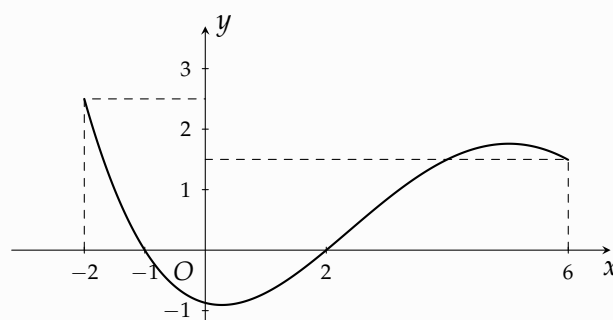
- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C .
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C .
- c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.
- d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.



Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

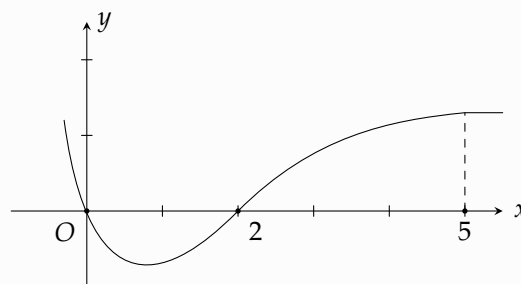
- a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.
- b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.
- c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.
- d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$.



Câu 3

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

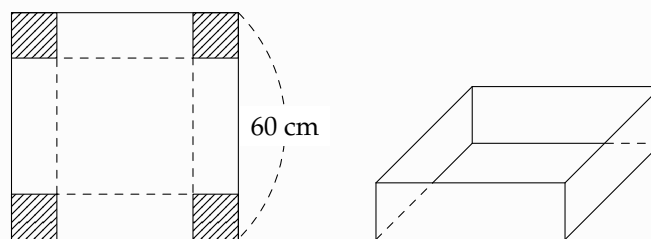
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.
- $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (H.1.14). Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Hình 1.14

KQ:

Câu 2

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

KQ:

Câu 3

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

KQ:

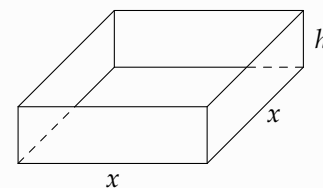
Câu 4

Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

KQ:

Câu 5

Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

KQ:

Câu 6

Hộp sữa 1 lít được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh $x \text{ cm}$. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

KQ:

Câu 7

Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (Hình 6). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

KQ:

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

- ☐ A $t = 3 \text{ s}$.
 ☐ B $t = 4 \text{ s}$.
 ☐ C $t = 2 \text{ s}$.
 ☐ D $t = 6 \text{ s}$.

Câu 2

Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

- ☐ A 13 m/s .
 ☐ B 10 m/s .
 ☐ C 9 m/s .
 ☐ D 12 m/s .

Câu 3

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- ☐ A 25 cm^2 .
 ☐ B $\frac{125}{4} \text{ cm}^2$.
 ☐ C $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$.
 ☐ D 125 cm^2 .

Câu 4

Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- (A) $1,01 \text{ m}^3$. (B) $1,17 \text{ m}^3$. (C) $1,51 \text{ m}^3$. (D) $1,40 \text{ m}^3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, \quad \text{với } 0 \leq t \leq 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$

- a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít. .
 b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít. .
 c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$. .
 d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất. .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

KQ:

Câu 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$.

KQ:

Câu 3

Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$) là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

KQ:

Câu 4

Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 2\cos^2 x + 3\sin x + 6$ trên $[0; \pi]$ lần lượt là M, m . Tính tổng $M + m$.

KQ:

Câu 5

Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296 \text{ m}^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

KQ:

Câu 6

Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25 kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4.000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50 kg. Xác định giá bán (đơn vị nghìn đồng) để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập vải mỗi kg là 30.000 đồng.

KQ:

Câu 7

Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 8

Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

KQ:

Câu 9

Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8 (\text{m}^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 980.000 đồng/ m^2 và ở nắp đổ bê tông là một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất (triệu đồng) mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng triệu đồng).

KQ:

§3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

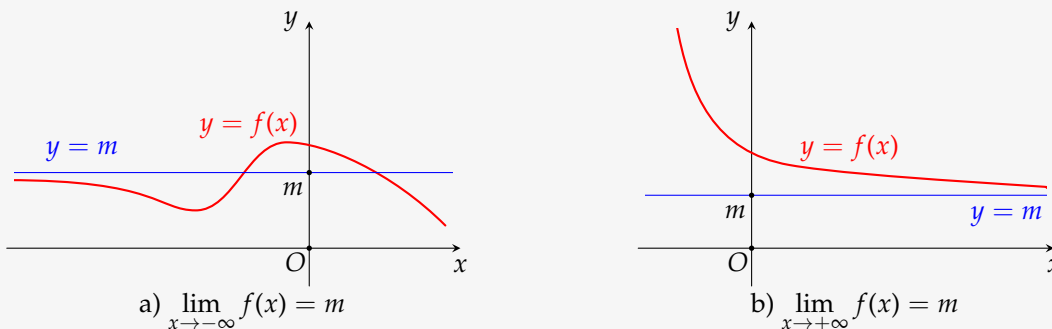
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa 3.1. Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới



Phương pháp 3.1. Các bước tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

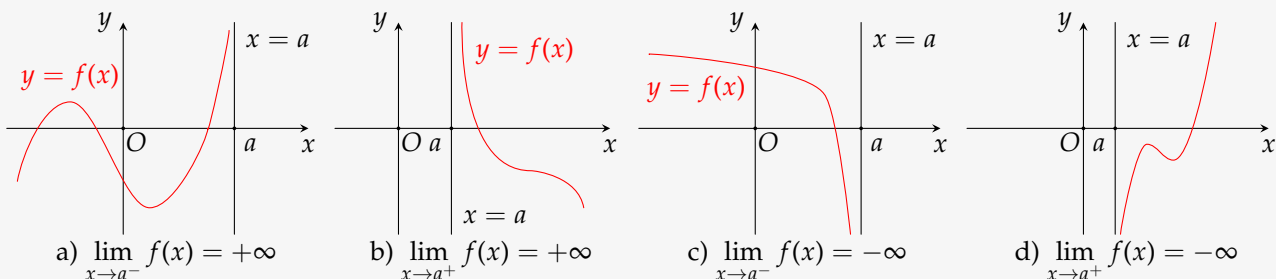
- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

Định nghĩa 3.2. Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới.



Phương pháp 3.2. Các bước tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận

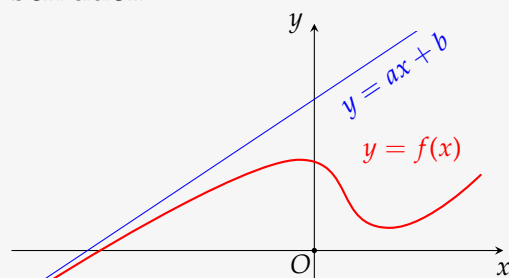
$x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3. Đường tiệm cận xiên

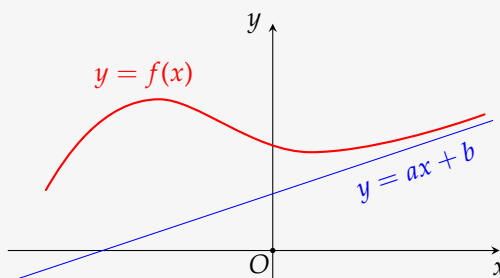
Định nghĩa 3.3. Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Phương pháp 3.3.

Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$;

b) $y = \frac{2x - 3}{1 - 2x}$;

c) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$;

d) $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Ví dụ 2

Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$;

b) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$;

c) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x - 1}{x - 2}$. Hàm số có có đường tiệm cận đứng là

A $y = 0$.

B $x = 2$.

C $y = 2$.

D $x = 0$.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{4x-1}$. Hàm số có đường tiệm cận đứng là

(A) $x = \frac{3}{4}$.

(B) $y = \frac{3}{4}$.

(C) $x = \frac{1}{4}$.

(D) $y = \frac{1}{4}$.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$. Hàm số có đường tiệm cận ngang là

(A) $y = 3$.

(B) $y = 1$.

(C) $x = 1$.

(D) $x = 3$.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{2x}$. Hàm số có đường tiệm cận ngang là

(A) $x = 0$.

(B) $y = 0$.

(C) $x = \frac{3}{2}$.

(D) $y = \frac{3}{2}$.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{-4x^2 - 2x - 5}{-x + 2}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

(A) $y = 4x + 10$.

(B) $y = 4x + 10$.

(C) $y = 4x + 10$.

(D) $y = 4x + 10$.

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 5x - 4}{-5x + 4}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

(A) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

(B) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

(C) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

(D) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{-x-4}{3x+2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận đứng là

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\frac{1}{3}$

(A) $y = -\frac{2}{3}$.

(B) $x = -\frac{2}{3}$.

(C) $y = -\frac{2}{3}$.

(D) $x = -\frac{1}{3}$.

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{5x-2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận đứng là

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
y'		—	—
y	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	$\frac{1}{5}$
		$-\infty$	

A $x = \frac{2}{5}$.

B $x = \frac{1}{5}$.

C $y = \frac{2}{5}$.

D $y = \frac{2}{5}$.

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{4x+3}{-3x+2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận ngang là

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$
		$-\infty$	

A $y = \frac{2}{3}$.

B $x = -\frac{4}{3}$.

C $y = -\frac{4}{3}$.

D $x = -\frac{4}{3}$.

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{-x+5}{4x+1}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận ngang là

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'		—	—
y	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$
		$-\infty$	

A $x = -\frac{1}{4}$.

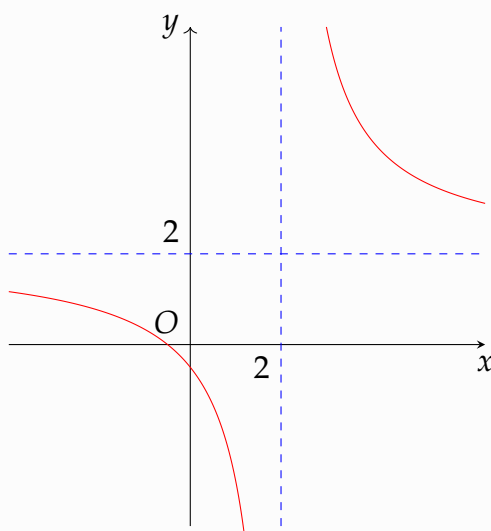
B $x = -\frac{1}{4}$.

C $y = -\frac{1}{4}$.

D $y = -\frac{1}{4}$.

Câu 11

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là



Ⓐ $y = -2$.

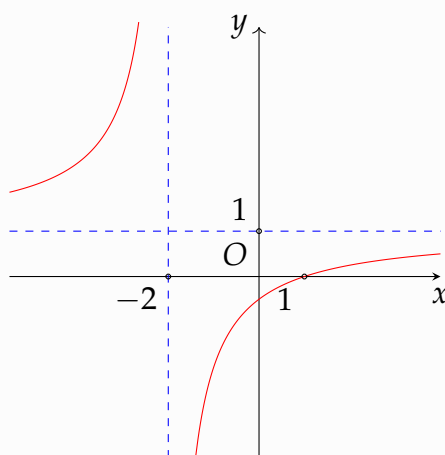
Ⓑ $y = 2$.

Ⓒ $x = -2$.

Ⓓ $x = 2$.

Câu 12

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x = 1$.

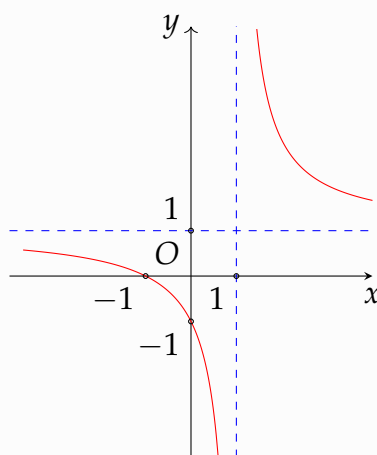
Ⓑ $y = -2$.

Ⓒ $x = -2$.

Ⓓ $y = 1$.

Câu 13

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



- A** $x = -1$. **B** $y = 1$. **C** $y = -1$. **D** $x = 1$.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

a) Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

b) Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

c) Lưu ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 4}{x + 2}$ là

- A** $y = 2$. **B** $x = 2$. **C** $x = -2$. **D** $y = -2$.

Câu 2

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

- A** $y = -2$. **B** $x = -2$. **C** $y = 2$. **D** $x = 1$.

Câu 3

Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A** $y = \frac{1 - 3x}{2 + x}$. **B** $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$. **C** $y = \frac{1 + 3x}{1 + x}$. **D** $y = \frac{3x^2 + 2}{2 - x}$.

Câu 4

Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

- A** $y = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$. **B** $y = \frac{1}{x + 1}$.

Ⓒ $y = \frac{2}{x+2}.$

Ⓓ $y = \frac{5x}{2-x}.$

Câu 5

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

Ⓐ $x = -2.$

Ⓑ $x = 2.$

Ⓒ $y = 3.$

Ⓓ $y = -\frac{1}{2}.$

Câu 6

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

Ⓐ $x = -1.$

Ⓑ $y = 1; y = -5.$

Ⓒ $x = 1; x = -5.$

Ⓓ $x = \pm 5.$

Câu 7

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}.$

Ⓐ 1.

Ⓑ 0.

Ⓒ 2.

Ⓓ 3.

Câu 8

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

Ⓐ 1.

Ⓑ 2.

Ⓒ 0.

Ⓓ 3.

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ⓑ Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).

Ⓒ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ⓓ Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

Câu 10

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

Ⓐ 3.

Ⓑ 2.

Ⓒ 0.

Ⓓ 1.

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	-2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	$+\infty$ ↗ 1	$+\infty$ ↗ $-\infty$	-2 ↘ $-\infty$

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 12

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$ ↘ -1	$-\infty$ ↗ 2	2 ↘ $-\infty$	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng.

- (A) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
 (B) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
 (C) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
 (D) Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			$+$	$-$
y			2 ↗ $-\infty$	1 ↘ 0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $f(-5) < f(4)$. b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$. d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số không có cực trị.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.
 d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{-x-2}{-x-1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S												
a) Bảng biến thiên của hàm số là <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">$-$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>1</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	$-$		$-$	y	1	$+\infty$	1	X	
x	$-\infty$	-1	$+\infty$											
y'	$-$		$-$											
y	1	$+\infty$	1											
b) Đạo hàm $y' = \frac{1}{(-x-1)^2}$.		X												
c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.		X												
d) Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số là $x = -1 ; y = 1$.	X													

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{-x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

Phát biểu	Đ	S												
a) Bảng biến thiên của hàm số là <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">$-$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td><td>-2</td></tr></table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	$-$		$-$	y	-2	$+\infty$	-2	X	
x	$-\infty$	1	$+\infty$											
y'	$-$		$-$											
y	-2	$+\infty$	-2											
b) Tâm đối xứng của hàm số là $I(1; -2)$.	X													
c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -2$.		X												
d) Đường tiệm cận cận ngang của hàm số là $y = 1$.	X													

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số.

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.
- Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Dạng 2 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

a) Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

b) Lưu ý:

① Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về

dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là

- Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = 2x - 1$. Ⓒ $y = x - 1$. Ⓓ $y = 2x + 1$.

Câu 2

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

- Ⓐ $y = 2x + 1$. Ⓑ $y = x - 3$. Ⓒ $y = x + 3$. Ⓓ $y = 2x - 1$.

Câu 3

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

- Ⓐ $y = 2x - 5$. Ⓑ $y = x - 2$. Ⓒ $y = x + 5$. Ⓓ $y = x - 5$.

Câu 4

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $y = 1$. Ⓒ $y = x + 2$. Ⓓ $y = x$.

Câu 5

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

- Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = -3x + 1$. Ⓒ $y = x - 2$. Ⓓ $y = x - 1$.

Câu 6

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- Ⓐ (5; 3). Ⓑ (-4; -5). Ⓒ (6; -1). Ⓓ (2; -10).

Câu 7

Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

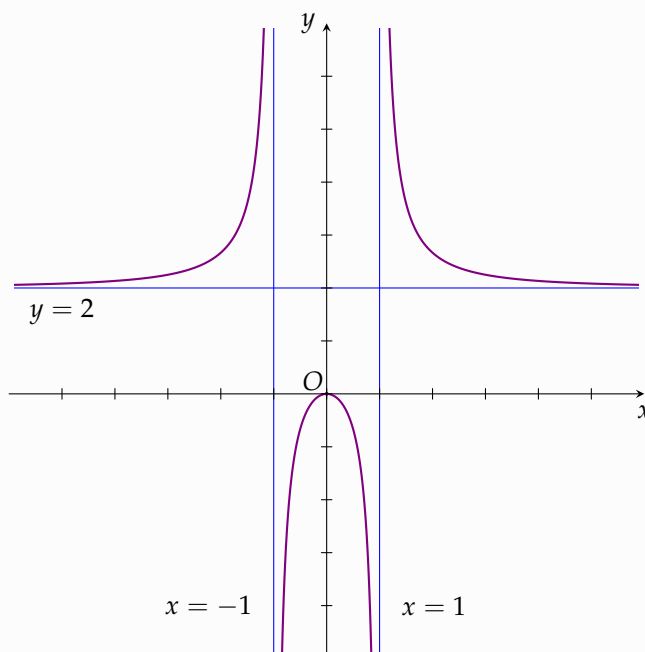
Ⓐ (1; 2). Ⓑ (1; 1). Ⓒ (1; -1). Ⓓ (1; 0).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

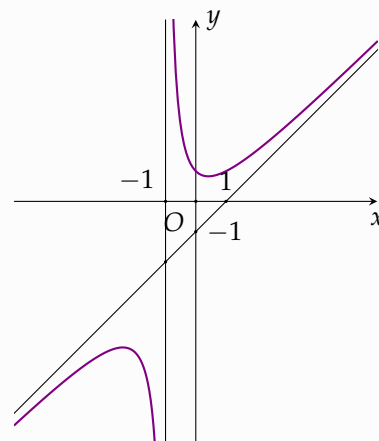
- a) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- c) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.
- d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$.



Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình bên.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.
- d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Hỏi có bao nhiêu giá trị m thỏa mãn điều kiện?

KQ:

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương thuộc $[0; 2024]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng?

KQ:

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng?

KQ:

Câu 4

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-4; 4]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

KQ:

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

KQ:

Câu 6

Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng).

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

KQ:

Câu 7

Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

Biết rằng tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ có dạng $p = a$. Khi đó a bằng bao nhiêu?

KQ:

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng:

- (A) $y = 2x - 1$. (B) $y = 2x + 1$. (C) $y = 2x - 3$. (D) $y = 2x + 3$.

Câu 2

Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$. Tính $a^2 + 2b$.

- (A) 4. (B) 2. (C) 5. (D) 3.

Câu 3

Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B . Khi đó diện tích tam giác OAB là:

- (A) 2. (B) 4. (C) 8. (D) 3.

Câu 4

Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$. (B) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.
(C) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$. (D) $y = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$.

Câu 5

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$ có phương trình là:

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = 2x - 1$. (C) $y = x - 1$. (D) $y = 2x + 1$.

Câu 6

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

Ⓐ $y = 2x + 1$. Ⓑ $y = x - 3$. Ⓒ $y = x + 3$. Ⓓ $y = 2x - 1$.

Câu 7

Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$

Ⓐ $y = 2x - 5$. Ⓑ $y = x - 2$. Ⓒ $y = x + 5$. Ⓓ $y = x - 5$.

Câu 8

Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = -3x + 1$. Ⓒ $y = x - 1$. Ⓓ $y = x - 2$.

Câu 9

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

Ⓐ (5; 3). Ⓑ (-4; -5). Ⓒ (6; -1). Ⓓ (2; -10).

Câu 10

Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025; 2025]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 4}{x - m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là

Ⓐ 2020. Ⓑ 2025. Ⓒ 4041. Ⓓ 4042.

Câu 11

Cho đồ thị hàm số $y = \frac{(2m - n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m + n$ là

Ⓐ 8. Ⓑ 9. Ⓒ 6. Ⓓ -6.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $(C_1) : f(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$ và $(C_2) : g(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{2x - 1}$ biết đồ thị hàm số (C_1) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = x_0, y = y_0$; (C_2) có tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta : y = ax + b$. Xét tính đúng sai

a) $S = x_0 + 2y_0 + 3b = 8$.

b) Đồ thị hàm số (C_2) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

c) Giao điểm của hai đường tiệm cận ở đề bài tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

d) Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

Câu 2

Cho hàm số $(C) : y = f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x - 12}$ và điểm $M \in (C)$ với $x_M < 0$.

- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Xét $\Delta_1 : y = ax + b$ ($b > 0$) là tiệm cận xiên của (C) điểm $(1; 4) \in \Delta_1$.
- Xét $\Delta_2 : y = ax + b$ ($b < 0$) là tiệm cận xiên của (C) khi đó $d_{\max}(M, \Delta_2) < 2$.
- Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng -2 .

Câu 3

Cho hàm số $(C) : y = f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3}$ biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta : y = ax + b$. Xét tính đúng sai

- Giao điểm của A và trục Ox có hoành lớn hơn 2.
- Giao điểm của A và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3; -9)$.
- Gọi $A = \Delta \cap Ox, B = \Delta \cap Oy$ thì ta có $S_{OAB} > 3$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = ax + b$ trên $[0; 3]$ là 4.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Xét tính đúng sai

- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
- Giao điểm của hai tiệm cận nằm trên trục hoành.
- Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng $x + y = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - 2mx - m - 2}$. Biết với $m = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a + b$. KQ:

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2mx + 3m + 4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là KQ:

Câu 3

Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m - n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục trùng

làm hai đường tiệm cận. Tính $m + n$.

KQ:

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2mx + m}{x - 1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

KQ:

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{(2m + 1)x^2 + 3}{\sqrt{x^4 + 1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -3)$.

KQ:

Câu 6

Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

KQ:

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1) với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45° .

KQ:

Câu 8

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*), m là tham số. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

KQ:

Câu 9

Biết giá trị của tham số $m = \frac{a}{b}$, a, b tối giản sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3mx - m + 2}{x - 1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $a + b$

KQ:

Câu 10

Tìm hệ số góc k của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^2 - x + 1}$.

KQ:

Câu 11

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$.

KQ:

§4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

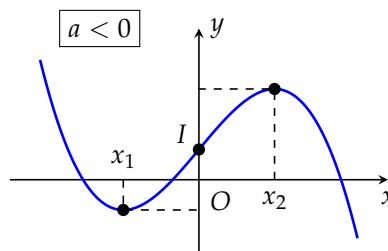
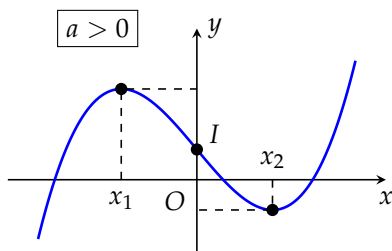
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

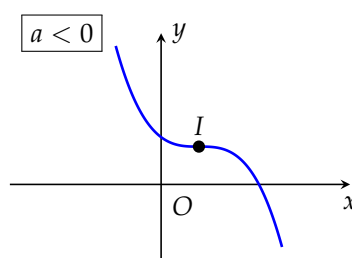
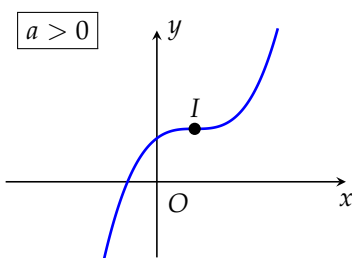
- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

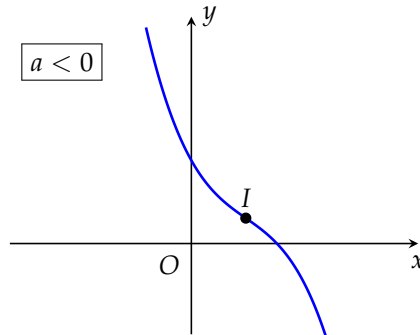
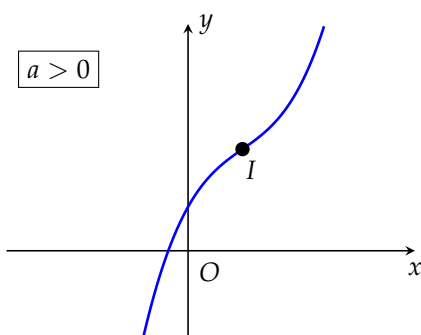
- a) TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- b) TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.

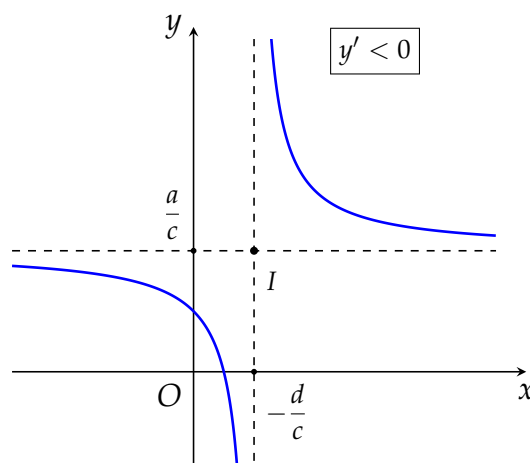
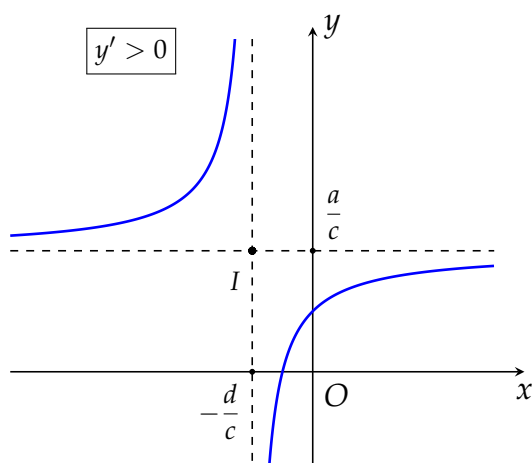


- c) TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



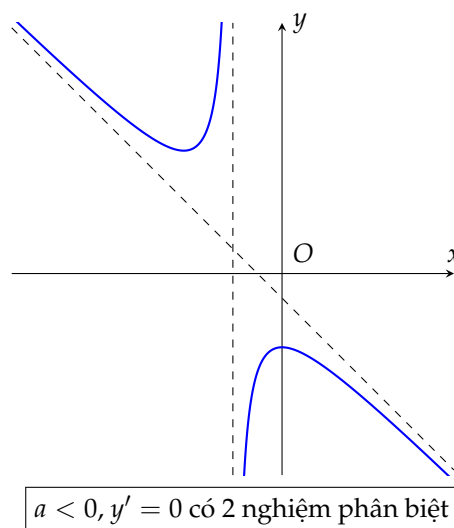
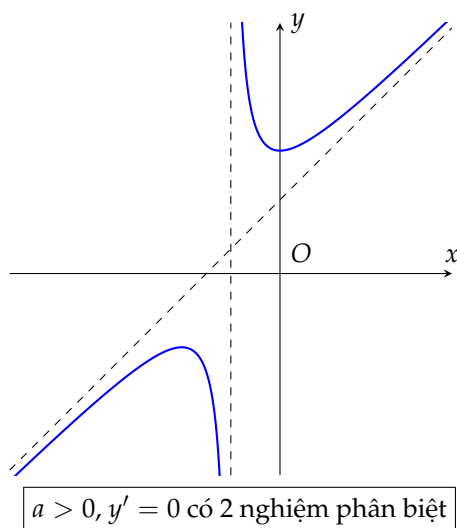
3. Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

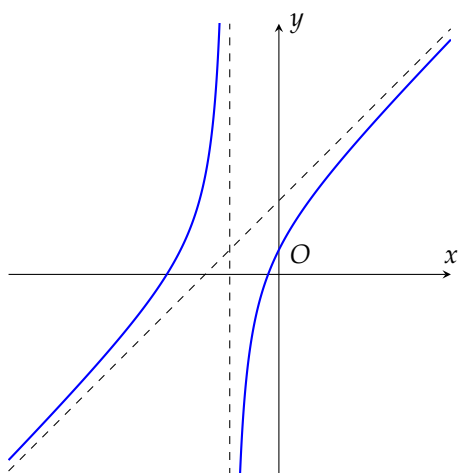
- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$;
- Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



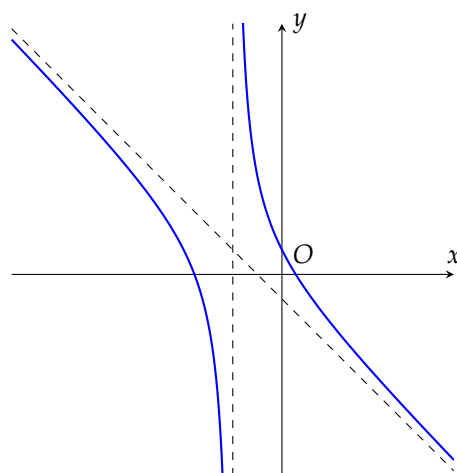
4. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:





$a > 0, y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0, y' = 0$ vô nghiệm

B VÍ DỤ MINH HỌA

1. Hàm bậc $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							
	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 - 2x^2 + 5.$

(B) $y = x^3 - 3x^2 + 5.$

(C) $y = -x^3 - 3x + 5.$

(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

Câu 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			5		$-\infty$
			1			

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2.$

(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

(C) $y = x^4 + 2x^2 + 1.$

(D) $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

Câu 3

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + x + 3.$

(B) $y = x^3 - 3x + 4.$

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$

(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

Câu 4

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây.

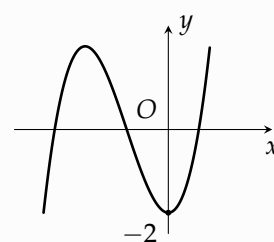
Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + x^2 - 2.$

(B) $y = x^3 + 3x^2 - 2.$

(C) $y = x^3 - 3x + 2.$

(D) $y = x^2 - 3x - 2.$



Câu 5

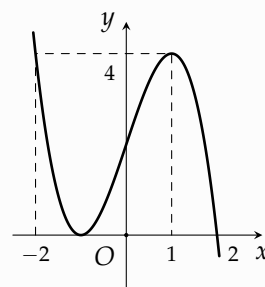
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

☐ A $y = x^3 + 3x - 2$.

☐ B $y = x^3 - 3x + 2$.

☐ C $y = -x^3 + 3x + 2$.

☐ D $y = -x^3 - 3x - 2$.



Câu 6

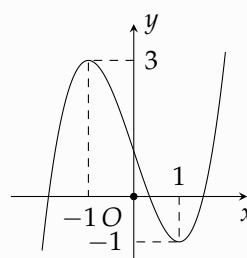
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

☐ A $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

☐ B $y = -x^2 - 3x - 1$.

☐ C $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

☐ D $y = x^3 - 3x + 1$.



Câu 7

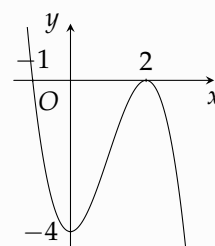
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

☐ A $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

☐ B $y = -x^3 - 4$.

☐ C $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

☐ D $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



Câu 8

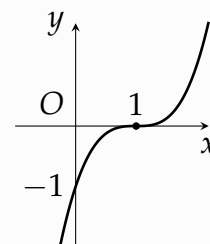
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

☐ A $y = x^3 - 1$.

☐ B $y = (x + 1)^3$.

☐ C $y = (x - 1)^3$.

☐ D $y = x^3 + 1$.



Câu 9

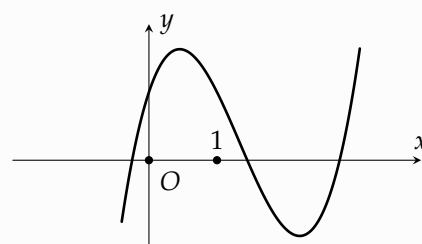
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

☐ B $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

☐ C $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

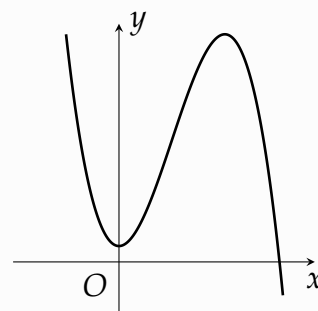
☐ D $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



Câu 10

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Ⓑ $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
 Ⓒ $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



Câu 11

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$							

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 0

Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

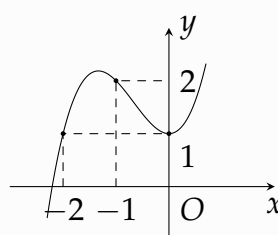
- Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

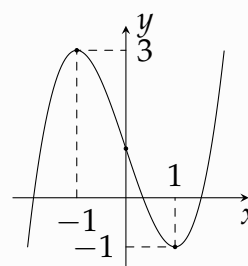
- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.
 c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 d) $2a + 3b + c = 9$.



Câu 2

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng $T = ?$.

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.
 b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.
 c) $a - b + c + d = -1$.
 d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.



Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

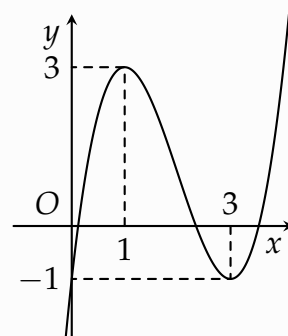
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.
- Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.
- Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		4		$-\infty$

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

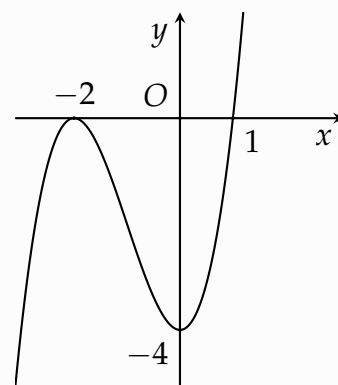
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- Điểm cực tiểu của hàm số là $y = -1$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- $f'(2) > 0$.



Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

- Hàm số có hai điểm cực trị.
- $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$.
- $f'(-3) < f'(-1)$.



Dạng 2

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Ta khảo sát theo sơ đồ

- ☑ Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.
- ☑ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ☑ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

1. VÍ DỤ MINH HỌA HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{x+1};$

b) $y = \frac{2x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{5+x}{2-x}.$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	1	$+\infty$	1

Ⓐ $y = \frac{2x-1}{x+3}.$

Ⓑ $y = \frac{4x-6}{x-2}.$

Ⓒ $y = \frac{3-x}{2-x}.$

Ⓓ $y = \frac{x+5}{x-2}.$

Câu 7

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	-1	$+\infty$	-1

Ⓐ $y = \frac{x-1}{x-3}.$

Ⓑ $y = \frac{x-1}{-x-3}.$

Ⓒ $y = \frac{x+5}{-x+3}.$

Ⓓ $y = \frac{1}{x-3}.$

Câu 8

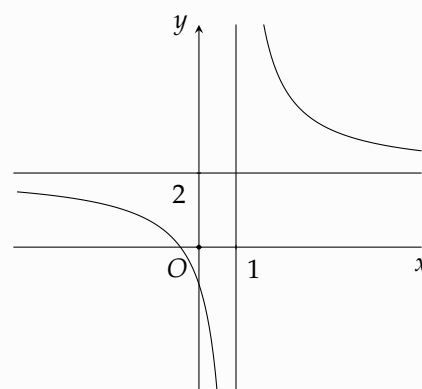
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \frac{x-1}{x-2}.$

Ⓑ $y = x+2.$

Ⓒ $y = x^4 - 3x^2 + 1.$

Ⓓ $y = \frac{2x+1}{x-1}.$



Câu 9

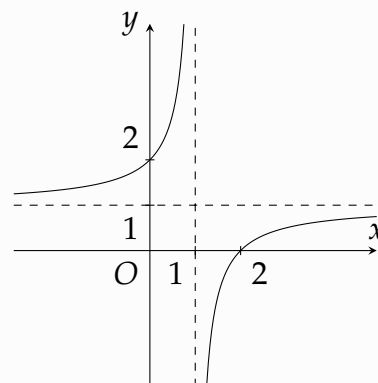
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = \frac{x-2}{x+1}$.

(B) $y = \frac{x+2}{x-2}$.

(C) $y = \frac{x-2}{x-1}$.

(D) $y = \frac{x+2}{x-1}$.



Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

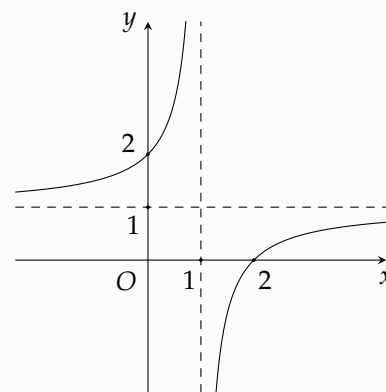
Giá trị của biểu thức $2a + b - 3c$ bằng

(A) -3.

(B) 4.

(C) 7.

(D) -5.



Câu 11

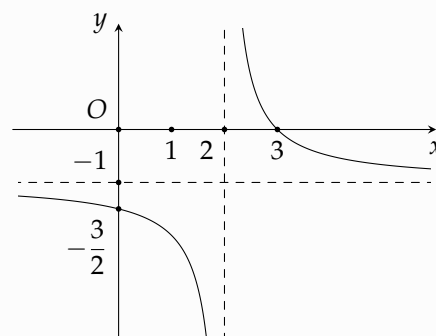
Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{cx+2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

(A) -3.

(B) 5.

(C) -4.

(D) 3.



Câu 12

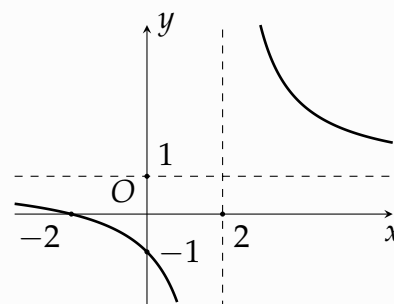
Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

(A) $a = 1; b = -2$.

(B) $a = b = 2$.

(C) $a = -1; b = -2$.

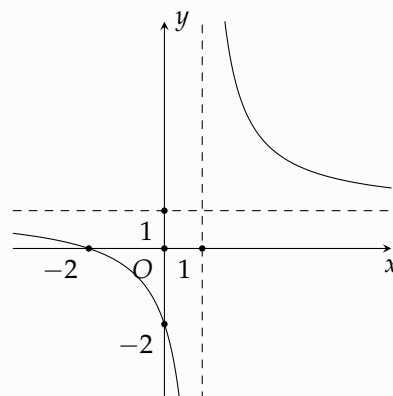
(D) $a = b = -2$.



Câu 13

Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $0 < b < a$.
(C) $b < 0 < a$. (D) $a < b < 0$.



Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{ax + 4}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$3 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \searrow 3$

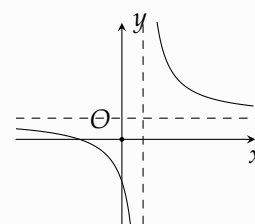
Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 15

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

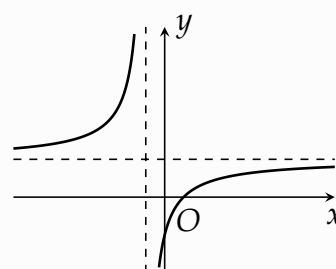
- (A) $b < 0, c < 0, d < 0$. (B) $b > 0, c < 0, d < 0$.
(C) $b < 0, c > 0, d < 0$. (D) $b > 0, c > 0, d < 0$.



