

SỔ BÀI TẬP ĐIỀN KHUYẾT

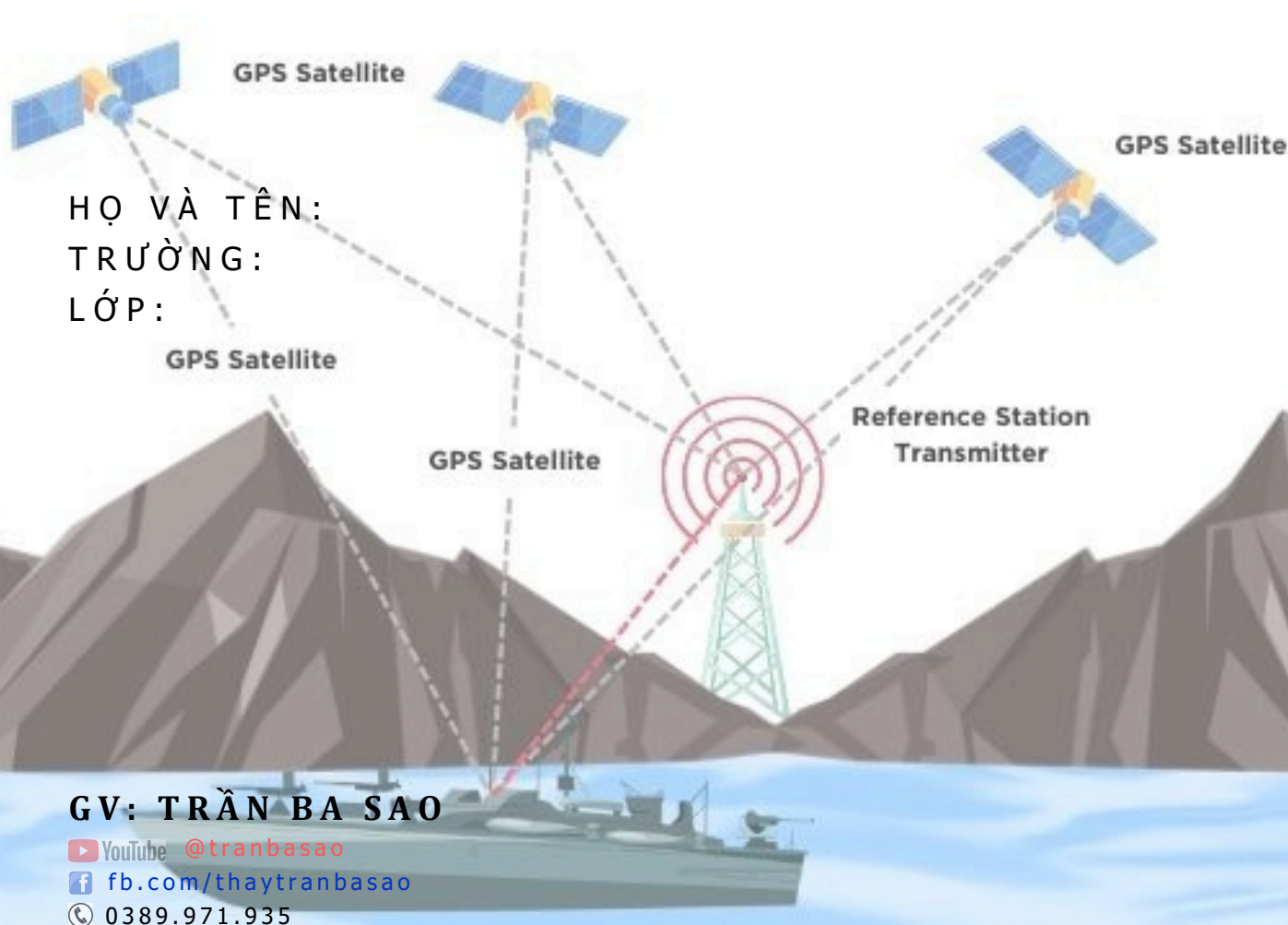
HỌC KÌ 1

TOÁN 12

CHƯƠNG II. VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

CHƯƠNG TRÌNH MỚI

2024 - 2025



CHƯƠNG 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1.

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đoạn thẳng mà một trong hai đầu mút của nó đã được chỉ rõ là điểm đầu, còn đầu mút kia là điểm cuối. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ được dùng để chỉ vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B.

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

.....

.....

Luyện tập 1. Cho một hình chóp tứ giác. Hãy chỉ ra tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai đỉnh khác nhau của hình chóp.

.....

.....

2. Độ dài của vectơ. Vectơ cùng phương, cùng hướng. Vectơ bằng nhau

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là **giá** của vectơ.
- Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là hai vectơ **cùng phương**.
- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai **vectơ bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Hai **vectơ đối nhau** nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

Lưu ý.

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của một vectơ, ta kí hiệu vectơ đó là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,...
- Từ một điểm bất kì, luôn dựng được một và chỉ một vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ cho trước.
- Với mỗi điểm A, ta quy ước có một vectơ đặc biệt, kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không. Ta còn quy ước là $\overrightarrow{AA}$ có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD có độ dài mỗi cạnh bằng 2.

- Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
- Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ACD) ?
- Trong các vectơ tìm được ở câu a, có cặp vectơ nào bằng nhau không?
- Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.
- Có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ diện ABCD?

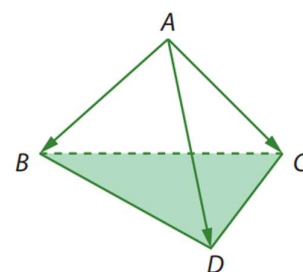
.....

.....

.....

.....

.....

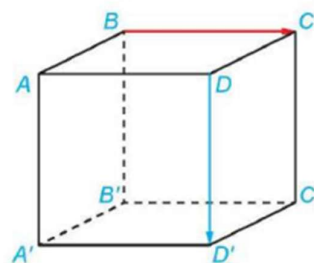


Luyện tập 2.1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên bằng 5.

- Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp?
- Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ có cùng nằm trên một mặt phẳng không?
- Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.
- Tìm các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AD}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.

Luyện tập 2.2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 3.

- Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trên một mặt phẳng không?
- Tìm các vectơ bằng $\overrightarrow{BC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.
- Tìm các vectơ đối của $\overrightarrow{DD'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.
- Tìm độ dài của $\overrightarrow{A'B}$.

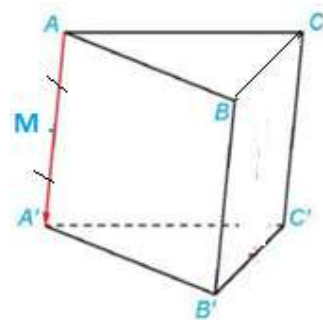


Luyện tập 2.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$.

- Tìm các vectơ bằng $\overrightarrow{AD'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$.
- Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

Luyện tập 2.4. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

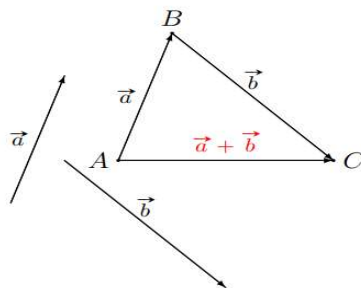
- Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trên một mặt phẳng không?
- Các vectơ nào bằng $\overrightarrow{CC'}$.
- Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.



II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ, TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1. Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$** , kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ**.

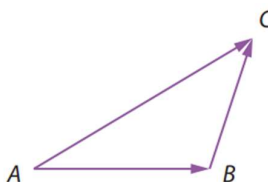


Lưu ý.

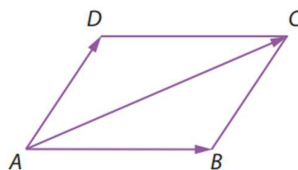
- Các tính chất:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

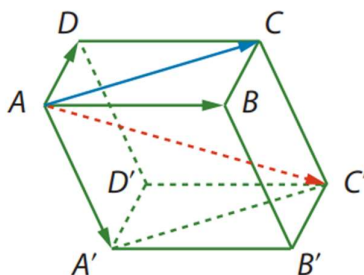
- Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



- Quy tắc hình bình hành: Nếu ABCD là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



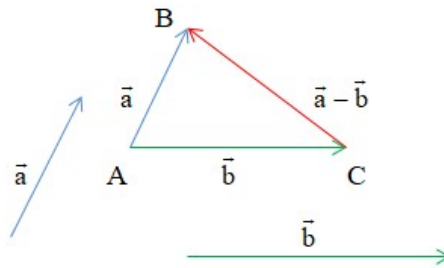
- Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



2. Hiệu hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu hai vectơ còn được gọi là **phép trừ vectơ**.



Lưu ý. Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

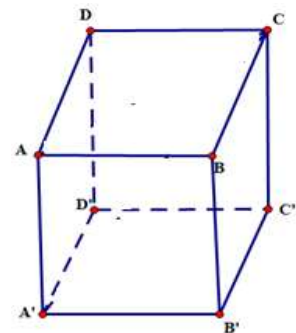
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Lưu ý.

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

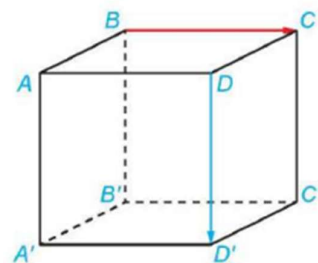
Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 4$. Tính độ dài các vectơ sau:

- $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$.
- $\vec{AD} + \vec{CC'} + \vec{A'B'}$.



Luyện tập 3.1. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng a .

- Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.
- Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'}$.
- Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.



Luyện tập 3.2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$.

Luyện tập 3.3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng:

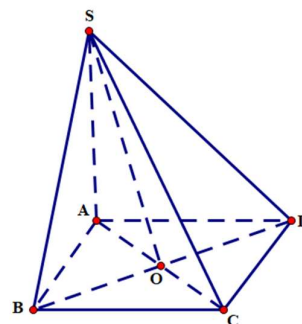
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}.$$

Luyện tập 3.4. Cho tứ diện $ABCD$. gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
- Gọi I là trung điểm của MN , chứng minh $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

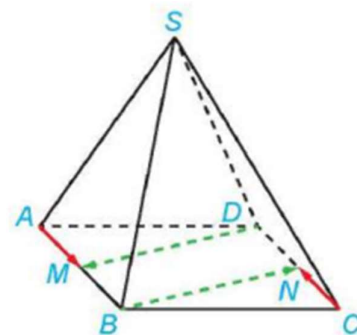
Luyện tập 3.5. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian. Chứng minh: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$.

Luyện tập 3.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Chứng minh $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

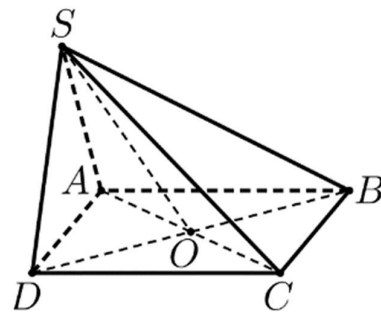


Luyện tập 3.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau; b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.



Luyện tập 3.8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.



Luyện tập 3.9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
- $2(\overrightarrow{SO} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{SC}) = \overrightarrow{DB}$.
- $\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{SB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$.

Luyện tập 3.10. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$;
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$.

Luyện tập 3.11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Chứng minh:

$$\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'}).$$

Luyện tập 3.12. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD};$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

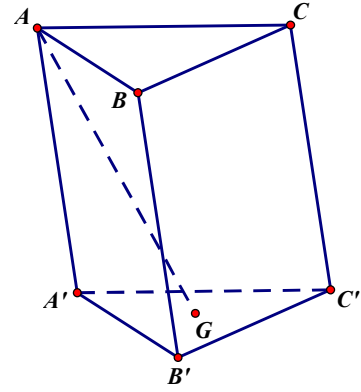
Luyện tập 3.13. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC , gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}.$

Luyện tập 3.14. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = a; \overrightarrow{AB} = b; \overrightarrow{AC} = c; \overrightarrow{BC_1} = d.$

Chứng minh $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}.$

Luyện tập 4.4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Chứng minh $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$



Luyện tập 4.5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BDA', CB'D'$. Chứng minh các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

Luyện tập 4.6. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB và CD sao cho:

$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho:

$\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$.

