

BÀI TẬP VẬN DỤNG VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN
(Dành cho học sinh muốn chinh phục điểm 8+, 9+)

Câu 1: Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m+1 = 0$ (2)

- a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn.
b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi.
c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (m+2)x + \frac{(m+2)^2}{4} + y^2 - (m+4)y + \frac{(m+4)^2}{4} &= \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4} - m - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \left[x + \frac{m+2}{2} \right]^2 + \left[y - \frac{m+4}{2} \right]^2 &= \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4} - m - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \left(\frac{m+2}{2} \right)^2 + \left(\frac{m+4}{2} \right)^2 - m - 1 = \frac{(m+2)^2 + 4}{2} > 0$$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m .

$$\text{b) Đường tròn có tâm } (I): \begin{cases} x_1 = -\frac{m+2}{2} \\ y_1 = \frac{m+4}{2} \end{cases} \text{ suy ra } x_1 + y_1 - 1 = 0$$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$

c) Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

$$x_o^2 + y_o^2 + (m+2)x_o - (m+4)y_o + m+1 = 0, \forall m$$

$$\text{Khi đó ta có: } \Leftrightarrow (x_o - y_o - 1)m + x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - y_o - 1 = 0 \\ x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 0 \\ x_o = 1 \\ y_o = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$

Câu 2: Cho hai điểm $A(8; 0), B(0; 6)$.

- a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .
b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

Lời giải.

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của

$$\text{cạnh huyền } AB \text{ suy ra } I(4; 3) \text{ và bán kính } R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

b) Ta có $OA = 8; OB = 6; AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Mặt khác $\frac{1}{2}OA \cdot OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).

Suy ra $r = \frac{OA \cdot OB}{OA + OB + AB} = 2$.

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $I(2;2)$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Câu 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B .

Lời giải.

Cách 1. Gọi I là tâm của (C) . Do $I \in d$ nên $I(t; 2t-5)$.

Hai điểm A, B cùng thuộc (C) nên

$$IA = IB \Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $I(1; -3)$ và bán kính $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Cách 2. Gọi $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB . Đường trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận

$\overrightarrow{AB} = (3; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$\Delta: 3x - y - 6 = 0.$$

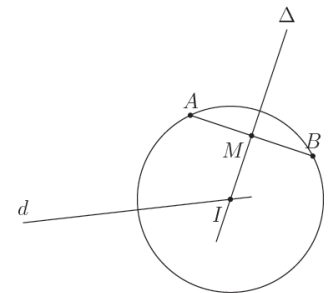
Tọa độ tâm I của (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; -3).$$

Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm

$$(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$



Câu 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x + 3y + 8 = 0, d_2: 3x - 4y + 10 = 0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1 , đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2

Lời giải.

Gọi I là tâm của (C) . Do $I \in d_1$ nên $I(-3t-8; t)$. Theo giả thiết ta có

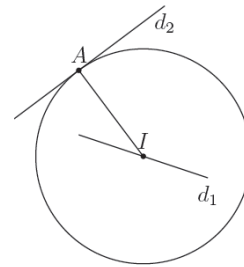
$$d(I, d_2) = IA$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{25} = \sqrt{(-3t-8+2)^2 + (t-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow t = -3$$

Suy ra $I(1; -3)$ và $R=5$

Vậy phương trình (C) là $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.



Câu 5: Trong mặt phẳng oxy cho 2 điểm A (-1; 1), B(3; 3) và đường thẳng $d: 3x - 4y + 8 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc d .

Lời giải.

Đường trung trực Δ của AB đi qua M(1; 2) là trung điểm AB có phương trình là

$$\Delta: 2x + y - 4 = 0.$$

Gọi tâm I của (C) thuộc Δ là $I(t; 4-2t)$

$$\text{Ta có } d(I, d) = IA \Leftrightarrow \sqrt{(-1-t)^2 + (2t-3)^2} = \frac{|3t - 4(4-2t) + 8|}{\sqrt{9+16}}$$

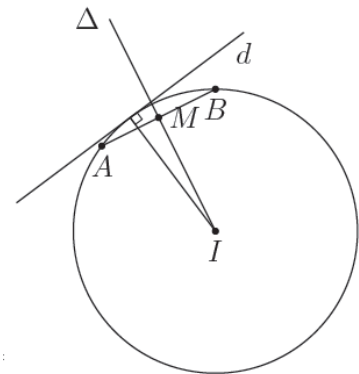
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{31}{2} \end{cases}$$

Với $t = 3$, suy ra tâm $I(3; -2)$. Bán kính $R = IA = 5$

Phương trình (C): $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

Với $t = \frac{31}{2}$, suy ra tâm $I(\frac{31}{2}; -27)$ và $R = \frac{65}{2}$

Phương trình (C): $(x - \frac{31}{2})^2 + (y+27)^2 = \frac{4225}{4}$.



Câu 6: Trong mặt phẳng oxy cho $d: 2x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc d .

Lời giải.

Gọi $I(m; 2m-4)$ thuộc d là tâm của đường tròn (C).

$$\text{Ta có } d(I; 0x) = d(I; 0y) \Leftrightarrow |2m-4| = |m| \Leftrightarrow m = 4 \text{ hoặc } m = \frac{4}{3}.$$

Với $m = \frac{4}{3}$ thì $I(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3})$, $R = \frac{4}{3}$ ta có

$$(C): (x - \frac{4}{3})^2 + (y + \frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$$

Với $m = 4$ thì $I(4; 4)$, $R = 4$ ta có

$$(C): (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng oxy cho $d: 2x - y - 4 = 0$: viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d đồng thời tiếp xúc với $\Delta_1: 3x + 4y + 5 = 0$ và $\Delta_2: 4x - 3y - 5 = 0$

 Lời giải.