Câu 16

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $ab > 0, bd < 0$. (B) $ab < 0, ad > 0$.
(C) $ab < 0, ad < 0$. (D) $bd > 0, ad > 0$.

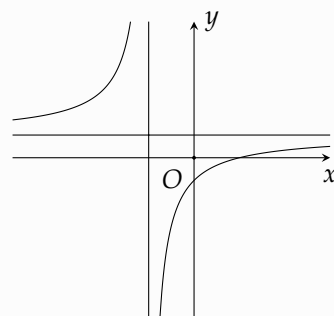


Câu 17

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $ac \neq 0, ad - cb \neq 0$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $ad > 0$ và $ab < 0$. (B) $bd < 0$ và $ab > 0$.
(C) $ad < 0$ và $ab < 0$. (D) $ad > 0$ và $bd > 0$.

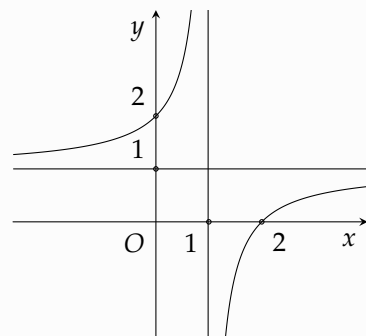


PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$.

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
d) $a - 3b - 2c = -3$.



Câu 2

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

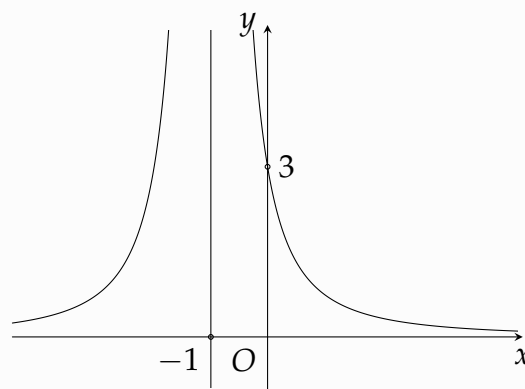
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$
		$-\infty$	

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
d) $b > \frac{2}{3}$ hoặc $b < 0$.

Câu 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.

- $f'(0) = 3$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.
- Giá trị của $f(2)$ bằng 4.



Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $x = -1$.
- Tâm đối xứng của đồ thị là $I(-1; 2)$.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Khi đó

- Hàm số có đạo hàm là $y' = \frac{3}{(x-1)^2}$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$.
- Đồ thị hàm số và đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ có 2 điểm chung.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2 là $y = -3x + 10$.

Dạng 3

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

☑ Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

☑ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.

— Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$, tìm nghiệm.

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

☑ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$; b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$;

3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	0	$-\infty$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 24 $-\infty$ $-\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.
 (B) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$.
 (C) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$.
 (D) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

Câu 7

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	-9	$-\infty$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -1 $-\infty$ $-\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.
 (B) $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$.
 (C) $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$.
 (D) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$.

Câu 8

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y		-20		$+\infty$	$+\infty$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ $-\infty$ 0

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$.

(B) $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$.

(C) $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

Câu 9

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

(B) $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

(C) $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

Câu 10

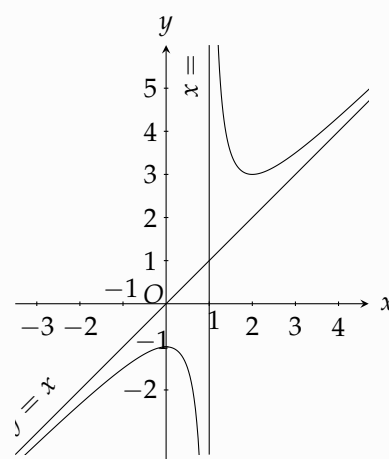
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

(B) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

(C) $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$.



Câu 11

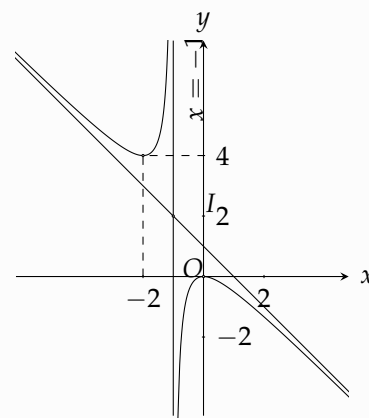
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$.

(B) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

(C) $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$.

(D) $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng

hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$. Khi đó

- Hàm số có tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cap (-2; +\infty)$.
- Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.
- Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số nhận $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x + 1}$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- Hàm số có 2 điểm cực trị.
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$. Khi đó

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1, 5; 2, 5]$ là $-\frac{19}{3}$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $2x + y = 0$.

Câu 4

Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x}$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 2$.
- Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0; 0)$.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 3}{x - 1}$. Khi đó

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 0]$ tại $x = 0$.

d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{1 - x^2}{x}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 0$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O .

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 1)$.

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C). Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3, -1)$.
- b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = -1$.
- c) Đồ thị (C) nhận $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.
- d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$.

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x - 4y + 2 = 0$.
- c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d) Đồ thị không cắt trục Ox .

§5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ✔ Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ✔ Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- ✔ Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- ✔ Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- ✔ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ✔ Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ✔ Bước 2. Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- ✔ Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng

1

Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ví dụ 1

Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Ví dụ 2

Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

(Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Ví dụ 3

Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Ví dụ 4

Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

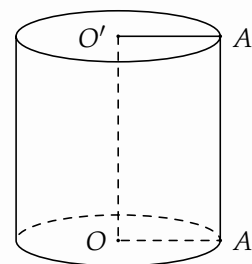
- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Dạng 2

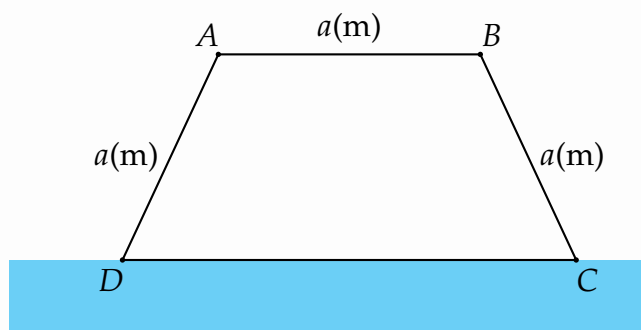
Bài toán tối ưu hoá đơn giản

Ví dụ 1

Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**Ví dụ 2**

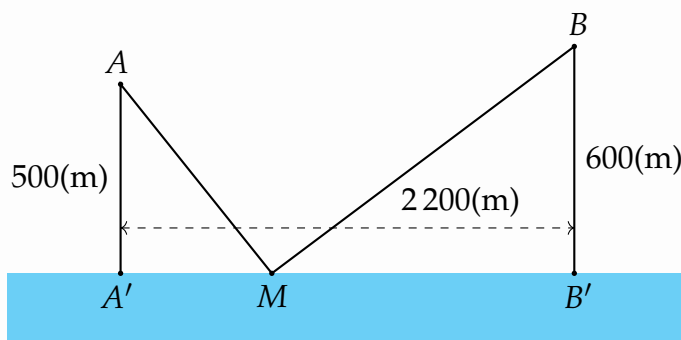
Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36

Ví dụ 3

Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2200$ m Hình 37. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét.

(Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \leq t \leq 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

Bài 2

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Bài 3

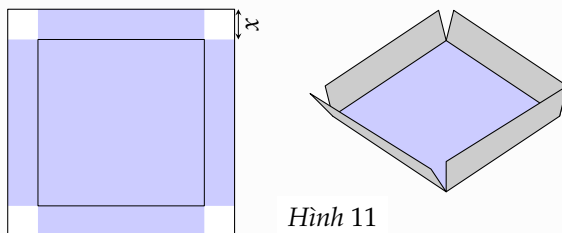
Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

Bài 4

Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11).



Hình 11

Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Bài 5

Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

(Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Bài 6

((Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng)) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

- ☑ Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong bảng bên dưới. (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

- ☑ Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên, tức là ở hệ trục tọa độ Oty , đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ “gần” với các điểm $A(5; 38)$, $B(10; 56)$,

$C(15; 79)$, $D(20; 90)$, $E(25; 93)$, $G(30; 94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}$, $M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at + b}{ct + d}$ ($ac \neq 0$) cho mục đích đó. Dựa vào bảng trên, ta chọn hàm số $f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2}$ ($t > 0$).

- Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).
- Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

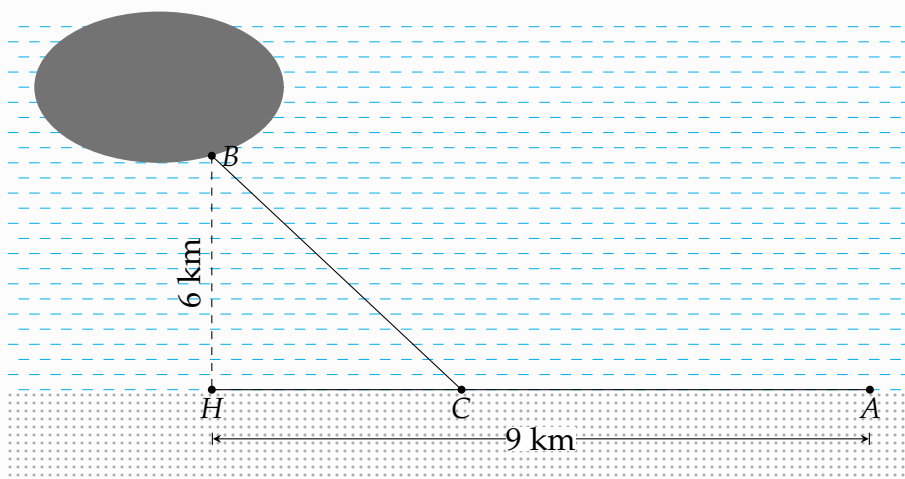
Bài 7

Trong Vật lí, điện trở tương đương R_{td} của hai điện trở R_1, R_2 mắc song song được xác định bởi công thức $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, biết rằng $R_2 = 3(\Omega)$. Đặt $R_1 = x(\Omega)$, $x > 0$.

- Tính R_{td} theo x , xem biểu thức tính được này là một hàm số $y = f(x)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $x > 0$.
- Khi x tăng, điện trở R_{td} thay đổi như thế nào? R_{td} không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

Bài 8

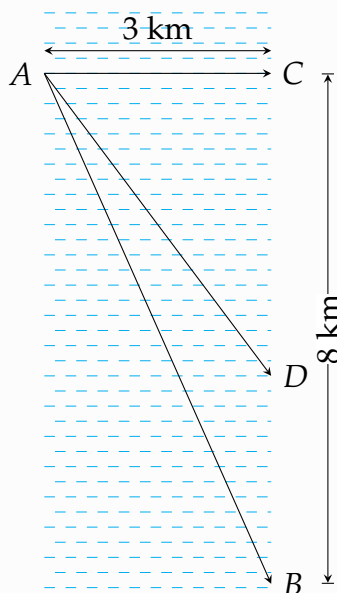
Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình 1.42). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.



Hình 1.42

Bài 9

Một người chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm B , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt như Hình 1.39. Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến B , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ A đến B (bỏ qua vận tốc của nước và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.39

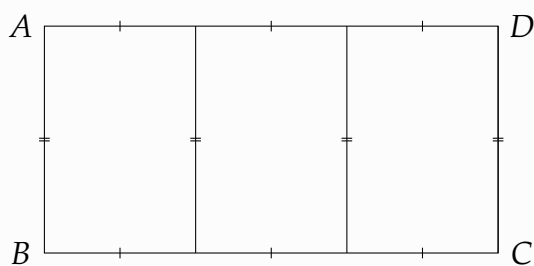
Bài 10

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với t (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $s = s(t)$ trên hệ trục tọa độ tOs .
- Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

Bài 11

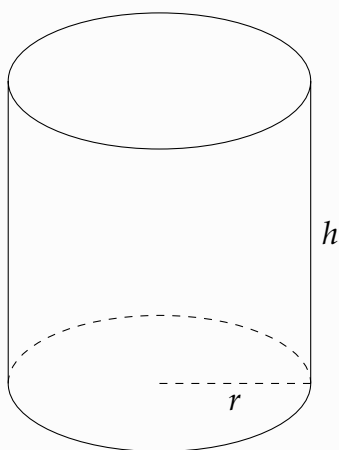
Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 m^2 . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (Hình 1.40). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.40

Bài 12

Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



MỤC LỤC

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	3
Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	3
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	3
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	5
Dạng 1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ, độ dài véc tơ.....	5
Dạng 2. Xác định góc và tích vô hướng của hai vectơ.....	12
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	16
Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN	20
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	20
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	21
Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ.....	21
Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian.....	26
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	30
Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	35
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	35
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	36
Dạng 1. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng.....	36
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng.....	41
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	45

VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

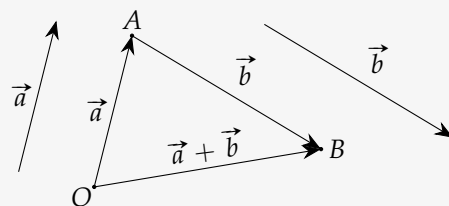
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tổng của hai véc tơ

Định nghĩa 1.1.

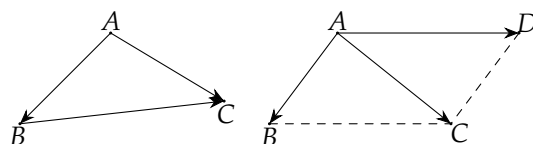
Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\vec{OB}$ là tổng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là phép cộng véc tơ.



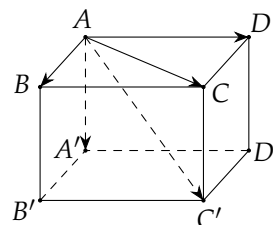
① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C , ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

② Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$



③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

⚠ Hệ thức tương tự: $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$.



Tính chất 1.1.

- ① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- ② Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- ③ Với mọi véc tơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- ④ Tổng của ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

2. Hiệu của hai véc tơ

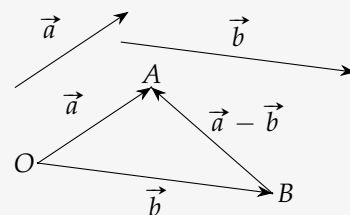
Định nghĩa 1.2.

a) Véc tơ đối:

- ① Véc tơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- ② Véc tơ đối của $\vec{AB}$ là $\vec{BA}$, nghĩa là $-\vec{AB} = \vec{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước véc tơ).
- ③ Véc tơ $\vec{0}$ được coi là véc tơ đối của chính nó.

b) Định nghĩa hiệu của hai véc tơ: Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai véc tơ được gọi là phép trừ véc tơ.



- ① Với ba điểm A, B, C ta có $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.
- ② Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

3. Tích của một số với một véc-tơ

Định nghĩa 1.3. Cho số thực $k \neq 0$ và véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với véc tơ $\vec{a}$ là một véc tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- ✔ Cùng hướng với véc tơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với véc tơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- ✔ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

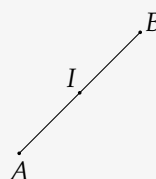


$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \text{ và } k \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

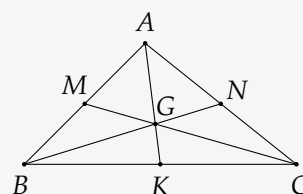
Tính chất 1.2.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

- ① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì
 - $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$;
 - $\vec{IA} = -\vec{IB}$; $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$;...



- ② G là trọng tâm của tam giác ABC thì
 - $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;
 - $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AK}$; $\vec{GA} = -2\vec{GK}$;...



Nhận xét:

- ① Với hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k , ta luôn có
 - $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
 - $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
 - $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}$.

② Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

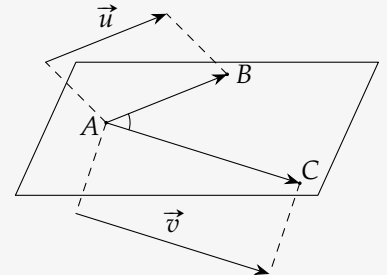
Định nghĩa 1.4.

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

⚠ $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.



- Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$;
- Nếu $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$;
- Nếu $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.



Định nghĩa 1.5. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, ký hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$



- ① Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- ③ Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ④ Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Tính chất 1.3. Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc-tơ, độ dài véc-tơ

Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

- a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$. b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$.

d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$.

e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$.

Ví dụ 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

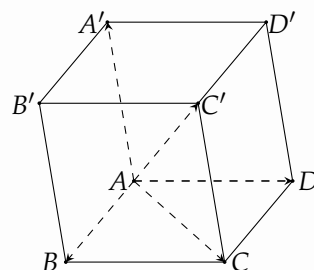
b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;

c) bằng với $\overrightarrow{AD}$;

d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$;

e) đối với $\overrightarrow{CD'}$;

f) đối với $\overrightarrow{B'C}$.



Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$;

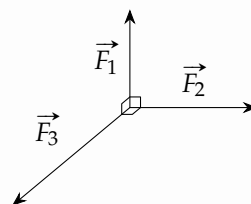
c) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

Ví dụ 4

Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.

a) Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F}_2, \vec{F}_3$.

b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

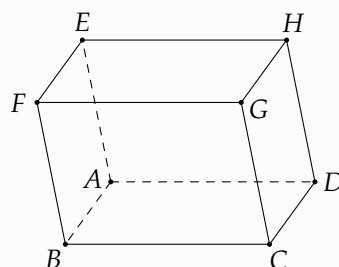
Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?

☒ A $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

☐ B $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

☐ C $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FE}$.

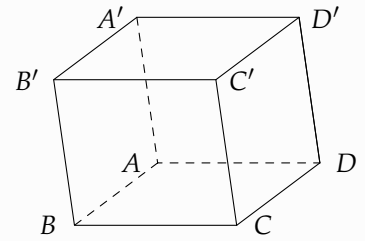
☐ D $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}$.



Câu 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

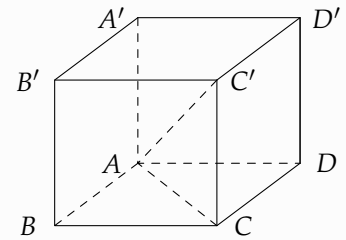
- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$.
 (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.
 (C) $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$.
 (D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.



Câu 3

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

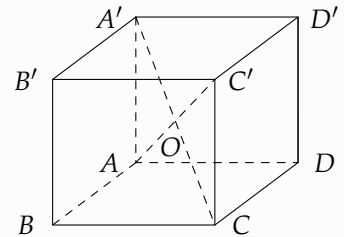
- (A) $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.
 (B) $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.
 (C) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{0}$.
 (D) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.



Câu 4

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
 (B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
 (C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
 (D) $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.



Câu 5

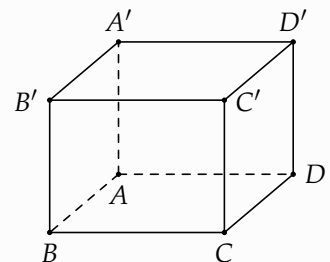
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a .

- (A) $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$.
 (B) $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$.
 (C) $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$.
 (D) $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

Câu 6

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a .

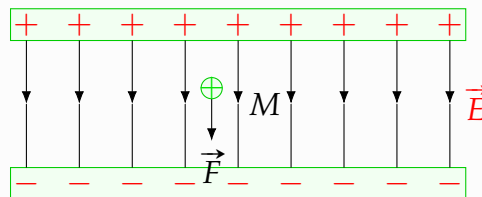
- (A) $a\sqrt{2}$.
 (B) $(1 + \sqrt{3})a$.
 (C) $a\sqrt{6}$.
 (D) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.



Câu 7

Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C.

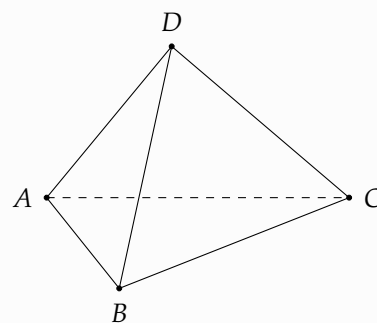
- Ⓐ 10^{-3} N. Ⓑ 10^4 N.
Ⓒ 10^{-14} N. Ⓓ 10^{-4} N.



Câu 8

Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

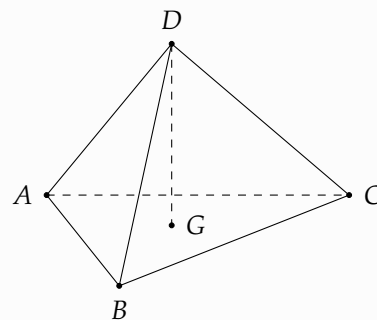
- Ⓐ $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{BC}$. Ⓑ $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BC}$.
Ⓒ $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC}$. Ⓓ $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DB} - \vec{DC}$.



Câu 9

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm k thỏa đẳng thức vectơ $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = k \cdot \vec{DG}$.

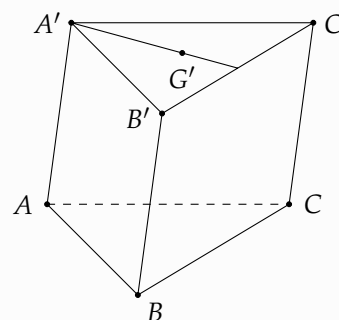
- Ⓐ $k = 1$. Ⓑ $k = 3$.
Ⓒ $k = 2$. Ⓓ $k = 3$.



Câu 10

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \vec{AA'}$, $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$. Véc-tơ $\vec{AG'}$ bằng

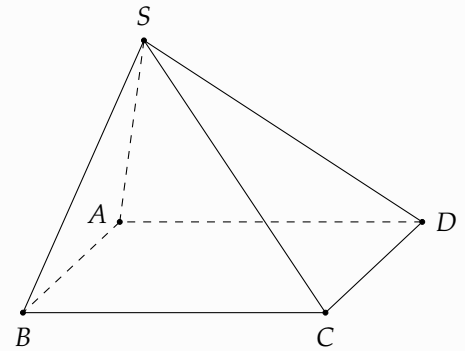
- Ⓐ $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. Ⓑ $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
Ⓒ $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. Ⓓ $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.



Câu 11

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

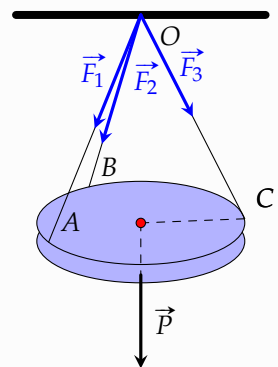
- (A) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.
 (B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 (C) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.
 (D) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.



Câu 12

Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

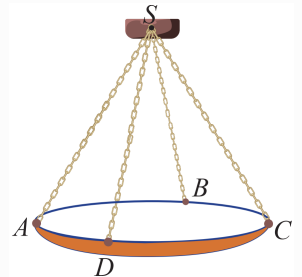
- (A) $14\sqrt{3} \text{ (N)}$.
 (B) $15\sqrt{3} \text{ (N)}$.
 (C) $17\sqrt{3} \text{ (N)}$.
 (D) $16\sqrt{3} \text{ (N)}$.



Câu 13

Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- (A) $\frac{15\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.
 (B) $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.
 (C) $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.
 (D) $\frac{30\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.



Câu 14

Cho tứ diện $RYFS$. Có bao nhiêu vectơ được tạo thành có điểm đầu là R và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

- (A) 4.
 (B) 3.
 (C) 2.
 (D) 1.

Câu 15

Cho hình lăng trụ $HKY.H'K'Y'$. Gọi L, L' là trung điểm của $KY, K'Y'$ tương ứng. Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ và cùng phương với $\overrightarrow{KL}$ là

- (A) $\overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$.
 (B) $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}$.
 (C) $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}, \overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$.
 (D) $\overrightarrow{KY}, \overrightarrow{YK}, \overrightarrow{K'Y'}, \overrightarrow{Y'K'}$.

Câu 16

Cho hình lăng trụ $PJI.P'J'I'$. Gọi E, E' là trung điểm của $JI, J'I'$ tương ứng. Các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lăng trụ và cùng hướng với $\vec{JE}$ là

- (A) $\vec{JI}, \vec{J'I'}$. (B) $\vec{JI}, \vec{IJ}$. (C) $\vec{JI}, \vec{IJ}, \vec{J'I'}, \vec{I'J'}$. (D) $\vec{IJ}, \vec{I'J'}$.

Câu 17

Cho hình lăng trụ $ZBC.Z'B'C'$. Gọi R, R' là trung điểm của $BC, B'C'$ tương ứng. Số vectơ bằng $\vec{RR'}$ là

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 18

Cho hình lăng trụ $TSL.T'S'L'$. Gọi P, P' là trung điểm của $SL, S'L'$ tương ứng. Số vectơ đối của $\vec{P'P}$ là

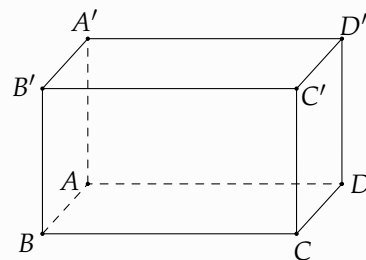
- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

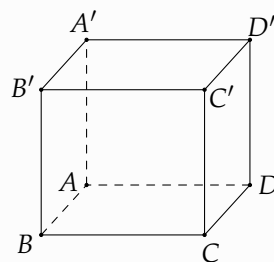
- a) $\vec{AB'} + \vec{CD'} = \vec{0}$.
b) $\vec{A'D} + \vec{CB'} = \vec{0}$.
c) $|\vec{AB} + \vec{AD}| = a\sqrt{5}$.
d) $|\vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.



Câu 2

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\vec{B'B} - \vec{DB} = \vec{B'D}$. b) $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$.
c) $|\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'}| = a\sqrt{2}$. d) $|\vec{BC} - \vec{BA} + \vec{C'A}| = a$.



Câu 3

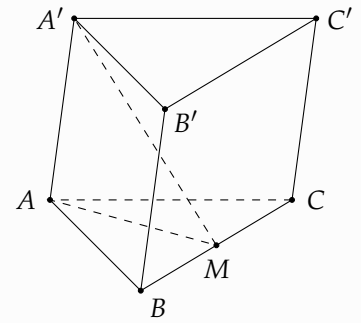
Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của BC . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$.

d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Câu 4

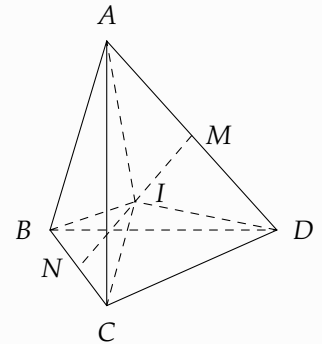
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.



Câu 5

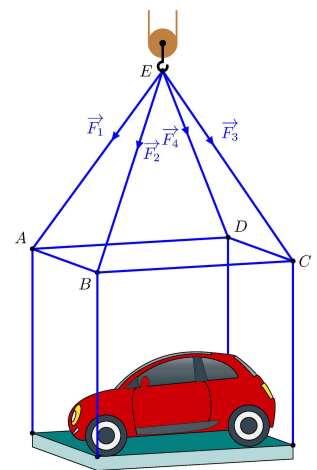
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.

b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$.

c) $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Cho hình lăng trụ $TAL.T'A'L'$ có đáy là tam giác TAL cân tại T , cạnh bên bằng 3 và góc ở đỉnh bằng 30° . Gọi E là trung điểm của AL . Độ dài của $\overrightarrow{TE}$ (làm tròn đến kết quả phần trăm) bằng

KQ:

Dạng 2 Xác định góc và tích vô hướng của hai véc-tơ

Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

- Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$.
- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$;
- Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

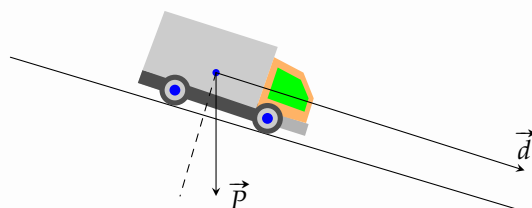
Ví dụ 2

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.
- Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Ví dụ 3

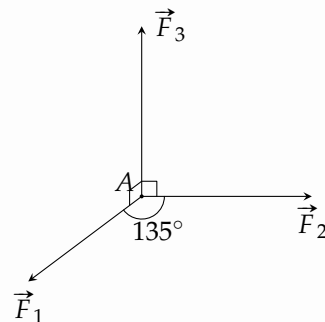
Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ví dụ 4

Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 2

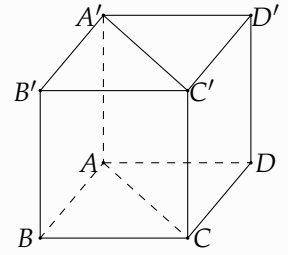
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

☐ A $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}) = 45^\circ$.

☐ B $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}) = 90^\circ$.

☐ C $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}) = 45^\circ$.

☐ D $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ$.



Câu 3

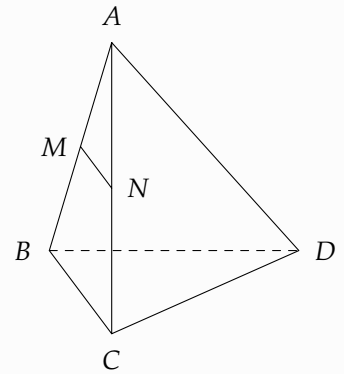
Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$.

☐ A $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 150^\circ$.

☐ B $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 120^\circ$.

☐ C $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 30^\circ$.

☐ D $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$.



Câu 4

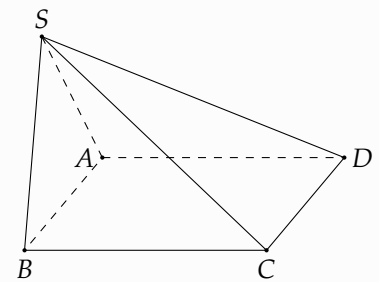
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

☐ A $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$.

☐ B $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 60^\circ$.

☐ C $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 90^\circ$.

☐ D $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 150^\circ$.



Câu 5

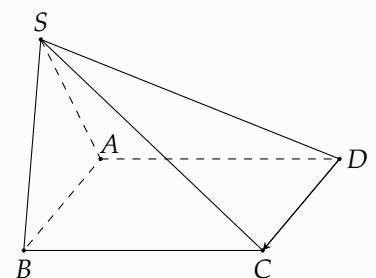
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Tính $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$.

☐ A $\frac{a^2}{4}$.

☐ B $-\frac{a^2}{4}$.

☐ C $-\frac{a^2}{2}$.

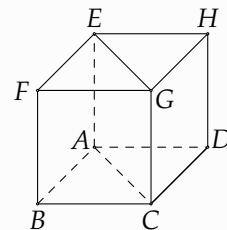
☐ D $\frac{a^2}{2}$.



Câu 6

Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

- ☐ A $a^2\sqrt{2}$.
☐ B a^2 .
☐ C $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
☐ D $a^2\sqrt{3}$.

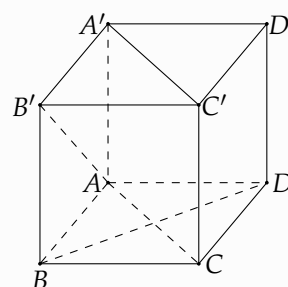


Câu 7

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính

$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}.$

- ☐ A $\frac{a^2}{2}$.
☐ B $-a^2$.
☐ C a^2 .
☐ D $-\frac{a^2}{2}$.

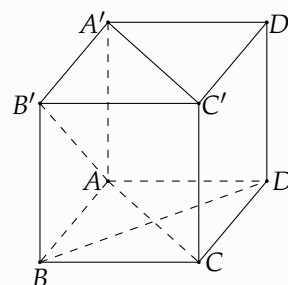


Câu 8

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính

$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}.$

- ☐ A $\frac{a^2}{2}$.
☐ B $-a^2$.
☐ C a^2 .
☐ D $-\frac{a^2}{2}$.

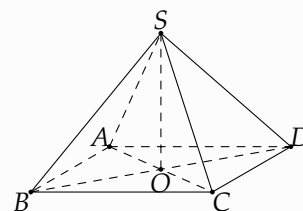


Câu 9

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a .

Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}.$

- ☐ A $-\frac{a^2}{4}$.
☐ B $\frac{a^2}{2}$.
☐ C $-\frac{a^2}{2}$.
☐ D $\frac{a^2}{4}$.

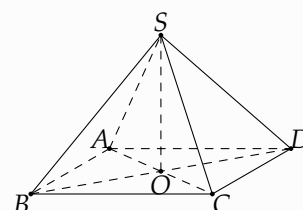


Câu 10

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a .

Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}.$

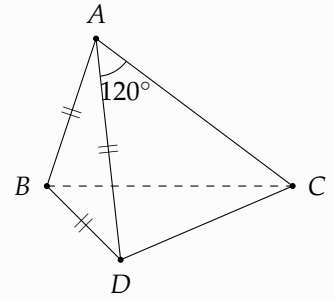
- ☐ A $-a^2$.
☐ B $\frac{a^2}{2}$.
☐ C $-\frac{a^2}{2}$.
☐ D a^2 .



Câu 11

Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$.

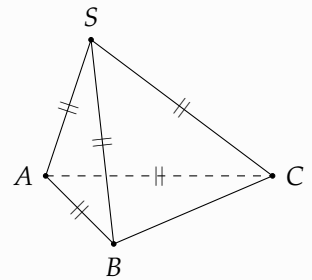
- Ⓐ $-\frac{3}{2}a^2$. Ⓑ $\frac{3}{2}a^2$.
 Ⓒ $\frac{1}{2}a^2$. Ⓓ $-\frac{1}{2}a^2$.



Câu 12

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\vec{SC}$ và $\vec{AB}$.

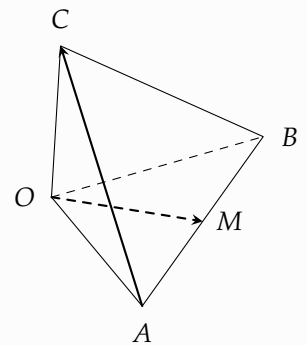
- Ⓐ 60° . Ⓑ 90° .
 Ⓒ 120° . Ⓓ 150° .



Câu 13

Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vectơ $\vec{OM}$ và $\vec{AC}$.

- Ⓐ 90° . Ⓑ 120° .
 Ⓒ 60° . Ⓓ 30° .



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

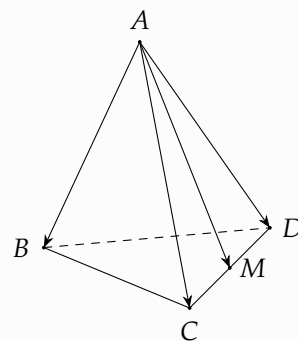
Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$. d) $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$.

Câu 2

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

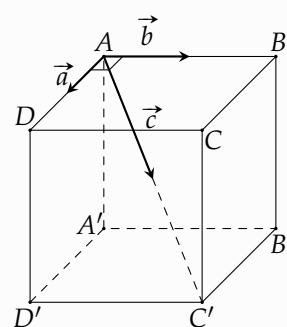
- a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
 b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.
 c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
 d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$.



Câu 3

Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
 b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ (N).
 c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.
 d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59$ (N) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
 Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 2

Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.
 Ⓑ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.
 Ⓒ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$.
 Ⓓ $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$.

Câu 3

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

(B) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

(C) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

(D) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

Câu 4

Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$.

(B) $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$.

(C) $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$.

(D) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

(B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

(C) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

(D) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Câu 6

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vector $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

(A) $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$.

(B) $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

(C) $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$.

(D) $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 7

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

(A) $\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

(B) $\overrightarrow{B'C'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

(C) $\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

(D) $\overrightarrow{B'C'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

(B) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

(D) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 9

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
☐ B $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
☐ C $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
☐ D $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 10

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
☐ B $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
☐ C $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
☐ D $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Câu 11

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vecto $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

- ☐ A $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
☐ B $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
☐ C $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
☐ D $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G .

- a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
 b) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.
 c) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.
 d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 2

Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O .

- a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
 b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA'} = \vec{0}$.
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.
 d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

Câu 3

Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{SO}$.
 b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
 c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 5\vec{SC}$.
 d) $\overrightarrow{GS} = 3\vec{OG}$.

Câu 4

Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.
 d) $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

Câu 5

Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC .

- a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
 c) $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 d) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 6

Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC .

- a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.
 b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$.
 c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$.
 d) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 7

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a; AD = a\sqrt{3}; AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.
 b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.
 c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$.
 d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.

§2. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

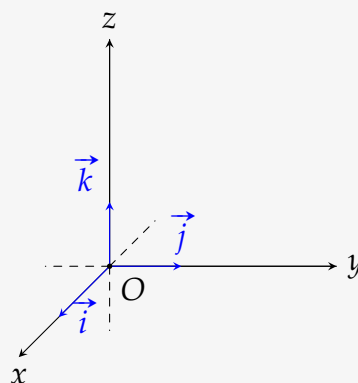
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hệ tọa độ trong không gian

Định nghĩa 2.1.

Trong không gian, ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

- ☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
 - ☑ Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
 - ☑ $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$
- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.



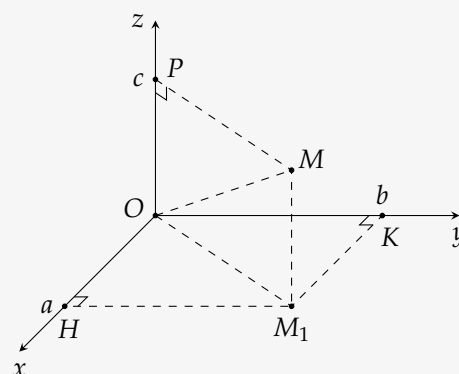
2. Tọa độ của điểm

Phương pháp 2.1.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Tọa độ điểm M được xác định như sau:

- ☑ Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .
- ☑ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.



3. Tọa độ của vectơ

Phương pháp 2.2.

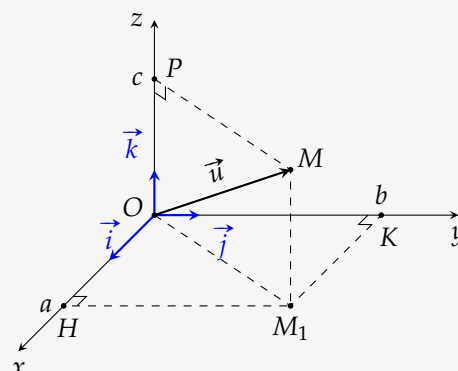
Trong không gian $Oxyz$:

- ☑ Tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của vectơ $\vec{OM}$.
- ☑ Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\vec{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của $\vec{u}$. Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



⚠ Tọa độ các véc tơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tọa độ điểm, tọa độ véc tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ véc tơ ta chú ý các kết quả sau:

$$\textcircled{1} \quad \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{OM} = (a; b; c) \text{ thì } M(a; b; c).$$

$$\textcircled{4} \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

⑤ Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên (Oxy) thì $z = 0$. Suy ra hình chiếu là $M_1(1; 2; 0)$.

⑥ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) . Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -2)$, $B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5)$, $B(5; 7; -4)$, $C(5; 6; -4)$, $D'(2; 0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$ là

- (A) $(2; -3; -5)$. (B) $(2; 3; -5)$. (C) $(-2; 3; 5)$. (D) $(2; 3; 5)$.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

- (A) $(3; -1; 4)$. (B) $(3; 4; -1)$. (C) $(4; -1; 3)$. (D) $(4; 3; -1)$.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz ?

- (A) $M(1; 0; 0)$. (B) $M(1; 0; 2)$. (C) $M(1; 2; 0)$. (D) $M(0; 0; -2)$.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\vec{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- (A) $M(0; 2; 1)$. (B) $M(1; 2; 0)$. (C) $M(2; 0; 1)$. (D) $M(2; 1; 0)$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

- (A) $(1; 0; -2)$. (B) $(0; 1; -2)$. (C) $(0; -1; 2)$. (D) $(1; -2; 0)$.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia Ox và $OA = 2$.