Chứng minh với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Luyện tập 4.7. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD.

- Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Luyện tập 4.8. Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho:

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

- Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
- Gọi G là trung điểm của PQ, chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Luyện tập 4.9. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C', điểm K thuộc B'C' sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$.

- Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{BJ}$ qua 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
- Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo vectơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ từ đó suy ra 3 vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng.

III. GÓC GIỮA HAI VECTƠ, TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

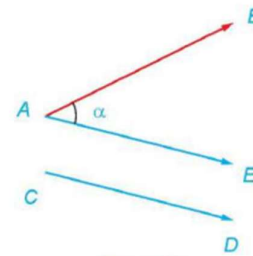
1. Góc giữa hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB} (0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Lưu ý.

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$.

- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .



2. Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lưu ý.

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

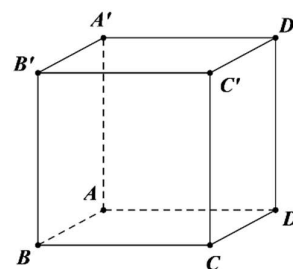
- Với mọi vectơ $\vec{a}$ ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;

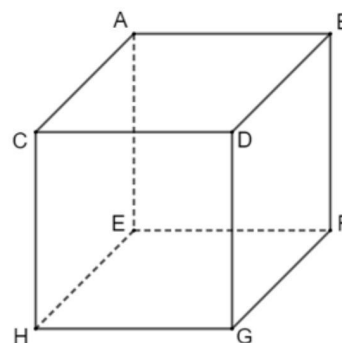
b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.



Luyện tập 5.1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$;

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.



Luyện tập 5.2. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 5.3. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tìm $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

.....

.....

.....

Luyện tập 6.1. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45° , hãy tính:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$; c) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 6.2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$?

.....

.....

.....

.....

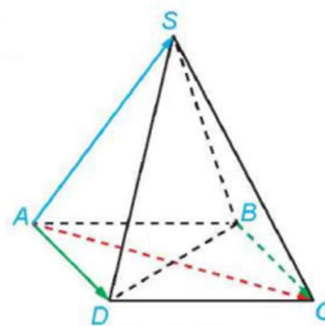
.....

Luyện tập 6.3. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

Luyện tập 6.4. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Tính $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$.

Luyện tập 6.5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$;
b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Luyện tập 6.5. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

- a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$; b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

Luyện tập 6.6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Luyện tập 6.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Tính $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Luyện tập 6.8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Luyện tập 6.9. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = k$.

Luyện tập 6.10. Cho tam giác ABC có diện tích S . Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - 2k(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Luyện tập 6.11. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
 b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

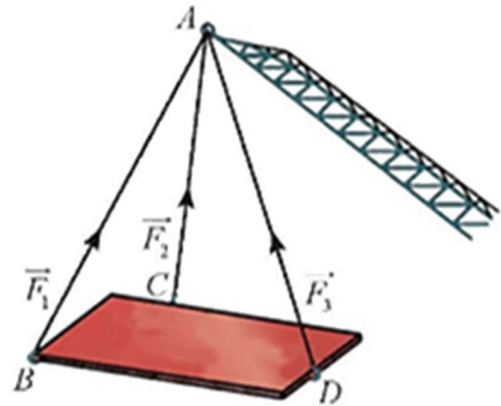
Luyện tập 6.11. Cho tứ diện ABCD có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Luyện tập 6.12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 .$$

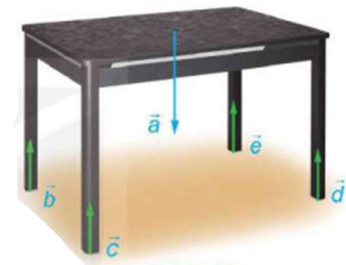
IV. VẬN DỤNG KIẾN THỨC VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 7. Trong hình dưới, cho biết ba vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biểu diễn lực căng của các sợi dây cáp AB, AC, AD tác dụng lên vật nặng. Giá của ba vectơ này có cùng nằm trên một mặt phẳng không?

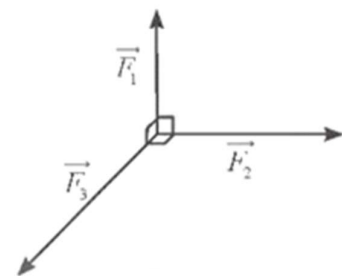


Luyện tập 7. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).

- Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$.
- Giải thích vì sao các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.



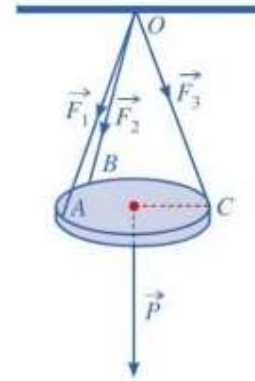
Ví dụ 8. Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 3 N; 5 N; 6 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



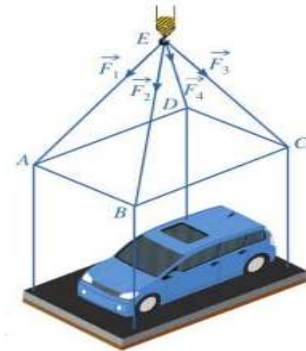
Luyện tập 8.1. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là 30 N; 25 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn là 10 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

Luyện tập 8.2. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(\text{N})$.

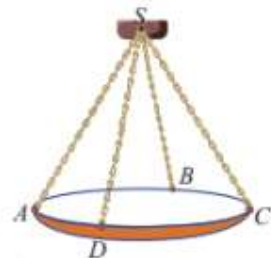
Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.



Luyện tập 8.3. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật ABCD, mặt phẳng (ABCD) song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA,EB,EC,ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $5000(\text{N})$ và trọng lượng khung sắt là $2000(\text{N})$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô.

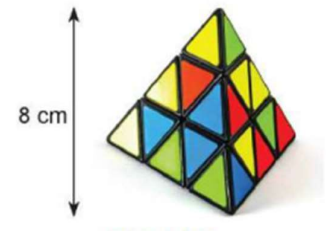


Luyện tập 8.4. Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m = 5(\text{kg})$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA,SB,SC,SD sao cho S.ABCD là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$.



- Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10(\text{m/s}^2)$, tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.
- Tìm độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp.

Luyện tập 8.5. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện ABCD là một điểm I thoả mãn $\overline{AI} = 3\overline{G}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm.



Luyện tập 8.6. Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau. Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao?



Luyện tập 8.7. Theo định luật II Newton, gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

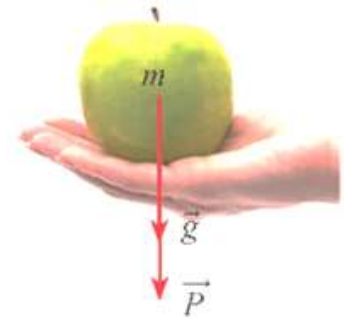
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực có độ lớn là bao nhiêu?



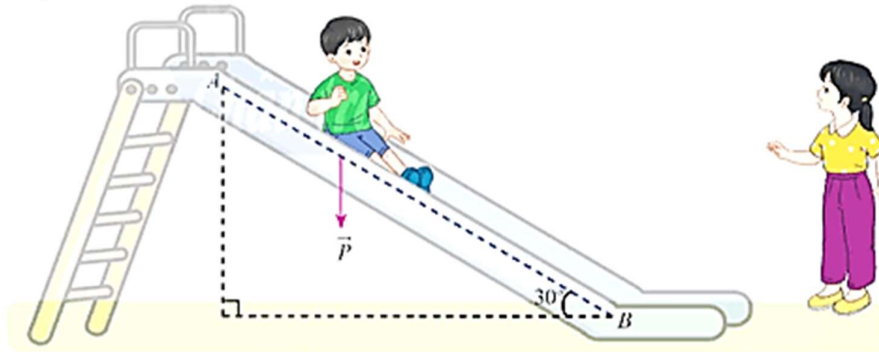
Luyện tập 8.9. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam.



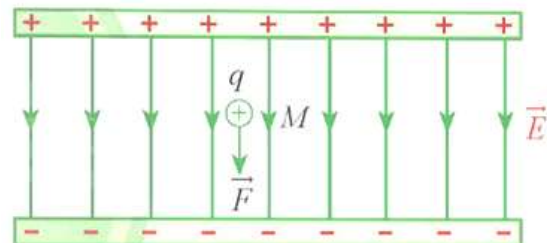
Luyện tập 8.8. Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài $3,5 \text{ m}$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° .

- Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- Cho biết công $A(\text{J})$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

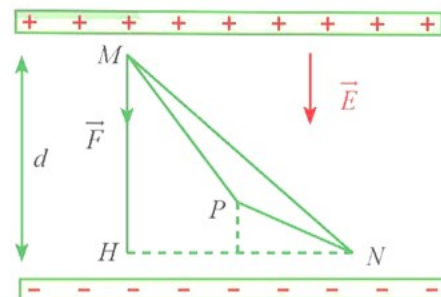
Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.



Luyện tập 8.10. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} \text{ C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 \text{ N/C}$.



Luyện tập 8.11. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN. Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ và $d = MH = 5 \text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



B. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI BÀI

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn:

Câu 1: Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

- a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
- d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

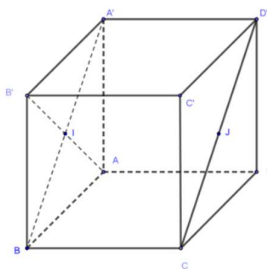
Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{BA}$.
- B. $\overrightarrow{CD}$.
- C. $\overrightarrow{B'A'}$.
- D. $\overrightarrow{D'C'}$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Số vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện là

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' .



Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

- A. $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$.
- B. $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$.
- C. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$.
- D. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức vectơ đúng:

- A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$.
- B. $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.
- C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- D. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ bằng

- A. 2.
- B. $\sqrt{2}$.
- C. $\sqrt{3}$.
- D. 1.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ bằng

- A. $(1 + \sqrt{3})a$.
- B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- C. $a\sqrt{6}$.
- D. $a\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Chọn mệnh đề đúng.

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.
- B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 8\overrightarrow{SO}$.
- C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.
- D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{OS}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
- B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
- C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
- D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 10: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CB, AD và G là trọng tâm tam giác BCD , α là góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{NP}$. Khi đó $\cos \alpha$ có giá trị là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$
- D. $\frac{1}{2}$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 2. Tích vô hướng của $\overrightarrow{AA'}. \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 0. D. 1.

Câu 12: Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{CD}$ bằng?

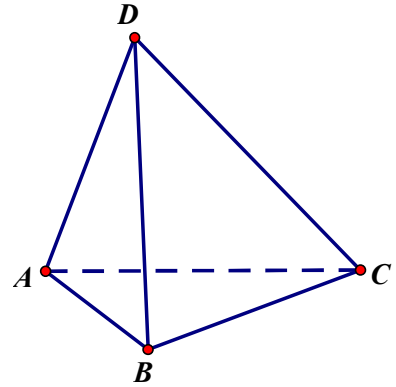
- A. a^2 B. $\frac{a^2}{2}$ C. 0 D. $-\frac{a^2}{2}$

Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng 3.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

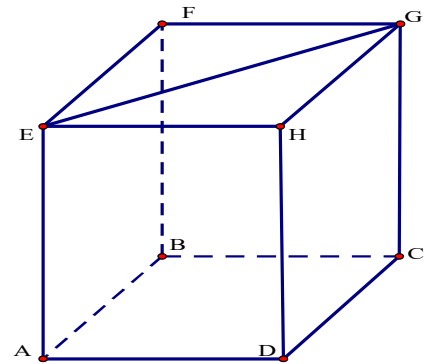
- a) Số vectơ có điểm đầu là D, điểm cuối là các đỉnh còn lại của tứ diện là 3.
 b) Độ dài của mỗi vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ diện là 2
 c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA}$.
 d) $\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{BC} = -\frac{9}{2}$.



Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh 2.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

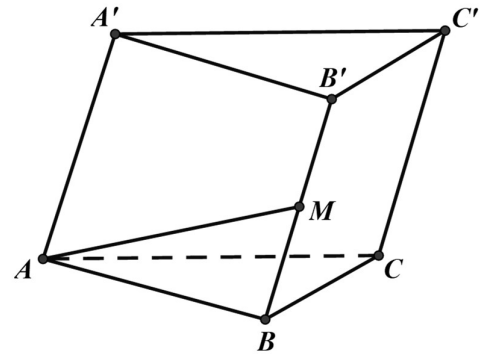
- a) Giá của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ cùng nằm trong một mặt phẳng.
 b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.
 c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HD}| = 3\sqrt{2}$.
 d) Ta có $\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{EG}$ bằng 4.