Gọi $I(6t+10;t) \in d$ ta có

$$d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|22t+35|}{5} = \frac{|21t+35|}{5} \Leftrightarrow t=0 \text{ hoặc } t = \frac{-70}{43}$$

Với $t=0$ suy ra $I(10;0), R=7$

Phương trình (C): $(x-10)^2 + y^2 = 49$.

Với $t = \frac{-70}{43}$ suy ra $I(\frac{10}{43}; \frac{-70}{43}), R = \frac{7}{43}$.

Phương trình (C): $(x - \frac{10}{43})^2 + (y + \frac{70}{43})^2 = \frac{49}{1849}$.

 **Câu 8:** Trong mặt phẳng oxy cho $d: x+2y-3=0$ và $\Delta: x+3y-5=0$ viết phương trình (C) có bán kính $R = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ .

 Lời giải.

Gọi $I(-2a+3;a) \in d$ là tâm của (C). Ta có

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ a=-2. \end{cases}$$

Với $a=6$ suy ra $I(-9; 6)$. Phương trình (C): $(x+9)^2 + (y-6)^2 = \frac{8}{5}$.

Với $a=-2$ suy ra $I(7; -2)$. Phương trình (C): $(x-7)^2 + (y+2)^2 = \frac{8}{5}$.

 **Câu 9:** Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$ tia oy cắt (C) tại A. Viết phương trình (C') có bán kính $R'=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

 Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3};0)$ bán kính $R=4$.

Tọa độ A là nghiệm hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (y > 0)$$

Ta được $A(0; 2)$.

Đường thẳng IA đi qua 2 điểm I và A nên có phương trình
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2. \end{cases}$$

Đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên tâm I' thuộc IA, nên $I'(2\sqrt{3}t; 2t+2)$.

Hơn nữa, $R = 2R'$ nên $\overline{AI} = 2\overline{I'A} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} - 0 = 2(0 - 2\sqrt{3}t) \\ 0 - 2 = 2(2 - 2t - 2) \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Với $t = \frac{1}{2}$, suy ra $I'(\sqrt{3}; 3)$. Phương trình đường tròn (C'): $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4$

 **Câu 10:** Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

 Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm I (1;-2), bán kính $R = \sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng nối 2 tâm IM: $3x - 4y - 11 = 0$

Gọi $H(x; y)$ là trung điểm AB.

$$\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{5} \\ y = \frac{-29}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{-11}{10} \end{cases}$$

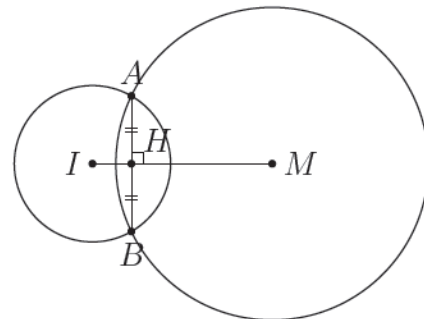
Suy ra $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ hoặc $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$

Với $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ ta có $R'^2 = 43$

Phương trình (C'): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$.

Với $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$ ta có $R'^2 = 13$

Phương trình (C'): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$



Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ hệ oxy cho đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn $(C_1): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$; $(C_2): (x+5)^2 + (y-4)^2 = 32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

Lời giải.

Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của 3 đường tròn (C), (C_1) và (C_2) .

Giả sử $I(t; t-1) \in d$. Theo giả thiết Câu toán: (C) tiếp xúc ngoài (C_1) và (C_2) nên

$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ II_2 = R + R_2 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} II_1 - R_1 &= II_2 - R_2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (t+3)^2} - 2\sqrt{2} &= \sqrt{(t-5)^2 + (t+5)^2} - 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow t &= 0 \end{aligned}$$

Với $t = 0$ suy ra $I(0; -1)$ và $R = \sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và: $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$. Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc trong.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm O(0; 0) và bán kính $R = 1$.

Đường tròn (C_m) có tâm I(m+1; -2m) và bán kính $R = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$.

Mà $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}$.

Để 2 đường tròn tiếp xúc trong thì $R' - R = OI$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5} - 1 = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}$$

Giải phương trình ta được $m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$.

Câu 13: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và $(C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường tròn đó.

Lời giải

(C_1) có tâm $I_1(1; -2)$ và bán kính $R_1 = 3$

(C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$ và bán kính $R_2 = 4$

$$I_1I_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{13}.$$

Ta thấy $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Gọi điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng cần tìm

$$\text{Tọa độ } M \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

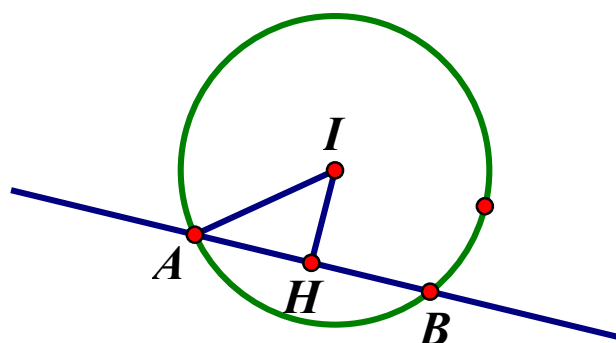
$$\text{Lấy } (1) - (2) \Rightarrow -4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 5 = 0 \quad (3)$$

Nhận thấy $M(x; y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

Suy ra đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x - 3y - 5 = 0$.