- (A) $A(0; 0; 2)$. (B) $A(2; 2; 0)$. (C) $A(0; 2; 0)$. (D) $A(2; 0; 0)$.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.

- (A) $A(0; 3; 0)$. (B) $A(0; -3; 0)$. (C) $A(0; -9; 0)$. (D) $A(3; -3; 0)$.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; -4)$. Véc-tơ $\vec{AB}$ có tọa độ là

- (A) $(-1; -2; 6)$. (B) $(3; 0; -2)$. (C) $(1; 0; -6)$. (D) $(1; 2; -6)$.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 4)$. Véc-tơ $\vec{AB}$ có tọa độ là

- (A) $(2; 5; 6)$. (B) $(4; 1; 2)$. (C) $(2; -5; 6)$. (D) $(-2; 5; 6)$.

Câu 10

Cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$. (B) $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$. (C) $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$. (D) $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$.

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N biết $M(2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -3)$. Tọa độ N là

- (A) $N(1; -3; -4)$. (B) $N(1; 3; -4)$. (C) $N(-1; 3; -4)$. (D) $N(1; 3; 4)$.

Câu 12

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- (A) $M(3; 0; 0)$. (B) $M(0; -4; 5)$. (C) $M(0; 0; 5)$. (D) $M(3; 0; 5)$.

Câu 13

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- (A) $M(0; 0; 3)$. (B) $N(1; 2; 0)$. (C) $Q(0; 2; 0)$. (D) $P(1; 0; 0)$.

Câu 14

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- (A) $(2; 0; 0)$. (B) $(2; 1; 0)$. (C) $(0; 1; -3)$. (D) $(2; 0; -3)$.

Câu 15

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- (A) $(0; 2; 1)$. (B) $(0; 2; 0)$. (C) $(3; 0; 0)$. (D) $(0; 0; 1)$.

Câu 16

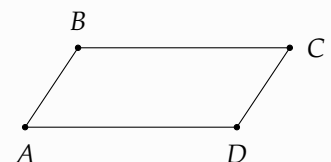
Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

- (A) $(2; 0; 0)$. (B) $(0; 3; 0)$. (C) $(0; 0; -2)$. (D) $(2; 0; -2)$.

Câu 17

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

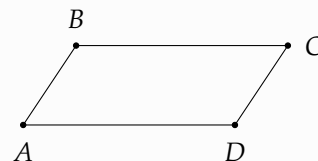
- (A) $D(11; 2; 2)$. (B) $D(1; 8; 2)$.
(C) $D(11; 2; -2)$. (D) $D(1; 8; -2)$.



Câu 18

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

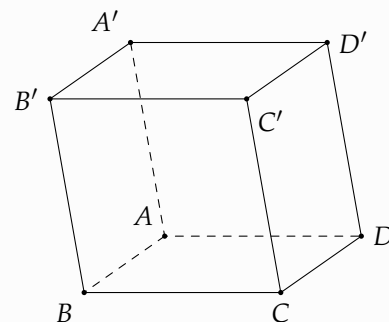
- Ⓐ $D(4;2;9)$. Ⓑ $D(-2;4;-5)$.
Ⓒ $D(6;2;-3)$. Ⓓ $D(-4;-2;9)$.



Câu 19

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- Ⓐ $C(2;0;2)$. Ⓑ $C(2;0;2)$.
Ⓒ $C(2;0;2)$. Ⓓ $C(2;0;2)$.



Câu 20

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- Ⓐ $A'(-1;-5;8)$. Ⓑ $A'(-1;-5;8)$. Ⓒ $A'(-1;-5;8)$. Ⓓ $A'(-1;-5;8)$.

Câu 21

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $B(-4,1,-2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OB}$.

- Ⓐ $(-4,1,-2)$. Ⓑ $(4,-1,2)$. Ⓒ $(-4,1,0)$. Ⓓ $(-4,0,-2)$.

Câu 22

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho véc-tơ $\vec{c} = (4,3,-1)$ và điểm B . Biết $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Tìm tọa độ của điểm B .

- Ⓐ $(0,3,-1)$. Ⓑ $(4,3,-1)$. Ⓒ $(-4,-3,1)$. Ⓓ $(4,0,-1)$.

Câu 23

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là bao nhiêu?

- Ⓐ $(2,-3,-1)$. Ⓑ $(-1,-3,-1)$. Ⓒ $(-1,2,-3)$. Ⓓ $(-3,2,-1)$.

Câu 24

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A = (3,-3,3)$ và $B = (4,-1,-1)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- Ⓐ $(-7,2,-4)$. Ⓑ $(10,-5,2)$. Ⓒ $(-1,-2,4)$. Ⓓ $(1,2,-4)$.

Câu 25

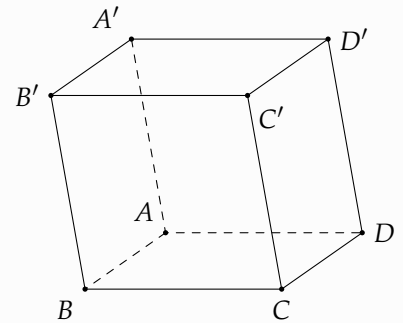
Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A = (-3, -4, -4)$, $B = (2, 2, 0)$ và điểm $C = (3, 4, -1)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

- Ⓐ $(-8, -10, -3)$. Ⓑ $(2, 2, -5)$. Ⓒ $(4, 6, 3)$. Ⓓ $(-2, -2, -5)$.

Câu 26

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

- Ⓐ $D'(-1;-6;8)$. Ⓑ $D'(-1;-6;8)$.
Ⓒ $D'(-1;-6;8)$. Ⓓ $D'(-1;-6;8)$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 27

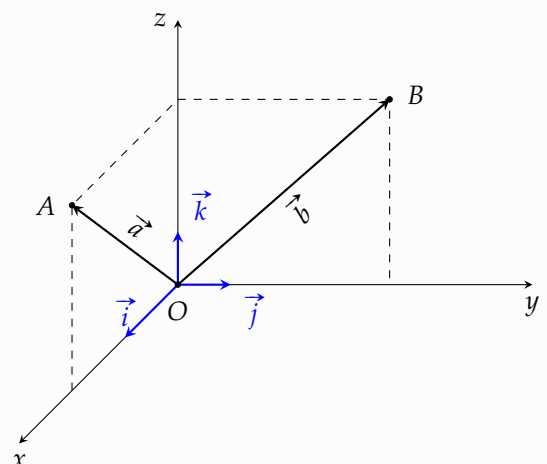
Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

- a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.
b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.
c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

Câu 28

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

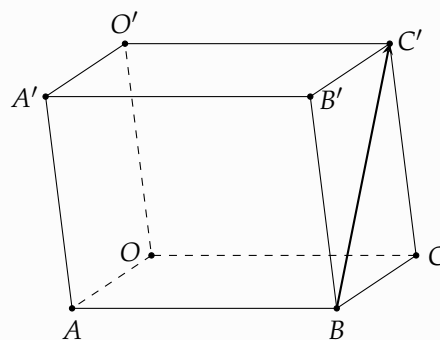
- a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.
b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.
c) Tọa độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$.
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.



Câu 29

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$, $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$.
- Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.
- Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;3;-6)$.
- Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$.

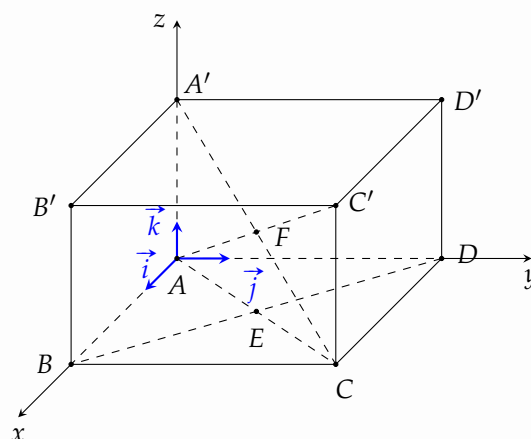


Dạng 2 Tọa độ hóa một số hình không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- Tọa độ các điểm đặc biệt:
 - $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$.
 - $M \in Oy \Rightarrow M(0;y;0)$.
 - $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;z)$.
 - $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$.
 - $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$.
 - $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0;y;z)$.

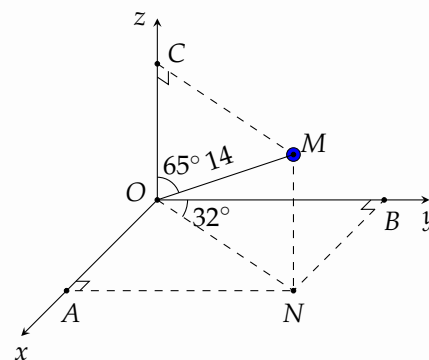
Ví dụ 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, F là trung điểm AC' . Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với A), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm E, F .



Ví dụ 2

Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay với $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tính tọa độ điểm M .

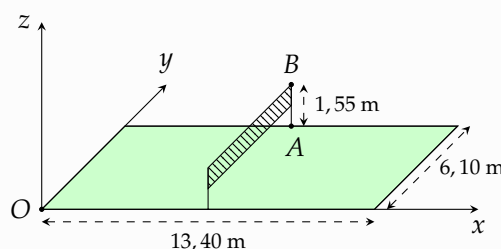


PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 30

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B .

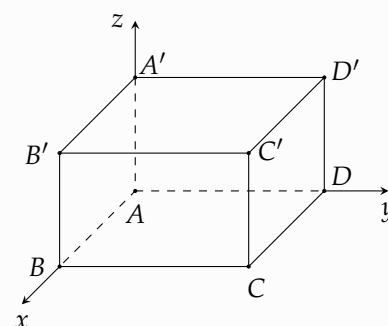
- (A) $(6, 1; 6, 7; 1, 55)$. (B) $(6, 7; 6, 1; 1, 55)$.
 (C) $(6, 1; 0; 1, 55)$. (D) $(0; 6, 7; 1, 55)$.



Câu 31

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là

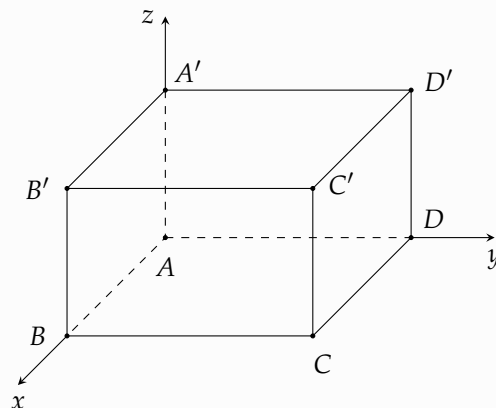
- (A) $B(0; 2; 0)$. (B) $B(2; 2; 2)$.
 (C) $B(2; 2; 0)$. (D) $B(2; 0; 2)$.



Câu 32

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm A), toạ độ điểm C' là

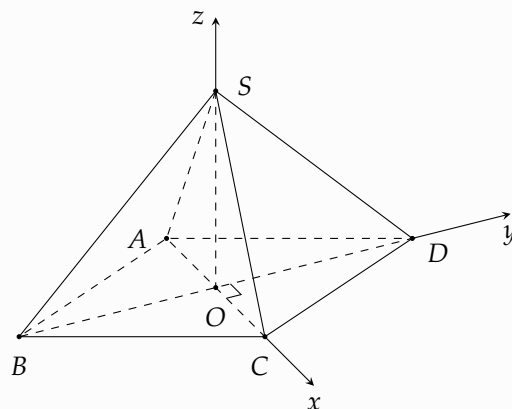
- ☐ A $C'(2; 2; 0)$.
 ☐ B $C'(2; 2; 2)$.
 ☐ C $C'(2; 2; 0)$.
 ☐ D $C'(2; 0; 2)$.



Câu 33

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), toạ độ $\vec{SC}$ là

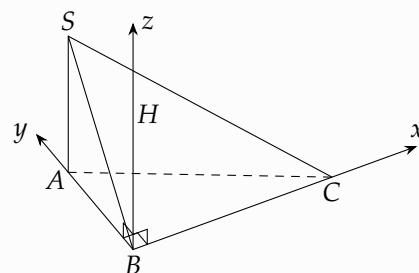
- ☐ A $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$.
 ☐ B $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$.
 ☐ C $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$.
 ☐ D $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$.



Câu 34

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm B), tìm khẳng định sai.

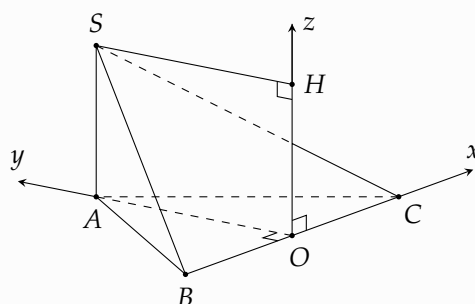
- ☐ A $A(0; 2; 0)$.
 ☐ B $B(0; 0; 0)$.
 ☐ C $C(0; 0; 3)$.
 ☐ D $S(-2; 2; 2)$.



Câu 35

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA = 1$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy tìm toạ độ điểm S .

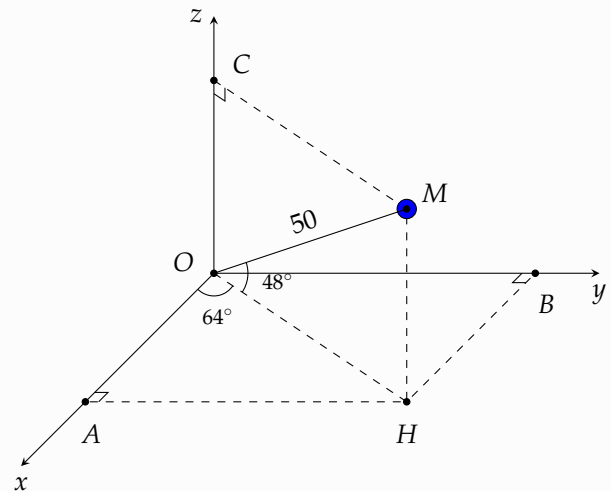
- ☐ A $S(0; \sqrt{3}; 1)$.
 ☐ B $S(0; \sqrt{3}; 1)$.
 ☐ C $S(0; \sqrt{3}; 1)$.
 ☐ D $S(0; \sqrt{3}; 1)$.



Câu 36

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .

- Ⓐ $M(14,7;30,1;37,2)$.
 Ⓑ $M(14,7;30,1;37,2)$.
 Ⓒ $M(14,7;30,1;37,2)$.
 Ⓓ $M(14,7;30,1;37,2)$.

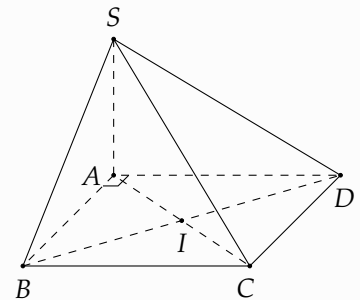


PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 37

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

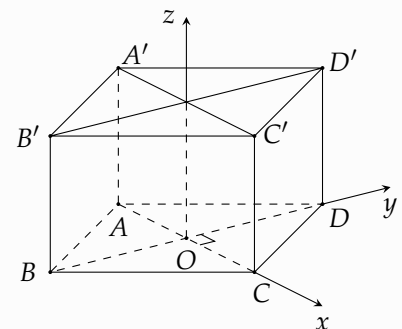
- a) Tọa độ $D(0;2;0)$. b) Tọa độ $C(1;2;3)$.
 c) Tọa độ $S(2;0;0)$. d) Tọa độ $I(1;1;0)$.



Câu 38

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

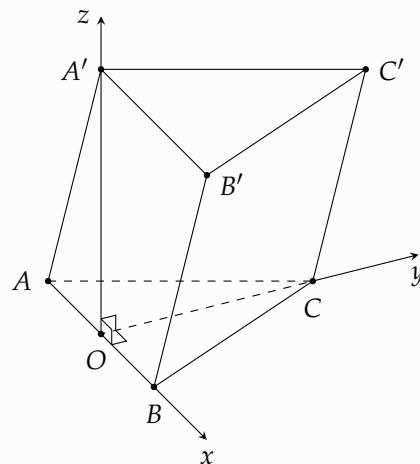
- a) Tọa độ $A(-1;0;0)$. b) $\vec{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.
 c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$. d) $\vec{BD'} = (0;0;2)$.



Câu 39

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.
- b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.
- c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.
- d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ lên trục Ox có tọa độ là

- A** $(0; 2; 0)$.
- B** $(0; 0; 5)$.
- C** $(1; 0; 0)$.
- D** $(0; 2; 5)$.

Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2; -1; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là

- A** $(0; -1; 0)$.
- B** $(-2; 0; 0)$.
- C** $(0; -1; 3)$.
- D** $(-2; -1; 0)$.

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) . Tọa độ của H là

- A** $H(-1; -2; 3)$.
- B** $H(0; 0; 3)$.
- C** $H(1; 2; 0)$.
- D** $H(1; 2; 0)$.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; 1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A** $(3; 4; 1)$.
- B** $(-1; -2; 3)$.
- C** $(3; 5; 1)$.
- D** $(1; 2; 3)$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz) .

- A** $(1; 0; 1)$.
- B** $(0; 1; 0)$.
- C** $(1; 1; 0)$.
- D** $(0; 1; 1)$.

Câu 6

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là
 Ⓐ $(-2; -1; -3)$. Ⓑ $(-3; 2; -1)$. Ⓒ $(2; -3; -1)$. Ⓓ $(-1; 2; -3)$.

Câu 7

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vector $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 4)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
 Ⓐ $(5; -1; -10)$. Ⓑ $(0; 3; 0)$. Ⓒ $(-3; 3; 6)$. Ⓓ $(5; -1; 10)$.

Câu 8

Cho điểm $A(1; 3; -1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm
 Ⓐ $M(3; 0; 0)$. Ⓑ $N(0; 3; -1)$. Ⓒ $P(0; 1; 0)$. Ⓓ $Q(0; 0; -1)$.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ lên mặt (Oxz) có tọa độ là
 Ⓐ $(1; 2; 0)$. Ⓑ $(0; 2; 5)$. Ⓒ $(1; 0; 5)$. Ⓓ $(0; 1; 5)$.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; -4)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ
 Ⓐ $(3; 0; -2)$. Ⓑ $(1; 2; -6)$. Ⓒ $(1; 0; -6)$. Ⓓ $(-1; -2; 6)$.

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là
 Ⓐ $(1; 0; 3)$. Ⓑ $(1; 0; 0)$. Ⓒ $(1; -2; 0)$. Ⓓ $(0; -2; 3)$.

Câu 12

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector là $\vec{u} = (2; 1; -1)$ và $\vec{v} = (1; 3; 1)$. Tọa độ của vector $(\vec{u} + 2\vec{v})$ tương ứng là
 Ⓐ $(3; 4; 0)$. Ⓑ $(1; -2; -2)$. Ⓒ $(4; 7; 1)$. Ⓓ $(5; 5; -1)$.

Câu 13

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 0)$ và điểm $B(3; 1; 1)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua B là
 Ⓐ $(1; -2; -4)$. Ⓑ $(0; 3; -1)$. Ⓒ $(4; 3; 2)$. Ⓓ $(0; 1; 3)$.

Câu 14

Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$.
Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- (A) $(2; -3; 1)$. (B) $(1; -3; 2)$. (C) $(2; 1; -3)$. (D) $(1; 2; -3)$.

Câu 15

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- (A) $M(0; 2; 1)$. (B) $M(1; 2; 0)$. (C) $M(2; 1; 0)$. (D) $M(2; 0; 1)$.

Câu 16

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3; 1; 2)$, $B(1; 0; 1)$, $C(2; 3; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

- (A) $D(4; 4; 1)$. (B) $D(0; 2; -1)$. (C) $D(1; 3; -1)$. (D) $D(0; 2; 1)$.

Câu 17

Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$.

- (A) $\vec{u} = (-1; -2; 3)$. (B) $\vec{u} = (-1; 2; 7)$. (C) $\vec{u} = (-1; -2; 3)$. (D) $\vec{u} = (1; 2; 7)$.

Câu 18

Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$.

- (A) $\vec{u} = (-1; -2; 3)$. (B) $\vec{u} = (-1; 2; 7)$. (C) $\vec{u} = (-1; -6; 3)$. (D) $\vec{u} = (1; 2; 7)$.

Câu 19

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -3; 0)$, $P(0; 0; 4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

- (A) $(-2; -3; 4)$. (B) $(-2; -3; -4)$. (C) $(2; 3; 4)$. (D) $(3; 4; 2)$.

Câu 20

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4; 1; -5)$, $B(2; 3; -7)$, $C(3; -2; 9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

- (A) $(2; 3; -3)$. (B) $(-3; -3; -3)$. (C) $(-3; -3; 3)$. (D) $(-6; 5; -12)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

- a) Tọa độ vectơ $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$. b) Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

- c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng. d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- a) Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.
 b) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.
 c) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.
 d) Tọa độ vectơ $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có tọa độ $A(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $C'(-1; 2; 1)$, $D'(0; -2; 0)$.

- a) Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; 1)$, $B'(0; 4; 2)$.
 b) Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1)$, $D(1; -1; -1)$.
 c) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$ là $\vec{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.
 d) Tọa độ vectơ $\vec{B'D'}$ là $\vec{B'D'} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

- a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.
 b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.
 c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.
 d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- a) Tọa độ điểm C' là $(2; -3; 6)$. b) Tọa độ điểm O' là $(3; -5; 5)$.
 c) Tọa độ vectơ $\vec{AB'}$ là $(-2; -3; -6)$. d) Tọa độ vectơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$.

Câu 6

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$? KQ:

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng? KQ:

Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$? KQ:

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a + b + c$? KQ:

Câu 4

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N . KQ:

Câu 5

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó tính $a + c$. KQ:

Câu 6

Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A . Tính tốc độ của máy bay B . KQ:

Câu 7

Một thiết bị thăm dò đáy biển như hình vẽ được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$. KQ:

§3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Định nghĩa 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

! Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Định nghĩa 3.2. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

! $\textcircled{1} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Định nghĩa 3.3. Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương. Khi đó vectơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

! $\textcircled{1}$ Vectơ $\vec{w}$ xác định như trên còn gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

$$\textcircled{2} \quad \text{Quy ước} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ thì}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \text{ không cùng phương với } \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}.$$

4. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

Định nghĩa 3.4.

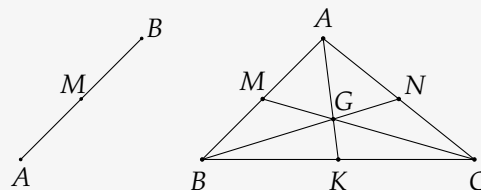
Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- ① Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- ② Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tọa độ của các phép toán véc tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

Ví dụ 1

Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

- a) $3\vec{a}$; b) $2\vec{a} - \vec{b}$; c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

- a) Chứng minh $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.
b) Tìm giá trị của m và n để véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương.

Ví dụ 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(4; -2; 1)$.

- a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
b) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.
c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz) .

Ví dụ 4

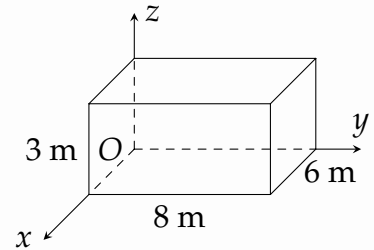
Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$.

b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$.

Ví dụ 5

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án. Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

Câu 1

Cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; -4; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{a} = 2\vec{b}$. (B) $\vec{b} = 2\vec{a}$. (C) $\vec{b} = -2\vec{a}$. (D) $\vec{a} = -2\vec{b}$.

Câu 2

Cho hai véc-tơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$, $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- (A) $\vec{a}(4; 1; -5)$. (B) $\vec{a}(4; 1; -1)$. (C) $\vec{a}(3; 1; -4)$. (D) $\vec{a}(0; 1; -1)$.

Câu 3

Cho $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

- (A) $\vec{u} = (-4; -2; 9)$. (B) $\vec{u} = (4; 2; -9)$. (C) $\vec{u} = (-4; -5; 9)$. (D) $\vec{u} = (1; 3; -11)$.

Câu 4

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$ thỏa mãn biểu thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$.

- (A) $\vec{b} = (-2; 1; -1)$. (B) $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. (C) $\vec{b} = (5; 2; 1)$. (D) $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

Câu 5

Cho vectơ $\vec{a} = (1; -3; 4)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{a}$?

- (A) $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. (B) $\vec{c} = (-2; 6; -8)$. (C) $\vec{d} = (-2; 6; 8)$. (D) $\vec{m} = (2; -6; -8)$.

Câu 6

Hai véc-tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương khi

- (A) $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. (C) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 7

Cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(3; 1; 5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- (A) $AB = \sqrt{21}$. (B) $AB = 2\sqrt{3}$. (C) $AB = 2\sqrt{5}$. (D) $AB = \sqrt{13}$.

Câu 8

Cho hai điểm $M(3; -2; 1)$ và $N(0; 1; -1)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

- (A) $MN = \sqrt{17}$. (B) $MN = 22$. (C) $MN = \sqrt{22}$. (D) $MN = \sqrt{19}$.

Câu 9

Cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$ và $B(3; -5; 0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- (A) $(1; -2; 1)$. (B) $(4; -6; 2)$. (C) $(2; -3; -1)$. (D) $(2; -4; 2)$.

Câu 10

Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$. Tọa độ điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là

- (A) $C(5; -3; 4)$. (B) $C(4; -3; 5)$. (C) $C(-1; 3; -2)$. (D) $C(2; 0; 1)$.

Câu 11

Cho tam giác ABC với $A(0; -1; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- (A) $(1; 0; 1)$. (B) $(-1; 0; 1)$. (C) $(0; 1; 1)$. (D) $(1; 1; 0)$.

Câu 12

Cho $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3; -4; 1)$ và $C(2; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- (A) $(1; -2; 3)$. (B) $(-1; 2; -3)$. (C) $(2; -2; 1)$. (D) $(-2; 2; -1)$.

Câu 13

Cho tam giác ABC trọng tâm G . Biết $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $G(1; 1; 1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

- (A) $(2; 2; 4)$. (B) $(-2; 0; 2)$. (C) $(-2; -3; -2)$. (D) $(2; 2; 0)$.

Câu 14

Cho bốn điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-1; 3; -4)$, $D(2; 6; 0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB , CD . Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN .

- (A) $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$. (B) $G(2; 4; 0)$. (C) $G(1; 2; 0)$. (D) $G(4; 8; 0)$.

Câu 15

Cho hai điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

- Ⓐ $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Ⓑ $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$. Ⓒ $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

Câu 16

Cho các điểm $A(1; -1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(2; 1; 3)$ và M là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

- Ⓐ $(3; 2; 3)$. Ⓑ $(3; -2; -3)$. Ⓒ $(3; -2; 3)$. Ⓓ $(3; 2; -3)$.

Câu 17

Cho tọa độ các điểm $A(-1; 3)$, $B(2; -2)$ và $C(m; 1)$. Tìm m để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

- Ⓐ $m = \frac{2}{5}$. Ⓑ $m = \frac{1}{5}$. Ⓒ $m = -\frac{1}{3}$. Ⓓ $m = -\frac{1}{5}$.

Câu 18

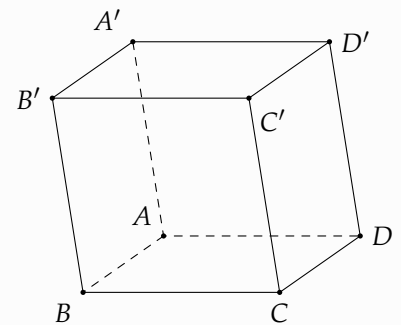
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C .

- Ⓐ $(0; -2; 0)$. Ⓑ $(2; 2; 2)$. Ⓒ $(2; 0; 2)$. Ⓓ $(2; -2; 2)$.

Câu 19

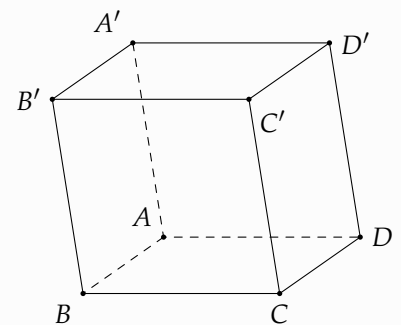
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$, $a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

- Ⓐ $|a|$. Ⓑ $2|a|$.
Ⓒ $3|a|$. Ⓓ $\frac{3|a|}{2}$.

**Câu 20**

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 1)$, $B'(1; 0; 0)$, $C'(1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm D .

- Ⓐ $D(0; -1; 1)$. Ⓑ $D(0; 1; 1)$.
Ⓒ $D(0; 1; 0)$. Ⓓ $D(1; 1; 1)$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21

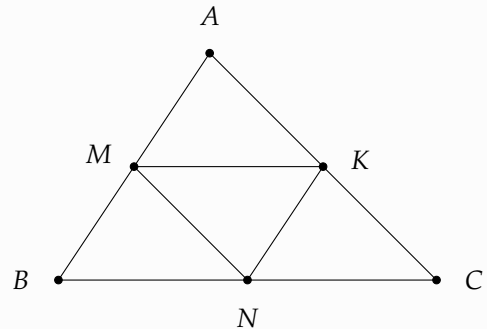
Cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

- $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$.
- $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$.
- $\vec{AB} = 3\vec{AC}$.
- Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Câu 22

Cho ba điểm $A(3; 3; -6)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M , N , K lần lượt là trung điểm của AB , BC và CA .

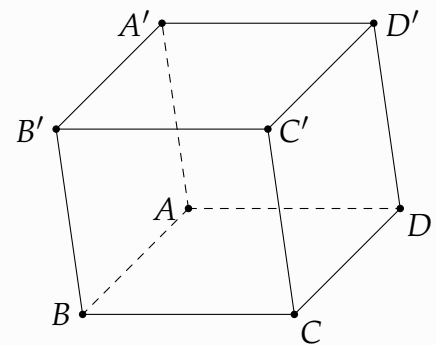
- Tọa độ $M(2; 3; 2)$.
- Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.
- Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.
- Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Câu 23

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 2; 0)$, $D'(-1; 3; 5)$. Gọi M , N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

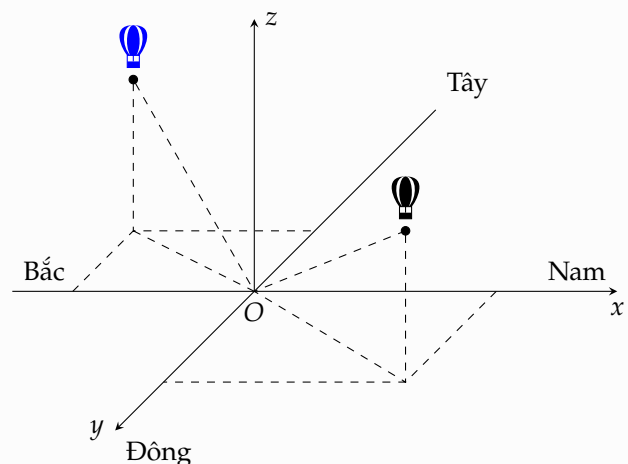
- Tọa độ $D(0; 2; 0)$.
- Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.
- Tọa độ $\vec{MN} = (-1; 1; 0)$.
- $|\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CC'}| = \sqrt{29}$.



Câu 24

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.
- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$.
- Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.
- Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Dạng 2 Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng**Ví dụ 1**

Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$, $\vec{d} = (1; 7; -3)$.

- a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$. b) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$. c) Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (-4; 3; m)$.

- a) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
b) Tìm m để vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 0; 2)$, $B(0; 4; 3)$ và $C(-2; 1; 2)$.

- a) Chỉ ra tọa độ một véc-tơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với hai véc-tơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.
b) Tính chu vi tam giác ABC .
c) Tính $\cos \widehat{BAC}$.
d) Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0; 1; -2)$; $B(3; 0; 0)$ và điểm C thuộc trục Oz . Biết ABC là tam giác cân tại C . Tìm tọa độ điểm C .

Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$, $P(1; m-1; 2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

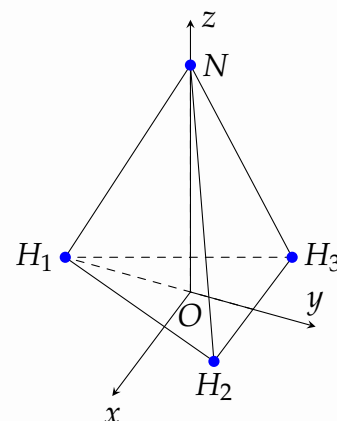
Ví dụ 6

Cho hai điểm $A(2, -1, 1)$; $B(3, -2, -1)$. Tìm điểm N trên trục Ox cách đều A và B .

Ví dụ 7

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

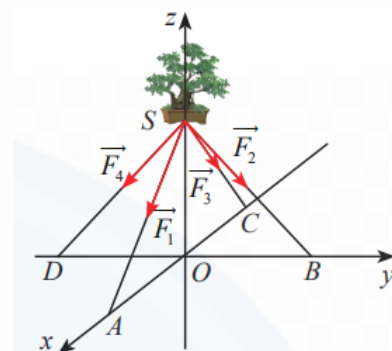
Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình bên).



- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

Ví dụ 8

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40N và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm toạ độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ là

- (A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -6.

Câu 2

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và $\vec{v} = (0; 1; -2)$ bằng

- (A) -4. (B) 0. (C) 4. (D) -2.

Câu 3

Cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

- (A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 1.

Câu 4

Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.

- (A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).

Câu 5

Góc giữa hai véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ bằng

- (A) 60° . (B) 120° . (C) 150° . (D) 30° .

Câu 6

Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ và $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 135° . (D) 120° .

Câu 7

Cho hai véc-tơ $\vec{a}(-2; -3; 1)$ và $\vec{b}(1; 0; 1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$.
(C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Câu 8

Cho $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 2; -4)$. Giá trị của $|\vec{a} - \vec{b}|$ bằng

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) 50. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 3.

Câu 9

Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (x; -2; 1)$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. Khi đó $|\vec{v}|$ bằng

- (A) $\sqrt{21}$. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Câu 10

Tìm số thực a để véc-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với véc-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

- (A) $a = -2$. (B) $a = -4$. (C) $a = 4$. (D) $a = 2$.

Câu 11

Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$ và $\vec{b} = (x; 1; -2)$ vuông góc với nhau.

- (A) $x = 3$. (B) $x = 1$. (C) $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Câu 12

Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?

- (A) $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$. (B) $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$. (C) $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$. (D) $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$.

Câu 13

Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; 4; -3)$ có tọa độ là

- (A) $(-6; 3; -4)$. (B) $(6; -3; 4)$. (C) $(6; 3; 4)$. (D) $(-6; -3; -4)$.

Câu 14

Cho $A(2; 1; 4)$, $B(-2; 2; -6)$, $C(6; 0; -1)$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- (A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$. (B) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$. (C) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$. (D) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$.

Câu 15

Cho $A(1; -2; 3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(2; 0; 2)$, khi đó tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

- (A) 4. (B) -1. (C) 7. (D) -5.

Câu 16

Cho tam giác ABC với $A(8; 9; 2)$, $B(3; 5; 1)$, $C(11; 10; 4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

- (A) 60° . (B) 150° . (C) 30° . (D) 120° .

Câu 17

Cho điểm $A(3; -1; 5)$, $B(m; 2; 7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.

- (A) $m = 3$ hoặc $m = -3$. (B) $m = 9$ hoặc $m = -3$.
(C) $m = -3$ hoặc $m = -9$. (D) $m = 9$ hoặc $m = 3$.

Câu 18

Cho ba điểm $A(3; 2; 8)$, $B(0; 1; 3)$ và $C(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .

- (A) $m = 4$. (B) $m = -10$. (C) $m = 25$. (D) $m = -1$.

Câu 19

Cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- (A) $m = 0$. (B) $m = -4$. (C) $m = 2$. (D) $m = -6$.

Câu 20

Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

- (A) $H(3; 4; 6)$. (B) $H(-3; 4; 7)$. (C) $H(2; 4; 1)$. (D) $H(2; -4; 3)$.

Câu 21

Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Gọi $M(0; 0; z)$ là điểm thuộc trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)** $z \in (0; 1]$. **(B)** $z \in (1; 2]$. **(C)** $z \in (-1; 0]$. **(D)** $z \in (-2; -1]$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22

Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- a) $|\vec{a}| = 2$. b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 23

Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$.

- a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$. b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$. d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Câu 24

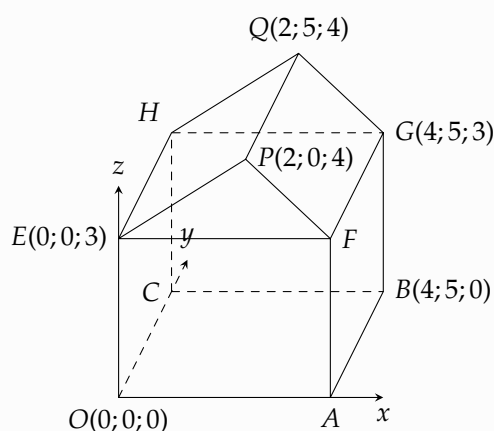
Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(2; 1; 0)$.

- a) Tam giác ABC vuông tại A .
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 25

Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$.
b) Tọa độ của các điểm $H(0; 5; 3)$.
c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).
d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC . Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
 ☐ B $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
 ☐ C $\vec{GD} - \vec{GA} = \vec{AD}$.
 ☐ D $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DG}$.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thoả mãn $\vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Toạ độ của điểm M là

- ☐ A $(-4; 3; 2)$.
 ☐ B $(2; 3; -4)$.
 ☐ C $(3; -4; 2)$.
 ☐ D $(-2; -3; 4)$.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 2; -1)$, $\vec{v} = (5; -4; 2)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là

- ☐ A $(-2; 6; -3)$.
 ☐ B $(2; -6; 3)$.
 ☐ C $(-2; -2; -3)$.
 ☐ D $(2; 2; 1)$.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; -2; 3)$. Toạ độ của vectơ $-3\vec{u}$ là

- ☐ A $(3; -6; 9)$.
 ☐ B $(-3; -6; -9)$.
 ☐ C $(3; 6; 9)$.
 ☐ D $(-3; 6; -9)$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(2; -3; 4)$, $N(1; 2; 3)$ và $P(3; -2; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có toạ độ là

- ☐ A $(2; -1; 3)$.
 ☐ B $(6; -3; 9)$.
 ☐ C $(-2; 1; -3)$.
 ☐ D $(-6; 3; -9)$.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (2; 3; -3)$ và $\vec{v} = (-3; -2; 4)$ bằng

- ☐ A $\sqrt{22} - \sqrt{29}$.
 ☐ B $-\sqrt{22} \cdot \sqrt{29}$.
 ☐ C 24 .
 ☐ D -24 .

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai điểm $I(3; 5; -7)$ và $K(-5; 5; -1)$ bằng:

- ☐ A 100 .
 ☐ B 20 .
 ☐ C 10 .
 ☐ D 17 .

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 1; -2)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 5)$. Toạ độ của vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ là

- ☐ A $(5; 7; -11)$.
 ☐ B $(-7; 11; -5)$.
 ☐ C $(7; -11; 5)$.
 ☐ D $(-5; -7; 11)$.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Tính độ dài của $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- (A) $\sqrt{74}$. (B) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$. (C) $\sqrt{52}$. (D) $\sqrt{42}$.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; 5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Khi A, B, M thẳng hàng thì giá trị của x, y, z là

- (A) $x = 7; y = 7$. (B) $x = 4; y = 7$. (C) $x = 7; y = 2$. (D) $x = 7; y = -4$.