Câu 15: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' .

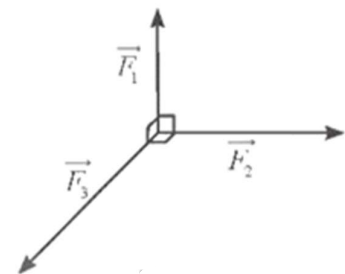
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Giá của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.
 b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AM}$
 d) Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ thì $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Câu 16: Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 10 N; 15N; 8 N (Hình 17). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

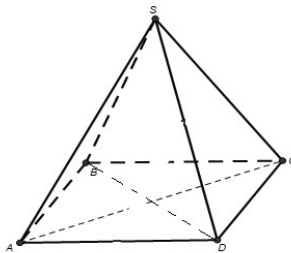
- a) Giá của các vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.
 b) $\vec{F}_3 + \vec{F}_2 = 2\vec{F}_1$.
 c) Độ lớn của hợp hai lực $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ là 25(N).
 d) Độ lớn hợp lực của ba lực đã cho là 19,7 N (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).



Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng bao nhiêu?

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc $(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DA})$ bằng bao nhiêu độ?



Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Vectơ $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = m\overrightarrow{SO}$, giá trị m bằng bao nhiêu?

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng 5. Độ dài của $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC}$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).

Câu 21: Cho tứ diện đều $ABCD$ Giá trị của $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ bằng bao nhiêu?

Câu 22: Nếu một vật có khối lượng $m(\text{kg})$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một vật có khối lượng 150 gam.

-----HẾT-----

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Vectơ nào dưới đây bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$?

- A. $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{DA}$.

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào dưới đây bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

- A. $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{B'A'}$. D. $\overrightarrow{D'C'}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. Số vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh là 2. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 3. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. 3. C. $3\sqrt{3}$. D. 6.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCDEFGH$, vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{GE}$. B. $\overrightarrow{CE}$. C. $\overrightarrow{CH}$. D. $\overrightarrow{EC}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. 3. C. $\sqrt{3}$. D. 6.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$. B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$. C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$. D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$. D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$.

Câu 12: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
 B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
 C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

- A. $\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. C. $\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{B'C'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

- A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}.$$

- A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.
 B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.
 C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
 D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

- A. M là trung điểm BB' . B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
 C. M là trung điểm CC' . D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}.$$

- A. $k = 4$. B. $k = 1$. C. $k = 0$. D. $k = 2$.

Câu 20: Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

- A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
 C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

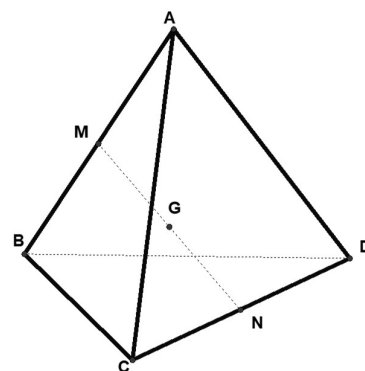
Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”.

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD).
 B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD .
 C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC .
 D. Chưa thể xác định được.

Câu 22: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.
 B. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC .
 C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.
 D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.



Câu 23: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.
 B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Câu 24: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = 3$. D. $k = 2$.

Câu 25: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

- A. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
 B. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP.
 C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
 D. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 26: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}; \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. M là trung điểm BB'. B. M là tâm hình bình hành BCC'B'.
 C. M là tâm hình bình hành ABB'A'. D. M là trung điểm CC'.

Câu 27: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. M là điểm trên AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn C'D sao cho $x\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{C'N}$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$?

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 28: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$.

Tỉ số $\frac{MN}{BD'}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$

Câu 29: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 30: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 31: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 2. B. $5\sqrt{2}$. C. 5. D. 10.

Câu 32: Cho hình chóp đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng a. Góc $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BA})$ bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Câu 33: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45° .

Tích vô hướng $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $-5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vectơ $3\vec{a} + 5\vec{b}$ bằng

- A. $5\sqrt{5}$. B. $\sqrt{24}$. C. 8. D. 124.

Câu 36: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 37: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

- A. 45° B. 30° C. 90° D. 60°

Câu 38: Cho tứ diện ABCD đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 39: Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 40: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

- A. AB và CD chéo nhau. B. AB và CD vuông góc với nhau.
C. AB và CD đồng phẳng. D. AB và CD cắt nhau.

Bài 2.

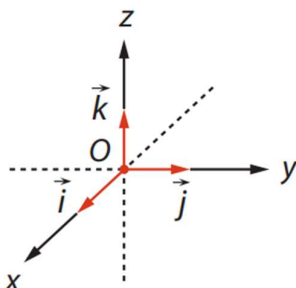
TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN**A. LÝ THUYẾT****I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

- Hệ ba trục trên được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.
- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

**II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN****1. Tọa độ của điểm**

Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .

Nhận xét.

Nếu điểm M có tọa độ $(x; y; z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) có tọa độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$, $(x; 0; z)$.

2. Tọa độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là tọa độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.

Chú ý:

$$*\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \text{ nên } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$*\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \text{ nên } \vec{j} = (0; 1; 0).$$

$$*\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} \text{ nên } \vec{k} = (0; 0; 1).$$

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, dựng điểm $G(2; -1; 3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 1. Trong không gian Oxyz cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, có AB, AC, AA' theo thứ tự cùng hướng với các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = a, AD = b, AA' = c$. M là trung điểm cạnh $C'D'$. Hãy xác định tọa độ các điểm B, C, C' và M.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, biết:

a) $\vec{OM} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{ON} = \vec{i} - 5\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M, N;

b) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, biết:

a) $A(-5; -2; 1), B(0; 4; -11)$. Tính $\vec{OA}, \vec{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

b) $\vec{a} = (-3; 2; -1), \vec{b} = (3; 0; 12)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz, cho các điểm $M(0; -1; 2), N(2; -3; 0)$ và $\vec{u} = (3; -2; 1)$.

- a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$;
 b) Tìm tọa độ điểm P biết $\overrightarrow{MP} = \vec{u}$.

Luyện tập 3.1. Trong không gian Oxyz xác định tọa độ của điểm M trong mỗi trường hợp sau:

- a) M trùng với gốc tọa độ;
 b) M nằm trên tia đối của tia Ox và $OM = 3$;
 c) M nằm trên tia Oy và $OM = 2$;
 d) M nằm trên tia đối của tia Oz và $OM = 4$.

Luyện tập 3.2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $M(-2; 3; 4)$.

- a) Tìm tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của M trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz;
 b) Tìm tọa độ các điểm M'_1, M'_2, M'_3 lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).

Luyện tập 3.3. Trong không gian Oxyz xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$; b) $A(1; -3; 7)$ và $B(1; -3; 7)$; c) $A(5; 4; 9)$ và $B(-5; 7; 2)$.

Ví dụ 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Luyện tập 4. Trong không gian Oxyz, cho hình bình hành ABCD. Biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ và $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Ví dụ 5. Trong không gian Oxyz cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $C'(2; -3; 6)$.

- a) Xác định tọa độ của điểm C.

b) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

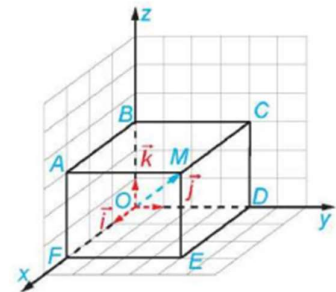
Luyện tập 5.1. Trong không gian Oxyz cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2)$, $B(3;2;5)$, $C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm tọa độ của các điểm B', C' .

Luyện tập 5.2. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

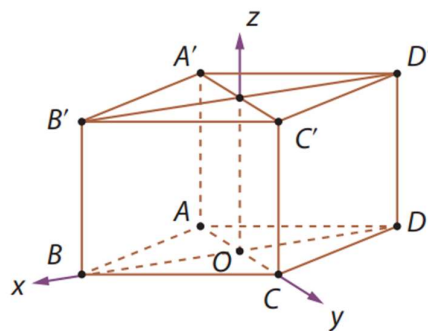
Luyện tập 5.3. Hình dưới minh họa một hệ tọa độ Oxyz trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm tọa độ của điểm O, E, F, D, A, B, C, M ?



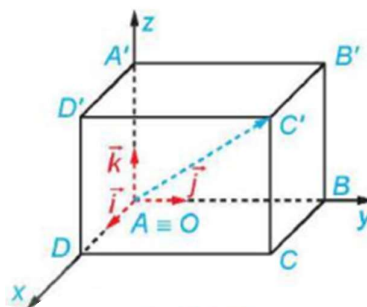
Luyện tập 5.4. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A' trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Giả sử đỉnh C có tọa độ là $(2;3;5)$ đối với hệ tọa độ Oxyz, hãy tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Luyện tập 5.5. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Hai đường chéo AC, BD của đáy có chiều dài lần lượt là a, b . Cạnh bên $AA' = c$. Hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc trùng với giao điểm O của hai đường chéo hình thoi, có trục Ox chứa đỉnh B và trục Oy chứa đỉnh C như hình vẽ. Hãy xác định:

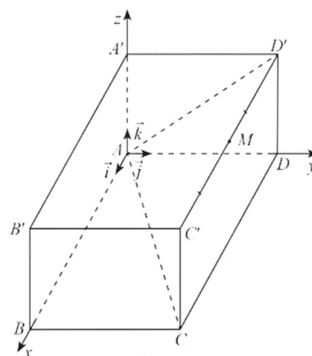
- Toạ độ các đỉnh của hình hộp;
- Toạ độ vectơ BD' .



Luyện tập 5.6. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D, B, A' có toạ độ lần lượt là $(2;0;0), (0;4;0), (0;0;3)$. Xác định toạ độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.

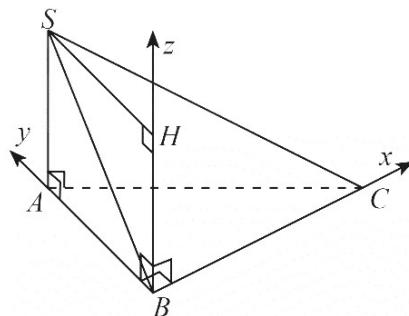


Luyện tập 5.7. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 5, AD = 6, AA' = 9$. Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

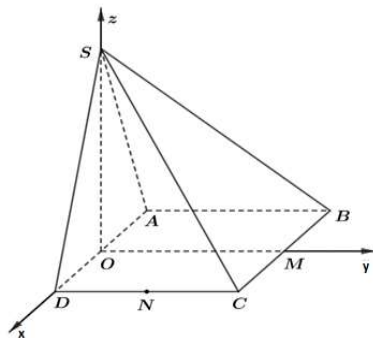


Luyện tập 5.8. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

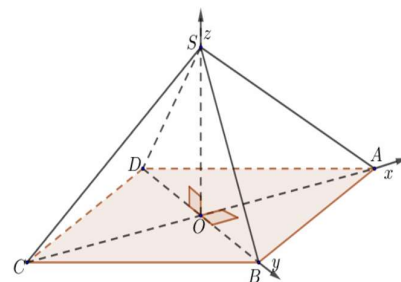
- Xác định một hệ toạ độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.
- Tìm toạ độ các điểm A, B, C, S .



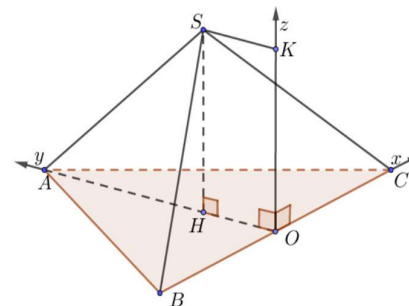
Luyện tập 5.9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 2, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O , M và N lần lượt là trung điểm của AD , BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chóp?