Câu 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Lời giải



- Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ có tâm $I(-1; 4)$ và bán kính $R = 5$

- Đường thẳng d' song song với đường thẳng d nên phương trình của d' là:

$$3x + 4y + m = 0 \quad (m \neq -2)$$

- Kẻ $IH \perp d' \Rightarrow HA = HB = 3$ và IH là khoảng cách từ I đến d' : $IH = \frac{|-3+4+m|}{5} = \frac{|m+1|}{5}$

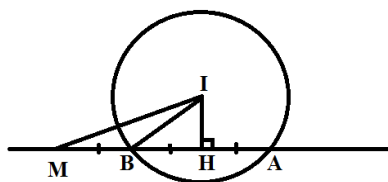
- Xét tam giác vuông IHA : $IH^2 = IA^2 - HA^2 = 25 - 9 = 16$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25} = 16 \Leftrightarrow |m+1| = 20 \Rightarrow \begin{cases} m=19 \Rightarrow d': 3x+y+19=0 \\ m=-21 \Rightarrow d': 3x+y-21=0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy có hai đường thẳng là: $3x+4y+19=0$; $3x+4y-21=0$.

Câu 15: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(7;3)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=5$.

Ta có $IM = 2\sqrt{10} > R \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (C)

Gọi H là trung điểm AB mà $MA = 3MB \Rightarrow B$ là trung điểm MH

$$\text{Ta có } \begin{cases} IH^2 + MH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2 + 4BH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases} \text{ suy ra } IH^2 = 20 \Rightarrow IH = 2\sqrt{5}$$

Đường thẳng d qua $M(7;3)$ và có VTPT $\vec{n} = (a;b), a^2 + b^2 \neq 0$ có phương trình là:

$$a(x-7) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 7a - 3b = 0$$

$$IH = d(I, d) = \frac{|a+b-7a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |3a+b| = \sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}$$

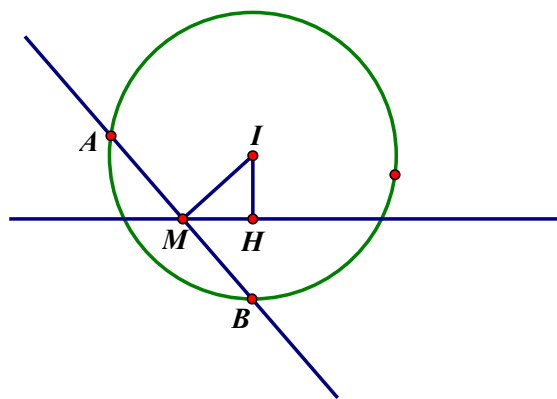
$$9a^2 + 6ab + b^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ a = -2b \end{cases}$$

$$a = \frac{b}{2} \Rightarrow d: x + 2y - 13 = 0$$

$$a = -2b \Rightarrow d: 2x - y - 11 = 0$$

Câu 16: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(-1;2)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho độ dài dây cung AB nhỏ nhất.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$. Ta có: $IM = \sqrt{5} \Rightarrow IM < R$ nên điểm M nằm trong đường tròn (C) , kẻ $IH \perp d \Rightarrow IH \leq IM$ và $HA = HB = \frac{AB}{2}$. Ta có

$AH^2 = IA^2 - IH^2 = 25 - IH^2$, AB nhỏ nhất khi và chỉ khi AH nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH = IM \Leftrightarrow H \equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua M và vuông góc với IM nên đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (-2;1)$. Vậy phương trình đường thẳng d là:
 $-2(x+1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow -2x+y-4=0$.

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $K(5;-2)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung AB có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

- Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Gọi a với $a > 0$ là bán kính đường tròn (C') , phương trình (C') là: $(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=a^2$
 $\Leftrightarrow x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0$. Tọa độ giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') là nghiệm

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=5 \\ x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-4y=0 & (1) \\ x^2+y^2-10x+4y+29-a^2=0 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình trên ta được phương trình $8x-8y-29+a^2=0$ là phương trình đường thẳng đi qua hai giao điểm A, B của hai đường tròn, kẻ $IH \perp AB$ suy ra H là trung

điểm của AB và $AH = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = d(I, AB)$

$$\text{Nên ta có } \frac{|8 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 29 + a^2|}{\sqrt{8^2 + (-8)^2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow |a^2 - 37| = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 37 = 24 \\ a^2 - 37 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 61 \\ a^2 = 13 \end{cases}$$

Có hai đường tròn là: $(C'):(x-5)^2+(y+2)^2=13; (C'):(x-5)^2+(y+2)^2=61$

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$, Lập phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài (C) .

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$.