Câu 11

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 4; -2)$, $B(2; 1; -3)$, $C(3; 0; 2)$ và $D(2; 5; -1)$. Điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ có tọa độ là:

- (A) $G(2; -1; -1)$. (B) $G(2; -2; -1)$. (C) $G(1; 1; -1)$. (D) $G(6; 3; -2)$.

Câu 12

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; -1; -2)$ và trọng tâm $G(2; 1; -3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ là

- (A) $(3; 6; 3)$. (B) $(3; 6; -3)$. (C) $(-3; 6; -3)$. (D) $(3; 2; 1)$.

Câu 13

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$.

- (A) $\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$. (B) $\left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$. (C) $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. (D) $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$.

Câu 14

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1; 3; 2)$, $F(0; -1; 5)$, $K(2; 4; -1)$ và tam giác ABC thỏa mãn $\vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CK} = \vec{0}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

- (A) $G(1; 2; 2)$. (B) $G(-1; -4; 3)$. (C) $G(2; 2; 1)$. (D) $G(1; -3; -1)$.

Câu 15

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{PQ} = (0; 1; -2)$, $\vec{PR} = (-2; -1; 0)$ và điểm $M(1; -2; 2)$ trung điểm của đoạn QR . Tọa độ điểm Q là

- (A) $(-1; 1; -2)$. (B) $(-2; 2; -3)$. (C) $(0; 1; 3)$. (D) $(2; -1; 1)$.

Câu 16

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

- (A) $I(1; 1; 0)$. (B) $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. (C) $I(1; 1; 1)$. (D) $I(1; 1; 2)$.

Câu 17

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng:

- (A) 42. (B) -50. (C) -48. (D) 44.

Câu 18

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và điểm $B(4;-3;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

- (A) $(6;-2;4)$. (B) $(3;-1;2)$. (C) $(1;-2;-1)$. (D) $(2;-4;-2)$.

Câu 19

Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3;4;2)$, $\vec{b} = (-5;0;3)$, $\vec{c} = (1;2;-4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

- (A) $\vec{u} = (2;10;16)$. (B) $\vec{u} = (1;5;8)$. (C) $\vec{u} = (-2;10;16)$. (D) $\vec{u} = (2;-10;16)$.

Câu 20

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3;5;2)$, $\vec{b} = (0;-1;3)$, $\vec{c} = (1;-1;1)$. Tìm tọa độ của $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

- (A) $\vec{v} = (-9;2;10)$. (B) $\vec{v} = (-9;-9;10)$. (C) $\vec{v} = (9;-9;10)$. (D) $\vec{v} = (9;2;10)$.

Câu 21

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0;-2;1)$ và $B(1;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $M = 2\vec{MB}$.

- (A) $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$. (B) $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$. (C) $M(2;0;5)$. (D) $M(1;-3;-4)$.

Câu 22

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-1;-2;1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là?

- (A) $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. (B) $I(-3;1;0)$. (C) $I\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$. (D) $I\left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 23

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là:

- (A) 5. (B) 3. (C) $\sqrt{54}$. (D) $\sqrt{17}$.

Câu 24

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;2)$, $C(3;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D lập thành một hình chữ nhật.

- (A) $D(4;3;4)$. (B) $D(4;-1;4)$. (C) $D(2;-3;2)$. (D) $D(4;1;4)$.

Câu 25

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4; 1; 5)$, $B(1; 5; -3)$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC}$.

Câu 26

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; 1; -3)$, $\vec{b} = (2; 2; -2)$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ và $\vec{d} = (1; 1; -1)$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

- (A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$. (B) $\vec{a}$ và $\vec{d}$. (C) $\vec{a}$ và $\vec{c}$. (D) $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Câu 27

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; -1)$, $B(1; 2; 0)$, $C(m; n; 0)$. Tìm m, n sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

- (A) $m = 1; n = 1$. (B) $m = 1; n = 2$. (C) $m = 2; n = 1$. (D) $m = 2; n = 2$.

Câu 28

Trong không gian $Oxyz$, cho 2 vectơ $\vec{a} = (-1; 2x - 1; 1 - 3z)$ và $\vec{b} = (2 + 3y; -1; -2)$. Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tổng $T = x + 2y^2 + 3z^3$ bằng:

- (A) 2. (B) 5. (C) 1. (D) 4.

Câu 29

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là:

- (A) $(-2; 1; 1)$. (B) $\left(\frac{-2}{11}; \frac{3}{11}; 1\right)$. (C) $\left(\frac{-2}{11}; \frac{3}{11}; 1\right)$. (D) $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$.

Câu 30

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6; -3; 4)$, $B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oxz) và (Oyz) . Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a + b + c$ là

- (A) 17. (B) -17. (C) -11. (D) 11.

Câu 31

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 1)$ và $\vec{b} = (2; -4; -2)$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- (A) 8. (B) -8. (C) 12. (D) -12.

Câu 32

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{b} = (x_1, y_1, z_1)$. Tọa độ $[\vec{a}, \vec{b}]$ là

- (A) $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 + x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$. (B) $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 - x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$.

- Ⓒ $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 + x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$. Ⓓ $(y_0z_1 - y_1z_0; -x_0z_1 - x_1z_0; x_0y_1 - x_1y_0)$.

Câu 33

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; -1; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

- Ⓐ $(5; 1; -1)$. Ⓑ $(5; -1; -1)$. Ⓒ $(-1; -1; -1)$. Ⓓ $(1; -1; 5)$.

Câu 34

Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; -2; 1)$ là

- Ⓐ $\frac{4}{5}$. Ⓑ $-\frac{4}{5}$. Ⓒ $\frac{4}{25}$. Ⓓ $-\frac{4}{25}$.

Câu 35

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$ và $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ và $|\vec{p}| = 15$. Tọa độ của vectơ $\vec{p}$ là

- Ⓐ $(0; 9; 12)$. Ⓑ $(-9; 12; 0)$. Ⓒ $(0; -9; 12)$. Ⓓ $(9; -12; 0)$.

Câu 36

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; -1; 1)$, $\vec{b} = (4; 1; 2)$, $\vec{c} = (1; 0; m + 2)$. Tìm m để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

- Ⓐ $m = -5$. Ⓑ $m = 5$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m = 1$.

Câu 37

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; -2; 0)$; $B(1; 0; -1)$; $C(0; -1; 2)$ và $D(0; 3; m)$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây để bốn điểm trên đồng phẳng?

- Ⓐ $(1; 2)$. Ⓑ $(-2; -1)$. Ⓒ $(-1; 1)$. Ⓓ $(5; 7)$.

Câu 38

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-1; 3; 2)$, $\vec{b} = (-3; -1; 2)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- Ⓐ 10. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 39

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-3; 1; -1)$ và $\vec{v} = (1; 0; 5)$. Tích vô hướng của hai vectơ này bằng

- Ⓐ -8. Ⓑ 8. Ⓒ 3. Ⓓ -3.

Câu 40

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; -1; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Ⓐ $(5; 1; -1).$

Ⓑ $(5; -1; -1).$

Ⓒ $(-1; -1; -1).$

Ⓓ $(1; -1; 5).$

Câu 41

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 3)$, $B(1; 0; 4)$ và $C(2; 3; 2)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Ⓐ $S = \sqrt{2}.$

Ⓑ $S = 2\sqrt{2}.$

Ⓒ $S = 4\sqrt{2}.$

Ⓓ $S = 3\sqrt{2}.$

Câu 42

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$; $B(3; 4; 5)$. Diện tích tam giác OAB bằng

Ⓐ $\sqrt{87}.$

Ⓑ $\frac{\sqrt{21}}{2}.$

Ⓒ $\sqrt{6}.$

Ⓓ $2\sqrt{6}.$

Câu 43

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; -2; m)$, $\vec{b} = (2; m; -1)$ với m là tham số nhận giá trị thực. Tìm giá trị của m để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Ⓐ $m = 1.$

Ⓑ $m = 2.$

Ⓒ $m = -1.$

Ⓓ $m = -2.$

Câu 44

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; 6; 2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A trên các trục Ox, Oy và Oz . Tính diện tích S của tam giác MNP .

Ⓐ $S = 14.$

Ⓑ $S = 28.$

Ⓒ $S = 7.$

Ⓓ $S = \frac{49}{2}.$

Câu 45

Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (4; 2; -6)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

Ⓐ 66.

Ⓑ $\sqrt{66}.$

Ⓒ $3\sqrt{14}.$

Ⓓ 2.

Câu 46

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc Ox và cách đều hai điểm $A(4; 2; -1)$ và $B(2; 1; 0)$ là

Ⓐ $M(-4; 0; 0).$

Ⓑ $M(5; 0; 0).$

Ⓒ $M(4; 0; 0).$

Ⓓ $M(-5; 0; 0).$

Câu 47

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy để tam giác ABC vuông tại A .

Ⓐ $(0; 1; \frac{1}{2}).$

Ⓑ $(0; 2; 0).$

Ⓒ $(0; \frac{1}{2}; 0).$

Ⓓ $(0; \frac{1}{2}; 0).$

Câu 48

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-1;3)$. Hỏi cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và BC bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) 1.

Câu 49

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 60° và $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$. Khi đó $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{7}$. (C) 2. (D) $\sqrt{5\sqrt{3} + 20}$.

Câu 50

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\vec{AB} = (-3;0;4)$, $\vec{AC} = (5;-2;4)$. Độ dài đường trung tuyến AM là

- (A) $\sqrt{5}$. (B) $5\sqrt{2}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) 5.

Câu 51

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;2)$. Điểm M trên trục Ox có hoành độ dương và thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 23$. Khi đó tọa độ điểm M là

- (A) $M(4;0;0)$. (B) $M(3;0;0)$. (C) $M(2;0;0)$. (D) $M(1;0;0)$.

Câu 52

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-2;1;5)$ và $\vec{v} = (m-2;3;m+1)$, m là tham số. Tìm m để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

- (A) $m = -4$. (B) $m = 4$. (C) $m = -3$. (D) $m = 3$.

Câu 53

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} + 2\vec{v}$.

- (A) $\sqrt{97}$. (B) 8. (C) 7. (D) $4\sqrt{6}$.

Câu 54

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;-5)$, $B(2;3;-6)$ và $C(4;4;-5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- (A) $H\left(\frac{5}{7}; 4; -5\right)$. (B) $H(1;4;-5)$. (C) $H(2;3;-6)$. (D) $H\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

Câu 55

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(5;-1;3)$, $C(3;1;5)$ và $D(2;2;m)$ (với m là tham số). Xác định m để bốn điểm A, B, C, D tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện.

- (A) $m \neq 6$. (B) $m \neq 4$. (C) $m \in \mathbb{R}$. (D) $m < 0$.

Câu 56

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 2; 2)$. Gọi $I(a, b, c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Ⓐ $T = \frac{13}{2}$.

Ⓑ $T = 6$.

Ⓒ $T = 2$.

Ⓓ $T = \frac{29}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

b) Tam giác SBD vuông cân tại S .

c) $(\vec{SB}, \vec{BD}) = 45^\circ$.

d) $\vec{SB} \cdot \vec{BD} = -a^2$.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

a) $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\vec{AB} = 3\vec{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$

a) $\vec{AB} = (1; 2; 4)$.

b) $\vec{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$.

c) $\vec{DC} = \vec{AB}$.

d) Tọa độ điểm D là $(0; 3; 3)$.

Câu 4

Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.

a) Radar ở vị trí có tọa độ $(0; 0; 0)$.

b) Vị trí A có tọa độ $(300; 200; 10)$.

c) Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,69 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d) Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

- b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.
 c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.
 d) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.

- a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.
 b) Điểm $\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; \frac{3}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1, y = 3$.
 c) Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $x = 13, y = -1$.
 d) Tích vô hướng của $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3x + 2y + 41$.

Câu 7

Cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Xét tính đúng sai

- a) $|\vec{a}| = 2$. b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 8

Cho hai vector $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$.

- a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$. b) $|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$.
 c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$. d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9}{4}$.

Câu 9

Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(2; 1; 0)$.

- a) Tam giác ABC vuông tại A .
 b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
 c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.
 d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(4, 5, 7)$, $B(-3, -10, -2)$, $C(-2, -10, -1)$, $D(0, y, 0)$. Biết rằng D thuộc trục Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 8. Tìm tổng các tung độ y của điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

KQ:

Câu 2

Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc 19 (km) và về phía Tây 11 (km), đồng thời cách mặt đất 0.8 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông 30 (km) và về phía Nam 8 (km), đồng thời cách mặt đất 1.2 (km). Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

KQ:

Câu 3

Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông 33 (km) và về phía Nam 57 (km), đồng thời cách mặt đất 4,9 (km). Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc 55 (km) và về phía Tây 46 (km), đồng thời cách mặt đất 4,9 (km). Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa hai chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời cách mặt đất trung bình giữa hai máy bay. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

KQ:

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (5; -4; 2)$ và $\vec{v} = (3; 4; 4)$. Tính độ dài $|\vec{u} + 2\vec{v}|$.

KQ:

Câu 5

Cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(x + 2; y; -2)$ thẳng hàng. Tổng $x + y + \frac{2}{3}$ bằng

KQ:

Câu 6

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\vec{MN} \cdot \vec{CB} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 7

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{MN}$ và $\vec{AB}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

KQ:

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 5)$, $B(1; 3; -1)$, $C(4; -2; 3)$. Số đo của góc ABC bằng bao nhiêu độ?

KQ:

Câu 9

Một người điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

MỤC LỤC

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	3
Chương 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	4
Bài 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TƯ PHÂN VỊ	4
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	4
(B) VÍ DỤ MINH HỌA.....	5
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	8
📁 Dạng 1. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.....	8
📁 Dạng 2. Tìm tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	10
Bài 2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN	17
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	17
(B) VÍ DỤ MINH HỌA.....	17
(C) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	19
📁 Dạng 1. Tính trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm.....	19
📁 Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.....	20
Bài 3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3	25
(A) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM THÔNG THƯỜNG.....	25
(B) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.....	28
(C) BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN.....	32

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TƯ PHẦN VỊ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khoảng biến thiên

Định nghĩa 1.1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.1. Mẫu số liệu ghép nhóm

Trong đó các tần số $m_1 > 0, \dots, m_k > 0$ và $n = m_1 + \dots + m_k$ là cỡ mẫu.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $R = a_{k+1} - a_1$. Chỉ ra rằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trong Bảng 3.1 lớn hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ý nghĩa.

- ☑ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- ☑ Khoảng biến thiên được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.
- ☑ Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Ví dụ 1

Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như sau:

Thời gian sử dụng (phút)	$[0; 10)$	$[10; 30)$	$[30; 60)$	$[60; 90)$
Số học sinh Tổ 1	2	4	3	1
Số học sinh Tổ 2	5	1	3	0

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh mỗi tổ và giải thích ý nghĩa.

Ví dụ 2

Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh Tổ 1	8	16	4	2

- Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

2. Khoảng tứ phân vị

Định nghĩa 1.2. Tứ phân vị thứ r là $Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} (a_{p+1} - a_p)$, trong đó $[a_p; a_{p+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ r với $r = 1, 2, 3$. Cho mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.1. Mẫu số liệu ghép nhóm

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q , là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa.

- ✔ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.
- ✔ Khoảng tứ phân vị cũng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.
- ✔ Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

⚠ Do khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm chỉ phụ thuộc vào nửa giữa của mẫu số liệu, nên không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường và có thể dùng đại lượng này để loại giá trị bất thường.

B**VÍ DỤ MINH HỌA**

Ví dụ 1

Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Số bệnh nhân	3	12	15	8

- Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.
- Từ một số liệu về thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám Y người ta tính được khoảng tứ phân vị bằng 9,23. Hỏi thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám nào phân tán hơn?

Ví dụ 2

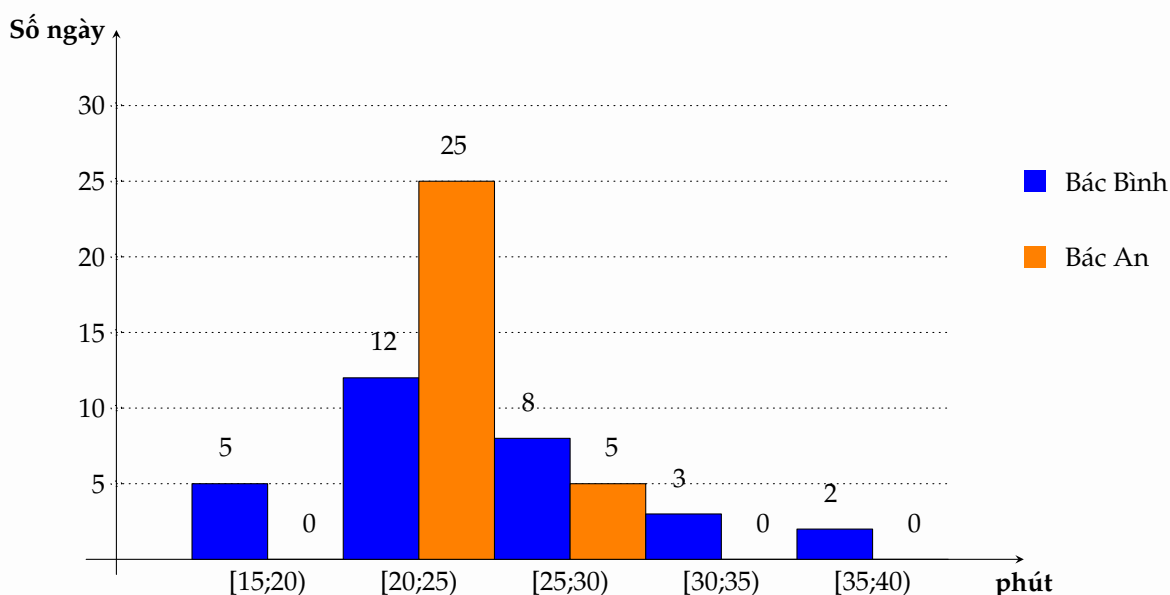
Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	Số cuộc gọi
$0 \leq t < 1$	8
$1 \leq t < 2$	17
$2 \leq t < 3$	25
$3 \leq t < 4$	20
$4 \leq t < 5$	10

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Ví dụ 3

Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Hãy so sánh khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.

Ví dụ 4

Hàng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lượt	22	38	27	8	4	1

- Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Ví dụ 5

Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ở Ví dụ 4 sau khi đã loại bỏ các giá trị ngoại lệ. Em có nhận xét gì về khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị vừa tìm được và khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị ban đầu?

Ví dụ 6

Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau.

Chiều cao \ Lớp	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185)
12C	2	7	12	3	0	1
12D	5	9	8	2	1	0

Hãy so sánh độ phân tán của nửa giữa hai mẫu số liệu chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C và 12D.

Ví dụ 7

Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau

Tuổi kết hôn	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)	[31; 34)
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

- Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của từng mẫu số liệu ghép nhóm ứng với mỗi khu vực A và B.
- Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- ① Xác định a_1 là giá trị đầu mút trái của nhóm đầu tiên và a_{k+1} là giá trị đầu mút phải của nhóm cuối cùng có chứa dữ liệu (tần số khác 0).
- ② Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = a_{k+1} - a_1$.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Bảng 3.2 biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hằng ngày của một số người.

Bảng 3.2. Thời gian sử dụng Internet hằng ngày

Thời gian (phút)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)	[150; 180)
Số người	2	4	10	5	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho bằng

- Ⓐ 150. Ⓑ 160. Ⓒ 140. Ⓓ 170.

Câu 2

Bảng 3.3 thống kê thành tích nhảy xa của một số học sinh lớp 12. Khoảng biến thiên thành tích nhảy xa của số học sinh này.

Bảng 3.3. Thành tích nhảy xa của một số học sinh lớp 12

Thành tích (cm)	[150; 180)	[180; 210)	[210; 240)	[240; 270)	[270; 300)
Số học sinh	3	5	28	14	8

- Ⓐ 150. Ⓑ 160. Ⓒ 140. Ⓓ 170.

Câu 3

Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Dũng đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ do hai hãng X, Y sản xuất. Bảng 3.4 biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet. Gọi khoảng biến thiên của tuổi thọ máy chạy bộ do hãng X và hãng Y sản xuất tương ứng là R_X và R_Y . Chọn phương án đúng?

Bảng 3.4. Tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm)

Tuổi thọ	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số máy của hãng X	7	20	36	20	17
Số máy của hãng Y	0	20	35	35	10

- Ⓐ $R_X > R_Y$. Ⓑ $R_X = R_Y$. Ⓒ $R_X < R_Y$. Ⓓ $R_X = 12$.

Câu 4

Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- (A) 80. (B) 60. (C) 100. (D) 12.

Câu 5

Mức thưởng tết (triệu đồng) cho các nhân viên của một công ty được thống kê trong bảng sau:

Mức thưởng tết	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhân viên	13	35	47	25	10

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- (A) 20. (B) 25. (C) 47. (D) 23.

Câu 6

Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Chiều cao của 40 học sinh nam ở một trường THPT

Lớp chiều cao (cm)	[160; 163,5)	[164; 167,5)	[168; 171,5)	[172; 175,5)	Cộng
Tần số	9	20	7	4	40

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- (A) 31. (B) 15,5. (C) 175,5. (D) 12.

Câu 7

Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	0	12	15	24	26

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- (A) 26. (B) 14. (C) 20. (D) 12.

Câu 8

Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	12	2

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- (A) 24. (B) 15. (C) 2. (D) 20.

Câu 9

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu cho bởi bảng trên là

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Người ta tiến hành phỏng vấn hai nhóm khán giả về một bộ phim mới công chiếu. Nhóm A gồm những khán giả thuộc lứa tuổi 20 – 30, nhóm B thuộc lứa tuổi trên 30. Người được hỏi ý kiến phải đánh giá bộ phim bằng cách cho điểm theo một số tiêu chí nêu trong phiếu điều tra và sau đó lấy tổng số điểm (thang điểm 100). Bảng dưới đây trình bày kết quả điều tra hai nhóm khán giả:

Bảng 3.5. Điểm đánh giá của khán giả

Điểm	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)
Số người của nhóm A	6	10	14	12	8
Số người của nhóm B	0	8	14	28	0

Khoảng biến thiên của ý kiến đánh giá của hai nhóm khán giả A và B tương ứng là

KQ:

Dạng 2 Tìm tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Với mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Các bước thực hiện:

- ① Tìm tứ phân vị Q_1 và Q_3 theo công thức:

$$Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó $[a_p; a_{p+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ r với $r = 1, 3$; n là cỡ mẫu.

- ② Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là Q_1 , Q_2 , Q_3 . Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

- (A) $2Q_2$. (B) $Q_1 - Q_3$. (C) $Q_3 - Q_1$. (D) $Q_3 + Q_1 - Q_2$.

Câu 2

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

Gọi Δ_Q là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu cho bởi bảng trên. Khi đó

- (A) $\Delta_Q \in [1; 2)$. (B) $\Delta_Q \in [2; 3)$. (C) $\Delta_Q \in [3; 4)$. (D) $\Delta_Q \in [4; 5)$.

Câu 3

Khảo sát về cân nặng của các học sinh lớp 11D3 người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau

Cân nặng	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số học sinh	2	10	16	8	2	2

Khoảng tứ phân vị của bảng số liệu ghép nhóm trên là

- (A) 17. (B) 14,5. (C) 14. (D) 17,5.

Câu 4

Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- (A) $\frac{25}{7}$. (B) $\frac{13}{7}$. (C) $\frac{20}{7}$. (D) $\frac{55}{7}$.

Câu 5

Trung tâm ngoại ngữ thống kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

Điểm	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Học viên	10	30	55	42	9

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- (A) 2,92. (B) 2,93. (C) 3,93. (D) 3,92.

Câu 6

Ở một phòng điều trị nội trú của bệnh viện, dữ liệu thống kê thời gian ngủ hằng đêm của một bệnh nhân trong suốt một tháng được tổng hợp bởi bảng dưới đây

Thời gian (phút)	Tần số	Tần số tích lũy
[180; 240)	2	2
[240; 300)	9	11
[300; 360)	12	23
[360; 420)	5	28
[420; 480)	2	30

(A) 75,53.

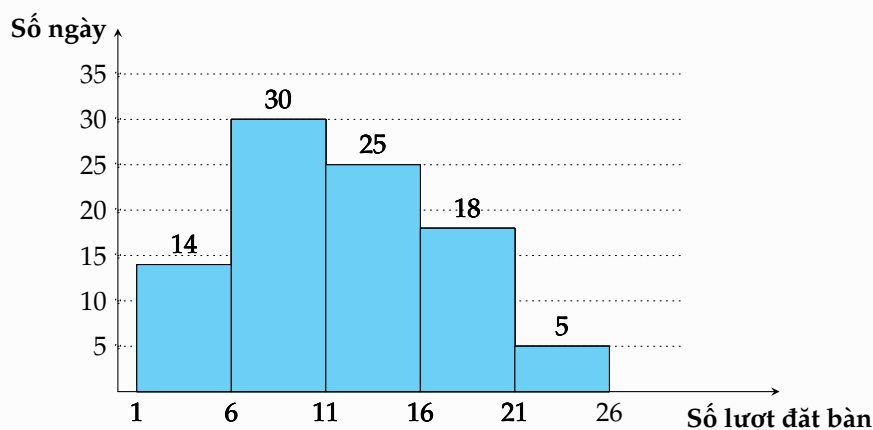
(B) 84,83.

(C) 80,83.

(D) 72,53.

Câu 7

Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

(A) 9,5.

(B) 8,5.

(C) 10,5.

(D) 7,5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường

Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

a) Cỡ mẫu của bảng số liệu là $n = 50$.

b) Tứ phân vị thứ nhất bằng $Q_1 = \frac{41}{13}$.

c) Tứ phân vị thứ ba bằng $Q_3 = \frac{4210}{11}$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên $\Delta_Q = \frac{9080}{143}$.

Câu 2

Bảng sau thống kê tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

341,4	187,1	242,2	522,9	251,4	432,2	200,7	388,6	258,4	288,5
298,1	413,5	413,5	332	421	475	400	305	520	147

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 522,9 - 147 = 375,9$.

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{251,4 + 258,4}{2} = 254,9$.

c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu lớp 12C là $Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{413,5 + 421}{2} = 417,25$.

d) Hãy chia mẫu số liệu trên thành 4 nhóm với nhóm đầu tiên là $[140; 240)$ và lập bảng tần số ghép nhóm ta được bảng sau

Nhóm lượng mưa (mm)	$[140; 240)$	$[240; 340)$	$[340; 440)$	$[440; 540)$
Tần số	3	7	7	3

Câu 3

Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	$[8,4; 8,6)$	$[8,6; 8,8)$	$[8,8; 9,0)$	$[9,0; 9,2)$	$[9,2; 9,4)$
Số cây	5	12	25	44	14

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là $R = 1$.

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = 8$.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 0,286$.

d) Biết rằng trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Chiều cao của cây keo này là giá trị ngoại lệ.

Câu 4

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là $R = 25$.

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = 15$.

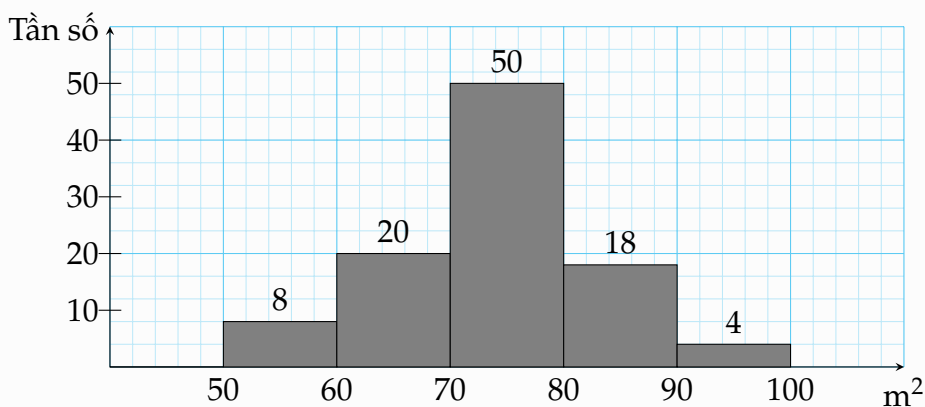
c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $Q_3 = 27$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 12$.

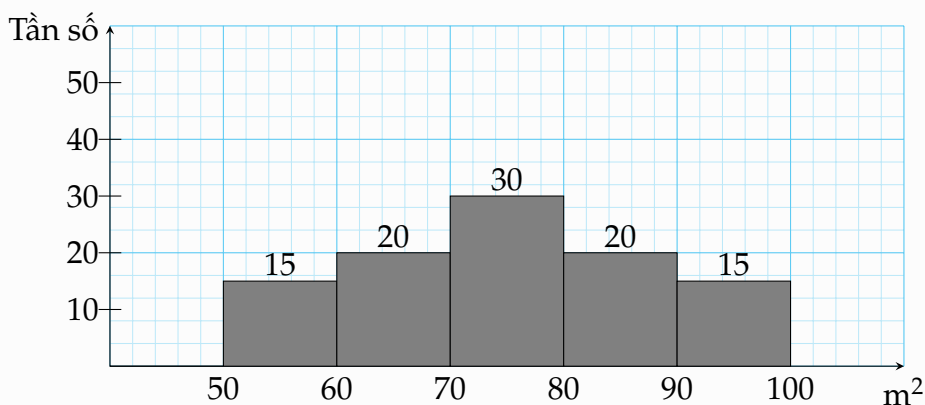
Nhóm	Tần số
$[10; 15)$	15
$[15; 20)$	18
$[20; 25)$	10
$[25; 30)$	10
$[30; 35)$	5
$[35; 40)$	2
	$n = 60$

Câu 5

Điều tra một số hộ gia đình thu nhập ở mức trung bình sinh sống trên hai địa bàn A, B , người ta thấy diện tích nhà ở của họ đều nhỏ hơn 100 m^2 . Hai biểu đồ dưới biểu diễn kết quả thống kê.



Hình 3.3a. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn A



Hình 3.3b. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn B

- Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu này bằng nhau.
- Khoảng tứ phân vị ghép nhóm diện tích căn hộ của địa phương A là 10,9.
- Khoảng tứ phân vị ghép nhóm diện tích căn hộ của địa phương B là 8,5..
- Số liệu về diện tích nhà ở của cư dân thuộc địa bàn A phân tán hơn địa bàn B.

Câu 6

Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

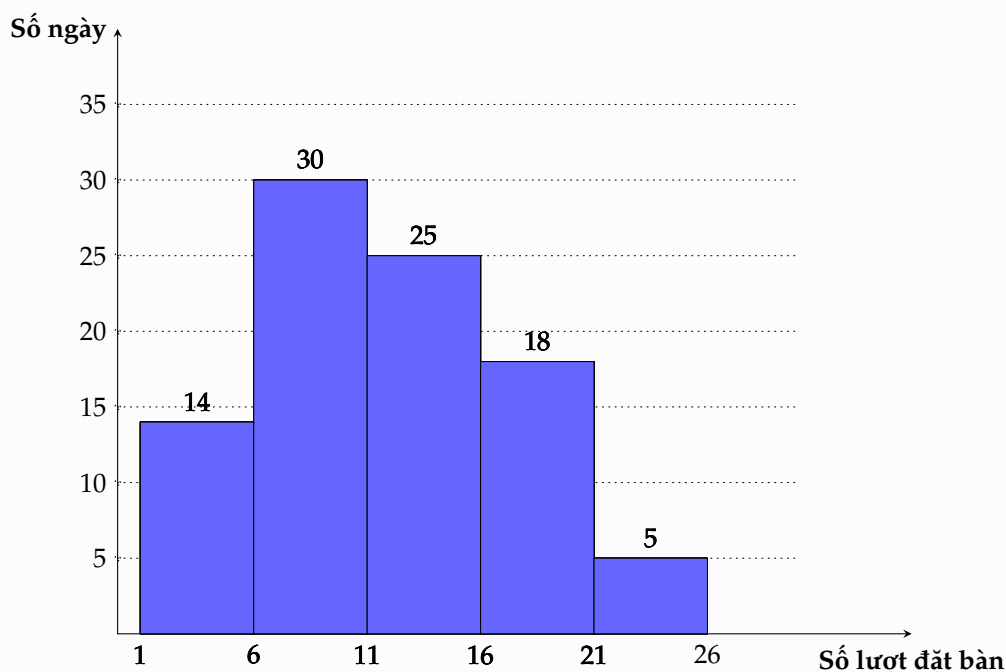
Nhóm (Tuổi thọ)	Giới tính	
	Nam	Nữ
[50; 55)	4	3
[55; 60)	7	4
[60; 65)	4	5
[65; 70)	6	3
[70; 75)	15	7
[75; 80)	12	14
[80; 85)	2	13
[85; 90)	0	1

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nam giới là 50.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nam giới là 14,75.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nữ giới là 15.
- Dựa vào khoảng tứ phân vị thì tuổi thọ trung bình của nam giới đều hơn tuổi thọ trung bình của nữ giới.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên bằng

KQ:

Câu 2

Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

KQ:

Câu 3

Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

Nhóm (Tuổi thọ)	Giới tính	
	Nam	Nữ
[50; 55)	4	3
[55; 60)	7	4
[60; 65)	4	5
[65; 70)	6	3
[70; 75)	15	7
[75; 80)	12	14
[80; 85)	2	13
[85; 90)	0	1

Khoảng tứ phân vị của tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

KQ:

Câu 4

Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

§2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Khái niệm 2.1. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính bởi công thức

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k)$$

Trong đó

- ✔ $n_1, n_2, \dots, n_k$ là tần số tương ứng của các nhóm.
- ✔ $c_1, c_2, \dots, c_k$ là giá trị đại diện của các nhóm tương ứng.
- ✔ $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.

Khái niệm 2.2. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2].$$

Trong đó

- ✔ $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.
- ✔ $\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k)$ là số trung bình.



✔ Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \dots + n_kc_k^2) - \bar{x}^2.$$

✔ Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2].$$

Khái niệm 2.3. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S , là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là $S = \sqrt{S^2}$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D cho trong bảng sau:

Cân nặng	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)	[50,5; 55,5)	[55,5; 60,5)	[60,5; 65,5)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Ví dụ 2

Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
- Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

Ví dụ 3

Thông kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

- Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [80; 98) và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.
(Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.)

Ví dụ 4

Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn.

Theo quan điểm trên, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và cổ phiếu B.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tính trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\dots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên được tính bằng công thức

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k).$$

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	$[1,5; 2,5)$	$[2,5; 3,5)$	$[3,5; 4,5)$	$[4,5; 5,5)$	$[5,5; 6,5)$
Tần số	2	3	7	2	1

Phương sai của mẫu số liệu là

A $s^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{7}{15}\right)^2$

B $s^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{50}{15}\right)^2$

C $s^2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$

D $s^2 = \frac{233}{15} - \left(\frac{57}{15}\right)^2$

Câu 2

Cho mẫu số liệu với cỡ mẫu n được cho dưới bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\dots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Số trung bình $\bar{x}$ của mẫu số liệu trên được tính bằng công thức nào sau đây

A $\bar{x} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_k}{n}$

B $\bar{x} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{n}$

C $\bar{x} = \frac{n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots + n_k u_k}{n}$

D $\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n}$

Câu 3

Khảo sát về cân nặng của các học sinh lớp 11D3 người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau:

Cân nặng	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số học sinh	2	10	16	8	2	2

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

- Ⓐ 56. Ⓑ 50. Ⓒ 60. Ⓓ 55.

Câu 4

Thống kê về thời lượng mỗi trận đấu bi-a trong vòng tứ kết giải đấu European Open người ta được mẫu số liệu ghép nhóm như sau

Thời gian	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số trận	3	12	15	24	2

Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào sau đây

- Ⓐ 17. Ⓑ 17,5. Ⓒ 18. Ⓓ 18,5.

Câu 5

Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- Ⓐ [7; 9). Ⓑ [9; 11). Ⓒ [11; 13). Ⓓ [13; 15).

Câu 6

Trung tâm ngoại ngữ thống kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

Điểm	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Học viên	10	30	55	42	9

Số trung bình của mẫu số liệu thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- Ⓐ [8; 10). Ⓑ [4; 6). Ⓒ [2; 4). Ⓓ [6; 8).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Dạng 2 Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

- ① Xác định cỡ của mẫu số liệu;
- ② Tính số trung bình của mẫu số liệu;
- ③ Áp dụng công thức tính phương sai và độ lệch chuẩn.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- ☐ A Phương sai luôn luôn là số không âm.
- ☐ B Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.
- ☐ C Phương sai càng lớn thì độ phân tán của các giá trị quanh số trung bình càng lớn.
- ☐ D Phương sai luôn luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

Câu 2

Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

- ☐ A Khoảng biến thiên.
- ☐ B Khoảng tứ phân vị.
- ☐ C Phương sai.
- ☐ D Độ lệch chuẩn.

Câu 3

Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- ☐ A 3,39.
- ☐ B 11,62.
- ☐ C 0,1314.
- ☐ D 0,36.

Câu 4

Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- ☐ A 31,77.
- ☐ B 32.
- ☐ C 31.
- ☐ D 31,44.

Câu 5

Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- (A) 3,41. (B) 11,62. (C) 0,017. (D) 0,36.

Câu 6

Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số ngày	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- (A) 5,98. (B) 6. (C) 2,44. (D) 2,5.

Câu 7

Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau

Thời gian (giờ)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)	[6,5; 7)	[7; 7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến 4 chữ số thập phân).

- (A) 0,4252. (B) 0,5314. (C) 0,6214. (D) 0,5268.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau

Cân nặng (kg)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số quả mít	6	12	19	9	4

- a) Cỡ mẫu của bảng thống kê trên là $n = 50$.
 b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 6,72.
 c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 4,8.
 d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 2,19.

Câu 2

Một trang trại phân 1 000 quả trứng thành 5 loại, tùy theo khối lượng (đã được làm tròn) của chúng được thống kê bởi bảng dưới đây:

Khối lượng (gam)	[30; 36)	[36; 42)	[42; 48)	[48; 54)	[54; 60)
Số trứng	45	190	500	250	15

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 30.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là 6,48.
- c) Khối lượng trung bình của 100 quả trứng là 45 gam.
- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $\frac{6\sqrt{17}}{5}$.

Câu 3

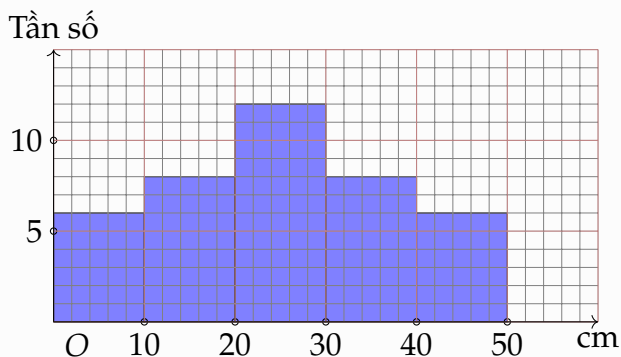
Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên nam Dũng và Huy được lần lượt thống kê trong Bảng ở bên (đơn vị: mét).

Nhóm	Dũng	Huy
[6, 22; 6, 46)	3	2
[6, 46; 6, 70)	7	5
[6, 70; 6, 94)	5	8
[6, 94; 7, 18)	20	19
[7, 18; 7, 42)	5	6
	$n = 40$	$n = 40$

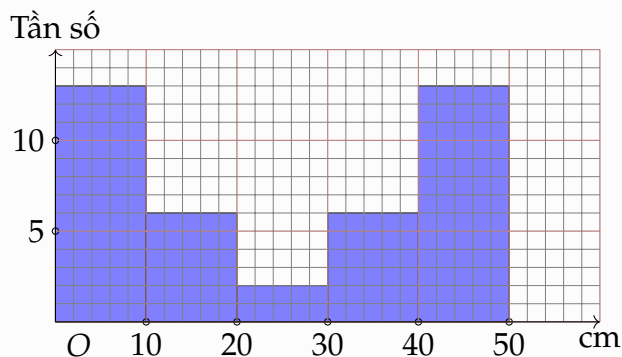
- a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 6,92 (m).
- b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 6,85 (m).
- c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là 0,24 (m).
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn thì kết quả nhảy xa của vận động viên Huy đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng.