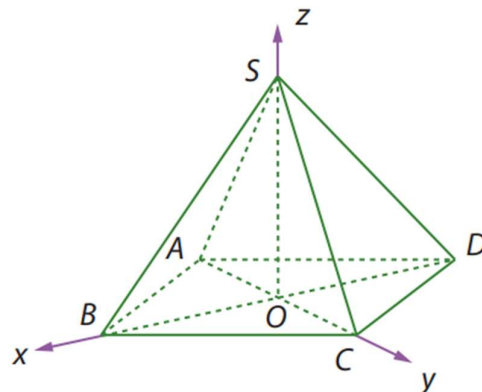
Luyện tập 5.10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 1$, $SA = \sqrt{2}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, D, S .



Luyện tập 5.11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = 1$, $SA = 2$. Gọi H là hình chiếu điểm S trên mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A, B, C, S, H, K (K là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



Luyện tập 5.12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD . Biết $SA = a$, $SO = h$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với Ox , Oy , Oz tương ứng là các đường thẳng OB , OC , OS như hình vẽ. Hãy xác định tọa độ các điểm S, A, B, C, D .

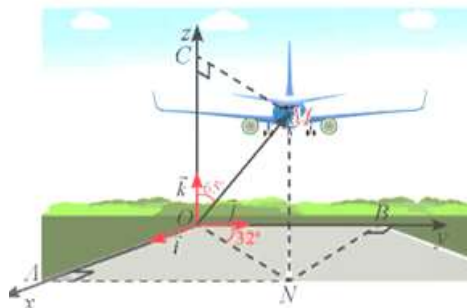


III. BÀI TOÁN THỰC TẾ TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

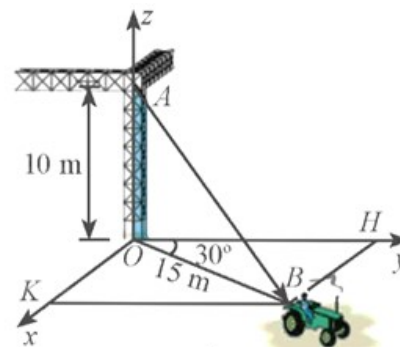
Ví dụ 6. Hãy mô tả hệ tọa độ $Oxyz$ trong căn phòng ở hình bên sao cho gốc O trùng với góc trên của căn phòng, khung tranh nằm trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trần nhà trùng với mặt phẳng (Oxz) .



Ví dụ 7. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .



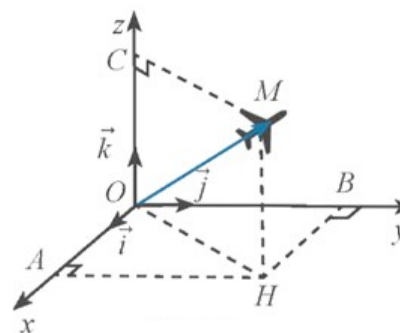
Luyện tập 7.1. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Luyện tập 7.2. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình dưới. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) .

Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$.

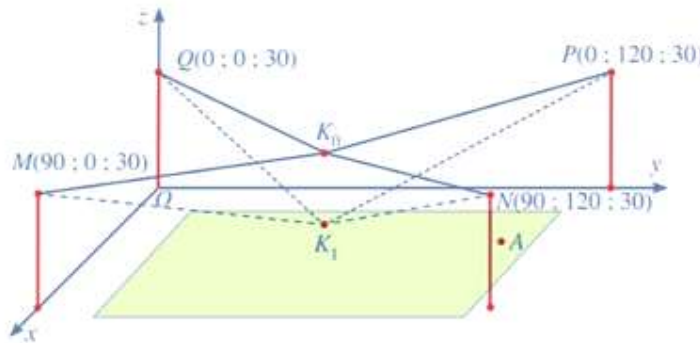
Tìm tọa độ của điểm M .



Luyện tập 7.3. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ Oxyz (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$.

Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19.



Tìm tọa độ của các điểm K_0, K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI BÀI

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều lựa chọn:

Câu 1: Trong không gian Oxyz, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

- A. $-\vec{x}\vec{i} - \vec{y}\vec{j} - \vec{z}\vec{k}$. B. $\vec{x}\vec{i} - \vec{y}\vec{j} - \vec{z}\vec{k}$. C. $\vec{x}\vec{j} + \vec{y}\vec{i} + \vec{z}\vec{k}$. D. $\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k}$.

Câu 2: Trong không gian với trục hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

- A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. B. $\vec{a}(2;-3;-1)$. C. $\vec{a}(-3;2;-1)$. D. $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Câu 3: Trong không gian Oxyz với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $A(2;2;1)$ thì tọa độ của $\overrightarrow{OA}$ là

- A. $(2;0;0)$. B. $(2;2;0)$. C. $(2;0;1)$. D. $(2;2;1)$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1;-1;-3)$. B. $(3;1;1)$. C. $(1;1;3)$. D. $(3;3;-1)$.

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $C(1;1;-2)$ và $\vec{u} = (-3;2;-1)$. Biết $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$, tọa độ của D là

- A. $(-2;3;-3)$. B. $(3;1;1)$. C. $(1;1;3)$. D. $(3;3;-1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(3;0;-1)$. B. $(0;1;0)$. C. $(3;0;0)$. D. $(0;0;-1)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ cho M nằm trên tia đối của tia Ox và $OM = 2$. Tọa độ của điểm M là

- A. $(2;0;0)$. B. $(-2;0;0)$. C. $(0;2;0)$. D. $(0;0;-2)$.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$. Tìm điểm $M' \in (Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1;1+\sqrt{2};2-\sqrt{5})$. B. $M'(1;1-\sqrt{2};0)$. C. $M'(1;0;2+\sqrt{5})$. D. $M'(0;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$.

Câu 10: Cho 3 điểm $M(2;0;0), N(0;-3;0), P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là

- A. $Q(-2;-3;4)$. B. $Q(2;3;4)$. C. $Q(3;4;2)$. D. $Q(-2;-3;-4)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ điểm B' là

- A. $(3;0;-3)$. B. $(1;2;-1)$. C. $(2;1;-1)$. D. $(1;1;-2)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đỉnh $A(2;1;2)$, $B(1;-1;1)$, $C(0;-2;0)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ $\overrightarrow{BA'}$ bằng

- A. $(5;9;-4)$. B. $(1;2;-1)$. C. $(2;1;-1)$. D. $(1;1;-2)$.

Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai:

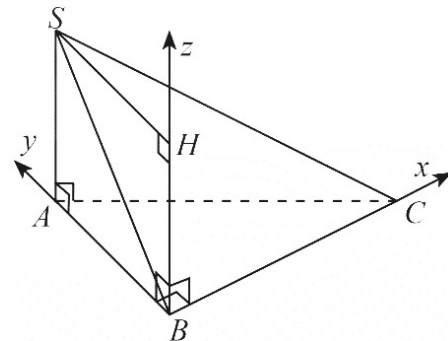
Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, điểm $M(2;0;1)$, $N(3;2;4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$.
b) $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.
c) $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
d) Biết $B(a;b;c)$ thỏa $\overrightarrow{MB} = (-4;3;-1)$, giá trị $a+b+c = 5$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
c) $\overrightarrow{AB} = (1;3;-7)$.
d) Tọa độ điểm D là $D(-4;-2;9)$.

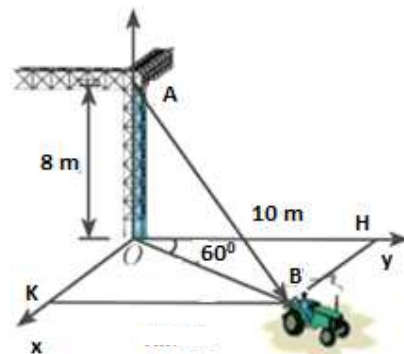
Câu 15: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 4$, $BA = 3$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ điểm C là $C(-4;0;0)$.
- b) Tọa độ điểm A là $A(0;3;0)$.
- c) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là $(-4;3;0)$.
- d) Tọa độ của điểm S là $(2;2;2)$.

Câu 16: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ điểm A là $A(0;8;0)$.
- b) Tọa độ điểm H là $H(0;10;0)$.
- c) Độ dài BH bằng $10\sqrt{3}$ m.
- d) Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ bằng $(10\sqrt{3};3;-8)$.

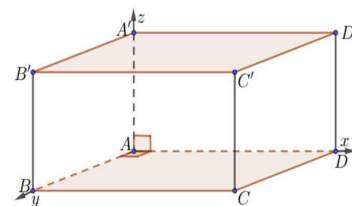
Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;1)$. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oz , điểm M' có cao độ là bao nhiêu?

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho $\overrightarrow{AO} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $B(1;-1;3)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = (a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Vectơ $\overrightarrow{AC'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

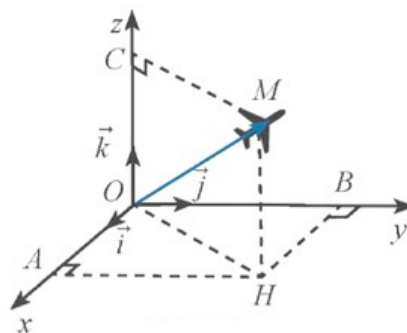


Câu 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đỉnh $A(-2;1;1)$, $B(4;-1;-2)$, $C(0;-3;0)$, $C'(4;6;-5)$. Tọa độ $\overrightarrow{BA'}$ bằng $(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 22: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) .

Cho biết $OM = 40$, $(\overrightarrow{OH}, \vec{j}) = 32^\circ$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) = 72^\circ$.

Tổng các hoành độ, tung độ và cao độ của điểm M bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cho điểm $M(2; -1; 1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. B. $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. C. $\overrightarrow{OM} = \vec{k} + \vec{j} + 2\vec{i}$. D. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{k} - \vec{j} + \vec{i}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

- A. $(-2; 3; 1)$. B. $(2; 3; -1)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(2; 3; 1)$.

Câu 3: Trong không gian Oxyz với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $A(2; 2; 1)$ thì $\overrightarrow{OA}$ bằng

- A. $2\vec{i} + \vec{k}$. B. $2\vec{j} + \vec{k}$. C. $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. D. $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho điểm M nằm trên trục Ox sao cho M không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm M có dạng

- A. $M(a; 0; 0), a \neq 0$. B. $M(0; b; 0), b \neq 0$. C. $M(0; 0; c), c \neq 0$. D. $M(a; 1; 1), a \neq 0$.

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $\vec{u} = (-2; 1; 3)$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, tọa độ của B là

- A. $(-1; 2; 1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(3; 3; -1)$.

Câu 6: Trong không gian Oxyz với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A.

- A. $(5; -2; 0)$. B. $(-2; 0; 5)$. C. $(-2; 5; 0)$. D. $(-2; 5)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Bộ số nào dưới đây là tọa độ của điểm M?

- A. $(0; 2; 1)$. B. $(2; 0; 1)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(0; 1; 2)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 3; -2)$ và $B(4; -5; 2)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(-3; 8; -4)$. B. $(3; -8; 4)$. C. $(3; 2; 4)$. D. $(-3; 2; 4)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, điểm nào sau đây nằm trên trục Oz?

- A. $A(1; 0; 0)$. B. $A(0; 1; 0)$. C. $A(0; 0; 2)$. D. $A(2; 1; 0)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng Oxy?

- A. $A(1; 2; 3)$. B. $A(0; 1; 2)$. C. $A(0; 0; 2)$. D. $A(2; 0; 0)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3; 1; 0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; -1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm N.

- A. $N(-2; 0; 0)$. B. $N(2; 0; 0)$. C. $N(4; 2; 0)$. D. $N(-4; -2; 0)$.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz).

- A. $A_1(1; 0; 0)$. B. $A_1(0; 2; 3)$. C. $A_1(1; 0; 3)$. D. $A_1(1; 2; 0)$.

Câu 13: Cho điểm $M(1; 2; -3)$, khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) bằng

- A. 2. B. -3. C. 1. D. 3.