Gọi $K(a;b)$ và $R>0$ là tâm và bán kính đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ nên ta

$$\text{có } |a|=|b|=R \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=-b \end{cases} \text{ từ } |a|=|b| \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=-b \end{cases}$$

+Nếu $a=b>0 \Rightarrow K(a;a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc

$$\text{ngoài khi và chỉ khi } IK=R+R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=1+a \Leftrightarrow a^2-6a+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+2\sqrt{2} \\ a=3-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Có 2 đường tròn là: } (C'):(x-3-2\sqrt{2})^2+(y-3-2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$$

$$(C'):(x-3+2\sqrt{2})^2+(y-3+2\sqrt{2})^2=17-12\sqrt{2}$$

+Nếu $a=b<0 \Rightarrow K(a;a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc

$$\text{ngoài khi và chỉ khi } IK=R+R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=1-a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ (loại)}$$

+Nếu $a=-b \Rightarrow K(a;-a)$ phương trình $(C'):(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$ hai đường tròn tiếp xúc

$$\text{ngoài khi và chỉ khi } IK=R+R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2}=1+|a| \Leftrightarrow 2a^2+2=(1+|a|)^2 \quad (1)$$

$$\text{TH 1: } a>0 \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow 2a^2+2=(1+a)^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1$$

$$\text{Phương trình đường tròn là: } (C'):(x-1)^2+(y+1)^2=1.$$

$$\text{TH2: } a<0 \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow 2a^2+2=(1-a)^2 \Leftrightarrow a^2+2a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$$

$$\text{Phương trình đường tròn là: } (C'):(x+1)^2+(y-1)^2=1.$$

Có 4 đường tròn thỏa mãn.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(3; -4)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm $B(5; -2)$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với d:
 $x+y+2014=0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc 45°

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Do A thuộc (C) nên tiếp tuyến Δ qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(2; -2)$ làm vector pháp tuyến

Vậy phương trình $\Delta: x-y-7=0$.

b) Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vector pháp tuyến của Δ , Do đó

$$\Delta: a(x-5)+b(y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow ax+by-5a+2b=0$$

Do Δ tiếp xúc với (C) nên

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-4a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

Với $a = b$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Phương trình tiếp tuyến Δ là $x + y - 3 = 0$.

Với $a = -b$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = -1$. Phương trình tiếp tuyến Δ là $x - y - 7 = 0$.

c) Tiếp tuyến Δ vuông góc d nên Δ có dạng $x - y + c = 0$.

$$\text{Mà } d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -7 \end{cases}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn: $x - y + 1 = 0$ hoặc $x - y - 7 = 0$.

d) Gọi Δ có dạng $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

$$\text{Theo Câu ra ta có } \begin{cases} d(I; \Delta) = R \\ \cos(\vec{n}; \vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\sqrt{2} \\ \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$\text{Với } a = b \Rightarrow |c-b| = 4|b| \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5b \\ c = -3b \end{cases}$$

+ TH1: chọn $b = 1 \Rightarrow c = 5; a = 1$ ta được $\Delta: x + y + 5 = 0$.

+ TH2: chọn $b = 1 \Rightarrow c = -3; a = 1$ ta được $\Delta: x + y - 3 = 0$.

$$\text{Với } a = -b \Rightarrow |c-3b| = 4|b| \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7b \\ c = -b \end{cases}$$

+ TH1: chọn $b = -1 \Rightarrow c = -7; a = 1$ ta được $\Delta: x - y - 7 = 0$.

+ TH2: chọn $b = -1 \Rightarrow c = 3; a = 1$ ta được $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Vậy có 4 tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: x + y + 5 = 0$; $\Delta: x + y - 3 = 0$; $\Delta: x - y - 7 = 0$; $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

 **Lời giải:**

(C_1) có tâm $I_1(0;1)$ và bán kính $R_1 = 2$.

(C_2) có tâm $I_2(4;4)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Có $I_1 I_2 = 5 > R_1 + R_2$ nên 2 đường tròn ở ngoài nhau, như vậy có 4 tiếp tuyến chung.

TH1: Nếu tiếp tuyến song song oy thì Δ có dạng $x + c = 0$.

$$\text{Ta có } d(I_1; \Delta) = d(I_2; \Delta) \Leftrightarrow |c| = |4+c| \Leftrightarrow c = -2$$

Vậy tiếp tuyến $\Delta: x - 2 = 0$.

TH2: Nếu Δ không song song với oy thì phương trình của $\Delta: y = ax + b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} d(I_1; \Delta) = 2 \\ d(I_1; \Delta) = d(I_2; \Delta) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \\ \frac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-4a-4+b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{-7}{24} \\ b = \frac{37}{12} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{-3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $\Delta: 3x - 4y + 14 = 0$; $\Delta: 3x - 4y - 6 = 0$; $\Delta: 7x + 24y - 74 = 0$

Vậy có 4 tiếp tuyến $\Delta: x - 2 = 0$; $\Delta: 3x - 4y + 14 = 0$; $\Delta: 3x - 4y - 6 = 0$; và $\Delta: 7x + 24y - 74 = 0$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ và $(C_2): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Lời giải:

(C_1) có tâm $I_1(2;3)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

(C_2) có tâm $I_2(1;2)$ và bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.

Ta có $I_1I_2 = \sqrt{2} = R_2 - R_1$ do đó 2 đường tròn tiếp xúc trong. Như vậy có 1 tiếp tuyến chung.

Tọa độ tiếp điểm của 2 đường tròn là nghiệm hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow M(3;4).$$

Tiếp tuyến chung Δ là đường thẳng qua $M(3;4)$ và nhận $\overrightarrow{I_1I_2} = (-1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: x + y - 7 = 0$.