Câu 4

Một công ty giống cây trồng đã thử nghiệm hai phương pháp chăm sóc khác nhau cho cây hướng dương. Sau hai tuần, người ta thấy cây được chăm sóc theo cả hai phương pháp đều thấp hơn 50 cm.



Chiều cao của cây chăm sóc
theo phương pháp A



Chiều cao của cây chăm sóc
theo phương pháp B

- a) Khoảng biến thiên của chiều cao các cây được chăm sóc theo mỗi phương pháp A và B bằng nhau.

- b) Trung bình của chiều cao các cây được chăm sóc theo mỗi phương pháp A và B bằng nhau.
- c) Độ lệch chuẩn của chiều cao các cây được chăm sóc theo phương án A là 12,65 (cm).
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn thì chiều cao của các loại cây được chăm sóc theo phương án B ít bị chênh lệch hơn so với phương án A..

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

§3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM THÔNG THƯỜNG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án. Sử dụng dữ kiện sau để trả lời câu hỏi trong cách bài tập từ 1 đến 5. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Câu 1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- Ⓐ [14; 15). Ⓑ [15; 16). Ⓒ [16; 17). Ⓓ [17; 18).

Câu 3

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

- Ⓐ [15; 16). Ⓑ [16; 17). Ⓒ [17; 18). Ⓓ [18; 19).

Câu 4

Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

- Ⓐ Khoảng biến thiên. Ⓑ Khoảng tứ phân vị.
Ⓒ Phương sai. Ⓓ Độ lệch chuẩn.

Câu 5

Nếu thay tất cả các tần số trong mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 4 số thì số đặc trưng nào sau đây không thay đổi?

- Ⓐ Khoảng biến thiên. Ⓑ Khoảng tứ phân vị.
Ⓒ Phương sai. Ⓓ Độ lệch chuẩn.

Câu 6

Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- (A) 1,5. (B) 0,9. (C) 0,6. (D) 0,3.

Câu 7

Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- (A) 0,9. (B) 0,975. (C) 0,5. (D) 0,575.

Câu 8

Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- (A) 3,39. (B) 11,62. (C) 0,1314. (D) 0,36.

Câu 9

Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- (A) 3,41. (B) 11,62. (C) 0,017. (D) 0,36.

Câu 10

Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- (A) 25. (B) 20. (C) 15. (D) 30.

Câu 11

Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- Ⓐ 23,75. Ⓑ 27,5. Ⓒ 31,88. Ⓓ 8,125.

Câu 12

Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- Ⓐ 31,77. Ⓑ 32. Ⓒ 31. Ⓓ 31,44.

Câu 13

Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số ngày	4	6	8	4	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Câu 14

Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số ngày	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- Ⓐ 10,75. Ⓑ 1,75. Ⓒ 3,625. Ⓓ 14,38.

Câu 15

Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số ngày	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- Ⓐ 5,98. Ⓑ 6. Ⓒ 2,44. Ⓓ 2,5.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau

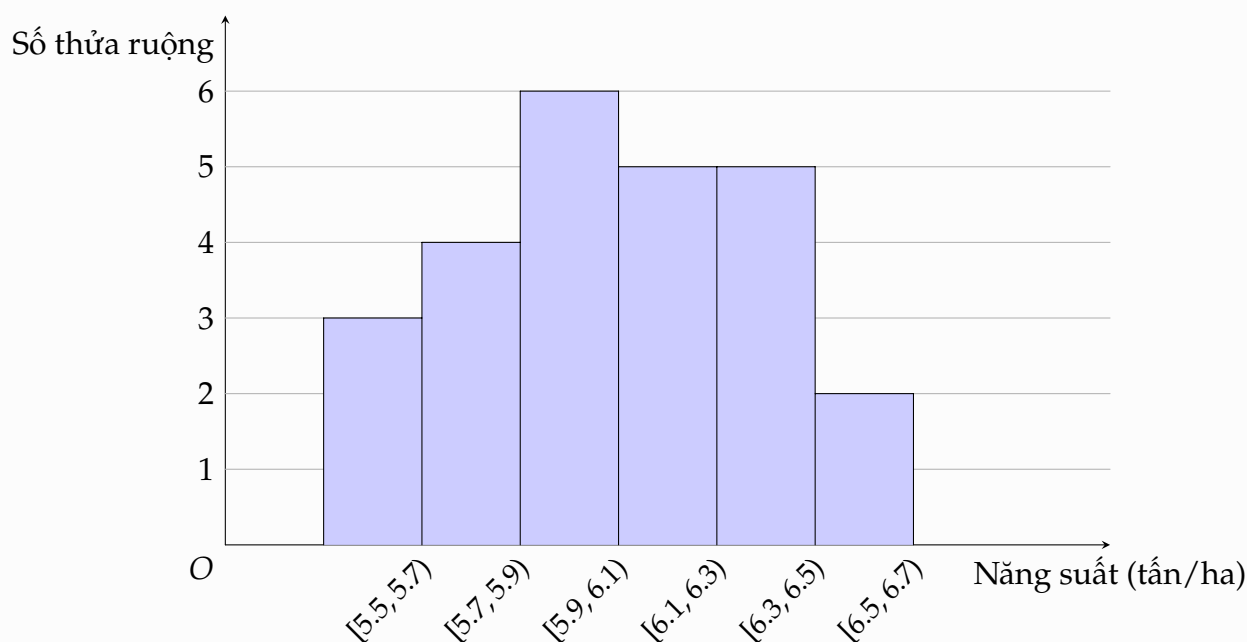
Độ dài quãng đường (km)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)
Số ngày	5	10	9	4	2

- a) Khoảng biến thiên là $R = 220$. b) Tứ phân vị thứ nhất bằng $Q_1 = 112,5$.
c) Tứ phân vị thứ ba bằng $Q_3 = \frac{55}{3}$. d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu $S = 55,68$.

Câu 2

Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau

Năng suất lúa của một số thửa ruộng



- a) Có tất cả 6 thửa ruộng được khảo sát.
 b) Khoảng tứ phân vị thứ của mẫu số liệu trên bằng $\Delta_Q = 0,4675$.
 c) Bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên

là

Năng suất (tấn/ha)	[5,5; 5,7)	[5,7; 5,9)	[5,9; 6,1)	[6,1; 6,3)	[6,3; 6,5)	[6,5; 6,7)
Số thửa ruộng	3	4	6	5	5	2
Tần số tương đối	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$

- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S = \sqrt{0,086656}$.

Câu 3

Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau

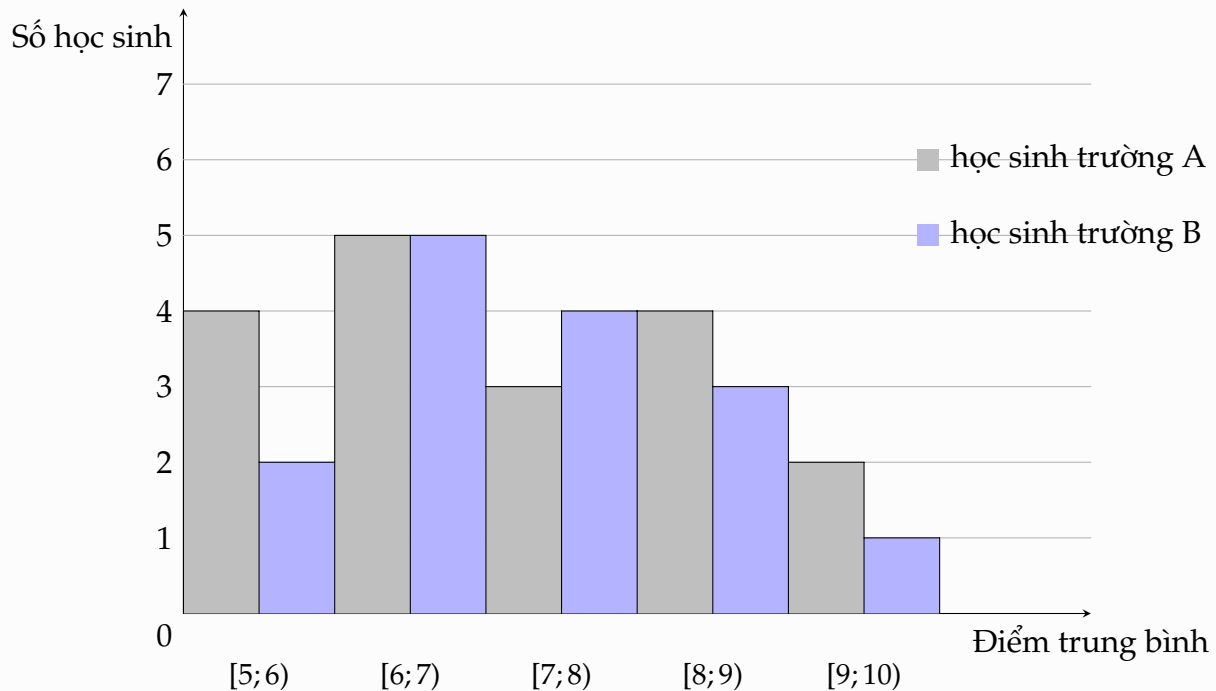
Thời gian (phút)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Học sinh trường X	8	10	13	10	9
Học sinh trường Y	4	12	17	14	3

- a) Nếu so sánh theo số trung bình thì học sinh trường nào viết nhanh hơn?
 b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường nào có tốc độ viết đồng đều hơn?
 c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường nào có tốc độ viết đồng đều hơn?

Câu 4

Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B.

Điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B



a) Giá trị đại diện cho mỗi nhóm và bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên là

Điểm trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Học sinh trường A	4	5	3	4	2
Học sinh trường B	2	5	4	3	1

b) Khoảng biến thiên của trường A bằng $\Delta_Q = 2,275$.

c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn trường A.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường A có điểm trung bình đồng đều hơn trường B.

Câu 5

Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau

Thời gian (giờ)	[5;5,5)	[5,5;6)	[6;6,5)	[6,5;7)	[7;7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

a) Khoảng biến thiên là $R = 2,5$.

b) Số trung bình của mẫu số liệu bằng $R = 6,35$.

c) Phương sai của mẫu số liệu bằng $R = 0,2775$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu $R = 6,5$.

Câu 6

Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

- Giá trị trung bình của hai lĩnh vực A là 17,5 triệu đồng.
- Giá trị trung bình của hai lĩnh vực A là 16,9 triệu đồng.
- Độ lệch chuẩn của hai lĩnh vực B là 8,04.
- Khi đầu tư vào lĩnh vực A rủi ro cao hơn lĩnh vực B .

Câu 7

Thành tích môn nhảy cao của các vận động viên tại một giải điền kinh dành cho học sinh trung học phổ thông như sau

Mức xà (cm)	[170; 172)	[172; 174)	[174; 176)	[176; 180)
Số vận động viên	3	10	6	1

- Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên là 185,2.
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là 1,8.
- Độ phân tán của mẫu số liệu trên là $CV = 0,0104$.
- Độ phân tán của mẫu số liệu nhỏ cho biết các vận động viên tham gia nhảy cao là không đồng đều.

Câu 8

Trong bài thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần cho kết quả như sau

Hiệu điện thế đo được (vôn)	[3, 85; 3, 90)	[3, 90; 3, 95)	[3, 95; 4, 00)	[4, 00; 4, 05)
Số lần An đo	1	6	2	1
Số lần Bình đo	1	3	4	2

- Giá trị trung bình của An và Bình lần lượt là 3,94; 3,95.
- Phương sai của An và Bình lần lượt là 5,94; 1,95.
- Độ lệch chuẩn của An và Bình lần lượt là 0,04; 0,334.
- Vôn kế của bạn Bình ổn định hơn.



BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu cho bởi bảng trên bằng

KQ:

Câu 2

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

Gọi Δ_Q là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu cho bởi bảng trên. Khi đó Δ_Q bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

Câu 3

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

Giá trị trung bình của mẫu số liệu bằng

KQ:

Câu 4

Cho bảng số liệu sau đây

Nhóm	[1,5; 2,5)	[2,5; 3,5)	[3,5; 4,5)	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)
Tần số	2	3	7	2	1

Phương sai của mẫu số liệu là (làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

Câu 5

Chiều cao của 500 học sinh của một trường trung học cơ sở được thống kê bởi bảng dưới đây

Chiều cao (cm)	[150; 154)	[154; 158)	[158; 162)	[162; 166)	[166; 170)
Số học sinh	25	50	200	175	50

Khoảng tứ phân vị bằng

KQ:

Câu 6

Chiều cao của 500 học sinh của một trường trung học cơ sở được thống kê bởi bảng dưới đây

Chiều cao (cm)	[150; 154)	[154; 158)	[158; 162)	[162; 166)	[166; 170)
Số học sinh	25	50	200	175	50

Độ lệch chuẩn chiều cao của 500 học sinh bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

MỤC LỤC

Chương 1.	ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Chương 2.	VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	3
Chương 3.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	4
Chương 4.	NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN	5
Bài 1.	NGUYÊN HÀM	5
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	5
(B)	BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	8
(C)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	9
Bài 2.	TÍCH PHÂN	18
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	18
(B)	BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	20
(C)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	22
Bài 3.	ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN	35
(A)	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	35
(B)	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	40
Bài 4.	BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG IV	50
(A)	Trắc nghiệm.....	50
(B)	BÀI TẬP MINH HỌA.....	52

§1. NGUYÊN HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa nguyên hàm

Định nghĩa 1.1. Cho hàm số $f(x)$ được xác định trên khoảng K (hoặc một đoạn, hay một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

! Trường hợp $K = [a; b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

và

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Trong các hàm số đã cho dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2;$

b) $G(x) = \frac{x^3}{3} + x^2.$

Ví dụ 2

Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$?

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x;$

b) $G(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x.$

Định lý 1.1. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- a) Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ;
- b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) là **họ các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K , kí hiệu bởi $\int f(x) dx$



a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K , ta chỉ cần tìm một nguyên hàm của $f(x)$ trên K và khi đó

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ là hằng số.}$$

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x) dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K , ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

Ví dụ 3

Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. từ đó hãy tìm $\int f(x) dx$.

Ví dụ 4

Tìm $\int x^3 dx$.

2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm

Tính chất 1.1.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0).$$

Ví dụ 5

Sử dụng kết quả của Ví dụ 3, hãy tìm:

a) $\int 3x^2 dx$;

b) $\int -\frac{3}{2}x^2 dx$.

Ví dụ 6

Cho hàm số $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Từ đó tìm $\int x^n dx$.

b) Từ kết quả câu a, tìm $\int kx^n dx$ (k là hằng số thực khác 0).

Tính chất 1.2.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$\textcircled{v} \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

Ví dụ 7

Hãy tìm:

a) $\int (x^2 + x) dx;$

b) $\int (4x^3 - 3x^2) dx.$

Ví dụ 8

Tìm:

a) $\int (3x^2 + 1) dx;$

b) $\int (2x - 1)^2 dx.$

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

3.1. Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Tính chất 1.3. Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Tính chất 1.4. Ta có một số tính chất sau

$$\textcircled{v} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$\textcircled{v} \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Ví dụ 9

Tìm:

a) $\int \sqrt{x} dx$ ($x > 0$);

b) $\int \frac{1}{x^3} dx;$

c) $\int \left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx.$

Ví dụ 10

Tìm:

a) $\int x^4 dx;$

b) $\int x\sqrt{x} dx$ ($x > 0$);

c) $\int \left(\frac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x} \right) dx$ ($x > 0$).

3.2. Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Tính chất 1.5. Ta có nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\textcircled{v} \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\textcircled{v} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\textcircled{v} \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\textcircled{v} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$$

Ví dụ 11

Tìm:

a) $\int (\cos x + \sin x) dx;$

b) $\int (2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}) dx.$

Ví dụ 12

Tìm:

a) $\int (3 \cos x - 4 \sin x) dx;$

b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$

3.3.

Tính chất 1.6. Nguyên hàm của hàm số mũ

☑ $\int e^x dx = e^x + C;$

☑ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

Ví dụ 13

Tìm:

a) $\int 2^x dx;$

b) $\int \frac{1}{3^x} dx;$

c) $\int (2e^x - 5^x) dx.$

Ví dụ 14

Tìm:

a) $\int 4^x dx;$

b) $\int \frac{1}{e^x} dx;$

c) $\int (2 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 7^x) dx.$

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = x \ln x$ và $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty);$

b) $F(x) = e^{\sin x}$ và $f(x) = e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}.$

Bài 2

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1;$

c) $f(x) = (2x + 1)^2;$

b) $f(x) = x^3 - x;$

d) $f(x) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2.$

Bài 3

Tìm:

a) $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx;$

c) $\int \frac{(2x+1)^2}{x^2} dx;$

b) $\int \sqrt{x}(7x^2 - 3) dx \ (x > 0);$

d) $\int \left(2^x + \frac{3}{x^2} \right) dx.$

Bài 4

Tìm:

a) $\int \left(2\cos x - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx;$

c) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx;$

b) $\int 4\sin^2 \frac{x}{2} dx;$

d) $\int (x + \tan^2 x) dx.$

Bài 5

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết rằng, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị $f(4)$.

Bài 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) . Xét điểm $M(x; f(x))$ thay đổi trên (C) . Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = (x-1)^2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung. Tìm biểu thức $f(x)$.

Bài 7

Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9,8t$ (m/s). Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

a) Khi $t = 5$ giây;

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Tính nguyên hàm của hàm số $y = -4x^3 + 2x^2 + x - 4$.

A $-x^4 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x + C.$

B $-x^4 + \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 4x - 1 + C.$

C $-x^4 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - 2 + C.$

D $-\frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x + C.$

Câu 2

Tính $\int (4x + 2)^2 dx$ ta được kết quả

- ☐ A $\frac{16x^3}{3} + 8x^2 + 4x + C.$
☐ B $\frac{25x^3}{3} + 8x^2 + 4x + C.$
- ☐ C $\frac{16x^3}{3} + 8x^2 + 4x + C.$
☐ D $\frac{16x^3}{3} + 8x^2 + 7x + C.$

Câu 3

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - 4$ và $F(3) = -\frac{23}{2}$. Tìm $F(x)$.

- ☐ A $F(x) = \frac{x^2}{2} - 4x - 4.$
☐ B $F(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 4 + C.$
- ☐ C $F(x) = x(x - 8).$
☐ D $F(x) = \frac{x(8 - x)}{2} + C.$

Câu 4

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{5}}$ bằng :

- ☐ A $\frac{x^6}{\ln 6} + C.$
☐ B $\frac{1}{7} \cdot \frac{x^{\sqrt{5}}}{\ln 6}.$
☐ C $x^6.$
☐ D $\frac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1}.$

Câu 5

Tính nguyên hàm $F(x) = \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$

- ☐ A $x - \cos x + C.$
☐ B $\frac{1}{3} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^3 + C.$
☐ C $\left(\sin \frac{x}{2} \right)^2 + C.$
☐ D $x + \cos x + C.$

Câu 6

Tính nguyên hàm $F(x) = \int \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$

- ☐ A $x - \sin x + C.$
☐ B $\left(\sin \frac{x}{2} \right)^2 + C.$
☐ C $\frac{1}{3} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^3 + C.$
☐ D $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x + C.$

Câu 7

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là:

- ☐ A $\frac{1}{4} \sin 2x + C.$
☐ B $\frac{1}{4} \cos 2x + C.$
☐ C $-\sin x \cos x.$
☐ D $-\frac{1}{4} \cos 2x + C.$

Câu 8

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 8 \sin x$ là

- ☐ A $\int f(x)dx = 6x - 8 \cos x + C.$
☐ B $\int f(x)dx = x^3 - 8 \cos x + C.$
- ☐ C $\int f(x)dx = 6x + 8 \cos x + C.$
☐ D $\int f(x)dx = x^3 + 8 \cos x + C.$

Câu 9

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$ là

- (A) $\frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C.$
 (B) $-\frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C.$
 (C) $\frac{1}{12} \sin 3x - \frac{3}{4} \sin x + C.$
 (D) $\frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin 2x + C.$

Câu 10

Nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[2]{x^5}$ bằng

- (A) $\frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$
 (B) $\frac{6x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$
 (C) $\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$
 (D) $-\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$

Câu 11

Nguyên hàm của hàm số $y = \sin x + 2 \cos x$ bằng

- (A) $2 \sin x - \cos x + C.$
 (B) $-2 \sin x + \cos x + C.$
 (C) $-2 \sin x - \cos x + C.$
 (D) $-2 \sin x - \cos x + C.$

Câu 12

Nguyên hàm của hàm số $y = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{5}{\cos^2 x}$ bằng

- (A) $-5 \tan x + \cot x + C.$
 (B) $5 \tan x - \cot x + C.$
 (C) $5 \tan x + \cot x + C.$
 (D) $-5 \tan x - \cot x + C.$

Câu 13

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6^x$ bằng

- (A) $\frac{6^x}{\ln 6} + C.$
 (B) $6^x.$
 (C) $\frac{1}{5} \cdot \frac{6^{5x+2}}{\ln 6} + C.$
 (D) $\frac{6^x}{\ln 6}.$

Câu 14

Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{3}{x}$ bằng

- (A) $\ln x + C.$
 (B) $-\ln x + C.$
 (C) $-3 \ln x + C.$
 (D) $3 \ln x + C.$

Câu 15

Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- (A) Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C.$
 (B) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).
 (C) Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x).$
 (D) $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$

Câu 16

Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x+1} dx$ bằng

- (A) $-\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$
 (B) $-\ln |2x+1| + C.$
 (C) $\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$
 (D) $\ln |2x+1| + C.$

Câu 17

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

- (A) $\frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C.$
 (B) $4x + 1.$
 (C) $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x.$
 (D) $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$

Câu 18

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}.$

- (A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$
 (B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$
 (C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$
 (D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

Câu 19

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{(1+x)^2}.$

- (A) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{(x+1)^3} + C.$
 (B) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C.$
 (C) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1} + C.$
 (D) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{2}{(x+1)^3} + C.$

Câu 20

Cho nguyên hàm $I = \int \frac{2x-1}{x-1} dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $I = 2x + \int \frac{dx}{x-1}.$
 (B) $I = \int \left(2 - \frac{1}{x-1} \right) dx.$
 (C) $I = \int \frac{2x}{x-1} dx.$
 (D) $I = \int \frac{2x-1}{x} dx.$

Câu 21

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
 (B) $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$
 (C) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$

Ⓓ $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \neq 0$.

Câu 22

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

Ⓐ $-\sin x + C$.

Ⓑ $\cot x + C$.

Ⓒ $\tan x + C$.

Ⓓ $\sin x + C$.

Câu 23

Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

Ⓐ $\int 2^x dx = 2^x + C$.

Ⓑ $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$.

Ⓒ $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Ⓓ $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

Câu 24

Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ $\int e^x dx = e^x + C$.

Ⓑ $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Ⓒ $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Ⓓ $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4}{\cos^2 x}$

a) $F(x) = \frac{4x}{\sin^2 x}$.

b) $F(x) = 4 \tan x$.

c) $F(x) = \frac{4}{\cot x} dx$.

d) $F(x) = 4x + \frac{4}{3} \tan^3 x$.

Câu 2

Tính nguyên hàm $F(x) = \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$.

a) $f(x) = 1 + \sin(x)$.

b) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) $\int f(x) dx = \int dx + \int (-\cos x) dx$.

d) $\int f(x) dx = x + \cos x + C$.

Câu 3

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$

a) $\int f(x) dx = \tan x - x + C$.

b) $\int f(x) dx = \tan x + x + C$.

c) $\int f(x) dx = -\int \frac{1}{\cos^2 x + x} dx$.

d) $\int f(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - x dx$.

- d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2) = 4$ thì $M(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.

Câu 10

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

- a) Nếu $F(1) = 0$ thì $F(2) = 6$.
 b) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(-1) = -4$.
 c) $F(1) - F(-1) = -6$.
 d) $F(1) + F(2) - 2F(0) = 2$.

Câu 11

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

- a) $f'(x) = 3x^2 + 3$.
 b) Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.
 c) Đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(2; 10)$. Giá trị $F(-2) = 6$.
 d) $F(2) - F(0) = -6$.

Câu 12

Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$.

- a) $f(x) = x + \frac{1}{x-3}$.
 b) $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$.
 c) $\int \frac{1}{x-1} \, dx = \ln(x-1) + C$.
 d) $\int f(x) \, dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-3| + C$.

Câu 13

Gọi $F(x)$ và một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó

- a) $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, với C là hằng số bất kì.
 b) $\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, với $a \neq 0$ và C là hằng số bất kì.
 c) $\int kf(x) \, dx = kF(x) + C$, với $k \neq 0$ và C là hằng số bất kì.
 d) $\int f(u) \, du = F(x) + C$.

Câu 14

Biết rằng $y = \ln x$ có đạo hàm $y' = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$. Khi đó ta có

- a) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ với mọi $x \neq 0$.
 b) $\int \frac{1}{x+m} \, dx = \ln|x+m| + C$ với mọi $x \neq -m$.
 c) $\int \frac{1}{2x+3} \, dx = \ln|2x+3| + C$ với mọi $x \neq -\frac{3}{2}$.
 d) $\int \frac{1}{-x+2} \, dx = \ln|-x+2| + C$ với mọi $x \neq 2$.

Câu 15

Biết rằng $y = e^x$ có đạo hàm $y' = e^x$ với mọi x . Khi đó ta có

a) $\int e^x dx = e^x + C.$

b) $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C.$

c) $\int e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} + C.$

d) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó hàm số $kF(2x + 2024)$ là nguyên hàm của hàm số $f(2x + 2024)$. Hãy tìm k (làm tròn kết quả tới hàng phần mười). KQ:

Câu 2

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Tính giá trị của $F(\ln 3)$. KQ:

Câu 3

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$; biết $F(1) = 2$. Tính $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần trăm). KQ:

Câu 4

Biết $F(x)$ là một họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$ và $F(0) = \frac{1}{2}$. Khi đó $F(1) + F(2)$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 5

Biết $\int \frac{3x+1}{x^2+6x+9} dx = a \ln |x+3| + \frac{2b}{x+3} + C$ với a, b là các số nguyên. Tính giá trị của $T = 2a^2 + b$. KQ:

Câu 6

Cho $f'(x) = \frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$. Biết phương trình có $f(x) = -1$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$. Tính $T = 2025^{x_0}$. KQ:

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = |x - 1| + |x - 2|$, $f(0) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$; $f(4) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3) + f\left(\frac{3}{2}\right)$.

KQ:

Câu 8

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0; 1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (làm tròn kết quả tới hàng đơn vị).

KQ:

Câu 9

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$). Biết $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$, $f(1) = 0$. Tính giá trị của $M = 2a - b$ (làm tròn tới hàng phần mười).

KQ:

Câu 10

Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cot t (m/s^2)$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2,5 m/s$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong $\pi(s)$ đầu tiên.

KQ:

Câu 11

Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2 (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm $5(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu? Vận tốc v chính là nguyên hàm của gia tốc a . Tại thời điểm ban đầu thì vận động viên ở tại vị trí xuất phát nên vận tốc lúc đó là:

KQ:

Câu 12

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$, biết $F(0) = 4$. Tìm $F(1)$ (làm tròn kết quả tới hàng phần mười).

KQ:

§2. TÍCH PHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa 2.1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.



a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$. Như vậy

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b$$

b) Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

d) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước:

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ví dụ 1

Tính

a) $\int_{-1}^3 x^2 dx.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u}.$

d) $\int_1^2 2^x dx.$

Ví dụ 2

Tính

a) $\int_0^1 e^x dx.$

b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$

Từ Định lí 1 và định nghĩa tích phân, ta có

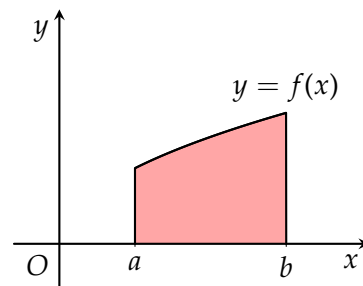
Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân

$\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$,

trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (H.4.9). Vậy

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Hình 4.9

Ví dụ 3

Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính

a) $\int_0^1 (x+1)dx.$

b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Ví dụ 4

Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính

a) $\int_1^3 (2x+1) dx.$

b) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

! $v(t) = s'(t).$

2. Tính chất của tích phân

Tính chất 2.1. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có

a) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số);

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$

c) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx;$

d) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$).

Ví dụ 5

Tính

$$\text{a) } \int_1^4 (x^3 + 3\sqrt{x}) \, dx;$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - 2 \cos x) \, dx;$$

$$\text{c) } \int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2} \right) \, dx.$$

Ví dụ 6

Tính các tích phân sau

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} (2x + \cos x) \, dx.$$

$$\text{b) } \int_1^2 \left(3^x - \frac{3}{x} \right) \, dx.$$

$$\text{c) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx.$$

Ví dụ 7

$$\text{Tính } \int_0^3 |x - 2| \, dx.$$

Ví dụ 8

$$\text{Tính } \int_0^3 |2x - 3| \, dx.$$

Ví dụ 9

Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$T(t) = 20 + 1,5(t - 6), 6 \leq t \leq 12.$$

Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

$$\text{Cho } \int_0^3 f(x) \, dx = 5 \text{ và } \int_0^3 g(x) \, dx = 2. \text{ Tính}$$

$$\text{a) } \int_0^3 [f(x) + g(x)] dx;$$

$$\text{c) } \int_0^3 3f(x) dx;$$

$$\text{b) } \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx;$$

$$\text{d) } \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx.$$

Bài 2

Tính

$$\text{a) } \int_0^3 (3x - 1)^2 dx;$$

$$\text{c) } \int_0^1 (e^{2x} + 3x^2) dx;$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) dx;$$

$$\text{d) } \int_{-1}^2 |2x + 1| dx.$$

Bài 3

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

$$\text{a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian } 1 \leq t \leq 4, \text{ tức là tính } \int_1^4 v(t) dt.$$

$$\text{b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính } \int_1^4 |v(t)| dt.$$

Bài 4

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức

$$P'(x) = -0,0005x + 12,2.$$

Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Bài 5

Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức

$$v = k(R^2 - r^2)$$

trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ bằng

- (A)** $F(a) - F(b)$. **(B)** $F(b) - F(a)$. **(C)** $F(a) + F(b)$. **(D)** $-F(b) - F(a)$.

Câu 2

Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

- (A)** $I = \frac{17}{2}$. **(B)** $I = \frac{5}{2}$. **(C)** $I = \frac{7}{2}$. **(D)** $I = \frac{11}{2}$.

Câu 3

Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- (A)** 1. **(B)** -3. **(C)** 3. **(D)** -1.

Câu 4

Tích phân $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$ bằng

- (A)** 12. **(B)** 9. **(C)** 5. **(D)** 6.

Câu 5

Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$ bằng

- (A)** $b^3 - b^2a - b$. **(B)** $b^3 + b^2a + b$. **(C)** $b^3 - ba^2 - b$. **(D)** $3b^2 - 2ab - 1$.

Câu 6

Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- (A)** $(-1; 2)$. **(B)** $(-\infty; 0)$. **(C)** $(0; 4)$. **(D)** $(-3; 1)$.

Câu 7

Cho hàm số f liên tục trên khoảng K chứa a, b, c và $a < c < b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(u) du.$
 (B) $\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(t) dt.$
- (C) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$
 (D) $\int_a^a f(x) dx = 0.$

Câu 8

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- (A) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
- (B) Nếu f là hàm chẵn trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$
- (C) Nếu f là hàm lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$
- (D) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ với $a < c < b.$

Câu 9

Tích phân $\int_{-1}^2 (-4x^3 - 6x^2 + 6x + 5) dx$ bằng

- (A) -9.
 (B) 10.
 (C) 10.
 (D) 9.

Câu 10

Tích phân $\int_1^5 \frac{2}{x} dx$ kết quả bằng

- (A) $5 \ln 7.$
 (B) $-4 \ln 5.$
 (C) $-3 \ln 5.$
 (D) $2 \ln 5.$

Câu 11

Tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \cos x) dx$ kết quả bằng

- (A) -8.
 (B) 4.
 (C) -12.
 (D) 8.

Câu 12

Tích phân $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx$ bằng

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(B) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$.

(D) $-\frac{22\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13

Tính tích phân $\int_3^5 (2x^3 + 4\sqrt{x}) dx$ bằng

(A) $-272 - 8\sqrt{3} + \frac{40\sqrt{5}}{3}$.

(B) $-272 - \frac{40\sqrt{5}}{3} + 8\sqrt{3}$.

(C) $-\frac{40\sqrt{5}}{3} + 8\sqrt{3} + 272$.

(D) $-8\sqrt{3} + \frac{40\sqrt{5}}{3} + 272$.

Câu 14

Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + 3\cos x) dx$ bằng

(A) $-2e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}} + 6$.

(B) $-2e^{\frac{\pi}{2}} - 6 + \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}}$.

(C) $-\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}} + 6 + 2e^{\frac{\pi}{2}}$.

(D) $-6 - \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}} + 2e^{\frac{\pi}{2}}$.

Câu 15

Tính tích phân $\int_3^4 \left(3 \cdot 2^x - \frac{2}{x}\right) dx$ bằng

(A) $-2\ln 4 - 2\ln 3 + \frac{72}{\ln 2}$.

(B) $-\frac{24}{\ln 2} - 2\ln 3 + 2\ln 4$.

(C) $-2\ln 4 + 2\ln 3 + \frac{24}{\ln 2}$.

(D) $-2\ln 4 + 2\ln 3 + \frac{48}{\ln 2}$.

Câu 16

Cho $\int_2^3 f(x) dx = 5$ và $\int_2^3 g(x) dx = 5$. Hãy chọn mệnh đề đúng?

(A) $\int_2^3 2f(x) dx = 10$.

(B) $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = 10$.

(C) $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = 0$.

(D) $\int_2^3 [2f(x) - 3g(x)] dx = 0$.

Câu 17

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(4) = 1$ và $\int_4^5 f'(x) dx = 3$. Khi đó giá trị của $f(5)$ bằng bao nhiêu?

(A) 4.

(B) 0.

(C) 8.

(D) -6.

Câu 18

Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

- (B) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \in \mathbb{R}.$
 (C) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \forall k \in \mathbb{R}.$
 (D) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Câu 19

Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- (A) -3. (B) -1. (C) 1. (D) 3.

Câu 20

Nếu $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$ và $\int_{-2}^4 f(x) dx = -4$ thì $\int_2^4 f(x) dx$ bằng

- (A) 5. (B) -5. (C) -3. (D) 3.

Câu 21

Cho $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx = 16$, khi đó $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) 26. (B) 58. (C) 143. (D) 122.

Câu 22

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[2; 3]$, $f(2) = 2$ và $f(3) = 5$. Khi đó $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- (A) -3. (B) 7. (C) 10. (D) 3.

Câu 23

Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và là hàm chẵn thỏa $\int_{-3}^3 f(x) dx = 10$. Khi đó $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- (A) -5. (B) 5. (C) 10. (D) 20.

Câu 24

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$		0	-1	$f(4)$	

Diagram showing the function $f(x)$ with arrows indicating the path from $-\infty$ to 0 at $x=1$, from 0 to -1 at $x=2$, from -1 to $f(4)$ at $x=4$, and from $f(4)$ to $+\infty$.

Biết $\int_1^4 |f'(x)| dx = 2019$. Giá trị của $f(4)$ bằng

- (A) 2019. (B) 2017. (C) 2021. (D) 2020.

Câu 25

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 15$, $f(4) = 8$. Tính $\int_1^4 f'(x) dx$

- (A) $\int_1^4 f'(x) dx = 7$. (B) $\int_1^4 f'(x) dx = 3$. (C) $\int_1^4 f'(x) dx = 23$. (D) $\int_1^4 f'(x) dx = -7$.

Câu 26

Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{x+2}$ bằng

- (A) $\frac{16}{225}$. (B) $\log \frac{4}{3}$. (C) $\frac{2}{15}$. (D) $\ln \frac{4}{3}$.

Câu 27

Tích phân $\int_0^1 (3x^2 + 1) dx$.

- (A) -6. (B) 2. (C) 6. (D) -2.

Câu 28

Tích phân $\int_0^1 2^{2018x} dx$ bằng

- (A) $I = \frac{2^{2018} - 1}{2018 \ln 2}$. (B) $\frac{2^{2018} - 1}{2018}$.
(C) $I = (2^{2018} - 1) \ln 2$. (D) $I = 2018 (2^{2018} - 1) \ln 2$.

Câu 29

Biết $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của $T = a + b + c + d$ bằng

Ⓐ $T = 13.$

Ⓑ $T = 10.$

Ⓒ $T = 12.$

Ⓓ $T = 11.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó

a) $F(a) - F(b) = \int_a^b f(x) dx.$

b) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$ với $a < c < b.$

c) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$

d) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ với mọi hàm số $y = f(x)$ lẻ trên $[-a; a].$

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó

a) $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$

b) $\int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in [a; b]$, với mọi $a, b \in \mathbb{R}.$

c) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f'(x) dx \geq 0.$

d) Nếu đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là a thì $\int_a^b f'(x) dx = f(b).$

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 2x^2 + x - 3 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó

$$\text{a) } \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{b) } \int_{-1}^2 f(x) dx = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } \int_{-2}^2 f'(x) dx = 18.$$

$$\text{d) } \int_{-2}^2 f'(2x+1) dx = 68.$$

Câu 4

Cho hai hàm số $y = f(x) = x^{100} + 2024$ và $y = g(x) = x^{100} + x^{99} + 2023x + 2024$. Khi đó

$$\text{a) } \int_0^1 f'(x) dx = 1.$$

$$\text{b) } \int_{-10}^{10} f(x) dx = \frac{1}{101} + 2024.$$

$$\text{c) } \int_0^1 f''(x) dx = 100.$$

$$\text{d) } \int_{-1000}^{1000} [f(x) - g(x)] dx = 2.$$

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = x^{2025} + x$ và $y = g(x) = x^{2025} + x^{2024} + x + 2025$. Khi đó

$$\text{a) } \int_{-1000}^{1000} f(x) dx = 0.$$

$$\text{b) } \int_0^1 g'(x) dx = 3.$$

$$\text{c) } \int_0^{1000} f'(x) dx = 1000^{2025} + 1000.$$

$$\text{d) } \int_{-2024}^{2024} [g(x) - f(x)] dx = 0.$$

Câu 6

Cho $I = \int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$.