Câu 14: Cho điểm $M(-2;5;0)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy là điểm

- A. $M'(2;5;0)$. B. $M'(0;-5;0)$. C. $M'(0;5;0)$. D. $M'(-2;0;0)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

- A. $A(3; 5; -2)$. B. $A(3; -2; 5)$. C. $A(3; 17; 2)$. D. $A(-3; -17; 2)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(0;2;-3)$. B. $(1;0;-3)$. C. $(1;2;0)$. D. $(1;0;0)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.
 B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.
 C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.
 D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;0)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(0;2;3)$. B. $(-1;-2;-3)$. C. $(-1;2;3)$. D. $(1;2;-3)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2;3;5)$. B. $A'(2;-3;-5)$. C. $A'(-2;-3;5)$. D. $A'(-2;-3;-5)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;-2;1), B(1;-1;3)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(-1;1;2)$. B. $(-3;3;-4)$. C. $(3;-3;4)$. D. $(1;-1;-2)$.

Câu 21: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

- A. $Q(-6;5;2)$. B. $Q(6;5;2)$. C. $Q(6;-5;2)$. D. $Q(-6;-5;-2)$.

Câu 22: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;-\sqrt{2};\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(-1;0;0)$. B. $M'(1;0;0)$. C. $M'(1;0;\sqrt{3})$. D. $M'(1;-\sqrt{2};0)$.

Câu 23: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(\sqrt{2};0;\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(0;-\sqrt{2};0)$. B. $M'(\sqrt{2};0;0)$. C. $M'(0;0;\sqrt{3})$. D. $M'(0;0;0)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-2;8;-3)$. B. $D(-2;2;5)$. C. $D(-4;8;-5)$. D. $D(-4;8;-3)$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Biết A(2;4;0), B(4;0;0), C(-1;4;-7) và D'(6;8;10). Tọa độ điểm B' là

- A. B'(8;4;10). B. B'(6;12;0). C. B'(10;8;6). D. B'(13;0;17).

Câu 26: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5). Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A. A'(3;4;-6). B. A'(4;6;-5). C. A'(2;0;2). D. A'(3;5;-6).

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Biết A(1;0;1), B'(2;1;2), D'(1;-1;1), C(4;5;-5). Gọi tọa độ của đỉnh A'(a;b;c). Khi đó $2a+b+c$ bằng?

- A. 7. B. 2. C. 8. D. 3.

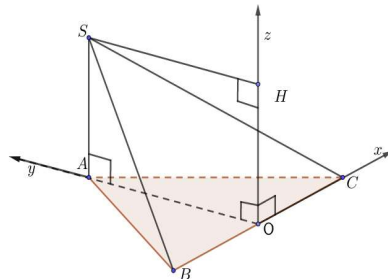
Câu 28: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ O, B nằm trên tia Ox, D nằm trên tia Oy và A' nằm trên tia Oz. Kết luận nào sau đây **sai**?

- A. A(0;0;0). B. D'(0;1;1). C. C'(1;1;1). D. A'(1;-1;-1).

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$. Cho hình hộp OABC.O'A'B'C' thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC'} = \vec{c}$. Tọa độ của $\overrightarrow{CC'}$ bằng

- A. (-1;1;1). B. (-1;-1;1). C. (-1;1;0). D. (1;1;1).

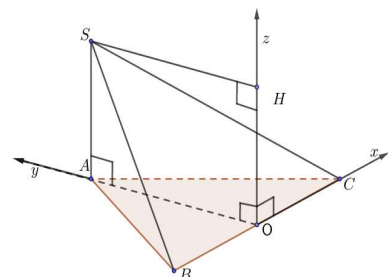
Câu 30: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và cạnh $BC = 2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thiết lập hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Tọa độ điểm C là

- A. $(2\sqrt{2};0;0)$. B. $(\sqrt{2};0;0)$. C. $(-2\sqrt{2};0;0)$. D. $(-\sqrt{2};0;0)$.

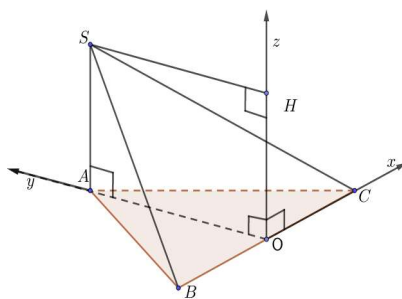
Câu 31: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và cạnh $BC = 4$. Cạnh bên SA và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thiết lập hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Tọa độ điểm A là

- A. (2;0;0). B. (0;2;0). C. (0;-2;0). D. (0;4;0).

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và cạnh $BC = 4\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. (H là hình chiếu điểm S trên trục Oz).



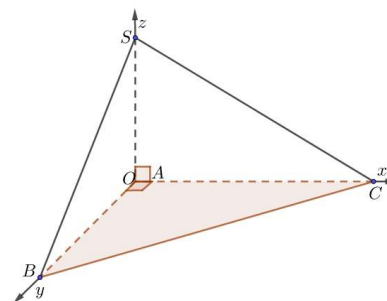
Tọa độ điểm S là

- A. $(2\sqrt{2}; 0; 0)$. B. $(0; 2\sqrt{2}; 2)$. C. $(-2\sqrt{2}; 0; 0)$. D. $(-\sqrt{2}; 0; 0)$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, AC đôi một vuông góc và $AB = AC = AS = 2$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Tọa độ của $\overrightarrow{AS}$ bằng

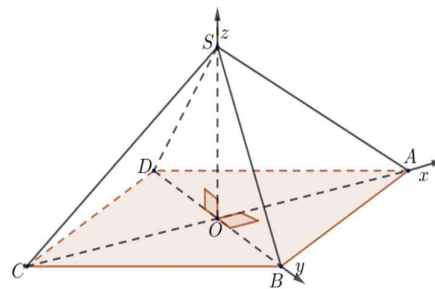
- A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 2; 0)$.
C. $(0; -2; 0)$. D. $(0; 0; 2)$.



Câu 34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 2, SA = \sqrt{3}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Tọa độ điểm S là

- A. $(2\sqrt{2}; 0; 0)$. B. $(0; 2\sqrt{2}; 2)$.
C. $(-2\sqrt{2}; 0; 0)$. D. $(-\sqrt{2}; 0; 0)$.

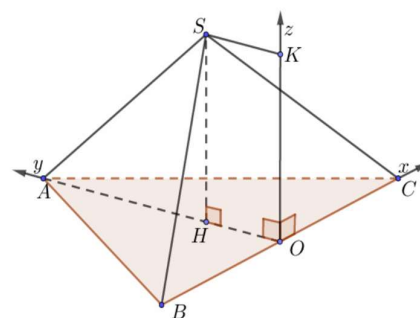


Câu 35: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = 2, SA = 3$. Gọi H là hình chiếu điểm S trên mặt phẳng (ABC) . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

(K là hình chiếu điểm S trên trục Oz).

Tọa độ của $\overrightarrow{AS}$ bằng

- A. $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{69}}{3}\right)$. B. $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{33}}{3}\right)$.
C. $\left(0; -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{69}}{3}\right)$. D. $\left(0; -\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{69}}{3}\right)$.



Bài 3.

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ**A. LÝ THUYẾT****I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ**

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$;
- $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$;
- $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ với k là một số thực.
- Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho:

$$\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz'. \end{cases}$$

Trong không gian Oxyz cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$;

- Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.

Ví dụ 1.

a) Cho $\vec{a} = (2; -1; 5)$, $\vec{b} = (0; 3; -3)$, $\vec{c} = (1; 4; -2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$.

b) Cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(2; -1; 3)$, $C(1; 3; -2)$. Ba điểm A, B, C có thẳng hàng không? Vì sao?

Luyện tập 1.1. Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

a) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng không? Vì sao?

b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$.

Luyện tập 1.2. Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a} + \vec{b}$;

b) $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Luyện tập 1.3. Trong không gian Oxyz cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0; 4)$ và $\vec{c} = (6; -1; 0)$. Tìm tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

b) $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

Luyện tập 1.4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 1; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 3; 1)$.

a) Tìm tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$;

b) Biết $2\vec{x} + 3\vec{a} = 4\vec{b}$ tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$?

Luyện tập 1.5. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2; 2; 0)$, $\vec{b}(2; 2; 0)$, $\vec{c}(2; 2; 2)$. Tìm:

a) $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$;

b) $|\vec{a} + \vec{b}|$;

c) $|\vec{b} - \vec{c}|$;

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

Luyện tập 1.6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các vectơ $\vec{a} = (3; m+1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Luyện tập 1.7. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$; $\vec{b} = (0; 2; -1)$; $\vec{c} = (1; 7; 2)$; $\vec{d} = (0; -17; -2)$.

a) Tìm $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Tìm m; n; p biết rằng: $\vec{d} = m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}$.

Luyện tập 1.8. Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 vectơ $\vec{u} = (x; 2x - 3; 2)$ và $\vec{v} = (y; -4; 8)$. Tìm x và y để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Luyện tập 1.9. Trong không gian Oxyz cho ba điểm M, N, P biết $\vec{OM} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $N(4; -4; 2)$ và $P(3; 6; -1)$.

- Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{MN}$, $\vec{MP}$. Từ đó chứng minh rằng ba điểm M, N, P không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{NM} + \vec{NP}$, từ đó suy ra tọa độ của điểm Q sao cho tứ giác MNPQ là hình bình hành.
- Tính chu vi của hình bình hành MNPQ

Ví dụ 2.

- Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(3; 7; 2)$ và $B(5; 1; 1)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.
- Cho thêm điểm $C(4; -4; -2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Luyện tập 2.1. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1; 3; -5)$, $B(2; 1; 4)$.

- Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.
- Tìm tọa độ điểm N, biết rằng N thuộc đoạn thẳng AB và $NA = \frac{1}{2}NB$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác OAB.

Luyện tập 2.2. Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 điểm A và B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

.....

.....

.....

Luyện tập 2.3. Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(0; 0; 1)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
 - Tính chu vi của tam giác.
 - Tìm tọa độ trung điểm các cạnh của tam giác.
 - Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
 - Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm của hình bình hành ABCD.
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

Luyện tập 2.4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 1)$, $B(-1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; -1; 3)$, $B(2; -3; 5)$, $C(-1; -2; 6)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, tính $T = a - b + c$.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.6. Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$, $C(x; y; 6)$. Tìm giá trị của x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 2.7. Trong không gian Oxyz cho điểm $M(3;2;-1)$.

- Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy).
- Điểm $M_1(a;b;c)$ đối xứng của M qua trục Oy, Tính $a+b+c$.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x;y;z)$ và $\vec{b} = (x';y';z')$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'.$$

Lưu ý.

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx' + yy' + zz' = 0$.
- Nếu $\vec{a} = (x;y;z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Nếu $\vec{a} = (x;y;z)$ và $\vec{b} = (x';y';z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{u} = (3;0;1)$ và $\vec{v} = (2;1;0)$.

- Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Tìm $(\vec{u} + \vec{v})^2$.

Ví dụ 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;2)$ và $\vec{b} = (1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Luyện tập 4.1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (2;3;-1)$ và $\vec{v} = (5;-4;m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Luyện tập 4.2. Cho $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 5$, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$, $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Tìm k để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

.....

.....

.....

Luyện tập 4.3. Trong không gian Oxyz cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0; 4)$ và $\vec{c} = (6; -1; 0)$.
 Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot (-\vec{b})$ và $(2\vec{a}) \cdot \vec{c}$.

.....

.....

.....

Luyện tập 4.4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

.....

.....

.....

Luyện tập 4.5. Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có $A(1; 0; 1)$, $B(0; -3; 1)$ và $C(4; -1; 4)$.

- Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC.
- Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
- Tính $\widehat{ABC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Luyện tập 4.6. Cho hình chóp O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc tạo bởi hai vectơ $\vec{BC}$ và $\vec{OM}$ bằng bao nhiêu?

.....

.....

.....

Luyện tập 4.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $SA = 3$, $AB = 4$, $AD = 5$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox , Oy , Oz lần lượt trùng với các tia AB , AD , AS .

- Xác định tọa độ tâm của hình chữ nhật $ABCD$.
- Tính SC .
- Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.

Luyện tập 4.8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Luyện tập 4.9. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4)$, $B(3;0;-2)$, $C(1;3;7)$. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A . Tính độ dài $|\overrightarrow{OD}|$.

Luyện tập 4.10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết:

$A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao H kẻ từ A của tam giác ABC .

III. CÁCH TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ VUÔNG GÓC VỚI HAI VECTƠ CHO TRƯỚC

• Công thức định thức: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

• Cho 2 vectơ: $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1); \vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương, khi đó $\vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

• Định nghĩa tích có hướng của 2 vectơ:

Cho 2 vectơ: $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1); \vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$.