Câu 22: Trong mặt phẳng (Oxy) , cho $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA = 2OB$

Lời giải

(C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

Tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA = 2OB \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc

$$k = \pm \frac{OB}{OA} = \pm \frac{1}{2}.$$

Trường hợp 1: Với $k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta: y = \frac{1}{2}x + b$

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của } (C) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 2: Với $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y = -\frac{1}{2}x + m$

$$d \text{ là tiếp tuyến của } (C) \Leftrightarrow d(I; d) = R \Leftrightarrow \frac{|4-2m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{9}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện.

Câu 23: Trong mặt phẳng (Oxy) , cho $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tìm $M \in \Delta: x+y+2=0$ sao cho qua M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10, với I là tâm đường tròn.

Lời giải

(C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = \sqrt{5} = AI$

$$S_{MAIB} = 2S_{\triangle AMI} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AI \Rightarrow AM = \frac{S_{MAIB}}{AI} = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = 5$$

$$M \in \Delta: x+y+2=0 \Rightarrow M(a; 2-a)$$

$$MI = 5 \Leftrightarrow (2-a)^2 + (1-a)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} M(5; -3) \\ M(-2; 4) \end{cases}$.

Câu 24: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm hai điểm $A(1; -1); B(1; 3)$

- Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B .

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -1)$ bán kính $R = \sqrt{3^2 + 1 - 6} = 2$.

a) Ta có: $IA = 2 = R; IB = 2\sqrt{5} > R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\vec{IA} = (2; 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1) + 0(y+1) = 0$ hay $x = 1$

c) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$$a(x-1) + b(y-3) = 0 \text{ (với } a^2 + b^2 \neq 0) \text{ hay } ax + by - a - 3b = 0$$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a-2b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3b = 4a \end{cases}$$

+ Nếu $b = 0$, chọn $a = 1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x = 1$.

+ Nếu $3b = 4a$, chọn $a = 3, b = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x + 4y - 15 = 0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x = 1$ và $3x + 4y - 15 = 0$

Câu 25: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$.

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45° .

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2; -2)$, bán kính $R = 3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3; 2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng $-3x + 2y + c = 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-10 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \Leftrightarrow c = 10 \pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x + 2y + 10 \pm 3\sqrt{13} = 0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow (2a - 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2) (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45° suy ra

$$\cos(\Delta; Ox) = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b$$

TH1: Nếu $a = b$ thay vào $(*)$ ta có $18a^2 = c^2 \Leftrightarrow \pm c = 3\sqrt{2}a$, chọn $a = b = 1 \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$ suy ra

$$\Delta: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$$

$$\text{TH2: Nếu } a = -b \text{ thay vào } (*) \text{ ta có } 18a^2 = (4a + c)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = (3\sqrt{2} - 4)a \\ c = -(3\sqrt{2} + 4)a \end{cases}$$

$$\text{Với } c = (3\sqrt{2} - 4)a, \text{ chọn } a = 1, b = -1, c = (3\sqrt{2} - 4) \Rightarrow \Delta: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$\text{Với } c = -(3\sqrt{2} + 4)a, \text{ chọn } a = 1, b = -1, c = -(3\sqrt{2} + 4) \Rightarrow \Delta: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0, \Delta_3: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$ và

$$\Delta_4: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

Câu 26: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0.$$

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; 2)$ bán kính $R_1 = 3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2 = 3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2 \neq 0$

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến chung của } (C_1) \text{ và } (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = 3 \\ d(I_2, \Delta) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c| = 3\sqrt{a^2+b^2} (*) \\ |3a-4b+c| = 3\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |2b+c| = |3a-4b+c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{-3a+2b}{2} \end{cases}$$

TH1: Nếu $a = 2b$ chọn $a = 2, b = 1$ thay vào $(*)$ ta được $c = -2 \pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x+y-2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

TH2: Nếu $c = \frac{-3a+2b}{2}$ thay vào $(*)$ ta được $|2b-a| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $3a+4b = 0$

+ Với $a = 0 \Rightarrow c = b$, chọn $b = c = 1$ ta được $\Delta: y+1=0$

+ Với $3a+4b = 0 \Rightarrow c = 3b$, chọn $a = 4, b = -3, c = -9$ ta được $\Delta: 4x-3y-9=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là: $2x+y-2 \pm 3\sqrt{5} = 0, y+1=0, 4x-3y-9=0$.

Câu 27: Trong hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, $(C_2): (x-4)^2 + (y-5)^2 = 8$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m biết đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Lời giải

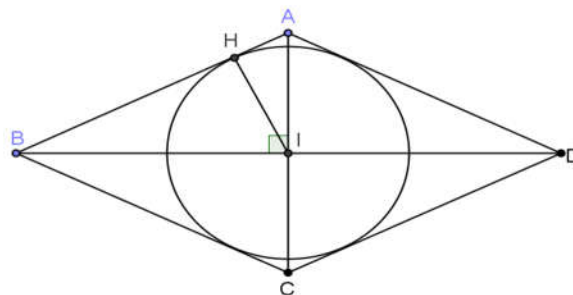
(C_1) có tâm $I_1(1;2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$ và (C_2) có tâm $I_2(4;5)$, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.

Vì đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) nên ta có

$$\begin{cases} d(I_1, d) = R_1 \\ d(I_2, d) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|m+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{|9+m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -5$$

Câu 28: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d: x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng $BD = 2AC$ và hoành độ điểm A không nhỏ hơn 2.