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\text{b) } I = \int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \ln|2x+3| \Big|_1^2.$$

$$\text{c) } I = \ln \frac{7}{5}.$$

$$\text{d) } \text{Giá trị } 5e^I = \sqrt{35}.$$

Câu 7

Cho $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên.

$$\text{a) } \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x+2|.$$

$$\text{b) } I = \ln \frac{|x+1|}{|x+2|} \Big|_0^1.$$

$$\text{c) } a + 3b = -1.$$

$$\text{d) } \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right) dx = 2 - \ln \frac{4}{3}.$$

Câu 8

Biết $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên.

a) $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C.$

b) $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \int_0^1 (x - 1) dx + \int_0^1 \frac{dx}{x + 1}.$

c) $m + n = 1.$

d) $I = \ln \frac{1}{m\sqrt{e}}.$

Câu 9

Cho $I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

a) $\int \frac{x}{x+1} dx = \ln|x+1| + C.$

b) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 \left(\frac{x}{x+1} \right) dx.$

c) $I = \left(\frac{x^3}{3} + x - \ln|x+1| \right) \Big|_1^2.$

d) $a + b = 5.$

Câu 10

Cho biết $I = \int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$.

a) $\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3}.$

b) $I = \ln \frac{2|x+3|}{|x+1|} \Big|_0^2.$

c) $I = \ln 5^a \cdot 3^b.$

d) $a^2 + b^2 = 13.$

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

a) $\int_1^{2024} f(x) dx = \int_1^{2024} (2x^2 - 3) dx.$

b) $\int_{-2024}^1 f(x) dx = \int_{-2024}^1 (1 - x) dx.$

c) $\int_{-2024}^{2024} f(x) dx = \int_{-2024}^1 (1 - x) dx + \int_1^{2024} (2x^2 - 3) dx.$

d) $\int_{-2024}^0 f(x) dx = 2024.$

Câu 12

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $f'(x) > 0, \forall x \in [-1; 3]$ và $f(3) = -1$.

a) $f(-1) = 3$.

b) $\int_{-1}^3 |f(x)| dx = -\int_{-1}^3 f(x) dx$.

c) $\int_{-1}^3 |f(x)| dx = \int_{-1}^3 f(x) dx$.

d) $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$.

Câu 13

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

a) Giá trị $\int_0^1 f(x) dx = 4$.

b) Giá trị $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{11}{6}$.

c) Giá trị của $m, m > 0$ để $\int_m^1 f(x) dx = 4$ bằng 1.

d) Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị $a + b + c$ bằng 9.

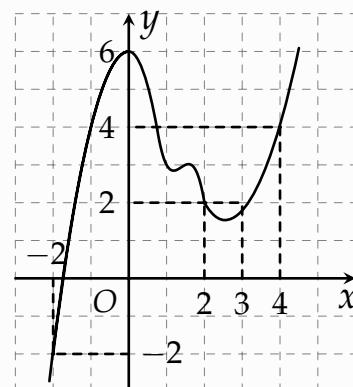
Câu 14

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |2x + 1| + |x - 2|$, biết $F(1) = \frac{5}{2}$.

a) $\int_0^1 |2x + 1| dx = 2$. b) $\int_{-1}^1 |x - 2| dx = 4$. c) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{13}{2}$. d) Tính $F(-1)$.

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.



a) $\int_0^2 f'(x-2) dx = 8.$

b) $\int_0^2 f'(2x) dx = 3.$

c) $\int_{-2}^0 |f'(x)| dx = 8.$

d) $S = \int_0^4 f'(x-2) dx + \int_0^2 f'(x+2) dx = 6.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

KQ:

Câu 2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(1) = 12$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính giá trị của $f(4)$.

KQ:

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

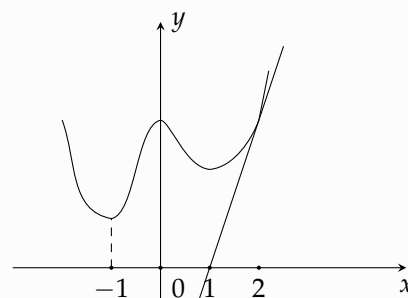
x	0	1	2	5	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$			0		−1		$f(5)$	
	$-\infty$							$-\infty$

Biết $\int_1^5 |f'(x)| dx = 5$. Giá trị của $f(5)$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 4

Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ có đồ thị như hình bên và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2. Tích phân $I = \int_1^4 f''(x-2) dx$ có giá trị là bao nhiêu?



KQ:

Câu 5

Cho bất phương trình $\int_0^x (3t^2 - 8t + 4) dt \leq x$, ($x > 0$). Tính tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho.

KQ:

Câu 6

Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

KQ:

Câu 7

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2) = a \ln b$ với a, b là các số tự nhiên. Tổng $a + b$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 8

Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x-3) dx = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$.

KQ:

Câu 9

Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 8$. Tính tổng $m + n$?

KQ:

Câu 10

Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng

KQ:

Câu 11

Số thực m thỏa mãn $9 + \int_0^1 (2m^2x - 6m) dx = 0$ bằng

KQ:

Câu 12

Biết $I = \int_2^5 \frac{|x-2|}{x} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b$. KQ:

Câu 13

Cho $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + 3} = a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b$ bằng KQ:

Câu 14

Biết $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{b} (-\sqrt{2} + c)$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c$.

KQ:

Câu 15

Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

KQ:

Câu 16

Một vật chuyển động theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = 1 - 3t^2$, (m/s). Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian từ 2 đến 3 giây là

KQ:

Câu 17

Một vật chuyển động theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = 3t^2 - 4t - 5$, (m/s). Tổng quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian từ 3 đến 4 giây là

KQ:

§3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHẦN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

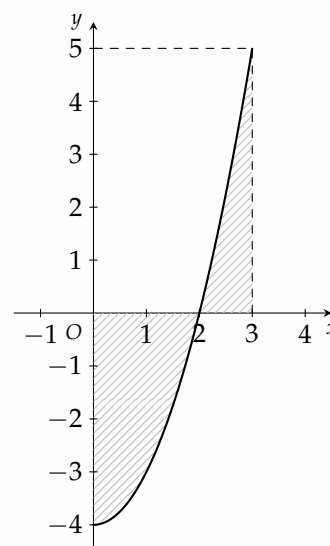
1.1. Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Ví dụ 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.



1.2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$, được tính bằng công thức

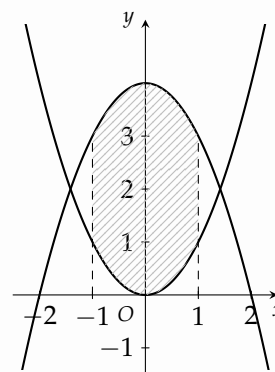
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

⚠ Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|.$$

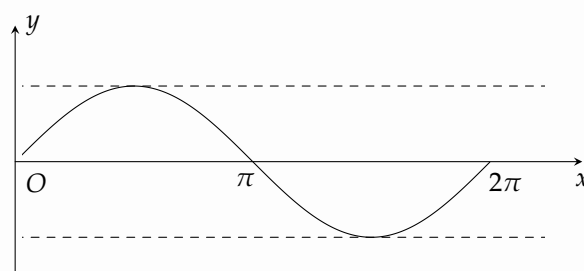
Ví dụ 2

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.



Ví dụ 3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.



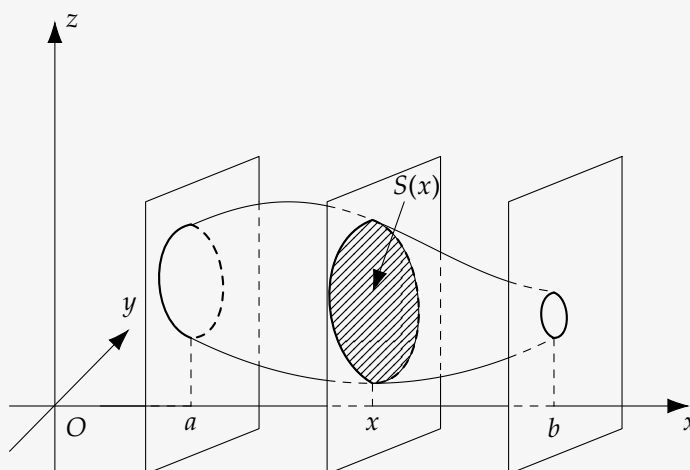
2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

2.1. Tính thể tích vật thể

Định nghĩa 3.1.

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó thể tích V của phần vật thể B được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



Hình 4.21

Ví dụ 4

Tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h .

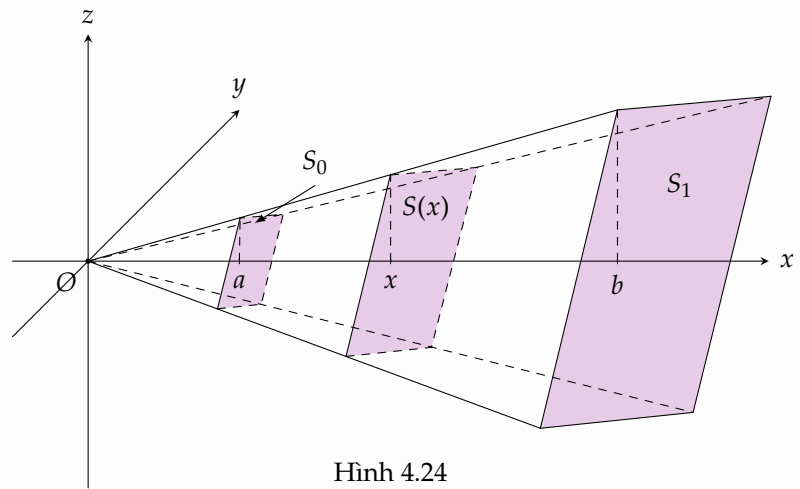
Ví dụ 5

Tính thể tích của khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h .

! Bằng ứng dụng của tích phân, người ta chứng minh được thể tích của khối chóp bất kì bằng $\frac{1}{3}$ diện tích mặt đáy nhân với chiều cao của nó.

Ví dụ 6

Tính thể tích của khối chóp cắt đều có diện tích hai đáy là S_0, S_1 và chiều cao bằng h (Hình 4.24). Từ đó suy ra công thức tính thể tích khối chóp đều có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h .



Hình 4.24

2.2. Tính thể tích khối tròn xoay

Công thức tính thể tích của khối tròn xoay

Định nghĩa 3.2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ xung quanh trục hoành, ta được hình khối gọi là một **khối tròn xoay**.

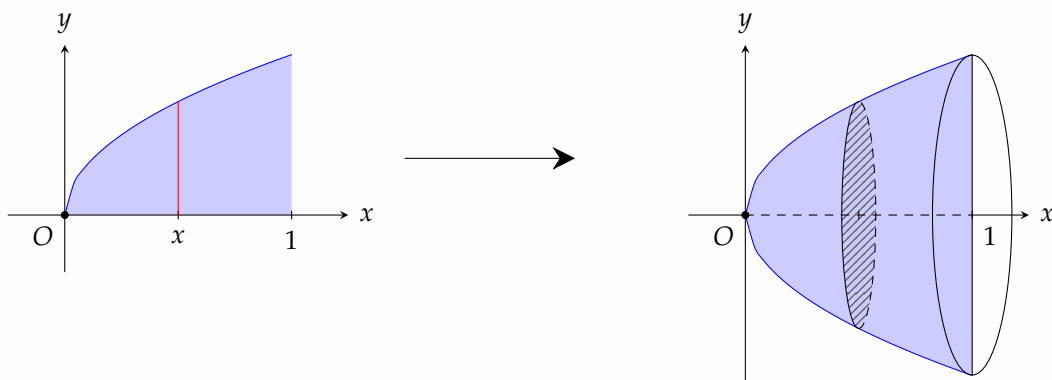
Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a; b]$ được một hình tròn có bán kính $f(x)$.

Thể tích của khối tròn xoay này là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Ví dụ 7

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ (Hình 4.26).



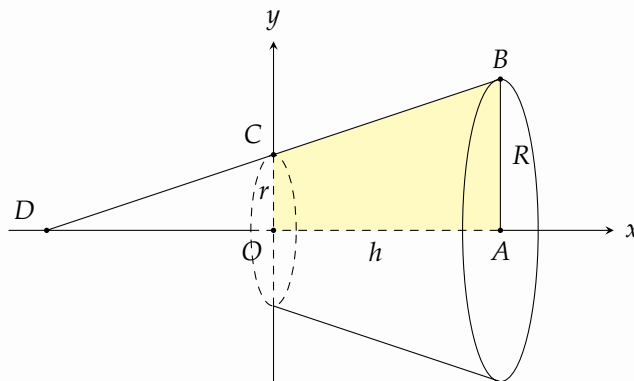
Hình 4.26

Ví dụ 8

Tính thể tích của khối cầu bán kính R .

Ví dụ 9

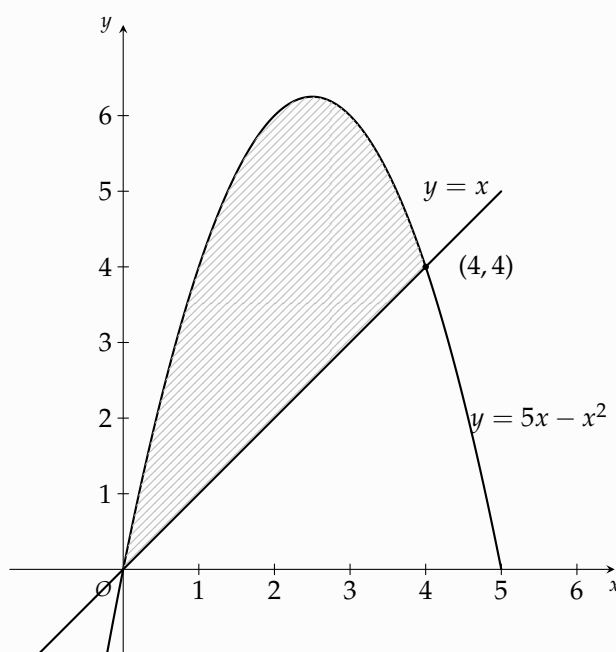
- Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang vuông $OABC$ trong mặt phẳng Oxy với $OA = h$, $AB = R$ và $OC = r$, quanh trục Ox (Hình 4.28).
- Từ công thức thu được ở phần a, hãy rút ra công thức tính thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng R và chiều cao h .



Hình 4.28

Bài 1

Tính diện tích của hình phẳng được tô màu trong Hình 4.29.



Bài 2

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

- $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$.
- $y = 9 - x^2$, $y = 2x^2$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$.
- $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Bài 3

Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hoá bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1723)^2, \quad 0 \leq x \leq 100,$$

trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009).

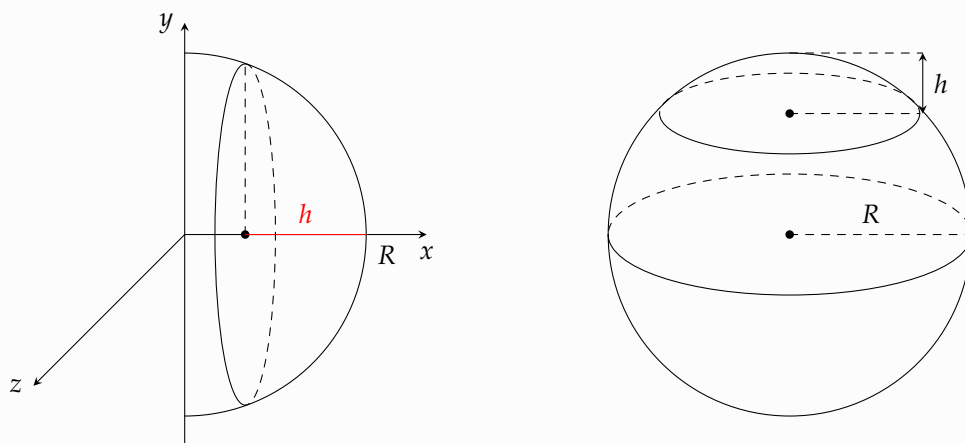
Tìm sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005.

Bài 4

Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox : $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Bài 5

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h ($0 < h \leq R$) sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ xung quanh trục Ox (Hình 4.30). Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



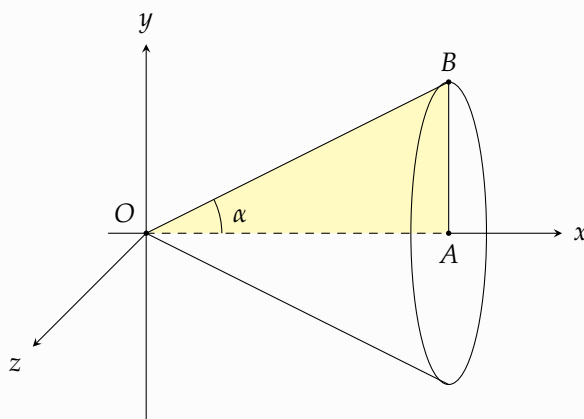
Hình 4.30

Bài 6

Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha$ ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$). Gọi $\mathcal{B}$ là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox (Hình 4.31).

a) Tính thể tích V của $\mathcal{B}$ theo a và α .

b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.



B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

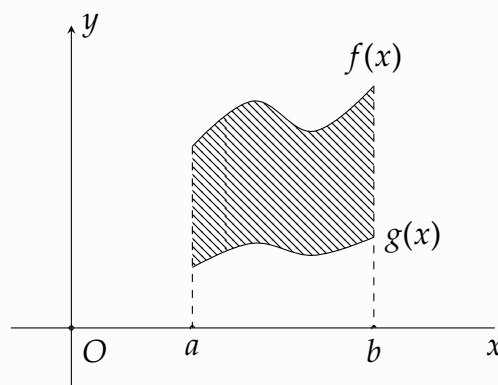
Công thức nào sau đây để tính diện tích hình phẳng S (phần tô đậm trong hình vẽ)

(A) $S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$

(B) $S = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

(C) $S = \left| \int_a^b g(x) dx \right| - \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

(D) $S = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$



Câu 2

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3, y = x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng

(A) 2.

(B) $\frac{5}{2}.$

(C) $\frac{9}{4}.$

(D) $\frac{1}{4}.$

Câu 3

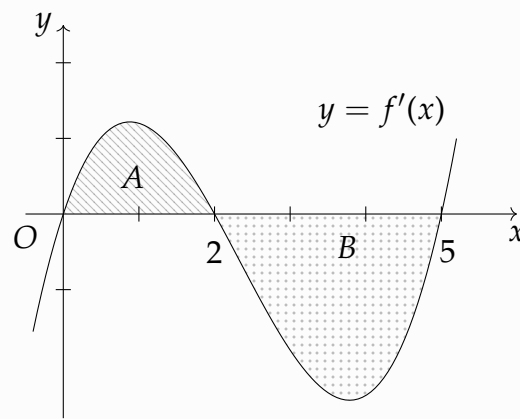
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 2$ và $S_B = 3$. Nếu $f(0) = 4$ thì giá trị của $f(5)$ bằng

(A) 3.

(B) 5.

(C) 9.

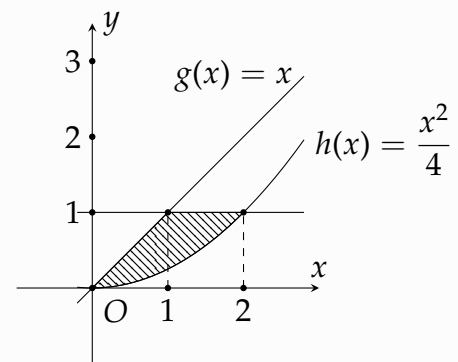
(D) -1.



Câu 4

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0, y \leq 1$ là $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Khi đó $b - a$ bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.



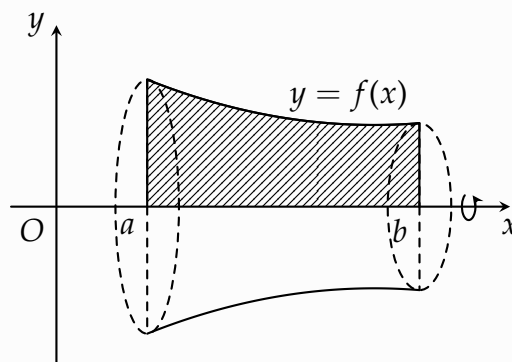
Câu 5

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{27}{x}$ bằng

- (A) $\frac{63}{8}$. (B) $27 \ln 2 - \frac{63}{8}$. (C) $27 \ln 2$. (D) $27 \ln 2 - \frac{63}{4}$.

Câu 6

Công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox là



(A) $V = \int_a^b |f(x)| \, dx.$

(B) $V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$

Ⓒ $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

Ⓓ $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

Câu 7

Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$

Ⓑ $V = \frac{(e^2 - 1)}{2}.$

Ⓒ $V = \frac{\pi e^2}{3}.$

Ⓓ $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

Câu 8

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

Ⓐ $V = \frac{4}{3}\pi.$

Ⓑ $V = \frac{16}{15}\pi.$

Ⓒ $V = \frac{16}{15}.$

Ⓓ $V = \frac{4}{3}.$

Câu 9

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2, y = 0$ và $x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

Ⓐ $V = \frac{7}{6}.$

Ⓑ $V = \frac{5\pi}{6}.$

Ⓒ $V = \frac{7\pi}{11}.$

Ⓓ $V = \frac{11\pi}{6}.$

Câu 10

Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x - 1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

Ⓐ $V = (e^2 - 5)\pi.$

Ⓑ $V = (4 - 2e)\pi.$

Ⓒ $V = e^2 - 5.$

Ⓓ $V = 4 - 2e.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

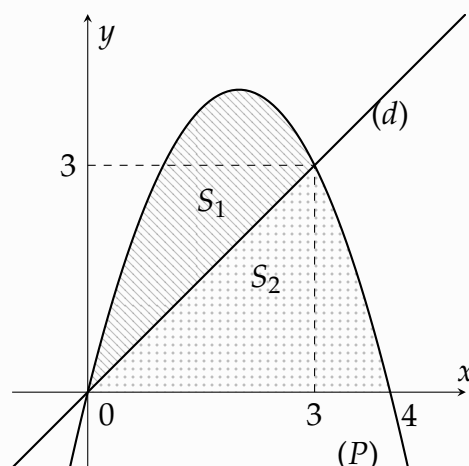
Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong hình bên.

a) Phương trình đường thẳng d là $y = x$.

b) Phương trình (P) : $y = -x^2 - 4x$.

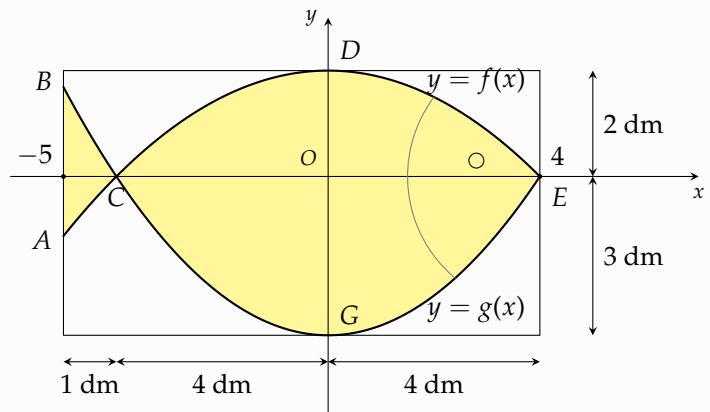
c) $S_1 = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx.$

d) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{38}.$



Câu 2

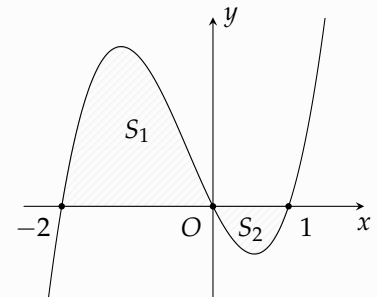
Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình bên (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là dm).



- Phương trình parabol $y = f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$.
- Phương trình parabol $y = g(x) = \frac{3}{16}x^2 + 3$.
- Diện tích của logo là $\frac{1345}{48} \text{ dm}^2$.
- Nếu logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm 30,1% (kết quả đến hàng phần mười).

Câu 3

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo. Cho $S_1 = \frac{16}{3}$ và $S_2 = \frac{5}{6}$. Mỗi quan hệ giữa $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$ với S_1, S_2 được nêu trong các phát biểu sau.



- $S_1 = \int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{16}{3}$.
- $S_2 = \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6}$.
- $I = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(x) dx$.
- $I = \frac{9}{2}$.

Câu 4

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P) .

- Có 2 tiếp tuyến từ A đến đồ thị (P) .
- Hai tiếp tuyến cắt nhau tại điểm có tọa độ là $\left(\frac{3}{2}; -3\right)$.

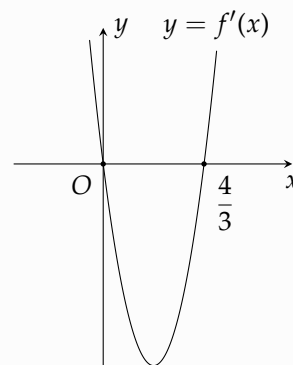
c) Biểu thức diện tích phần giới hạn bởi đồ thị (P), một tiếp tuyến từ A và đường thẳng

$$x = \frac{3}{2} \text{ là } \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx.$$

d) $S = \frac{9}{5}.$

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$) và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.



a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}.$

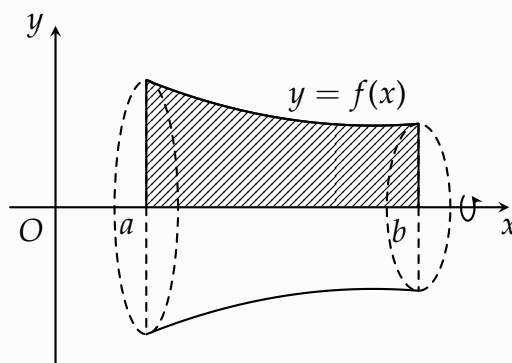
b) $f(x) = f'(x)$ có các nghiệm lần lượt là $x = 0, x = 1, x = 4.$

c) Giá trị của $f(x) = f'(1) + 2f'(2)$ là 17.

d) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{71}{3}.$

Câu 6

Cho vật thể tròn xoay như hình bên dưới.



a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox .

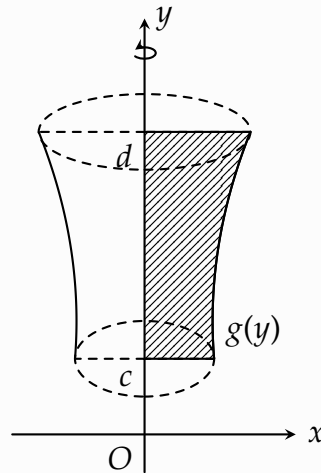
b) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox .

c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

d) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Câu 7

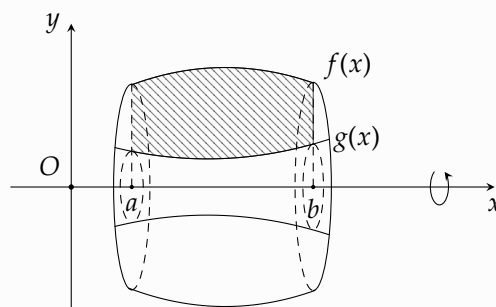
Cho vật thể tròn xoay như hình bên dưới.



- Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = c, x = d$ quay quanh trục Oy .
- Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quay quanh trục Oy .
- Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_c^d g(y) dy$.
- Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$.

Câu 8

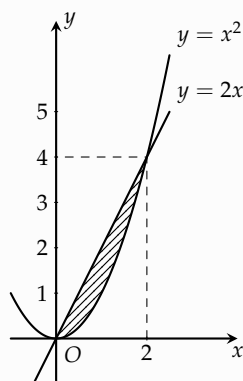
Cho vật thể tròn xoay như hình bên dưới.



- Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox .
- Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox .
- Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.
- Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.

Câu 9

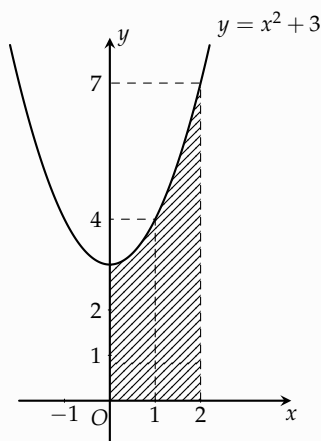
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 2$ (như hình vẽ bên dưới). Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox .



- Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(2;4)$.
- Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.
- Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm.
- Thể tích vật thể là $V = \frac{64}{15}\pi$.

Câu 10

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ (như hình vẽ bên dưới). Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox .

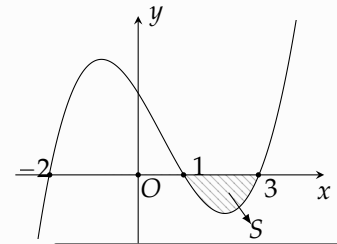


- Gọi V_1 là thể tích vật thể được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox . Khi đó $V_1 = \frac{56}{5}$.
- Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 6x + 9) dx$.
- Gọi V_2 là thể tích vật thể được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox . Khi đó $5V_2 - 10V_1 = 34\pi$.
- Thể tích vật thể là $V = \frac{202}{5}\pi$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

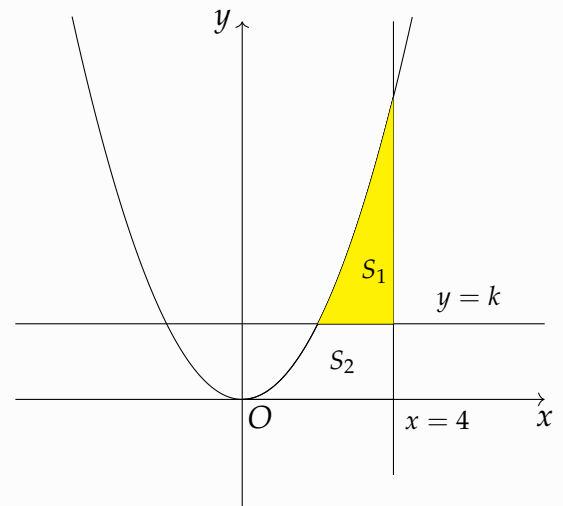
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-2; 3]$ và $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $\int_{-2}^1 f'(x) dx = 3$ và diện tích $S = \frac{5}{3}$. Giá trị $f(3) - f(-2) = \frac{a}{b}$. Tích $a \cdot b$ bằng bao nhiêu, biết $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản?



KQ:

Câu 2

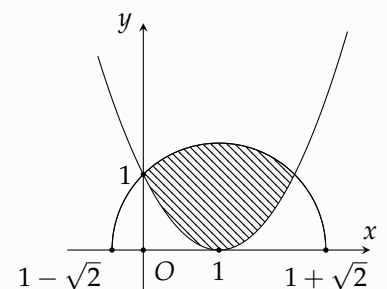
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 4$. Đường thẳng $y = k (0 < k < 16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.



KQ:

Câu 3

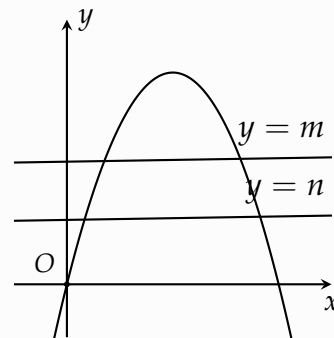
Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và nửa đường tròn (C) cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C) có diện tích $S = \frac{\pi}{m} + \frac{1}{n}$ (m, n nguyên dương). Giá trị biểu thức $P = m^2 + n^2$ bằng bao nhiêu?



KQ:

Câu 4

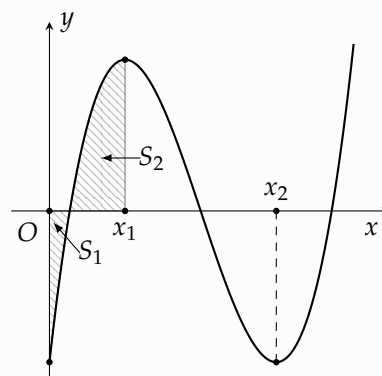
Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T = (4 - m)^3 + (4 - n)^3$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



KQ:

Câu 5

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $x_2 = x_1 + 2$ và $f''(2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu? (Kết quả viết dưới dạng số thập phân làm tròn tới hàng phần trăm).



KQ:

Câu 6

Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

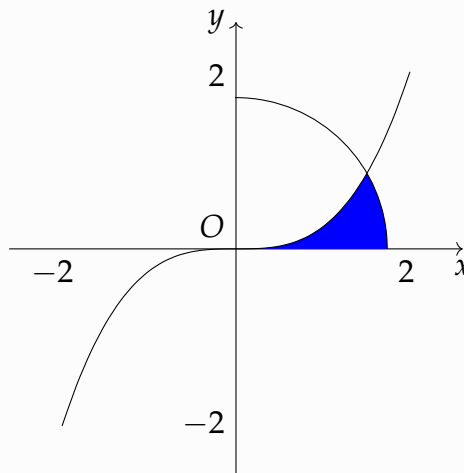
Câu 7

Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

Câu 8

Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

KQ:

Câu 9

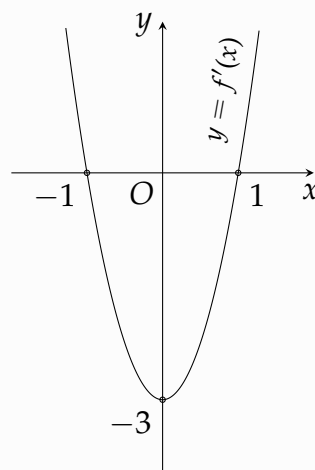
Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:

Câu 10

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ:



§4. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG IV

A TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

- Ⓐ $F(x) = 2 \cos 2x$. Ⓑ $F(x) = -\cos 2x$. Ⓒ $F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$. Ⓓ $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

Câu 2

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $2e^x$ là

- Ⓐ $2xe^x + C$. Ⓑ $-2e^x + C$. Ⓒ $2e^x$. Ⓓ $2e^x + C$.

👉 Lời giải.

Họ nguyên hàm của hàm số $2e^x$ là $\int 2e^x dx = 2e^x + C$ với $(C \in \mathbb{R})$.

Câu 3

Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x - 3e^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = 4$ là

- Ⓐ $F(x) = e^x - 3e^{-x}$. Ⓑ $F(x) = e^x + 3e^{-2x}$.
Ⓒ $F(x) = e^x + 3e^{-x}$. Ⓓ $F(x) = e^x + 3e^{-x} + 4$.

👉 Lời giải.

$F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x - 3e^{-x}) dx = e^x + 3e^{-x} + C$ với $(C \in \mathbb{R})$.

Ta có $F(0) = 4$ suy ra $e^0 + 3e^0 + C = 4 \Leftrightarrow C = 0$

$\Rightarrow F(x) = e^x + 3e^{-x}$.

Câu 4

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(1) = 16$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 4$. Khi đó giá trị của $f(3)$ bằng

- Ⓐ 20. Ⓑ 16. Ⓒ 12. Ⓓ 10.

👉 Lời giải.

Ta có $\int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1)$.

Theo đề bài $\int_1^3 f'(x) dx = 4$ và $f(1) = 16 \Rightarrow f(3) - 16 = 4 \Leftrightarrow f(3) = 20$.

Câu 5

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

(A) -9 .

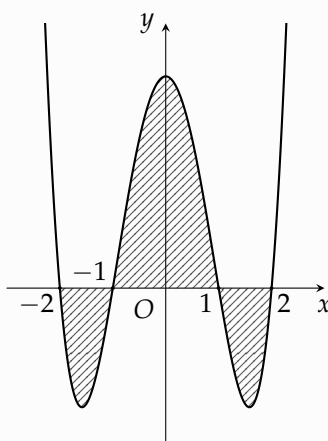
(B) 9 .

(C) $\frac{16}{3}$.

(D) $\frac{20}{3}$.

Câu 6

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như Hình 4.32.



Hình 4.32

Biết $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \frac{-22}{15}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{76}{15}$. Khi đó, diện tích của hình phẳng được tô màu là

(A) 8 .

(B) $\frac{22}{15}$.

(C) $\frac{32}{15}$.

(D) $\frac{76}{15}$.

Câu 7

Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay (S) quanh Ox là

(A) $\frac{3\pi}{4}$.

(B) $\frac{3\pi}{2}$.

(C) $\frac{2\pi}{3}$.

(D) $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 8

Một vật chuyển động có gia tốc là $a(t) = 3t^2 + t$ (m/s²). Biết rằng vận tốc ban đầu của vật là 2 m/s. Vận tốc của vật đó sau 2 giây là

(A) 8 m/s.

(B) 10 m/s.

(C) 12 m/s.

(D) 16 m/s.

B BÀI TẬP MINH HỌA**Bài 1**

Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số sau:

a) $y = 2^x - \frac{1}{x};$

b) $y = x\sqrt{x} + 3\cos x - \frac{2}{\sin^2 x}.$

👉 **Lời giải.**

a) $\int \left(2^x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \ln |x| + C$ với $C \in \mathbb{R}.$

b)

$$\begin{aligned} \int \left(x\sqrt{x} + 3\cos x - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx &= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3\cos x - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 3\sin x + 2\cot x + C \\ &= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 3\sin x + 2\cot x + C \text{ với } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bài 2

Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$

👉 **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(2\cos x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 2\sin x - \cot x + C$

Theo đề bài có

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + C = -1 \Leftrightarrow C = -\sqrt{2}.$$

Vậy $F(x) = 2\sin x - \cot x - \sqrt{2}.$

Bài 3

Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 30 m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8 m/s². Tìm vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây.

👉 **Lời giải.**

Ta có gia tốc của viên đạn là $a(t) = -9,8t.$

Vận tốc của viên đạn là $v(t) = \int a(t)dt = \int (-9,8t) dt = -\frac{9,8}{2}t^2 + C.$

Vận tốc thời điểm ban đầu của viên đạn là 30 (m/s) ta có $v(0) = 30 \Leftrightarrow C = 30.$

Suy ra $v(t) = -\frac{9,8}{2}t^2 + 30.$

Vậy vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2(s) là $v(2) = 10,4$ (m/s).

Bài 4

Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông với vận tốc là $v(t) = -\frac{2t}{5} + 4$ (km/h). Nếu coi thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có khoảng cách mà con cá bơi được là

$$s(t) = \int v(t)dt = \int \left(-\frac{2t}{5} + 4 \right) dt = -\frac{t^2}{5} + 4t + C.$$

Thời điểm $t = 0$ cá bắt đầu bơi vào sông, ta có $s(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Ta có khoảng cách cá bơi là $s(t) = -\frac{t^2}{5} + 4t$.

Vậy khoảng cách mà cá bơi được xa nhất là 20 (km) với $t = 10$ (s).

Bài 5

Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^4 (x^3 - 2\sqrt{x}) dx;$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x};$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx;$

d) $\int_1^{16} \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx.$

Lời giải.

a) $\int_1^4 (x^3 - 2\sqrt{x}) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \frac{653}{12}.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = -1 + \sqrt{3}.$

d) $\int_1^{16} \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{16} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^{16} = 36.$

Bài 6

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = x$, $x = 0$ và $x = 1$.

Bài 7

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox :

a) $y = 1 - x^2, y = 0, x = -1, x = 1$;

b) $y = \sqrt{25 - x^2}, y = 0, x = 2, x = 4$.

Bài 8

Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5$ ($0 \leq x \leq 30$) (x, y tính theo cm) quay tròn quanh trục Ox . Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu cm^3 đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là 1 cm.

MỤC LỤC

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	3
Chương 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	4
Chương 4. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN	5
Chương 5. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	6
Bài 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	6
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	6
(B) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	12
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	14
Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN	19
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	19
(B) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	24
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	25
Bài 3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN	31
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	31
(B) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	32
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	33
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	39
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	39
(B) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	41
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	42
Bài 5. ÔN TẬP CHƯƠNG V	46
(A) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	46
(B) BÀI TẬP TỰ LUẬN	47

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

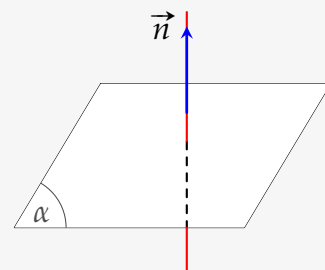
§1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Véc-tơ pháp tuyến và cặp véc-tơ chỉ phương mặt phẳng

Định nghĩa 1.1.

Véc-tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α) .