Khi đó tích có hướng của 2 vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1); \vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ký hiệu: $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vectơ và được tính

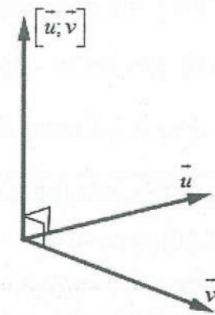
như sau: $[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Tính chất: $[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}; [\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{v}; [\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$

▪ Độ dài của vectơ tích có hướng $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

▪ Hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0} (0; 0; 0)$.

▪ Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2} ||[\vec{AB}, \vec{AC}]||$.



Ví dụ 5. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 0; -2); \vec{b} = (0; 1; 3)$. Hãy tìm một vectơ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Luyện tập 5.1. Tìm tích có hướng của các cặp vectơ sau:

a) $\vec{a} = (-3; 1; 4); \vec{b} = (1; -1; 2)$

b) $\vec{a} = (1; 3; 5); \vec{b} = (2; -1; 3)$.

Luyện tập 5.2. Cho 2 vectơ $\vec{u} = (1; 2; -1); \vec{v} = (1; -3; x)$. Tìm x biết rằng $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = \sqrt{30}$.

Luyện tập 5.3. Cho 3 vectơ $\vec{u} = (1; x; -1); \vec{v} = (0; 2; 1); \vec{w} = (x; 7; 2)$. Tìm x biết rằng $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0$.

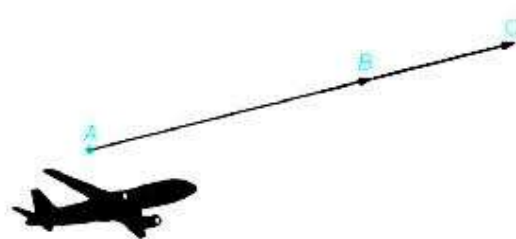
Luyện tập 5.4. Cho 2 vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ biết $|\vec{u}| = \sqrt{2}$; $|\vec{v}| = 3$. Góc giữa 2 vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 45° , độ dài vectơ $[5\vec{u}, -3\vec{v}]$

là:

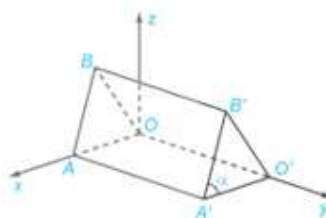
Luyện tập 5.5. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(3;1;-1)$; $B(1;0;2)$; $C(5;0;0)$. Tính diện tích tam giác ABC.

IV. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Ví dụ 6. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Luyện tập 6.1. Những căn nhà gỗ trong hình dưới được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong hình dưới. Với hệ trục tọa độ Oxyz thể hiện như hình bên cạnh (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Từ những thông tin trên, có thể tính được kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ không?

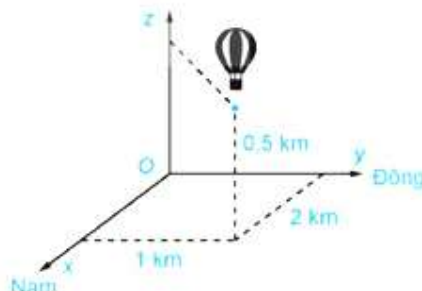


Luyện tập 6.2. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2km về phía nam và 1km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1km về phía bắc và 1,5km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8km.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



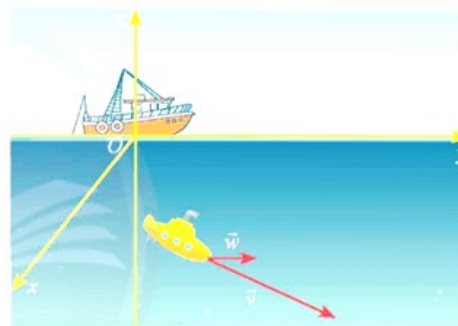
Luyện tập 6.3. Trong không gian, xét hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



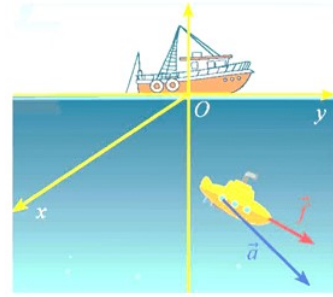
Luyện tập 6.4. Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc $\vec{v} = (10;8;-3)$ (Hình 1). Cho biết vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (3;5;1;0)$

a) Tìm tọa độ của vectơ tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

b) Giả sử thiết bị thăm dò lặn với vận tốc $\vec{u} = (7;2;0)$, hãy nêu nhận xét về vectơ vận tốc của nó so với vectơ vận tốc của dòng hải lưu.



Luyện tập 6.5. Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình 2) được đẩy bởi một lực $\vec{F} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.



Luyện tập 6.6. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian Oxyz, một đội gồm ba drone giao hàng A,B,C đang có tọa độ là $A(1;1;1), B(5;7;9), C(9;11;4)$. Tính:

- Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
- Góc $\widehat{BAC}$.



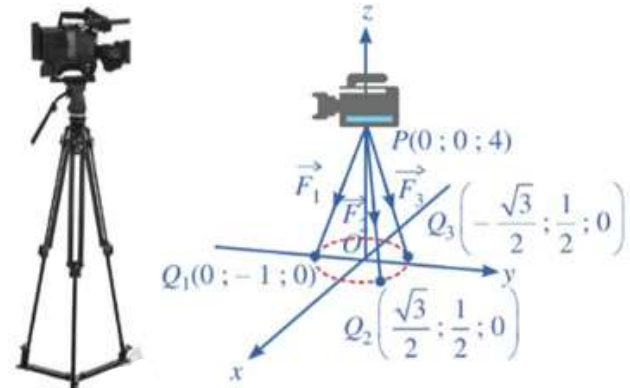
Luyện tập 6.7. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}(20;30;-10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng, khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: mm).



Luyện tập 6.8. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0;-1;0)$,

$Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ $Q_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Biết rằng trọng lượng

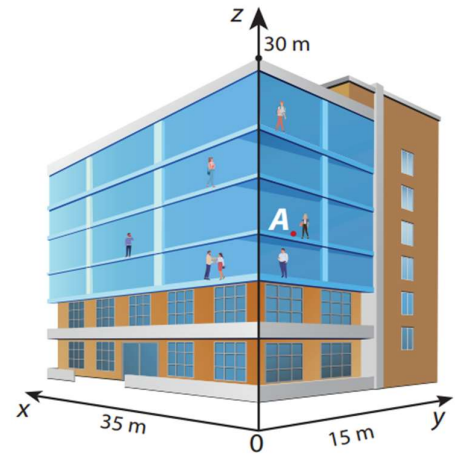
Tìm tọa độ của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tác dụng lên giá đỡ?



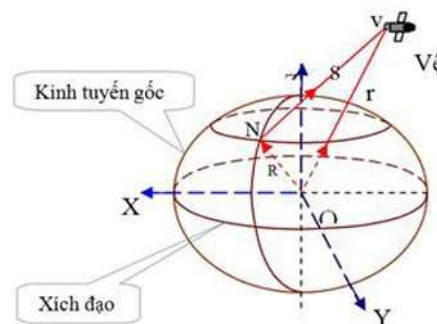
Luyện tập 6.9. Một toà nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 30 m. Tất cả các tầng đều cao 5 m. Người ta định vị các vị trí trong toà nhà dựa vào một hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

a) Hương đang đứng ở điểm A(20; 5; 20) và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ $x = 15$ và tung độ $y = 3$, hỏi Hương mất thời gian bao lâu (đơn vị giây) để đi đến thang máy nếu như cô ấy đi bộ với vận tốc 1,5 m/s?

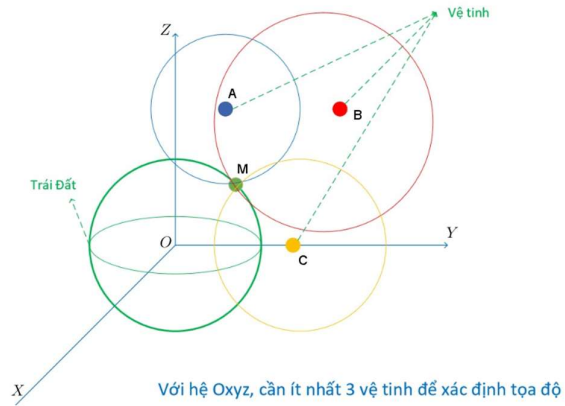
b) Hương vừa đặt một bộ phát sóng wifi trong phòng làm việc của mình tại vị trí có tọa độ (25; 5; 20). Do yêu cầu của công việc, Hương thường phải đứng ở bàn lễ tân có tọa độ (5; 0; 0) để đón khách. Hỏi nếu ngồi ở bàn lễ tân chờ khách thì điện thoại của Hương có bắt được sóng wifi phát ra từ phòng làm việc của mình hay không? Biết rằng vùng phủ sóng bộ phát wifi nói trên có bán kính 30 mét. Làm tròn kết quả tính toán đến hàng phần mười.



Luyện tập 6.10. Hiện nay, việc di chuyển của con người hết sức dễ dàng, thuận lợi dù bằng đường bộ, đường sắt, đường hàng không hay đường biển. Tất cả đó đều nhờ vào hệ thống định vị toàn cầu GPS, mà hệ thống này được xây dựng dựa trên việc dựng hệ trục tọa độ Oxyz cố định gắn với trái đất, từ đó xác định tọa độ các điểm trên đó. Cụ thể, các điểm mặt đất được định vị GPS trong hệ tọa độ địa tâm xây dựng trên Elipxoid WGS-84. Hệ tọa độ có gốc tọa độ O là tâm trái đất, trục OX là đường thẳng nối tâm trái đất với giao điểm kinh tuyến gốc cắt đường xích đạo; trục OY vuông góc với OX, trục OZ trùng với trục quay trái đất và vuông góc với mặt phẳng XOY.



Để hiểu đơn giản nguyên lý hoạt động của hệ thống GPS, ta xem mặt cầu tâm O là trái đất. Điểm M là chúng ta, người cần định vị. Điểm A, B, C là các vệ tinh bay xung quanh trái đất. Bởi vì chúng ta sống trên bề mặt trái đất, nên các điểm M sẽ chỉ nằm trên đường tròn tâm O. Tọa độ các vệ tinh A, B, C là hoàn toàn xác định được. Khoảng cách MA, MB, MC xác định bằng cách trao đổi sóng giữa vệ tinh và thiết bị. Dựa vào thời gian và vận tốc mà tính được khoảng cách. Từ đó, các vệ tinh tính toán và xác định tọa độ (kinh độ, vĩ độ) của chúng ta trên trái đất. Từ kinh độ, vĩ độ thiết bị xác định được địa điểm cụ thể mà chúng ta đang ở.



Từ một tín hiệu phát ra trên mặt đất tại điểm M, có ba vệ tinh nhận được tín hiệu và đo được khoảng cách lần lượt như sau: $MA = 25$ nghìn kilômét; $MB = 21$ nghìn kilômét; $MC = 22$ nghìn kilômét, trong đó, A là vị trí vệ tinh thứ nhất có tọa độ $(5; 24; 11)$; B là vị trí vệ tinh thứ hai có tọa độ $(13; 4; 23)$; C là vị trí vệ tinh thứ ba có tọa độ $(9; 12; 22)$. Mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng 1000km trên thực tế. Biết bán kính trái đất xấp xỉ 6,4 nghìn kilômét. Tìm tọa độ điểm M và xác định vị trí địa lí tại điểm M.

B. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI BÀI

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều lựa chọn:

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(2; -1; -3)$. D. $(-3; 2; -1)$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Độ dài đoạn thẳng OA là

- A. $OA = \sqrt{5}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = 9$.

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ là

- A. $(0; -1; -5)$. B. $(2; -1; 1)$. C. $(2; 3; 1)$. D. $(0; -1; 1)$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$; $\vec{c} = (4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d} = (-7; 0; -4)$. B. $\vec{d} = (-7; 0; 4)$. C. $\vec{d} = (7; 0; -4)$. D. $\vec{d} = (7; 0; 4)$.