Lời giải



$$\text{Trong tam giác IAB có } \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{IH^2} \Rightarrow \frac{5}{4IA^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} IA = \sqrt{10} \\ IB = 2\sqrt{10} \end{cases}$$

Giả sử $A(2a-3; a)$ từ $\begin{cases} IA = \sqrt{10} \\ x_A \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ hay $A(1; 2)$. Suy ra $C(3; -4)$

Phương trình đường thẳng BD: $x-3y-5=0$. Kết hợp với $IB = ID = 2\sqrt{10} \Rightarrow$ Tọa độ các điểm B, D

là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8; y=1 \\ x=-4; y=-3 \end{cases}$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD là $A(1; 2), B(8; 1), C(3; -4), D(-4; -3)$ hoặc $A(1; 2), B(-4; -3), C(3; -4), D(8; 1)$.

Câu 29: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn khoảng cách từ $N\left(0; \frac{1}{2}\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$. Ta có điểm M thuộc d nên $M(a; a+1)$.

Gọi K trung điểm của MI thì $K\left(\frac{a+1}{2}; \frac{a-1}{2}\right)$

Vì tam giác $\triangle MAI, \triangle MBI$ vuông tại A, B nên $KA = KB = \frac{1}{2}MI$

Đường tròn (C') tâm K , đường kính MI nên có phương trình

$$\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a-1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2a + 5}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - (a+1)x - (a-1)y - a - 2 = 0$$

Đường thẳng AB là giao của $(C) \cap (C')$ nên tọa độ điểm A, B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - (a+1)x - (a-1)y - a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1-a)x - (a+3)y - a + 2 = 0$$

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $(1-a)x - (a+3)y - a + 2 = 0$.

Khoảng cách từ N đến AB là

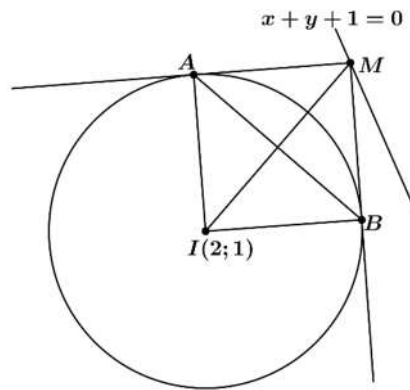
$$d_{(N;d)} = \frac{|7-a|}{2\sqrt{(1-a)^2 + (a+3)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 14a + 49}{2a^2 + 4a + 10}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left[\frac{34}{16} - \frac{(2a+3)^2}{2a^2 + 4a + 10}\right]} \leq \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$Max f(a) = \frac{\sqrt{34}}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Vậy $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 30: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ và đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90° .

Lời giải



M thuộc d suy ra $M(t; -1-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $MAIB$ là hình vuông (A, B là 2 tiếp điểm). Do đó $AB = MI = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

Ta có: $MI = \sqrt{(2-t)^2 + (2+t)^2} = \sqrt{2t^2 + 8} = 2\sqrt{3}$

$$\text{- Do đó: } 2t^2 + 8 = 12 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{2} \rightarrow M_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2}-1) \\ t = \sqrt{2} \rightarrow M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

Câu 31: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn

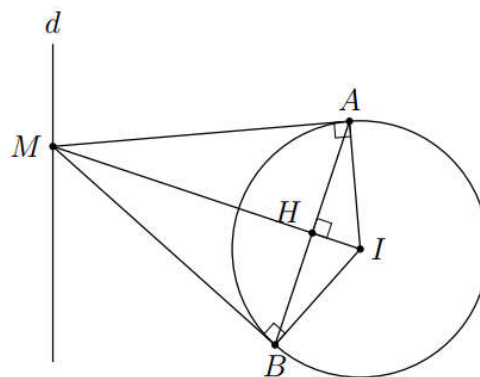
a) $AB = \frac{12\sqrt{34}}{17}$

b) Tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$

c) Tứ giác $MAIB$ có chu vi bằng $2(3 + 2\sqrt{2})$

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông.

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $H = MI \cap AB$, suy ra $AH \perp MI$ và $AH = \frac{AB}{2} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$.

Xét tam giác MAI vuông tại A có AH là đường cao nên $MI = \frac{AI^2}{HI} = \frac{AI^2}{\sqrt{AI^2 - AH^2}} = \sqrt{17}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
 MI = \sqrt{17} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = \sqrt{17} \\
 &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $M(1; -3)$ hoặc $M(-2; 0)$.

b) Ta có $S_{\Delta MAI} = \frac{1}{2} S_{MAIB} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AM \cdot AI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \frac{6\sqrt{2}}{AI} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{17}$. Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
 MI = \sqrt{17} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = \sqrt{17} \\
 &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $M(1; -3)$ hoặc $M(-2; 0)$.

c) Ta có $C_{MAIB} = MA + AI + IB + BM = 2(MA + AI) = 2(3 + 2\sqrt{2})$.

Suy ra $MA + AI = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow MA = 3 + 2\sqrt{2} - AI = 2\sqrt{2}$.

Do đó $MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{17}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
 MI = \sqrt{17} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = \sqrt{17} \\
 &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $M(1; -3)$ hoặc $M(-2; 0)$.

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI = IA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

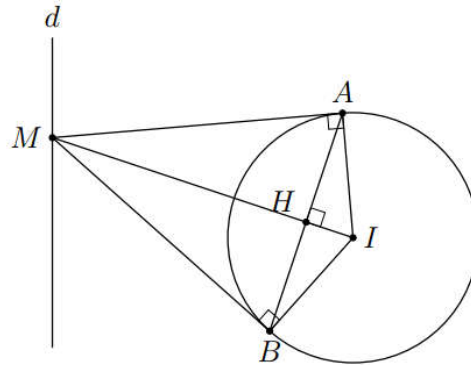
$$\begin{aligned}
 MI = 3\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 3\sqrt{2} \\
 &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}
 \end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; \frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Câu 32: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn :

- a) Tam giác MAB vuông,
 b) Tam giác MAB đều,
 c) Hai tiếp tuyến MA, MB tạo với nhau một góc bằng 60° ,
 d) Tam giác IAB đều.