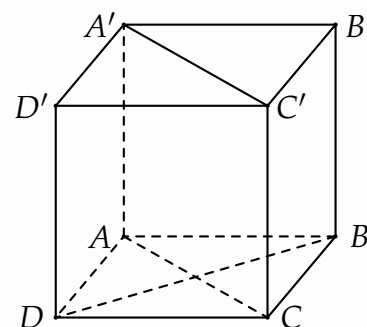


- ☑ Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một véc-tơ pháp tuyến của nó.
- ☑ Nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ (với $k \neq 0$) cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Ví dụ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

- a) $\overrightarrow{AA'}$ và $2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.
- c) $\overrightarrow{A'C'}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

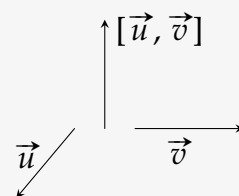


Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-3; 0; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của (α) .

Định nghĩa 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.



⚠️ $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

✔️ Với bốn số x, y, x', y' , ta ký hiệu $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Khi đó, tích có hướng của $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$ là

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

Ví dụ 3

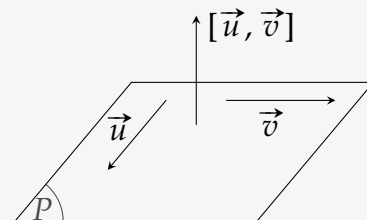
Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; -2; 0)$ và $\vec{v} = (3; 1; -4)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; 3; 1)$ và $\vec{v} = (4; 6; 2)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Định nghĩa 1.3.

- ✔️ Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ được gọi là cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P) .
- ✔️ Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là cặp véc-tơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .



Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = (2; -1; 0)$, $\vec{v} = (1; -1; 2)$. Gọi (α) là một mặt phẳng song song với các giá của $\vec{u}, \vec{v}$. Hãy tìm một véc-tơ pháp tuyến của (α) .

Ví dụ 6

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1; -2; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(-2; 3; 2)$. Hãy chỉ ra một véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC) .

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 1.4. Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.

! Trong không gian $Oxyz$, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (các hệ số A, B, C, D không đồng thời bằng 0) xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm một véc-tơ pháp tuyến.

Ví dụ 7

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

- a) $x + 2y - 3z^2 + 1 = 0$; b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$; c) $y + 1 = 0$.

Ví dụ 8

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

- a) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$; b) $\frac{x}{2} - y + \frac{z}{3} + 5 = 0$; c) $xy + 5 = 0$.

Ví dụ 9

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 1 = 0$.

- a) Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của (α) .
b) Véc-tơ $\vec{m} = (2; 4; -2)$ có là véc-tơ pháp tuyến của (α) hay không?
c) Trong hai điểm $A(1; 3; 2)$, $B(1; 1; 4)$, điểm nào thuộc mặt phẳng (α) ?

Ví dụ 10

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\alpha: x + 2 = 0$.

- a) Điểm $A(-2; 1; 0)$ có thuộc (α) hay không?
b) Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của (α) .

3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 1.5. Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ thì có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

với $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Ví dụ 11

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2; -1; 0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -4; 6)$.

Ví dụ 12

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; -4)$ và vuông góc với trục Oz

Định nghĩa 1.6. Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và biết cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$ có thể thực hiện theo các bước như sau

- ☑ Tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.
- ☑ Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua M và biết véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Ví dụ 13

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với $A(1; 2; 3), B(4; 3; 5), C(2; 3; 2), A'(1; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

Ví dụ 14

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; -1), B(4; 1; 2), C(2; 3; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; -2; -1)$ đồng thời song song với trục Oy và đường thẳng BC .

Định nghĩa 1.7. Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C có thể thực hiện theo các bước sau

- ☑ Tìm các cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{AB}, \vec{AC}$.
- ☑ Tìm véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$.
- ☑ Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và biết véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

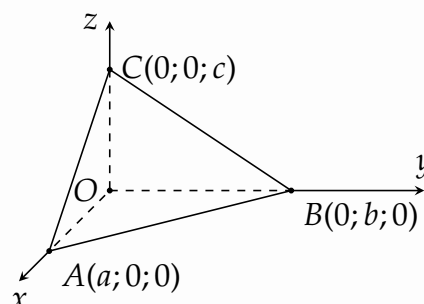
Ví dụ 15

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1), B(3; 2; 1), C(3; 1; 4)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
- b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

Ví dụ 16

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ và cắt ba trục Ox, Oy, Oz tương ứng tại các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ ($a, b, c \neq 0$).



Chứng minh rằng mặt phẳng (α) có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Ví dụ 17

Một vật thể chuyển động trong không gian $Oxyz$. Tại mỗi thời điểm t , vật thể ở vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$. Hỏi vật thể có chuyển động trong một mặt phẳng cố định hay không? Hãy trả lời câu hỏi này bằng cách thực hiện các bước sau.

- Xác định tọa độ của vị trí M_1, M_2, M_3 của vật tương ứng với các thời điểm $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi$.
- Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$.
- Vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$ có luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ hay không?

4. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau

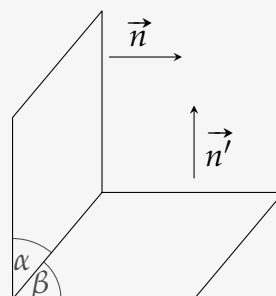
Định nghĩa 1.8.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, \quad (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với hai véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$ tương ứng. Khi đó

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$$



! Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng này có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng kia.

Ví dụ 18

Trong không gian $Oxyz$, chứng minh hai mặt phẳng sau vuông góc với nhau

$$(\alpha): x - 3y + 2z + 1 = 0, \quad (\beta): 5x + y - z + 2 = 0.$$

Ví dụ 19

Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng sau đây có vuông góc với nhau hay không?

$$(\alpha): 3x + y - z + 1 = 0, \quad (\beta): 9x + 3y - 3z + 3 = 0.$$

Ví dụ 20

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; 2; -2)$, $B(2; 4; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 3y + z - 1 = 0$.

5. Điều kiện để hai mặt phẳng song song với nhau

Định nghĩa 1.9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, với các vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n}' = (A'; B'; C')$ tương ứng.

Khi đó $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}' = k\vec{n} \\ D' \neq kD \end{cases}$ với k là số thực.



☑ Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng này cũng là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.

☑ Hai mặt phẳng (α) và (β) trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại số k khác 0 sao cho

$$\begin{cases} A' = kA \\ B' = kB, \\ C' = kC \\ D' = kD. \end{cases}$$

Ví dụ 21

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + z + \sqrt{2} = 0$ và $(\beta): 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2}z + 1 = 0$. Hỏi (α) và (β) có song song với nhau hay không?

Ví dụ 22

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): 5x + 2y - 4z + 6 = 0 \text{ và } (\beta): 10x + 4y - 2z + 12 = 0.$$

- Hỏi (α) và (β) có song song với nhau hay không?
- Chứng minh rằng điểm $M(1; -3; 5)$ không thuộc mặt phẳng (α) nhưng thuộc mặt phẳng (β) .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; -3; 5)$ và song song với (α) .

Ví dụ 23

Trong một kì thi tuyển sinh có ba môn thi Toán, Văn, Tiếng Anh. Trong không gian $Oxyz$, người ta biểu diễn kết quả thi của mỗi thí sinh bởi điểm có hoành độ, tung độ, cao độ tương ứng là điểm Toán, Văn, Tiếng Anh của thí sinh đó.

- Chứng minh rằng các điểm biểu diễn tương ứng với các thí sinh có tổng số điểm ba môn thi bằng 27 (nếu có) cùng thuộc mặt phẳng có phương trình $x + y + z - 27 = 0$.
- Chứng minh rằng tồn tại một số mặt phẳng đôi một song song với nhau sao cho hai điểm

biểu diễn ứng với hai thí sinh có tổng số điểm thi bằng nhau thì cùng thuộc một mặt phẳng trong số các mặt phẳng đó.

6. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Từ đó suy ra công thức tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

Định nghĩa 1.10. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 24

Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Ví dụ 25

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 3y + z + 2 = 0$ và $(Q): x + 3y + z + 5 = 0$.

- Chứng minh rằng (P) và (Q) song song với nhau.
- Lấy một điểm thuộc (P) , tính khoảng cách từ điểm đó đến (Q) . Từ đó tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Ví dụ 26

Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(1; 2; 4)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và vuông góc với trục Ox .

Bài 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, với $A(1; -1; 3)$, $B(0; 2; 4)$, $D(2; -1; 1)$, $A'(0; 1; 2)$.

- Tính tọa độ các điểm C, B', D' .
- Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Bài 3

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; -1; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 3x + 2y - z = 0, (R): x + y - z = 0$.

Bài 4

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2; 3; -1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Bài 5

Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$.

Bài 6

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0, (Q): x + y + z + 6 = 0$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng đã cho song song với nhau và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

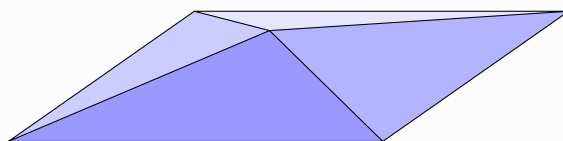
Bài 7

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 3y - z = 0, (Q): x - y - 2z + 1 = 0$.

- Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.
- Tìm điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Bài 8

Bác An dự định làm bốn mái của ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp đều và các mái nhà kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng trên có thực hiện được không?

**Bài 9**

Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà như hình vẽ thuộc mặt phẳng Oxy , trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z - 1 = 0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x + y + 50z - 100 = 0$. Hỏi trong ba mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần tầng 1, mái tầng 2, hai mặt phẳng nào song song với nhau?

Bài 10

Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tai cối xay lúa (ở vị trí P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Véc-tơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB . Giải thích vì sao giá của vectơ moment lực $\vec{M}$ có phương thẳng đứng?

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- ☐ A $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. ☐ B $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$. ☐ C $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. ☐ D $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$.

Câu 2

Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz) ?

- ☐ A $y = 0$. ☐ B $x = 0$. ☐ C $y - z = 0$. ☐ D $z = 0$.

Câu 3

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

- ☐ A $x - 2y + 3z - 12 = 0$. ☐ B $x - 2y - 3z + 6 = 0$.
☐ C $x - 2y + 3z + 12 = 0$. ☐ D $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

Câu 4

Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Khoảng cách từ A đến (P) bằng

- ☐ A $\frac{5}{\sqrt{29}}$. ☐ B $\frac{5}{29}$. ☐ C $\frac{\sqrt{5}}{3}$. ☐ D $\frac{5}{9}$.

Câu 5

Cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$, $(\beta): x + y - z + 2 = 0$ và $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- ☐ A $(\alpha) \perp (\beta)$. ☐ B $(\gamma) \perp (\beta)$. ☐ C $(\alpha) \parallel (\beta)$. ☐ D $(\alpha) \perp (\gamma)$.

Câu 6

Mặt phẳng $(P): 3x - 4y + 5z - 6 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

- ☐ A $\vec{n}_1 = (3; 4; 5)$. ☐ B $\vec{n}_2 = (3; -4; 5)$. ☐ C $\vec{n}_3 = (-3; 4; 5)$. ☐ D $\vec{n}_4 = (3; 4; -5)$.

Câu 7

Cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- ☐ A $2x - y - z + 5 = 0$. ☐ B $2x - y - z - 5 = 0$.
☐ C $x + y + 2z - 3 = 0$. ☐ D $3x + 2y - z - 14 = 0$.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{k} - 3\vec{j} + 4\vec{i}$ là:

- (A) $(2; -3; 4)$. (B) $(2; 3; 4)$. (C) $(4; 3; 2)$. (D) $(4; -3; 2)$.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2; y_2; z_2)$. Vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ có tọa độ là:

- (A) $(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$. (B) $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.
(C) $(x_1 - x_2; y_1 + y_2; z_1 - z_2)$. (D) $(x_1 + x_2; y_1 - y_2; z_1 + z_2)$.

Câu 10

Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0; 0; -1)$, có cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1; 2; -3)$ và $\vec{b} = (3; 0; 5)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là

- (A) $5x - 2y - 3z - 21 = 0$. (B) $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$.
(C) $10x - 4y - 6z + 21 = 0$. (D) $5x - 2y - 3z + 21 = 0$.

Câu 11

Cho ba điểm $A(3; 0; 1)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 0; 0)$. Phương trình của mặt phẳng (ABC) là

- (A) $2x - 3y - 4z + 2 = 0$. (B) $2x + 3y - 4z - 2 = 0$.
(C) $4x + 6y - 8z + 2 = 0$. (D) $2x - 3y - 4z + 1 = 0$.

Câu 12

Cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Mặt phẳng đi qua M và song song với (α) có phương trình là

- (A) $3x + y - 2z - 14 = 0$. (B) $3x - y + 2z + 6 = 0$.
(C) $3x - y + 2z - 6 = 0$. (D) $3x - y - 2z + 6 = 0$.

Câu 13

Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 3z + 8 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (α) ?

- (A) $x - 3y + 3z - 7 = 0$. (B) $3x - 3y + z - 7 = 0$.
(C) $x + 2y - z - 8 = 0$. (D) $x - 2y + z + 8 = 0$.

Câu 14

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

- (A) $2x + y^2 + z + 1 = 0$. (B) $x^2 + y + z + 2 = 0$.
(C) $2x + y + z + 3 = 0$. (D) $2x + y + z^2 + 4 = 0$.

Câu 15

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là:

- ☐ A $c(x - x_0) + b(y - y_0) + a(z - z_0) = 0$. ☐ B $b(x - x_0) + a(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.
☐ C $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. ☐ D $d(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 3 = 0$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $\vec{n}_1 = (1; -3; 2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
 b) $\vec{n}_2 = (-4; 12; -8)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
 c) $\vec{n}_3 = (-2; 6; -4)$ không phải là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
 d) $\vec{n}_4 = (1; -2; 3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(2; -3; 1)$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Mặt phẳng (P) có một cặp véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (3; -5; 0)$.
 b) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; -3; 4)$.
 c) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; 3; 4)$.
 d) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (10; 6; -8)$.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3; 2)$ là $x - 3y + 2z = 0$.
 b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 3)$, có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; -2)$ là $x - 2z - 5 = 0$.
 c) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.
 d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; -1)$ và nhận véc-tơ $\vec{j}$ làm véc-tơ pháp tuyến là $z + 1 = 0$.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và đi qua $A(1; 2; 1)$ là $-x + 2y = 0$.
 b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; -4)$ là $4x + 2y - z - 4 = 0$.
 c) Cho $A(2; -4; -6)$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA là $x - 2y - 3z - 14 = 0$.
 d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2; -1; 2)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; 2; 1)$ là $-4x - y + 9z + 2 = 0$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, các khẳng định sau đây là đúng hay sai?

- a) Hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 1 = 0$ và $(Q): 4x - 6y + 2z + 3 = 0$ song song với nhau.
- b) Hai mặt phẳng $(P): z - 3 = 0$ và $(Q): 3x + 2y - 1 = 0$ vuông góc với nhau.
- c) Hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): 4x + 2y - 4z + 5 = 0$ song song với nhau.
- d) Hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 3 = 0$ và $(Q): -3x + 6y - 3z - 9 = 0$ trùng nhau.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): -4x + by + cz + 5 = 0$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow b = 2, c = -6$.
- b) Tồn tại giá trị của b và c để $(P) \equiv (Q)$.
- c) Với $b = 1$ và $c = 2$ thì (P) cắt (Q) .
- d) Với $b = 1$ và $c = 3$ thì $(P) \perp (Q)$.

Câu 7

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2) . Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) $\alpha = (\vec{n}_1; \vec{n}_2)$.
- b) $\alpha + (\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 180^\circ$.
- c) $\cos \alpha = \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)$.
- d) $\cos \alpha = |\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)|$.

Câu 8

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2) . Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.
- c) $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.
- d) $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Câu 9

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi a là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 12 = 0$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) $a = OM$ với M là hình chiếu vuông góc của O trên (α) .
- b) $a = \frac{4}{3}$.
- c) $a = 4$.
- d) $a = OM$ với M là điểm bất kỳ trên (α) .

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x - y + z = 0$ và $2x - y + z - 7 = 0$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) $d((P), (Q)) = d(A, (Q))$ với $A \in (P)$.
- b) $d((P), (Q)) = 7\sqrt{6}$.

c) $d((P), (Q)) = 6\sqrt{7}$.

d) $d((P), (Q)) = \frac{7}{\sqrt{6}}$.

Câu 11

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P_1) : 2x + y + 2z - 1 = 0; (P_2) : x - 2y - 2z - 7 = 0.$$

- a) Vectơ có tọa độ $(2, 1, 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1) .
- b) Vectơ có tọa độ $(1, -2, -2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_2) .
- c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{n}_1 = (2, 1, 2)$ và $\vec{n}_2 = (1, -2, -2)$ bằng $-\frac{4}{9}$.
- d) Góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) bằng 116° .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

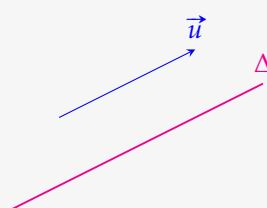
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường thẳng

1.1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 2.1.

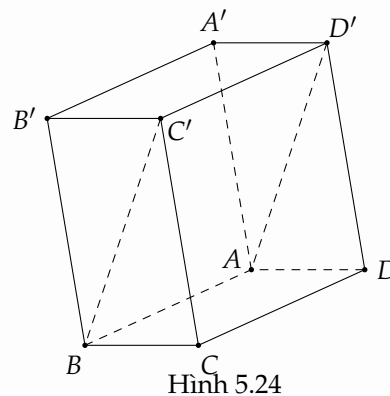
Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .



- ☑ Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương.
- ☑ Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ chỉ phương của Δ .

Ví dụ 1

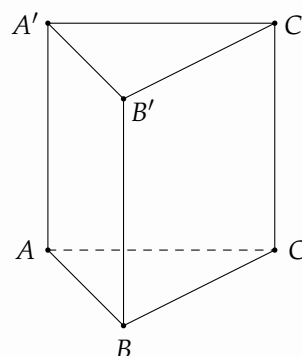
Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra các vectơ chỉ phương của đường thẳng BC' mà điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó đều là các đỉnh của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



Hình 5.24

Ví dụ 2

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H.5.25). Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối đều là đỉnh của hình lăng trụ, những vectơ nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?



1.2. Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 2.2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).



- a) Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0, hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ xác định một đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.
- b) Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 \\ z = 2t. \end{cases}$

- a) Hãy chỉ ra một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ .
- b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ' đi qua $A(2; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (3; 0; 2)$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

- a) Hãy chỉ ra hai điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ .
- b) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; 3; 1)$.

1.3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa 2.3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số khác 0. Hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$. Hãy chỉ ra một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ .

Ví dụ 6

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{5}$. Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của Δ và hai điểm thuộc Δ .

Ví dụ 7

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -5; 1)$.

Ví dụ 8

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; -1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2; 3)$.

Ví dụ 9

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 4; 5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 2y = 0$.

Nhận xét. Đường thẳng Δ trong Ví dụ 5 không có phương trình chính tắc.

Ví dụ 10

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng Oyz .

1.4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Định nghĩa 2.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1; z_1)$ và $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Đường thẳng A_1A_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

a) Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) Trong trường hợp $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ thì đường thẳng A_1A_2 có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ví dụ 11

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(2; 4; 0)$.

Ví dụ 12

Trong không gian Oxyz, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(2; 4; 6)$.

2. Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa 2.5. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó:

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Ví dụ 13

Trong không gian Oxyz, chứng minh rằng hai đường thẳng sau vuông góc với nhau:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases} ; \Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 3 + 8s \end{cases}$$

Ví dụ 14

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Hỏi đường thẳng Δ có vuông góc với trục Oz hay không?

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Định nghĩa 2.6. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2)$ và tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó:

- ☑ $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \notin \Delta_2$.
- ☑ $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \in \Delta_2$.
- ☑ Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1 A_2} \perp [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0 \end{cases}$.
- ☑ Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq 0$.

Ví dụ 15

Trong không gian Oxyz, chứng minh rằng hai đường thẳng sau vuông góc với nhau và chéo nhau:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Ví dụ 16

Trong không gian Oxyz, chứng minh rằng hai đường thẳng sau song song với nhau:

$$\Delta_1 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3} \text{ và } \Delta_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{3}$$

Ví dụ 17

Trong không gian Oxyz, chứng minh rằng hai đường thẳng sau cắt nhau:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ và } \Delta_2 : \begin{cases} x = -6 + s \\ y = 5 + s \\ z = 5 + 2s \end{cases}$$

Ví dụ 18

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $\Delta_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$. Chứng minh rằng:

- Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau;
- Đường thẳng Δ_1 và trục Ox chéo nhau;
- Đường thẳng Δ_2 trùng với đường thẳng $\Delta_3 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+4}{4}$;
- Đường thẳng Δ_2 cắt trục Oz.

! Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta cũng có thể dựa vào các vectơ chỉ phương và phương trình của hai đường thẳng đó theo tiêu chuẩn sau đây.

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ và có phương trình tham số:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 s \\ y = y_2 + b_2 s \\ z = z_2 + c_2 s \end{cases}$$

Xét hệ phương trình hai ẩn t, s :
$$\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 s \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 s \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 s \end{cases} \quad (*). \text{ Khi đó:}$$

- ☑ $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ (*) vô nghiệm.
- ☑ $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ (*) có vô số nghiệm.
- ☑ Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ (*) có nghiệm duy nhất.
- ☑ Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương và hệ (*) vô nghiệm.

Ví dụ 19

Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 1 + 2s \\ z = 3s \end{cases}$$

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và vuông góc với trục Ox .

Bài 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, với $A(1; -1; 3), B(0; 2; 4), D(2; -1; 1), A'(0; 1; 2)$.

- Tính tọa độ các điểm C, B', D' .
- Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Bài 3

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; -1; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 3x + 2y - z = 0, (R): x + y - z = 0$.

Bài 4

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2; 3; -1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Bài 5

Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$.

Bài 6

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0, (Q): x + y + z + 6 = 0$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng đã cho song song với nhau và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

Bài 7

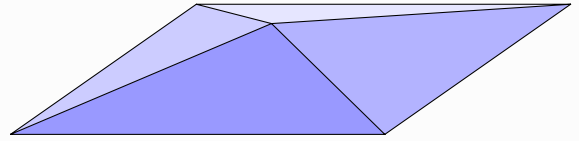
Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 3y - z = 0, (Q): x - y - 2z + 1 = 0$.

- Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Tìm điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Bài 8

Bác An dự định làm bốn mái của ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp đều và các mái nhà kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng trên có thực hiện được không?



Bài 9

Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà như hình vẽ thuộc mặt phẳng Oxy , trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z - 1 = 0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x + y + 50z - 100 = 0$. Hỏi trong ba mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần tầng 1, mái tầng 2, hai mặt phẳng nào song song với nhau?

Bài 10

Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tai cối xay lúa (ở vị trí P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Véc-tơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB . Giải thích vì sao giá của vectơ moment lực $\vec{M}$ có phương thẳng đứng?

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d

- Ⓐ $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$. Ⓑ $\vec{u}_2 = (-2; -1; 3)$. Ⓒ $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. Ⓓ $\vec{u}_4 = (-1; 2; -1)$.

Câu 2

Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad ?$$

Ⓐ $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$.

Ⓑ $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

Ⓒ $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

Ⓓ $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$.

Câu 3

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 - t \end{cases}$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với d ?

Ⓐ $d_1: \begin{cases} x = 3t' \\ y = 1 + t' \\ z = 5t' \end{cases}$.

Ⓑ $d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$.

Ⓒ $d_3: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-5}$.

Ⓓ $d_4: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 4

Đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{9}$ có một vectơ chỉ phương là

Ⓐ $\vec{u}_1 = (2; 3; 1)$.

Ⓑ $\vec{u}_2 = (6; 3; 9)$.

Ⓒ $\vec{u}_3 = (3; 9; 6)$.

Ⓓ $\vec{u}_4 = (1; 2; 3)$.

Câu 5

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

Ⓐ $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Ⓑ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Ⓒ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Ⓓ $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Câu 6

Cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

Ⓐ $d': \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Ⓑ $d': \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

Ⓒ $d': \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Ⓓ $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 7

Cho hai điểm $M(1; -1; -1)$ và $N(5; 5; 1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Ⓑ $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

$$\textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 8

Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

$$\textcircled{A} d_1 \text{ và } d_2 \text{ cắt nhau.}$$

$$\textcircled{B} d_1 \parallel d_2.$$

$$\textcircled{C} d_1 \equiv d_2.$$

$$\textcircled{D} d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau.}$$

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ có một vectơ chỉ phương là:

$$\textcircled{A} \vec{u}_1 = (1; -2; 3).$$

$$\textcircled{B} \vec{u}_2 = (2; 3; 4).$$

$$\textcircled{C} \vec{u}_3 = (1; 2; 3).$$

$$\textcircled{D} \vec{u}_4 = (-1; 2; -3).$$

Câu 10

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng?

$$\textcircled{A} \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{z} = \frac{z-5}{4}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x-9}{7} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-6}{-2}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{z}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x-1}{y} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$, $\Delta_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$. Xét các vectơ $\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$ và $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$.

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0, 3, -3)$ và có $\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$ là một vectơ chỉ phương.

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4, -2, 4)$ và có $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$ là một vectơ chỉ phương.

c) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1, -5, -3)$.

d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $\Delta_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Xét các vectơ $\vec{u}_1 = (3, -1, 2)$ và $\vec{u}_2 = (1, 2, 1)$.

- a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1, -2, 3)$ và có $\vec{u}_1 = (3, -1, 2)$ là một vectơ chỉ phương.
 b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-2, 1, -1)$ và có $\vec{u}_2 = (1, 2, 1)$ là một vectơ chỉ phương.
 c) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1, 7, -5)$.
 d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Câu 3

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-6}{2}$$

- a) Vectơ có tọa độ $(1; 2; 3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_1 .
 b) Vectơ có tọa độ $(4; 5; 6)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_2 .
 c) Cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ và $\vec{u}_2 = (-1; -2; 2)$ bằng $-\frac{8}{9}$.
 d) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) bằng 132° .

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d ?

- a) $\vec{u}_3 = (4; 6; -2)$. b) $\vec{u}_2 = (1; 2; -1)$. c) $\vec{u}_1 = (2; 3; -1)$. d) $\vec{u}_4 = (-1; -2; 1)$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d ?

- a) $\vec{u}_1 = (-2; 4; -5)$. b) $\vec{u}_2 = (2; 4; 5)$. c) $\vec{u}_3 = (1; 3; 6)$. d) $\vec{u}_4 = (2; -4; -5)$.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2; 3; -1)$; $B(1; 2; 4)$. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$. b) $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$. c) $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$. d) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng d đi qua $M(1; 2; -3)$ và nhận $\vec{u} = (2; -1; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. b) $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$.
 c) $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$. d) $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ vuông góc với d .
- b) Đường thẳng $d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$ cắt d tại một điểm.
- c) Đường thẳng $d_3: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ song song với d .
- d) Đường thẳng $d_4: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$ chéo với d .

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1-t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) d_1, d_2 cắt nhau.
- b) d_1, d_2 chéo nhau.
- c) $d_1 \equiv d_2$.
- d) $d_1 \parallel d_2$.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - z - 5 = 0$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ vuông góc với (P) .
- b) Đường thẳng $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}$ cắt (P) tại một điểm.
- c) Trục Ox không song song với (P) .
- d) Đường thẳng $d_3: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$ nằm trên (P) .

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 3 = 0$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1-t \\ z = 5 \end{cases}$ nằm trên (P) .
- b) Đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+t \\ z = 1-t \end{cases}$ cắt (P) tại một điểm.
- c) Trục Oz song song với (P) .
- d) Trục Oy cắt (P) .

Câu 12

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $B(2; -1; 8)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi H là hình chiếu của B lên d . Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) BH vuông góc với d .
- b) Điểm H có tọa độ là $H(-2; 1; 3)$.
- c) Điểm H có tọa độ là $H(5; -3; 4)$.
- d) Điểm $B'(8; -7; 0)$ là điểm đối xứng với B qua d .

Câu 13

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và điểm $M(1; 1; 1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d và M' là điểm đối xứng với M qua d . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Tọa độ điểm $H(1; 0; -2)$.
- b) M là trung điểm của $M'H$.
- c) Tọa độ điểm $M'(-1; 0; 6)$.
- d) Tọa độ điểm $M'(-1; -1; 3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

§3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa 3.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -2 + 2s \\ z = 4 + s. \end{cases}$$

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

2. Công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 3.2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, tính góc tạo bởi trục Ox và mặt phẳng $(P): \sqrt{2}x - y + z + 2 = 0$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) , với

$$\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{1}; (P): x - y + z - 1 = 0.$$

3. Công thức tính góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 3.3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) , (Q) tương ứng có các vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) , kí hiệu là $((P), (Q))$, được tính theo công thức

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x + y - z + 1 = 0$.

Ví dụ 6

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ và $(Oxz): y = 0$.

Ví dụ 7

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; 4)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(3; 0; 0)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) .

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{x+1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

Bài 2

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$.

Bài 3

Tính góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 3 = 0$.

Bài 4

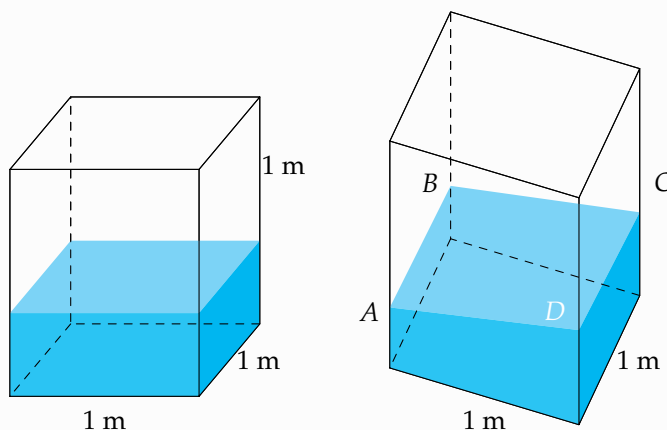
Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo britannica.com) (H.5.38). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .



Bài 5

(H.5.39) Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 40 cm, 44 cm, 48 cm.

- Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể bằng bao nhiêu centimet? (Tính gần đúng, lấy giá trị nguyên.)
- Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?



C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- Ⓐ 30° . Ⓑ 45° . Ⓒ 60° . Ⓓ 90° .

Câu 2

Góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 1 = 0$ và $(\beta): 7x - 8y - 15z + 3 = 0$ bằng

- Ⓐ 135° . Ⓑ 45° . Ⓒ 60° . Ⓓ 120° .

Câu 3

Góc giữa đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha) : 4x + 3y + 5z - 4 = 0$ bằng

Ⓐ 30° . Ⓑ 120° . Ⓒ 60° . Ⓓ 150° .

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$ bằng:

- Ⓐ $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ⓑ $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|ax_0+by_0+cz_0+d|}$. Ⓓ $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 5

Cho hai đường thẳng $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{2}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Khi đó $\cos(d, d')$ bằng

Ⓐ $\frac{20}{21}$. Ⓑ $\frac{4}{21}$. Ⓒ $-\frac{4}{21}$. Ⓓ $-\frac{20}{21}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : y = 0$, $(Q) : \sqrt{3}x - y - 2024 = 0$. Xét các vector $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, -1, 0)$.

- a) $\vec{n}_1$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
 b) $\vec{n}_2$ không là vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) .
 c) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1$.
 d) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 30° .

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 1 = 0$. Xét các vector $\vec{u} = (2, 1, -2)$, $\vec{n} = (2, 2, -1)$.

- a) $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .
 b) $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
 c) $\cos(\Delta, (P)) = \frac{8}{9}$.
 d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ)..

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$, $\Delta_2 : \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$. Xét các vectơ $\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$ và $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$.

- Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0, 3, -3)$ và có $\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$ là một vectơ chỉ phương.
- Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4, -2, 4)$ và có $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$ là một vectơ chỉ phương.
- $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1, -5, -3)$.
- Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x = 0$, $(Q) : 2x - \sqrt{3}y + 5z - 1 = 0$. Xét các vectơ $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{n}_2 = (2, -\sqrt{3}, 5)$.

- $\vec{n}_1$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- $\vec{n}_2$ không là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) .
- $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2$.
- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng khoảng 60° .

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + 4z + 2 = 0$. Xét các vectơ $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{n} = (2, -1, 4)$.

- $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .
- $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- $\cos(\Delta, (P)) = \frac{7}{9}$.
- Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 47° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ)..

Câu 6

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}' = (a_2; b_2; c_2)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và d' . Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- $\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.
- $d \perp d' \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.
- $\cos \varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.
- $\sin \varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Câu 7

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

- Góc giữa (P) và (d) là một góc nhọn.
- $(d) \perp (P)$.
- $(d) \parallel (P)$.
- $d; (P) = 30^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 3x + y + 4z = 2024 = 0$ và $(Q) : x + 3y - 4z = 2025 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+24}{5} = \frac{y-25}{4} = \frac{z}{3}$ và $\Delta_2 : \frac{x-26}{5} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{6}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+7}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 12y + 5z + 1 = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 2x + 3y + z = 1000 = 0$ và $(Q) : 4x + y - 2z = 2023 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+4}{3}$ và $\Delta_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+5}{6}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 4x - 2y + z = 7$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 7

Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có tọa độ $(2; 0; 4)$, $(4; 0; 3)$ và $(4; 3; 4)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 8

Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3; -2; 3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(8; 8; 0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 9

Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5; 0; 5)$ đến vị trí $B(10; 10; 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a; b; 0)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

KQ:

Câu 10

Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên trái lần lượt có tọa độ $(1; 2; 3)$, $(2; 2; 4)$ và $(2; 4; 3)$. Góc giữa mái nhà bên trái và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 11

Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(6; -3; 4)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(9; 6; 1)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 12

Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(2; -1; 5)$ đến vị trí $B(7; 3; 2)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a; b; 0)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

KQ:

§4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt cầu

Khái niệm 4.1.

- ☑ Mặt cầu tâm I bán kính R ($R > 0$) là tập các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R .
- ☑ Một điểm M được gọi là nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R nếu $IM < R$ và được gọi là nằm ngoài mặt cầu đó nếu $IM > R$.
- ☑ Mỗi đường thẳng đi qua tâm mặt cầu đều cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt, đoạn thẳng nối hai điểm đó được gọi là một đường kính của mặt cầu.
- ☑ Mỗi đường kính của mặt cầu đều có trung điểm là tâm mặt cầu và có độ dài bằng hai lần bán kính mặt cầu.

⚠ Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

- ☑ Điểm $M(x; y; z)$ nằm trong mặt cầu (S) nếu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < R^2.$$

- ☑ Điểm $M(x; y; z)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nếu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 > R^2.$$

Ví dụ 1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 5$.

- a) Xác định tâm và bán kính của (S) .
- b) Hỏi gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S) ?

Ví dụ 2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(x + 2)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

- a) Xác định tâm và bán kính của (S) .
- b) Hỏi điểm $M(2; 0; 1)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S) ?

Ví dụ 3

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

- Xác định tâm và bán kính của (S) .
- Đường kính AB , với $A(1; 2; 1)$ và $B(3; 1; 5)$.

Ví dụ 4

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

- Tâm là gốc toạ độ, bán kính $R = 1$.
- Đường kính AB , với $A(1; -1; 2)$, $B(2; -3; -1)$.

Ví dụ 5

Trong không gian $Oxyz$, cho (S) là tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ có toạ độ thoả mãn phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$

Chứng minh rằng (S) là một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

Ví dụ 6

Trong không gian $Oxyz$, cho (S) là tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ có toạ độ thoả mãn phương trình:

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Chứng minh rằng (S) là một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

! Với a, b, c, d là các hằng số, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có thể viết lại thành $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$ và là phương trình của một mặt cầu (S) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
 Khi đó, (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 7

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu? Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 8z + 100 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5y - 2z - \frac{3}{4} = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 6y - 9z + 10 = 0$.

Ví dụ 8

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 5y + 6z + \frac{25}{4} = 0.$$

Xác định tâm, tính bán kính của (S).

2. Một số ứng dụng của mặt cầu

Trong mô hình toán học, bề mặt Trái Đất là mặt cầu với bán kính 6371 km (theo: science.nasa.gov/earth/facts/). Mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn có đường kính là trục của Trái Đất (đoạn thẳng nối cực Bắc N và cực Nam S). Kinh tuyến gốc là kinh tuyến đi qua Đài Thiên văn Greenwich ở London. Mặt phẳng chứa kinh tuyến gốc chia Trái Đất làm hai nửa là bán cầu Đông và bán cầu Tây, nước ta nằm ở bán cầu Đông. Kinh độ của một điểm P trên bề mặt Trái Đất là số đo của góc nhị diện có hai mặt tương ứng chứa kinh tuyến gốc và kinh tuyến đi qua P (cạnh của góc nhị diện này là đường thẳng chứa trục Trái Đất). Kinh độ nhận giá trị trong đoạn từ 0° đến 180° . Vĩ độ của điểm P là số đo của góc giữa mặt phẳng chứa đường xích đạo và đường thẳng đi qua P và tâm O của Trái Đất. Vĩ độ nhận giá trị trong đoạn từ 0° đến 90° . Mỗi điểm trên bề mặt Trái Đất thuộc một trong hai bán cầu Bắc hoặc Nam và thuộc một trong hai bán cầu Đông hoặc Tây. Vì vậy, đi kèm với vĩ độ, còn có chữ E hoặc W nếu vị trí đó tương ứng thuộc bán cầu Đông hay bán cầu Tây và có chữ N, S nếu vị trí đó tương ứng ở bán cầu Bắc hay bán cầu Nam (Hình 5.42). Chẳng hạn, hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí: $21^\circ 01' 51'' N, 105^\circ 51' 09'' E$ (theo: maps.google.com). Vị trí trên mặt đất hoàn toàn xác định khi biết vĩ độ và kinh độ (bao gồm cả các kí hiệu N, S, E, W). Trong bài học này, ta xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực Bắc N , tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế. Như vậy, trong không gian $Oxyz$, bề mặt Trái Đất có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Nếu biết vĩ độ và kinh độ của một vị trí trên mặt đất thì tọa độ của nó trong không gian cũng dễ dàng được xác định và ngược lại. Chẳng hạn, vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N, \beta^\circ E$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) có tọa độ $P(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$, vị trí Q có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N, \beta^\circ W$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) thì có tọa độ $Q(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ, -\cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ, \sin \alpha^\circ)$.

Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q . Cung tròn nói trên là đường đi ngắn nhất trên bề mặt Trái Đất từ P đến Q . Trong ví dụ sau đây, ta sẽ tính khoảng cách giữa hai vị trí đã được nêu ra trong mở đầu bài học.

Ví dụ 9

Biết rằng nếu vị trí M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N, \beta^\circ E$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 90$) thì có tọa độ $M(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$. Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí $P: 10^\circ N, 15^\circ E$ đến vị trí $Q: 80^\circ N, 70^\circ E$.

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$. Xác định tâm và bán kính của (S).

Bài 2

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 0; 5)$ và bán kính $R = 2$.

Bài 3

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;-1)$ và có bán kính bằng khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P) : 3x + 2y - z = 0$.

Bài 4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 8z - 18 = 0$. Xác định tâm, tính bán kính của (S) .

Bài 5

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5z + 30 = 0$;
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z = 0$;
- c) $x^3 + y^3 + z^3 - 2x + 6y - 9z - 10 = 0$;
- d) $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$.

Bài 6

Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ bán kính R có phương trình là:

- Ⓐ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.
- Ⓑ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = R^2$.
- Ⓒ $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.
- Ⓓ $-(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(7;6;-5)$ và bán kính 9?