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho $A(-1; 0; 1)$ và $B(1; -1; 2)$ tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(2; -1; 1)$. B. $(0; -1; -1)$. C. $(-2; 1; -1)$. D. $(0; -1; 3)$

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

- A. $M(-1; -1; -1)$. B. $M(0; 1; -1)$. C. $M(0; 2; -2)$. D. $M(-2; -2; -2)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-3; 1; 4)$ và $A(1; 0; -1)$, $B(2; 3; 5)$. Tọa độ điểm C là

- A. $C(-6; 2; 0)$. B. $C(4; 2; -1)$. C. $C(-12; 0; 8)$. D. $C(3; -1; -5)$.

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (-3; 1; 2)$ và $\vec{b} = (0; -4; 5)$. Giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 10. B. -14. C. 6. D. 3.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (-3; 4; -5)$. Số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

- A. 150° . B. 120° . C. 60° . D. 30° .

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-2; -4; 9)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là

- A. 5. B. 3. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{54}$.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ điểm C.

- A. $(3; 0; 0)$. B. $(0; 0; 3)$. C. $(0; 3; 3)$. D. $(3; 3; 0)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD. $A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$ và $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ là

- A. $(1; 1; -2)$. B. $(2; 1; -1)$. C. $(1; 2; -1)$. D. $(2; 1; -2)$.

Phần 2: Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1;2;3); \vec{b}(2;2;-1); \vec{c}(4;0;-4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ $2\vec{a}$ là $(2;4;6)$.
- b) Tọa độ $\vec{a} + \vec{b}$ là $(3;4;0)$.
- c) $\vec{b} \perp \vec{c}$.
- d) Cho $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c}$, độ dài của $\vec{x}$ bằng 65.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ $\vec{a} - \vec{b}$ là $(0;2;0)$.
- b) $\vec{a}\vec{b} = 1$.
- c) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- d) Cho $\vec{x} = (2;m;n)$, giá trị m, n để $\vec{x}$ cùng phương với $\vec{b}$ là $m = n = 2$.

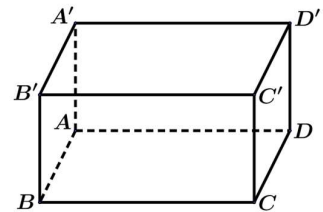
Câu 15: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1;3;0)$, $B(-2;-2;0)$, $C(3;1;0)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(-3;-5;0)$.
- b) Tọa độ của $2\overrightarrow{AC}$ là $(2;-2;0)$.
- c) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng BC là $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$.
- d) Cosin góc A bằng $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$; $D(0;4;0)$, $A'(0;0;4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.
- b) Tọa độ của $\overrightarrow{AA'}$ là $(0;0;4)$.
- c) Tọa độ trọng tâm tam giác ABD là $(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0)$.
- d) Độ dài đoạn thẳng AC' là $\sqrt{6}$.

**Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn:**

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là $(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?

Câu 19: Trong không gian Oxyz, cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$?

Câu 20: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 2$; $AD = 3$; $AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ của C' là $(a; b; c)$, giá trị $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Câu 22: Một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600; 200; 200)$ đến thành phố B có tọa độ $(200; 500; 100)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ là $(a; b; c)$, giá trị $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1: Trong không gian Oxyz, tìm tọa độ của véc tơ $\vec{u} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$.

- A. $\vec{u} = (-6; 8; 4)$. B. $\vec{u} = (-3; 4; 2)$. C. $\vec{u} = (6; 8; 4)$. D. $\vec{u} = (3; 4; 2)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tìm tọa độ $\vec{u}$ biết $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

- A. $\vec{u} = (5; -3; 2)$. B. $\vec{u} = (2; -3; 5)$. C. $\vec{u} = (2; 5; -3)$. D. $\vec{u} = (-3; 5; 2)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ cho điểm $M(2; -1; 1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. B. $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. C. $\overrightarrow{OM} = \vec{k} + \vec{j} + 2\vec{i}$. D. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{k} - \vec{j} + \vec{i}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{j} + \vec{k}$. Tọa độ của điểm M là

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(1; 2; 0)$. C. $M(2; 1; 0)$. D. $M(2; 0; 1)$.

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (-1; 2; 0)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A. $(0; 0; -3)$. B. $(0; 0; 3)$. C. $(-2; 4; -3)$. D. $(2; -4; 3)$.

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là

- A. $(3; 4; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(1; -2; 1)$.

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Vectơ $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -10; 3)$. B. $(-2; -6; 3)$. C. $(-4; -8; 4)$. D. $(-2; -10; -3)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3; 1; 0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; -1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm N.

- A. $N(-2; 0; 0)$. B. $N(2; 0; 0)$. C. $N(4; 2; 0)$. D. $N(-4; -2; 0)$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A. $2\sqrt{13}$. B. $\sqrt{6}$. C. 3. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm M. Tọa độ của điểm M là

- A. $M(1; -2; 0)$. B. $M(0; -2; 3)$. C. $M(1; 0; 0)$. D. $M(1; 0; 3)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; 5; 0)$, $B(2; 7; 7)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = \left(0; 1; \frac{7}{2}\right)$. B. $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 7)$. C. $\overrightarrow{AB} = (4; 12; 7)$. D. $\overrightarrow{AB} = (0; -2; -7)$.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2; 2; 0)$, $\vec{b}(2; 2; 0)$, $\vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A. 6. B. 11. C. $2\sqrt{11}$. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 2; 3)$. Độ dài đoạn AB bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. $\sqrt{8}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(3; -2; 3)$, $I(1; 0; 4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho I là trung điểm của đoạn MN.

- A. $N(5; -4; 2)$. B. $N(0; 1; 2)$. C. $N\left(2; -1; \frac{7}{2}\right)$ D. $N(-1; 2; 5)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm I của MN là

- A. $I(1; 1; 1)$. B. $I(1; 1; 0)$. C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. D. $I(1; -1; 2)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ điểm P.

- A. $P(5; 9; -3)$. B. $P(2; 6; -1)$. C. $P(5; 9; -10)$. D. $P(7; 9; -10)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 9; 0)$. Tìm trọng tâm G của tam giác ABC.

- A. $G(1; 5; 2)$. B. $G(1; 0; 5)$. C. $G(1; 4; 2)$. D. $G(3; 12; 6)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

- A. $D(-2; 8; -3)$. B. $D(-2; 2; 5)$. C. $D(-4; 8; -5)$. D. $D(-4; 8; -3)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(-1; 2; 3)$, $B(2; 4; 2)$ và tọa độ trọng tâm $G(0; 2; 1)$. Khi đó, tọa độ điểm C là

- A. $C(-1; 0; -2)$. B. $C(1; 0; 2)$. C. $C(-1; -4; 4)$. D. $C(1; 4; 4)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(4; 1; -2)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là

- A. $A'(4; -1; 2)$. B. $A'(-4; -1; 2)$. C. $A'(4; -1; -2)$. D. $A'(4; 1; 2)$.

Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

- A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. B. $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hình chiếu của M lên trục Oy là điểm

- A. $R(1;0;0)$. B. $S(0;0;3)$. C. $P(1;0;3)$. D. $Q(0;2;0)$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, điểm N đối xứng với $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là

- A. $N(3;1;2)$. B. $N(-3;-1;-2)$. C. $N(3;-1;-2)$. D. $N(-3;1;-2)$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(5;-1;2)$, $C(3;2;-4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

- A. $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. B. $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. C. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-6;3)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

- A. $P(3;0;0)$. B. $N(3;-1;5)$. C. $M(0;-2;4)$. D. $Q(0;0;5)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;-3;4)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng

- A. $M(1;1;0)$. B. $M(3;-5;7)$. C. $M(-3;5;0)$. D. $M(-2;1;0)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(4;2;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 2. B. 4. C. $\sqrt{22}$. D. 22.

Câu 28: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;3;4)$ và $B(3;0;1)$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\sqrt{19}$. B. 19. C. $\sqrt{13}$. D. 13.

Câu 29: Trong không gian Oxyz, gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. B. $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$. C. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$. D. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 31: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ khi đó góc giữa $\vec{a}$, $\vec{b}$ là

- A. $\frac{4\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. 0. D. $-\frac{\pi}{3}$.

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = i\sqrt{3} + \vec{k}$, $\vec{v} = j\sqrt{3} + \vec{k}$. Khi đó tích vô hướng của $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng

- A. -3. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1;2;-2)$ và $\vec{b} = (-1;-1;0)$?

- A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$. B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u}(2;3;-1)$ và $\vec{v}(5;-4;m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = -2$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các vectơ $\vec{a} = (-1;1;0)$; $\vec{b} = (1;1;0)$ và $\vec{c} = (1;1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\vec{a} \perp \vec{b}$. B. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. C. $\vec{c} \perp \vec{b}$. D. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

Câu 36: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;4;-2)$ và $\vec{b} = (1;-2;3)$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. -12 . B. 30 . C. 6 . D. -22 .

Câu 37: Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (1;\log_3 5;\log_m 2)$, $\vec{v} = (3;\log_5 3;4)$ là góc nhọn.

- A. $m > \frac{1}{2}, m \neq 1$. B. $m > 1$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $m > 1$ hoặc $0 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(-1;3;2)$; $C(2;4;-3)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ là

- A. AD . B. -6 . C. 2 . D. -2 .

Câu 39: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ tạo với nhau 1 góc 120° và $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$. Tìm $T = |\vec{a} - \vec{b}|$.

- A. $T = 7$. B. $T = 4$. C. $T = 5$. D. $T = 6$.

Câu 40: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\vec{u} = (2;-1;1)$ và $\vec{v} = (0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 42: Cho hai vectơ $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 12 . B. 2 . C. 11 . D. 10 .

Câu 43: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;-3)$, $\vec{b} = (-4;-2;6)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{b} = -2\vec{a}$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$. D. $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2;-1;1)$; $B(3;-2;-1)$. Tìm điểm N trên Ox cách đều A và B.

- A. $(-4;0;0)$. B. $(4;0;0)$. C. $(1;0;0)$. D. $(2;0;0)$.

Câu 45: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(3;-4;3)$. Tổng khoảng cách từ A đến ba trục tọa độ bằng

- A. 10 . B. $\frac{\sqrt{34}}{2}$. C. $10 + 3\sqrt{2}$. D. $\sqrt{34}$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $S(1;2;3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp S.ABC có các cạnh Sa, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

A. $\frac{343}{12}$.

B. $\frac{343}{36}$.

C. $\frac{343}{6}$.

D. $\frac{343}{18}$.

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho hình nón đỉnh $S\left(\frac{17}{18}; -\frac{11}{9}; \frac{17}{18}\right)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

B. $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$.

C. $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$.

D. $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(0;0;3)$, $B(0;0;-1)$, $C(1;0;-1)$, $D(0;1;-1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $AB \perp BD$.

B. $AB \perp BC$.

C. $AB \perp AC$.

D. $AB \perp CD$.

Câu 49: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Biết $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ A' của hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

A. $A'(-3;-3;3)$.

B. $A'(-3;-3;-3)$.

C. $A'(-3;3;1)$.

D. $A'(-3;3;3)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác A'B'C là

A. $(2;1;-2)$.

B. $(1;2;-1)$.

C. $(2;1;-1)$.

D. $(1;1;-2)$.

Câu 51: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$.

Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0;1;-2)$.

B. $M(0;1;4)$.

C. $M(0;1;-4)$.

D. $M(2;1;0)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. PHẦN 1: CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào dưới đây bằng vectơ $\overrightarrow{AC}$?

- A. $\overrightarrow{A'C'}$. B. $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{B'A'}$. D. $\overrightarrow{D'C'}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Vectơ nào dưới đây bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$?

- A. $\overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{B_1C_1}$. C. $\overrightarrow{A_1B_1}$. D. $\overrightarrow{CA}$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 2. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. 3. C. $2\sqrt{3}$. D. 6.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$. D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy M là trung điểm của đoạn thẳng CC' . Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a , gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ bằng

- A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{3}$. D. a^2 .

Câu 9: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 2. B. $5\sqrt{2}$. C. 5. D. 10.

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BA})$ bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (1; -2; 2)$, $\vec{b} = (-2; 0; 3)$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -2; 5)$.

B. $\vec{a} - \vec{b} = (3; -2; -1)$.

C. $3\vec{a} = (3; -2; 2)$.

D. $2\vec{a} + \vec{b} = (0; -4; 7)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$. Độ dài của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. 3.