 Lời giải



a) Ta có đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.

Theo giả thiết Câu toán tam giác MAB vuông cân tại M suy ra tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI = IA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned} MI = 3\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 3\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; \frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

b) Tam giác MAB đều, suy ra $\widehat{AMI} = 30^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\sin \widehat{AMI}} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned} MI = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 6 \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 23 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{47}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2}; \frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2}; \frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right)$.

c) Theo giả thiết ta chia Câu toán thành 2 trường hợp

- Trường hợp 1. $\widehat{AMB} = 60^\circ \Rightarrow \Delta MAB$ đều, suy ra $\widehat{AMI} = 30^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\sin \widehat{AMI}} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned} MI = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 6 \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 23 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{47}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2}; \frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2}; \frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right)$.

• Trường hợp 2. $\widehat{AMB} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{AMI} = 60^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\sin \widehat{AMI}} = \frac{2IA}{3} = 2\sqrt{3}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned} MI = 2\sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 2\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

d) Tam giác IAB đều, suy ra $\widehat{AIM} = 30^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\cos \widehat{AIM}} = \frac{2IA}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned} MI = 2\sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 2\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ và đường thẳng $d: x-5y-4=0$. Tìm trên (C) và trên d điểm N sao cho

a) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm $A(-7; -1)$.

b) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua Ox .

Lời giải

a) Do $N \in d$ nên $N(5t+4; t)$. Điểm M đối xứng với N qua A , suy ra $M(-18-5t; -2-t)$.

Mặt khác $M \in (C)$, nên

$$\begin{aligned} (-18-5t+2)^2 + (-2-t-3)^2 &= 5 \\ &\Leftrightarrow 26t^2 + 170t + 276 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -3 \text{ hoặc } t = -\frac{46}{13}. \end{aligned}$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $M(-3; 1), N(-11; -3)$ hoặc $M\left(-\frac{4}{13}; \frac{20}{13}\right), N\left(-\frac{178}{13}; -\frac{46}{13}\right)$.

b) Do $N \in d$ nên $N(5t+4; t)$. Điểm M đối xứng với N qua Ox nên $M(5t+4; -t)$.

Mặt khác, $M \in (C)$ nên

$$\begin{aligned}(5t+4+2)^2 + (-t-3)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 26t^2 + 66t + 40 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t &= -\frac{20}{13}.\end{aligned}$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là : $M(-1;1), N(-1;-1)$ hoặc $M\left(-\frac{48}{13}; \frac{20}{13}\right), N\left(-\frac{48}{13}; -\frac{20}{13}\right)$.

Câu 34: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $d: 2x + y + 4 = 0$. Tìm trên (C) điểm M và trên d điểm N sao cho

- MN có độ dài nhỏ nhất.
- MN có độ dài lớn nhất.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có

$$d(I; d) = \frac{|2+4+4|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} > R.$$

Do đó d không cắt (C) .

Gọi M_1, M_2 là đường kính của đường tròn (C) và vuông góc với d . Ta thấy với M là một điểm bất kỳ thuộc (C) thì

$$\min\{d(M_1, d); d(M_2, d)\} \leq d(M, d) \leq \max\{d(M_1, d); d(M_2, d)\}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_1$ hoặc $M \equiv M_2$.

Đường thẳng M_1M_2 đi qua tâm I và vuông góc với d nên có phương trình $x - 2y + 2 = 0$.

$$\text{Tọa độ điểm } M_1, M_2 \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Suy ra $M_1(0;1), M_2(4;3)$. Ta có $d(M_1, d) = \sqrt{5}$ và $d(M_2, d) = 3\sqrt{5}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của tâm I trên d .

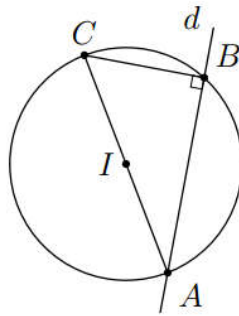
$$\text{Do đó tọa độ điểm } N \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

a) Với $M_1(0;1)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là nhỏ nhất.

b) Với $M_2(4;3)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là lớn nhất.

Câu 35: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 5y - 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d , biết A có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B .

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{13}$.

Tọa độ giao điểm của A và B là nghiệm của hệ

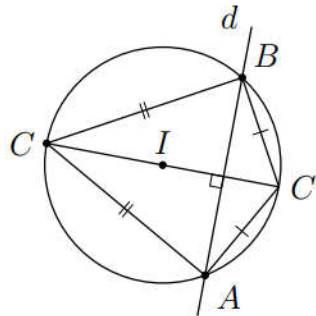
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Do A có hoành độ dương nên ta chọn $A(2;0), B(-3;-1)$.

Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên AC là đường kính của đường tròn, tức điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I , suy ra $C(-4;4)$.

Câu 36: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y - 7 = 0$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Chứng minh (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC cân tại C

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Ta có

$$d(I, d) = \frac{|3-2-7|}{\sqrt{9+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} < R.$$

Điều đó chứng tỏ d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B .