- Ⓐ $(x + 7)^2 + (y + 6)^2 + (z - 5)^2 = 81$.
- Ⓑ $(x + 7)^2 + (y + 6)^2 + (z - 5)^2 = 9$.
- Ⓒ $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 + (z + 5)^2 = 81$.
- Ⓓ $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 + (z + 5)^2 = 9$.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;1;-3)$ và bán kính 9 có phương trình là:

- Ⓐ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 81$.
- Ⓑ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 81$.

Ⓒ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 9.$

Ⓓ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9.$

Câu 4

Cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tọa tâm I và bán kính R của (S) là

Ⓐ $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3.$

Ⓑ $I(1; -2; -1)$ và $R = 3.$

Ⓒ $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9.$

Ⓓ $I(1; -2; -1)$ và $R = 9.$

Câu 5

Mặt cầu tâm $I(-3; 0; 4)$ và đi qua điểm $A(-3; 0; 0)$ có phương trình là

Ⓐ $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 4.$

Ⓑ $(x - 3)^2 - y^2 + (z + 4)^2 = 16.$

Ⓒ $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16.$

Ⓓ $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4.$

Câu 6

Mặt cầu $(S): (x - 11)^2 + (y - 12)^2 + (z - 13)^2 = 100$ có bán kính là

Ⓐ 10.

Ⓑ 11.

Ⓒ 12.

Ⓓ 13.

Câu 7

Tọa độ tâm của mặt cầu $(S): (x - 5)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 8$ là

Ⓐ $(-5; 6; 7).$

Ⓑ $(5; 6; -7).$

Ⓒ $(5; -6; 7).$

Ⓓ $(-5; 6; -7).$

Câu 8

Khoảng cách từ điểm $M(a; b; c)$ đến mặt phẳng $x - a - b - c = 0$ là

Ⓐ $|a + b|.$

Ⓑ $|b + c|.$

Ⓒ $c + a.$

Ⓓ $\frac{|b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Câu 9

Phương trình mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$, bán kính $R = 2$ là

Ⓐ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4.$

Ⓑ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2.$

Ⓒ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2.$

Ⓓ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4.$

Câu 10

Cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

Ⓐ 3.

Ⓑ $\sqrt{6}.$

Ⓒ $2\sqrt{6}.$

Ⓓ 12.

Câu 11

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

Ⓐ $(x^2 - 8)^2 + (y - 12)^2 + (z - 24)^2 = 9^2.$

Ⓑ $(x - 9)^2 + (y - 10)^2 + (z - 11)^2 = 12^2.$

Ⓒ $(x - 13)^2 + (y - 24)^2 + (z - 36)^2 = 7^2.$

Ⓓ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5^2.$

Câu 12

Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ đến mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
 b) Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = a^2 + b^2 + c^2 - d$.
 c) Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$.
 d) Tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt cầu là $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
 b) Phương trình mặt cầu là $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R$.
 c) Phương trình mặt cầu là $(S): (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = R^2$.
 d) Phương trình mặt cầu là $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$. Mỗi kết quả sau đây đúng hay sai?

- a) (S) có tâm $I(-2; -3; 4)$.
 b) (S) có tâm $I(2; 3; -4)$.
 c) (S) có $R = 4$.
 d) (S) có $R = 16$.

Câu 4

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 10z + 2 = 0$. Mỗi kết quả sau đây đúng hay sai?

- a) (S) có tâm $I(2; 1; 5)$.
 b) (S) có tâm $I(-2; -1; -5)$.
 c) (S) có $R = \sqrt{28}$.
 d) (S) có $R = \sqrt{32}$.

Câu 5

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-5; -2; 3)$ bán kính $R = 4$. Xác định tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau

- a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y - 6z + 22 = 0$.
 b) $(S): (x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 16$.

c) $(S): (x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4.$

d) $(S): (x + 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16.$

Câu 6

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; -5)$ và đi qua điểm $M(3; 1; 2)$. Mỗi kết quả sau đây đúng hay sai?

a) $(S): (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = 74.$

b) $(S): (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 5)^2 = \sqrt{74}.$

c) $R = 74.$

d) $R = \sqrt{74}.$

§5. ÔN TẬP CHƯƠNG V

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Trong không gian Oxy , cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - 3z + 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

- Ⓐ $(1; 2; 3)$. Ⓑ $(1; -2; 3)$. Ⓒ $(1; 2; -3)$. Ⓓ $(1; -2; -3)$.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1; -1; 2)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (2; 1; -1)$ làm một vectơ pháp tuyến là

- Ⓐ $x - y + 2z + 1 = 0$. Ⓑ $x - y + 2z - 6 = 0$.
Ⓒ $2x + y - z - 1 = 0$. Ⓓ $2x + y - z + 1 = 0$.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

- Ⓐ $(1; -2; 3)$. Ⓑ $(2; 1; -2)$. Ⓒ $(2; 1; 2)$. Ⓓ $(1; 2; 3)$.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

- Ⓐ $(1; -2; 3)$. Ⓑ $(2; 0; 0)$. Ⓒ $(2; 1; -1)$. Ⓓ $(2; 1; 1)$.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $I(2; -1; 1)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (1; 2; -3)$ làm một vectơ chỉ phương là

- Ⓐ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$. Ⓑ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$.
Ⓒ $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$. Ⓓ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; -1)$, $B(2; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng AB là

- Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $I(2; 1; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 3 = 0$ là

Ⓐ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

Ⓑ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$.

Ⓒ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Ⓓ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$. Toạ độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

Ⓐ $I(1; 0; 3), R = 4$. Ⓑ $I(1; 0; 3), R = 2$. Ⓒ $I(-1; 0; 3), R = 2$. Ⓓ $I(-1; 0; 3), R = 4$.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Toạ độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

Ⓐ $I(1; -2; -1), R = 3$.

Ⓑ $I(1; 2; 1), R = 9$.

Ⓒ $I(1; 2; 1), R = 3$.

Ⓓ $I(1; -2; -1), R = 9$.

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -1), B(0; 1; 2), C(-1; -2; 3)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .
- Viết phương trình đường thẳng AC .
- Viết phương trình mặt cầu đường kính AC .
- Viết phương trình mặt cầu có tâm A và đi qua B .

Bài 2

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và gốc toạ độ O .

Bài 3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2), B(-1; 1; 0)$.

- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) .
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) .

c) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bài 4

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và hai đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$,
 $d' : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

- Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d' .
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với đường thẳng d .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A và d .
- Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxz).

Bài 5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $x - 2y - 2z = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bài 6

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} \text{ và } d' : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với đường thẳng d' .

Bài 7

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) : $x - y - z - 1 = 0$, (Q) : $2x + y - z - 2 = 0$ và điểm $A(-1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm A đồng thời vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 8

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{-2}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

- Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d' .
- Tính góc giữa d và d' .

Bài 9

Trong không gian $Oxyz$, tính góc tạo bởi đường thẳng $d : \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 3 = 0$.

Bài 10

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P) : x + y + z - 1 = 0$ và mặt phẳng Oxy .

Bài 11

Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

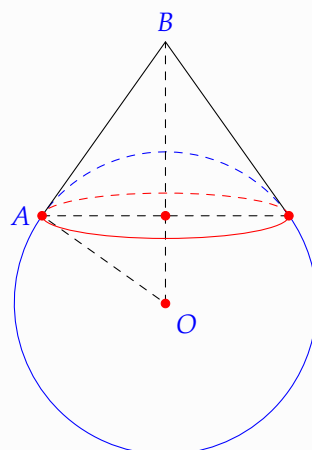
Bài 12

Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng Oxy , đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(5; 6; -2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn.

Bài 13

Nếu đứng trước biển và nhìn ra xa, người ta sẽ thấy một đường giao giữa mặt biển và bầu trời, đó là đường chân trời đối với người quan sát (H.5.45a). Về mặt Vật lý, đường chân trời là đường giới hạn phần Trái Đất mà người quan sát có thể nhìn thấy được (phần còn lại bị chính Trái Đất che khuất). Ta có thể hình dung rằng, nếu người quan sát ở tại đỉnh của một chiếc nón và Trái Đất được "thả" vào trong chiếc nón đó, thì đường chân trời trong trường hợp này là đường chạm giữa Trái Đất và chiếc nón (H.5.45b). Trong mô hình toán học, đường chân trời đối với người quan sát tại vị trí B là tập hợp những điểm A nằm trên bề mặt Trái Đất sao cho $\widehat{BAO} = 90^\circ$, với O là tâm Trái Đất (H.5.45c). Trong không gian $Oxyz$, giả sử bề mặt Trái Đất (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và người quan sát ở vị trí $B(1; 1; -1)$.

Gọi A là một vị trí bất kì trên đường chân trời đối với người quan sát ở vị trí B . Tính khoảng cách AB .



Bài 14

Cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$.

- Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chóp.
- Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
- Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

Bài 15

Cho bốn điểm $A(-2;6;3)$, $B(1;0;6)$, $C(0;2;-1)$, $D(1;4;0)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (BCD) . Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.
- Tính chiều cao AH của tứ diện $ABCD$.
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD .

Bài 16

Cho hai mặt phẳng $(P): x - y - 6 = 0$ và (Q) . Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q) . Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) .

Bài 17

Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$, với O là gốc toạ độ, $A(2;0;0)$, $C(0;6;0)$, $O'(0;0;4)$. Viết phương trình

- mặt phẳng $(O'AC)$;
- đường thẳng CO' ;
- mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp.

Bài 18

Cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thoả mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ thì M thuộc một mặt cầu (S) . Tìm tâm và bán kính của (S) .

MỤC LỤC

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	3
Chương 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	4
Chương 4. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN	5
Chương 5. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	6
Chương 6. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	7
Bài 1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	7
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	7
(B) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	10
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	11
Bài 2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES	17
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	17
(B) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	19
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	20
Bài 3. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG VI	25
(A) TRẮC NGHIỆM	25
(B) TỰ LUẬN	26

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

§1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 1.1. Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A , tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của A với điều kiện B và kí hiệu là $P(A | B)$.

Xác suất có điều kiện có thể được tính theo công thức sau:

Định nghĩa 1.2. Cho hai biến cố A và B bất kì, với $P(B) > 0$. Khi đó

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Ví dụ 1

Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó.

Gọi A là biến cố: “An lấy được viên bi trắng”; B là biến cố: “Bình lấy được viên bi trắng”.

Tính $P(A | B)$ bằng định nghĩa và bằng công thức tính $P(A | B)$ ở trên.

Ví dụ 2

Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó.

Gọi A là biến cố: “An lấy được viên bi trắng”; B là biến cố: “Bình lấy được viên bi trắng”.

Tính $P(A | \bar{B})$ bằng định nghĩa và bằng công thức.

Ví dụ 3

a) Từ công thức tính $P(A | B)$ ở trên, chứng minh rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập với $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ thì $P(A | B) = P(A)$ và $P(B | A) = P(B)$.

b) Từ định nghĩa xác suất có điều kiện và định nghĩa về tính độc lập của hai biến cố, hãy chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A | B) = P(A)$ và $P(B | A) = P(B)$.

Ví dụ 4

Chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(\bar{A} | B) = P(\bar{A}) \text{ và } P(A | \bar{B}) = P(A).$$

Ví dụ 5

(Bảng dữ liệu thống kê 2×2) Một viện nghiên cứu về an toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Giả sử viện đã xem xét 577 006 vụ tai nạn giao thông ô tô và việc thắt dây an toàn của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Kết quả cho thấy:

- Trong số những người lái xe có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong và 412 368 người sống sót;
- Trong số những người lái xe không thắt dây an toàn, có 1 601 người tử vong và 162 527 người sống sót.

Kết quả trên được trình bày dưới dạng bảng gồm 2 dòng và 2 cột như dưới đây, được gọi là bảng dữ liệu thống kê 2×2 :

Thắt dây an toàn \ Kết quả	Kết quả	
	Tử vong	Sống sót
Không	1 601	162 527
Có	510	412 368

Chọn ngẫu nhiên một người lái xe trong số 577 006 người bị tai nạn giao thông

- a) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp không thắt dây an toàn.
- b) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp có thắt dây an toàn.
- c) So sánh hai xác suất ở câu a và câu b rồi rút ra kết luận.

Ví dụ 6

Một công ty dược phẩm muốn so sánh tác dụng điều trị bệnh X của hai loại thuốc M và N. Công ty đã tiến hành thử nghiệm với 4 000 bệnh nhân mắc bệnh X trong đó 2 400 bệnh nhân dùng thuốc M, 1 600 bệnh nhân còn lại dùng thuốc N. Kết quả được cho trong bảng dữ liệu thống kê 2×2 như sau:

Kết quả \ Thuốc	Thuốc	
	M	N
Khỏi bệnh	1 600	1 200
Không khỏi bệnh	800	400

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong số 4 000 bệnh nhân thử nghiệm sau khi uống thuốc. Tính xác suất để bệnh nhân đó.

- a) uống thuốc M, biết rằng bệnh nhân đó khỏi bệnh;
- b) uống thuốc N, biết rằng bệnh nhân đó không khỏi bệnh.

2. Công thức nhân xác suất

Định nghĩa 1.3. Với hai biến cố A và B bất kì, ta có

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A | B).$$

Vì $AB = BA$ nên với hai biến cố A và B bất kì, ta cũng có $P(AB) = P(A) \cdot P(B | A)$.

Công thức trên được gọi là **công thức nhân xác suất**. Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Ví dụ 7

Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Sơn lấy được bút bi đen và Tùng lấy được bút bi xanh.

Ví dụ 8

Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để:

- a) Sơn lấy được bút bi xanh và Tùng lấy được bút bi đen;
- b) Hai chiếc bút lấy ra có cùng màu.

Ví dụ 9

Ô cửa bí mật (Let's Make a Deal) là một trò chơi trên truyền hình nổi tiếng ở Mỹ, đã được mua bản quyền và phát sóng ở nhiều nước trên thế giới. Nội dung trò chơi như sau:

- Người chơi được mời lên sân khấu và đứng trước ba cánh cửa đóng kín. Sau một cánh cửa có chiếc ô tô, sau mỗi cánh cửa còn lại là một con lừa. Người chơi được yêu cầu chọn ngẫu nhiên một cánh cửa, nhưng không được mở ra.
- Tiếp đó người quản trò tuyên bố sẽ mở ngẫu nhiên một trong hai cánh cửa người chơi không chọn mà sau cửa đó là con lừa. Người quản trò hỏi người chơi muốn giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu của mình hay muốn chuyển sang cửa chưa mở còn lại.

Giả sử người chơi chọn cửa số 1 và người quản trò mở cửa số 3. Kí hiệu E_1 ; E_2 ; E_3 tương ứng là các biến cố: “Sau ở cửa số 1 có ô tô”; “Sau ở cửa số 2 có ô tô”; “Sau ở cửa số 3 có ô tô” và H là biến cố: “Người quản trò mở ở cửa số 3 thấy con lừa”. Sau khi người quản trò mở cánh cửa số 3 thấy con lừa, tức là khi H xảy ra. Để quyết định thay đổi lựa chọn hay không, người chơi cần so sánh hai xác suất có điều kiện: $P(E_1 | H)$ và $P(E_2 | H)$

- a) Chứng minh rằng:

$$\bullet P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3};$$

- $P(H | E_1) = \frac{1}{2}$ và $P(H | E_2) = 1$.

b) Sử dụng công thức tính xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất, chứng minh rằng:

- $P(E_1 | H) = \frac{P(E_1) \cdot P(H | E_1)}{P(H)}$;

c) Từ các kết quả trên hãy suy ra:

$$P(E_2 | H) = 2P(E_1 | H)$$

Từ đó hãy đưa ra lời khuyên cho người chơi: Nên giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu hay chuyển sang cửa chưa mở còn lại?

Tóm tắt kiến thức

- ☑ Cho hai biến cố A và B bất kì, với $P(B) > 0$. Khi đó $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.
- ☑ Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(\bar{A} | B) = P(\bar{A})$ và $P(A | \bar{B}) = P(A)$.
- ☑ Với hai biến cố A và B bất kì, ta có $P(AB) = P(B) \cdot P(A | B)$. **Công thức nhân xác suất**
- ☑ Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Một hộp kín đựng 20 tấm thẻ giống hệt nhau đánh số từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ từ trong hộp. Người đó được thông báo rằng thẻ rút ra mang số chẵn. Tính xác suất để người đó rút được thẻ số 10.

Bài 2

Cho $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,51$; $P(B | A) = 0,8$. Tính $P(A | B)$.

Bài 3

Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

- Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm;
- Có ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm nếu biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7.

Bài 4

Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đó không nhỏ hơn 10 nếu biết rằng có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm.

Bài 5

Bạn An phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,7. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,9. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là 0,4. Tính xác suất để:

- Cả hai thí nghiệm đều thành công;
- Cả hai thí nghiệm đều không thành công;
- Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công.

Bài 6

Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 cái kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên một cái kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm một cái kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất Hà lấy được cả hai cái kẹo màu cam là $\frac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu cái kẹo?

Bài 7

Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

Bài 8

Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0.4$; $P(B) = 0.8$ và $P(A|B) = 0.5$. Tính $P(A\bar{B})$ và $P(A|B)$.

Bài 9

Mỗi bạn học sinh trong lớp của Minh lựa chọn một trong hai ngoại ngữ là tiếng Anh hoặc tiếng Nhật. Xác suất chọn tiếng Anh của mỗi bạn học sinh nữ là 0.6 và của mỗi bạn học sinh nam là 0.7. Lớp của Minh có 25 bạn nữ và 20 bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố A: "Bạn được chọn là nam và học tiếng Nhật". B: "Bạn được chọn là nữ và học tiếng Anh".

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Gieo lần lượt hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6. Biết rằng con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

- ☐ A $\frac{2}{6}$
 ☐ B $\frac{1}{2}$
 ☐ C $\frac{1}{6}$
 ☐ D $\frac{5}{6}$

Câu 2

Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $P(A) = 0.2024$, $P(B) = 0.2025$. Tính $P(A|B)$.

- (A) 0.7976. (B) 0.7975. (C) 0.2025. (D) 0.2024.

Câu 3

Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $P(A) = 0.2024$, $P(B) = 0.2025$. Tính $P(B|\bar{A})$.

- (A) 0.7976. (B) 0.7975. (C) 0.2025. (D) 0.2024.

Câu 4

Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.3$. Tính $P(A|B)$.

- (A) $\frac{3}{7}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{6}{7}$. (D) $\frac{1}{7}$.

Câu 5

Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.3$. Tính $P(\bar{B}|A)$.

- (A) $\frac{3}{7}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{6}{7}$. (D) $\frac{1}{7}$.

Câu 6

Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.3$. Tính $P(\overline{A \cap B})$.

- (A) $\frac{4}{7}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{1}{7}$.

Câu 7

Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.65$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.55$. Tính $P(A \cap B)$.

- (A) 0.25. (B) 0.1. (C) 0.15. (D) 0.35.

Câu 8

Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.65$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.55$. Tính $P(\bar{A} \cap B)$.

- (A) 0.25. (B) 0.4. (C) 0.3. (D) 0.35.

Câu 9

Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất cũng là màu đỏ là

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{7}{9}$. (C) $\frac{1}{5}$. (D) $\frac{1}{7}$.

Câu 10

Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ

nhất là màu trắng là

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{7}{9}$.

(D) $\frac{5}{9}$.

Câu 11

Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0.6 và dự án 2 là 0.7. Tìm xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án.

(A) 0.28.

(B) 0.7.

(C) 0.46.

(D) 0.18.

Câu 12

Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0.6 và dự án 2 là 0.7. Biết công ty thắng thầu dự án 1, tìm xác suất công ty thắng thầu dự án 2.

(A) 0.6.

(B) 0.7.

(C) 0.46.

(D) 0.3.

Câu 13

Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0.6 và dự án 2 là 0.7. Biết công ty không thắng thầu dự án 1, tìm xác suất công ty thắng thầu dự án 2.

(A) 0.4.

(B) 0.7.

(C) 0.28.

(D) 0.6.

Câu 14

Cho một hộp kín có 6 thẻ ATM của BIDV và 4 thẻ ATM của Vietcombank. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 thẻ (lấy không hoàn lại). Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được thẻ ATM của Vietcombank nếu biết lần thứ nhất đã lấy được thẻ ATM của BIDV.

(A) $\frac{5}{9}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{7}{9}$.

(D) $\frac{4}{9}$.

Câu 15

Một bình đựng 9 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Lần lượt lấy ngẫu nhiên ra 2 bi, mỗi lần lấy 1 bi không hoàn lại. Tính xác suất để bi thứ 2 màu xanh nếu biết bi thứ nhất màu đỏ?

(A) $\frac{3}{5}$.

(B) $\frac{9}{16}$.

(C) $\frac{9}{17}$.

(D) $\frac{21}{80}$.

Câu 16

Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là:

(A) $\frac{1}{20}$.

(B) $\frac{1}{19}$.

(C) $\frac{1}{190}$.

(D) $\frac{1}{10}$.

Câu 17

Áo sơ mi An Phước trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua

được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

- (A) $\frac{95}{98}$. (B) $\frac{931}{1000}$. (C) $\frac{95}{1000}$. (D) $\frac{98}{100}$.

Câu 18

Lớp Toán Sư Phạm có 95 Sinh viên, trong đó có 40 nam và 55 nữ. Trong kỳ thi môn Xác suất thống kê có 23 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 12 nam và 11 nữ). Gọi tên ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê, biết rằng sinh viên đó là nữ?

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{11}{23}$. (C) $\frac{12}{23}$. (D) $\frac{11}{19}$.

Câu 19

Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,5$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

- (A) 0,4. (B) 0,5. (C) 0,25. (D) 0,625.

Câu 20

Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,5$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất biến cố B không xảy ra với điều kiện biến cố A xảy ra là

- (A) 0,6. (B) 0,5. (C) 0,75. (D) 0,25.

Câu 21

Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,5$ và $P(AB) = 0,2$. Giá trị của biểu thức $\frac{P(A|B)}{P(A)} - \frac{P(B|A)}{P(B)}$ là

- (A) -0,5. (B) 0. (C) 0,5. (D) 1.

Câu 22

Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố "Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I". Xác suất của biến cố A là

- (A) $\frac{37}{140}$. (B) $\frac{37}{50}$. (C) $\frac{5}{14}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 23

Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gấp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố “Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I” và B là biến cố “Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng”. Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

Ⓐ 0,37.

Ⓑ 0,5.

Ⓒ $\frac{37}{50}$.

Ⓓ $\frac{5}{14}$.

Câu 24

Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân	Kết quả khảo sát	
	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gấp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố “Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I” và B là biến cố “Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng”. Xác suất của biến cố B với điều kiện A không xảy ra là

Ⓐ $\frac{2}{7}$.

Ⓑ 0,9.

Ⓒ 0,7.

Ⓓ $\frac{9}{20}$.

Câu 25

Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.6$.

a) $P(A|B) = 0.6$.

b) $P(B|\bar{A}) = 0.4$.

c) $P(\bar{B}|A) = 0.4$.

d) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.6$.

Câu 26

Cho hai biến cố A và B , với $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.4$.

a) $P(A) = 0.6$ và $P(\bar{B}) = 0.2$.

b) $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

c) $P(\bar{B}|A) = \frac{2}{3}$.

d) $P(\overline{A \cap B}) = \frac{3}{5}$.

Câu 27

Một công ty truyền thông đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0.5 và dự án 2 là 0.6. Khả năng thắng thầu của cả 2 dự án là 0.4. Gọi A , B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

a) A và B là hai biến cố độc lập.

- b) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0.3.
- c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0.4.
- d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0.8.

Câu 28

Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng.

- a) Xác suất để có tên Hiền là $\frac{1}{10}$.
- b) Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nữ là $\frac{3}{17}$.
- c) Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nam là $\frac{2}{13}$.
- d) Nếu thầy giáo gọi 1 bạn có tên là Hiền lên bảng thì xác suất để bạn đó là bạn nữ là $\frac{3}{17}$.

§2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức xác suất toàn phần

Định nghĩa 2.1. Cho hai biến cố A và B . Khi đó, ta có công thức sau:

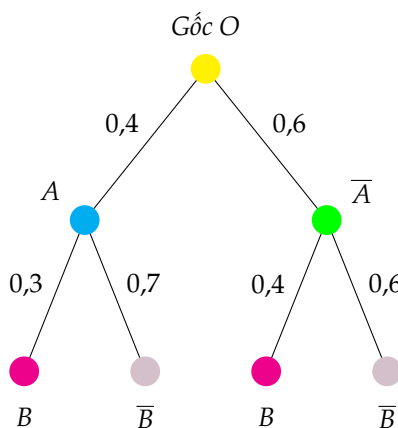
$$P(B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}).$$

Công thức trên được gọi là công thức xác suất toàn phần.

Ví dụ 1

Ông An hàng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy.

! Một phương pháp mô tả trực quan công thức xác suất toàn phần là dùng sơ đồ hình cây.
Trở lại Ví dụ 1. Kí hiệu A là biến cố: “Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy”; B là biến cố: “Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy”.
Ta vẽ sơ đồ hình cây như sau:



Trên nhánh cây OA và O $\bar{A}$ tương ứng ghi $P(A)$ và $P(\bar{A})$;
Trên nhánh cây AB và A $\bar{B}$ tương ứng ghi $P(B | A)$ và $P(\bar{B} | A)$;
Trên nhánh cây $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$ tương ứng ghi $P(B | \bar{A})$ và $P(\bar{B} | \bar{A})$.
Có hai nhánh cây đi tới B là OAB và O $\bar{A}B$. Vậy:

$$P(B) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,36.$$

Ví dụ 2

Trở lại Ví dụ 1. Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe buýt.

Gọi A là biến cố: “Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy”; B là biến cố: “Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy”. Ta cần tính $P(\bar{B})$. Xét sơ đồ hình cây ở trên, ta có hai nhánh cây đi tới $\bar{B}$ là OAB

và $O\overline{A}B$. Khi đó

$$P(B) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,6 = 0,64.$$

Ví dụ 3

Với giả thiết như vận dụng trên.

- Hãy ước lượng tỉ lệ cây con có kiểu gene BB.
- Sử dụng kết quả của vận dụng trên và câu a, hãy ước lượng tỉ lệ cây con có kiểu gene Bb.

2. Công thức Bayes

Định nghĩa 2.2. Cho A và B là hai biến cố, với $P(B) > 0$.

Khi đó, ta có công thức sau:

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(A) \cdot P(B | A) + P(\overline{A}) \cdot P(B | \overline{A})}.$$

Công thức trên có tên là công thức Bayes.

 Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\overline{A}) \cdot P(B | \overline{A}).$$

Do đó, công thức Bayes còn có thể viết dưới dạng:

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}.$$

Ý nghĩa của công thức Bayes: Một nhà nghiên cứu quan tâm đến xác suất xảy ra của biến cố A . Theo tính toán ban đầu A có xác suất là $P(A) = p$. Sau đó, nhà nghiên cứu có được thông tin rằng: “Biến cố B đã xảy ra”. Với thông tin mới này, nhà nghiên cứu sẽ cập nhật lại hiểu biết của mình về khả năng xảy ra biến cố A , bằng cách tính $P(A | B)$, xác suất của A khi biết B đã xảy ra. Công thức Bayes cho ta tính $P(A | B)$.

Ví dụ 4

Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.

Ví dụ 5

Trong một kho rượu có 30% là rượu loại I. Chọn ngẫu nhiên một chai rượu đưa cho ông Tùng, một người sành rượu, để nếm thử. Biết rằng, một chai rượu loại I có xác suất 0,9 để ông Tùng xác nhận là loại I; một chai rượu không phải loại I có xác suất 0,95 để ông Tùng xác nhận đây không phải là loại I. Sau khi nếm, ông Tùng xác nhận đây là rượu loại I. Tính xác suất để chai rượu đúng là rượu loại I.

Ví dụ 6

Trở lại tình huống mở đầu Mục 2. Tính xác suất để ông M mắc bệnh hiểm nghèo X nếu kết quả xét nghiệm cho kết quả dương tính.

Ví dụ 7

Trở lại tình huống mở đầu Mục 2. Thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo X là 0,2%.

- Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo X của ông M là bao nhiêu?
- Sau khi xét nghiệm cho kết quả dương tính, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo X của ông M là bao nhiêu?

Ví dụ 8

Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả là âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm là dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính.

- Trước khi tiến hành xét nghiệm xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?
- Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?

Tóm tắt kiến thức

- ✔ Công thức xác suất toàn phần $P(B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A})$.
- ✔ Công thức Bayes $P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A})}$. (1)
- ✔ Công thức Bayes $P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}$. (2)

B BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1**

Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bộ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó.

Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa.

Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bộ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên.

Bài 2

Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng.

Bài 3

Tại nhà máy X sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy X trên thị trường.

- Tính xác suất để linh kiện điện tử đó được đóng dấu OTK.
- Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Bài 4

Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

- Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng;
- Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

Bài 5

Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

- Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.
- Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để đó là thư đúng.
- Trong số các thư bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư đúng? Trong số các thư không bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư rác?

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hai biến cố A và B , với $P(B) = 0,8$, $P(A|B) = 0,7$, $P(A|\bar{B}) = 0,45$.

- Ⓐ 0,25. Ⓑ 0,65. Ⓒ 0,55. Ⓓ 0,5.

Câu 2

Cho hai biến cố A và B , với $P(B) = 0,8$, $P(A|B) = 0,7$, $P(A|\bar{B}) = 0,45$.

- Ⓐ 0,25. Ⓑ 0,65. Ⓒ $\frac{56}{65}$. Ⓓ 0,5.

Câu 3

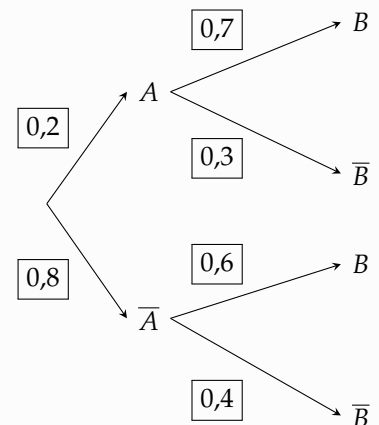
Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Khánh Hòa nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%.

- Ⓐ 15%. Ⓑ 29%. Ⓒ 31%. Ⓓ 26%.

Câu 4

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố B là

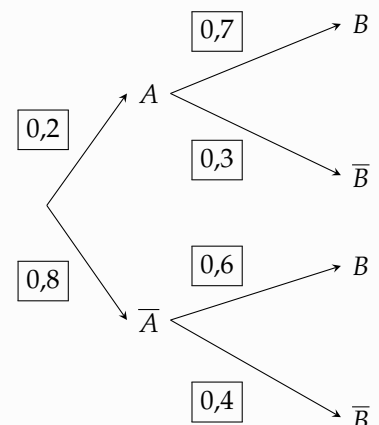
- Ⓐ 0,42. Ⓑ 0,62. Ⓒ 0,28. Ⓓ 0,48.



Câu 5

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất điều kiện $P(A | B)$ là

- Ⓐ $\frac{7}{31}$. Ⓑ 0,7. Ⓒ $\frac{7}{50}$. Ⓓ 0,48.



Câu 6

Tính xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi.

(A) $\frac{7}{13}$.

(B) $\frac{6}{13}$.

(C) $\frac{4}{13}$.

(D) $\frac{9}{13}$.

Câu 7

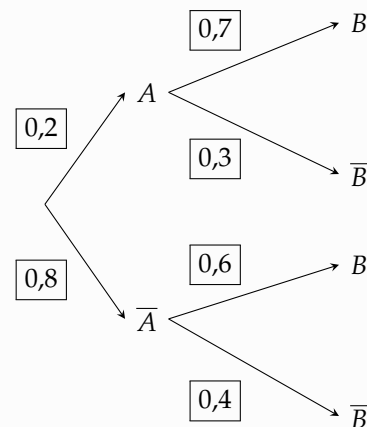
Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố B là

(A) 0,42.

(B) 0,62.

(C) 0,28.

(D) 0,48.



Câu 8

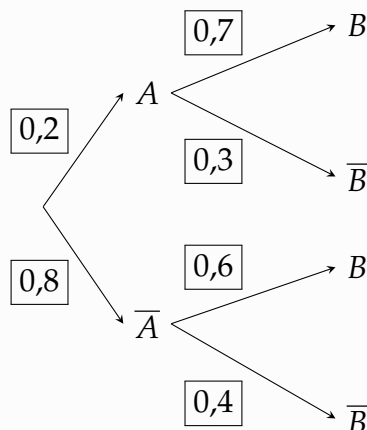
Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất điều kiện $P(A | B)$ là

(A) $\frac{7}{31}$.

(B) 0,7.

(C) $\frac{7}{50}$.

(D) 0,48.



Câu 9

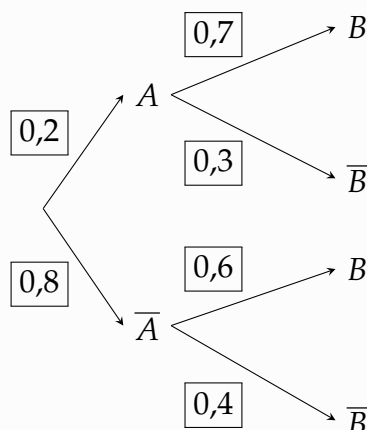
Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Giá trị của biểu thức $\frac{P(B)P(\bar{A} | B)}{P(\bar{A})}$ là

(A) 0,48.

(B) 0,3.

(C) 0,5.

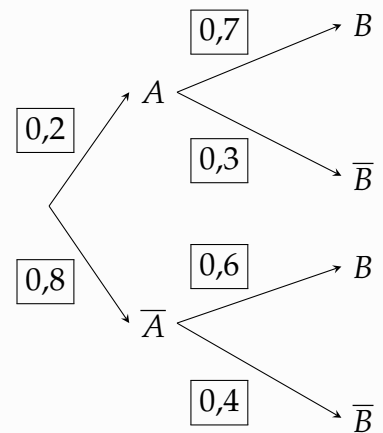
(D) 0,6.



Câu 10

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố cả A và B đều không xảy ra là

- Ⓐ 0,32. Ⓑ 0,4. Ⓒ 0,8. Ⓓ 0,92.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Một lô hàng có 80 chính phẩm và 20 phế phẩm. Trong quá trình vận chuyển về kho thì bị mất 1 sản phẩm. Về đến kho, người ta chọn ngẫu nhiên một sản phẩm để kiểm tra chất lượng.

- a) Xác suất để sản phẩm bị mất là chính phẩm là 0,8.
 b) Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm nếu biết rằng sản phẩm bị mất là chính phẩm là 0,2.
 c) Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm nếu biết rằng sản phẩm bị mất là phế phẩm là 0,2.
 d) Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm là 0,2.

Câu 2

Người ta đánh giá tính hiệu quả của một quy trình sàng lọc bằng cách tính xác suất xảy ra âm tính giả hoặc dương tính giả. Xét các kí hiệu sau đây

- ✓ T^+ : Kết quả xét nghiệm dương tính (và cho thấy người đó mắc bệnh này).
 ✓ T^- : Kết quả xét nghiệm âm tính (và cho thấy người đó không mắc bệnh này).
 ✓ D^c : Người đó thực sự không có bệnh.
 ✓ D : Người thực sự mắc bệnh.

Người ta thấy rằng độ nhạy của phép kiểm tra có xác suất có điều kiện như sau

$$P(T^+|D) = 0,98 \quad \text{và} \quad P(T^-|D^c) = 0,99.$$

Biết rằng tỉ lệ nhiễm bệnh của cộng đồng là 2 trên 1 triệu người, hãy cho biết mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

- a) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm dương tính biết rằng người đó thực sự không có bệnh là 0,02.
 b) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm âm tính biết rằng người đó thực sự mắc bệnh là 0,02.
 c) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm âm tính là 0,98999806.
 d) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm dương tính là 0,02000192.

Câu 3

Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính. Khẳng định nào sau đây đúng?

- a) Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 0,995.
- b) Xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N bị bệnh Y là 0,03.
- c) Xác suất để bà N có xét nghiệm âm tính là 0,9.
- d) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 99,97%.

Câu 4

Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá là 70% và 15%. Giả sử ta gặp một cư dân của xã, xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

- a) Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó không hút thuốc lá là 80%.
- b) Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 20%.
- c) Xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là 26%.
- d) Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 54%.

Câu 5

Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số.

- a) Số viên bi màu đỏ có đánh số là 30.
- b) Số viên bi màu vàng không đánh số là 15.
- c) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $\frac{3}{5}$.
- d) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra không có đánh số là $\frac{7}{16}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

§3. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG VI

A TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B | A) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P(AB)$ là

- Ⓐ $\frac{2}{15}$. Ⓑ $\frac{3}{16}$. Ⓒ $\frac{1}{5}$. Ⓓ $\frac{4}{15}$.

Câu 2

Cho $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(\bar{B}\bar{A})$ là

- Ⓐ $\frac{1}{7}$. Ⓑ $\frac{4}{19}$. Ⓒ $\frac{4}{21}$. Ⓓ $\frac{3}{20}$.

Câu 3

Cho $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B | A) = \frac{1}{3}$; $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(B)$ là

- Ⓐ $\frac{19}{60}$. Ⓑ $\frac{17}{60}$. Ⓒ $\frac{9}{20}$. Ⓓ $\frac{7}{30}$.

Câu 4

An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la đen là

- Ⓐ $\frac{1}{3}$. Ⓑ $\frac{1}{4}$. Ⓒ $\frac{2}{5}$. Ⓓ $\frac{3}{7}$.

Câu 5

An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la trắng là

- Ⓐ $\frac{1}{5}$. Ⓑ $\frac{2}{15}$. Ⓒ $\frac{3}{16}$. Ⓓ $\frac{4}{17}$.

Câu 6

An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được chiếc kẹo sô-cô-la đen ở lần thứ nhất và chiếc kẹo sô-cô-la trắng ở lần thứ hai là

- Ⓐ $\frac{1}{5}$. Ⓑ $\frac{3}{16}$. Ⓒ $\frac{1}{4}$. Ⓓ $\frac{4}{17}$.

B TỰ LUẬN

Bài 1

Để thử nghiệm tác dụng điều trị bệnh mất ngủ của hai loại thuốc X và Y, người ta tiến hành thử nghiệm trên 4000 người bệnh tình nguyện. Kết quả được cho trong bảng thống kê sau:

	Dùng thuốc	
Kết quả	X	Y
Khỏi bệnh	1600	1200
Không khỏi bệnh	800	400

Chọn ngẫu nhiên 1 người bệnh tham gia tình nguyện thử nghiệm thuốc.

- Tính xác suất để người đó khỏi bệnh nếu biết người đó uống thuốc X.
- Tính xác suất để người bệnh đó uống thuốc Y, biết rằng người đó khỏi bệnh.

Bài 2

Một nhóm có 25 học sinh, trong đó 14 học sinh học khá môn Toán, 16 học sinh học khá môn Vật lí, 1 em không học khá cả hai môn Toán và Vật lí. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số đó, tính xác suất để học sinh đó

- Học khá môn Toán, đồng thời học khá môn Vật lí.
- Học khá môn Toán, nhưng không học khá môn Vật lí.
- Học khá môn Toán, biết rằng học sinh đó học khá môn Vật lí.

Bài 3

Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Bác Mai bắt một con gà trong số đó theo cách sau: Bác tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng I, nếu số chấm không chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng II. Sau đó, từ chuồng đã chọn bác bắt ngẫu nhiên một con gà. Tính xác suất để bác Mai bắt được con gà mái.

Bài 4

Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Người có bệnh nền thì với xác suất 0,35 có phản ứng phụ sau tiêm, người không có bệnh nền thì chỉ có phản ứng phụ sau tiêm với xác suất 0,16. Chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine và người này có phản ứng phụ. Tính xác suất để người này có bệnh nền, biết rằng tỉ lệ người có bệnh nền ở địa phương X là 18%.