Câu 13: Trong không gian Oxyz cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3; 4; 1)$.

B. $(-1; -2; 3)$.

C. $(3; 5; 1)$.

D. $(1; 2; 3)$.

Câu 14: không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3)$; $\vec{b}(2; 2; -1)$; $\vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7; 0; -4)$

B. $\vec{d}(-7; 0; 4)$

C. $\vec{d}(7; 0; -4)$

D. $\vec{d}(7; 0; 4)$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

A. $\vec{a} = (4; 1; -1)$.

B. $\vec{a} = (3; 1; -4)$.

C. $\vec{a} = (0; 1; -1)$.

D. $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục Oxyz cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

A. $x + y = 1$.

B. $x + y = 17$.

C. $x + y = -\frac{11}{5}$.

D. $x + y = \frac{11}{5}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $M(3; 4; 0)$.

B. $P(-2; 0; 3)$.

C. $Q(2; 0; 0)$.

D. $N(0; 4; -1)$.

Câu 18: Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 2; 3)$. Độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{7}$.

B. $\sqrt{8}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = 3$

B. $\frac{AM}{BM} = 2$

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$

Câu 20: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3; 0; 0)$

B. $N(0; -1; 1)$

C. $P(0; -1; 0)$

D. $Q(0; 0; 1)$

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $B(-4; 9; 8)$.

C. $B(5; 3; -7)$.

D. $B(5; -3; -7)$.

Câu 22: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;3)$, $B(-2;-2)$, $C(3;1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$. B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$. C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$. D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 23: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2;-1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2;-3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{OM} = (1;5;2)$, $\vec{ON} = (3;7;-4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Tìm tọa độ điểm P.

- A. $P(5;9;-3)$. B. $P(2;6;-1)$. C. $P(5;9;-10)$. D. $P(7;9;-10)$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(-1;2;3)$, $B(2;4;2)$ và tọa độ trọng tâm $G(0;2;1)$. Khi đó, tọa độ điểm C là:

- A. $C(-1;0;-2)$. B. $C(1;0;2)$. C. $C(-1;-4;4)$. D. $C(1;4;4)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm $I(-5;0;5)$ là trung điểm của đoạn MN, biết $M(1;-4;7)$. Tìm tọa độ của điểm N.

- A. $N(-11;4;3)$. B. $N(-11;-4;3)$. C. $N(-2;-2;6)$. D. $N(-10;4;3)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

- A. $D(-2;8;-3)$. B. $D(-2;2;5)$. C. $D(-4;8;-5)$. D. $D(-4;8;-3)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.

- A. $M(-2;-6;4)$. B. $M(5;5;0)$. C. $M(2;-6;4)$. D. $M(-2;6;-4)$.

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tìm tọa độ điểm B thỏa mãn $\vec{AB} = \vec{a}$.

- A. $(-1;-8;2)$. B. $(7;4;-4)$. C. $(1;8;-2)$. D. $(-7;-4;4)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(-3;2;2)$. Tọa độ của $\vec{AB}$ là

- A. $(-2;4;-2)$. B. $(-4;0;6)$. C. $(4;0;-6)$. D. $(-1;2;-1)$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(4;1;-2)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là

- A. $A'(4;-1;2)$. B. $A'(-4;-1;2)$. C. $A'(4;-1;-2)$. D. $A'(4;1;2)$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;-3;5)$, $C(-1;-2;6)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0}$, tính $T = a - b + c$.

- A. $T = 11$. B. $T = 10$. C. $T = 3$. D. $T = 5$.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là

- A. $M(-5;0;0)$. B. $M(-4;0;0)$. C. $M(5;0;0)$. D. $M(4;0;0)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$; $B(-1;1;0)$; $C(3;1;2)$. Tính tổng $AB+BC+CA$:

- A. $3\sqrt{5}$. B. $4+\sqrt{5}$. C. $2+2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Độ dài đoạn AM là

- A. $AM=2\sqrt{7}$. B. $AM=\sqrt{29}$. C. $AM=\sqrt{19}$. D. $AM=3\sqrt{3}$.

Câu 36: Trong không gian Oxyz, cho $E(-5;2;3)$, F là điểm đối xứng với E qua trục Oy. Độ dài EF là.

- A. $2\sqrt{34}$. B. $2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{29}$. D. $\sqrt{14}$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-1;4)$ và $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{k}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}(1;-2;0)$ và $\vec{b}(-2;3;1)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $2\vec{a}=(2;-4;0)$. B. $\vec{a}+\vec{b}=(-1;1;-1)$. C. $|\vec{b}|=14$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.

Câu 39: Góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a}=(2;2;4)$, $\vec{b}=(2\sqrt{2};-2\sqrt{2};0)$ bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 135° . D. 30° .

Câu 40: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$ biết rằng vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$.

- A. $\vec{b}=(-2;-2;3)$. B. $\vec{b}=(2;-2;3)$. C. $\vec{b}=(2;-4;6)$. D. $\vec{b}=(-2;4;-6)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

- A. $m=2$. B. $m=2-\sqrt{6}$. C. $m=2+\sqrt{6}$. D. $m=2\pm\sqrt{6}$.

Câu 42: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết $|\vec{a}+\vec{b}|=3$ khi đó góc giữa 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

- A. $\frac{4\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. 0. D. $-\frac{\pi}{3}$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;2;-2)$ và $\vec{b}=(-1;-1;0)$.

- A. $(\vec{a}, \vec{b})=135^\circ$. B. $(\vec{a}, \vec{b})=45^\circ$. C. $(\vec{a}, \vec{b})=120^\circ$. D. $(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. C. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. D. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{100}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{10}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{100}$.

Câu 46: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các kích thước $AB = 4, AD = 3, AA' = 5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB'. Độ dài BG là

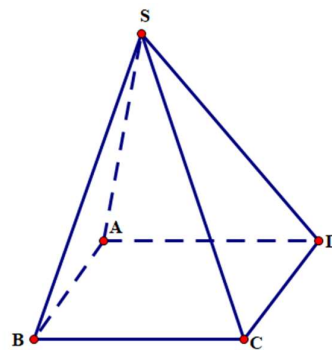
- A. $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

B. PHẦN 2: TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 47: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có độ dài tất cả các cạnh bằng 2.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{AD} = \vec{CB}$.
b) $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$.
c) $(\vec{SB}, \vec{AB}) = 60^\circ$.
d) $\vec{SC} \cdot \vec{AC} = 4$.



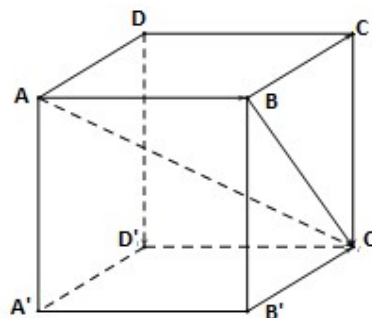
Câu 48: Cho tứ diện ABCD, lấy hai điểm M, N thỏa mãn $\vec{MB} + 2\vec{MA} = \vec{0}$ và $\vec{NC} = 2\vec{DN}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hai vectơ $\vec{MB}$ và $\vec{MA}$ cùng hướng.
b) Hai vectơ $\vec{NC}$ và $\vec{ND}$ ngược hướng.
c) $|\vec{MB}| = 2|\vec{MA}|$.
d) Biểu diễn $\vec{MN}$ theo $\vec{AD}$ và $\vec{BC}$ là $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{AD}$.

Câu 49: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D', có cạnh 3.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{AD} = \vec{B'C'}$.
b) $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.
c) $|\vec{AB} + \vec{AD}| = 3\sqrt{2}$.
d) $(\vec{A'D'}, \vec{B'C'}) = 60^\circ$.



Câu 50: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $\vec{OB} = (2; 3; 2)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
b) $B = (2; 3; 2)$.
c) $\vec{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.
d) Biết $M(a; b; c)$ thỏa $\vec{AM} = \vec{OB}$, giá trị $a + b + c = 5$.

Câu 51: Trong không gian Oxyz, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 5)$ và $\vec{c} = (1; -3; 2)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $3\vec{b} = (-6; 3; 15)$.
- b) $\vec{b} + \vec{c} = (-1; -2; 7)$.
- c) Giá trị $\cos(\vec{a}; \vec{b})$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{5}$.
- d) Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{c})$ bằng 6.

Câu 52: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.
- c) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.
- d) Tứ giác ABCD là hình bình hành thì tọa độ điểm D = $(1; 4; -4)$.

Câu 53: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; -1)$ và $C(-1; 0; 2)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{AC} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
- b) $\vec{AB} = (-1; 2; -4)$.
- c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$.
- d) Tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC là $M(0; 0; 1)$.

Câu 54: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', gọi G là trọng tâm của tam giác BDA'. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{AB} = \vec{D'C'}$.
- b) Các vectơ $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}$ cùng nằm trên một mặt phẳng.
- c) $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$.
- d) Ba điểm A, G và C' thẳng hàng.

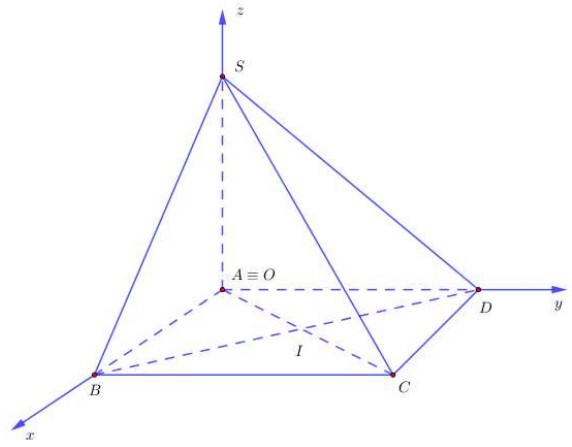
Câu 55: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp OABC.O'A'B'C' và các điểm $A(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ và $O'(1; -2; 2)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.
- b) $\vec{AC} = (-3; -1; 2)$.
- c) Tọa độ điểm B là $(-1; 5; 4)$.
- d) Tọa độ trọng tâm tam giác OA'B' là $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; -3\right)$.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A ; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{j}$.
- b) $C(3;0;0)$.
- c) Tọa độ trung điểm của SC là $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.
- d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = 3$.



Câu 57: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A ; các điểm B, D, A' lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{AA'} = -4\vec{k}$.
- b) $C'(2;3;4)$.
- c) Tọa độ trọng tâm tam giác $A'BD$ là $\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}\right)$.
- d) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}) = 45^\circ$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$
- b) $\overrightarrow{AA'} = (0;0;a)$
- c) $\overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a)$
- d) $\overrightarrow{AD} = (a;2a;0)$

C. PHẦN 3: TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 59: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết góc $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ thì $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng bao nhiêu?

Câu 60: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và CC' . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD'}$ bằng bao nhiêu độ?

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(4;2;-1), B(1;-1;2)$ và $C(0;-2;3)$.

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và tính độ dài đoạn thẳng AB .
- b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
- c) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) , sao cho A, B, N thẳng hàng.

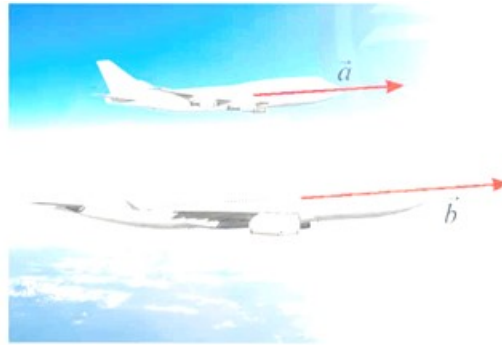
Câu 62: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(-3;2;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;-2;3)$. Tọa độ chân đường cao H kẻ từ A của tam giác ABC là $(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 63: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC biết $A(-3;2;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;-2;3)$. Diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Câu 64: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = a$, $SC = 3a$, $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính theo a khoảng cách SG?

Câu 65: Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (500; 200; 300)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.

- Tìm tọa độ vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B.
- Tính tốc độ của máy bay B.



Câu 66: Hình dưới minh họa một chiếc đèn được treo cách trần nhà là 0,5m, cách hai tường lần lượt là 1,2m và 1,6m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là 0,4m, cách hai tường đều là 1,5m.

- Lập một hệ trục tọa độ Oxyz phù hợp và xác định tọa độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.
- Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Câu 68: Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