Vì AB là dây cung của (C) nên đường trung trực Δ của đoạn thẳng AB qua tâm I và vuông góc với d nên $\Delta: x+3y-7=0$.

Tam giác ABC cân tại C nên C thuộc Δ . Hơn nữa C thuộc (C) nên tọa độ điểm C thỏa

$$\text{mãn hệ } \begin{cases} x+3y-7=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy $C(-2;3)$ hoặc $C(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 37: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $d: x + my - 2m + 3 = 0$. Gọi I làm tâm của (C) . Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn :

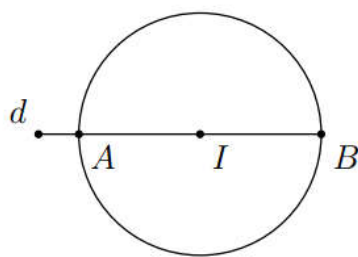
- AB lớn nhất.
- $AB = 2$.
- Diện tích ΔIAB lớn nhất.
- Diện tích ΔIAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và AB lớn nhất.

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Dây cung AB lớn nhất khi và chỉ khi AB là đường kính của (C) nghĩa là đường thẳng d đi qua tâm I nên $-2 - 2m - 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Vậy $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

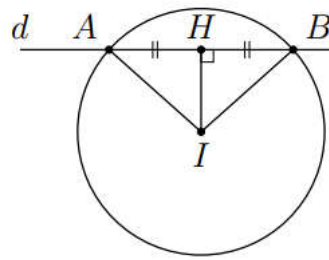


$$d(I, d) = d(I, AB) = IH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) Gọi } H \text{ là trung điểm } AB. \text{ Khi đó } IH \perp AB \text{ nên } &\Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow |1 - 4m| = \sqrt{1+m^2} \\ &\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{8}{15}.$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{15}$ là các giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu Câu toán.



c) d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi $d(I, d) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow |1 - 4m| < \sqrt{2 + 2m^2}$$

$$\Leftrightarrow 14m^2 - 8m - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{30}}{14} < m < \frac{4 + \sqrt{30}}{14}.$$

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $IH \perp AB$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \widehat{AIB} = \sin \widehat{AIB}.$$

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất khi $\sin \widehat{AIB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$

$$\text{Khi đó tam giác } IAB \text{ vuông cân tại } I \text{ nên } IH = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow d(I, d) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{cases}$$

$$\text{d) Để } d \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt khi } d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{30}}{14} < m < \frac{4 + \sqrt{30}}{14}.$$

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $IH \perp AB$. Theo giả thiết Câu toán, ta có

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \widehat{AIB} = \sin \widehat{AIB} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{AIB} = 60^\circ \\ \widehat{AIB} = 120^\circ \end{cases}$$

Mặt khác, theo giả thiết AB lớn nhất nên $\widehat{AIB} = 120^\circ$. Suy ra $\widehat{IAH} = 30^\circ$.

$$\text{Trong tam giác vuông } IAH, \text{ ta có } IH = IA \cdot \sin \widehat{IAH} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên}$$

$$\Leftrightarrow d(I, d) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

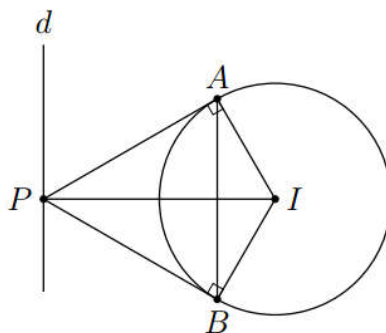
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|1 - 4m| = \sqrt{1 + m^2} \Leftrightarrow 31m^2 - 16m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{31}$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện để } d \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt ta được } m = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{31}.$$

Câu 38: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho:

- Tam giác PAB đều.
- Tam giác PAB vuông.
- Góc giữa hai tiếp tuyến PA, PB bằng 60° .

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 3$.

Tam giác PAB đều nên $\widehat{APB} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{API} = 30^\circ$.

Xét tam giác API vuông tại A , ta có:

$$IP = \frac{IA}{\sin \widehat{API}} = 2IA = 6.$$

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I , bán kính $R' = IP = 6$.

Mặt khác, để trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu Câu toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$$d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 6 \Leftrightarrow m = 19 \text{ hoặc } m = -41.$$

Vậy $m = -19$ hoặc $m = -41$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

b) Tam giác PAB vuông, suy ra $\widehat{APB} = 90^\circ$. Do đó, tứ giác $PAIB$ là hình vuông, suy ra

$$IP = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I , bán kính $R' = IP = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác, để trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu bài toán thì d tiếp xúc với (C')

$$\text{nên } d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -11 \pm 15\sqrt{2}.$$

Vậy $m = -11 \pm 15\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

c) Trường hợp 1: $\widehat{APB} = 60^\circ$ (đã làm ở trên)

Trường hợp 2: $\widehat{APB} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{API} = 60^\circ$.

$$\text{Xét tam giác } API \text{ vuông tại } A, \text{ ta có } IP = \frac{IA}{\sin \widehat{API}} = \frac{2IA}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I , bán kính $R' = IP = 2\sqrt{3}$.

Mặt khác, để trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu Câu toán thì d tiếp xúc với (C')

$$\text{nên } d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m = -11 \pm 10\sqrt{3}.$$

Vậy $m = 19$ hoặc $m = -41$ hoặc $m = -11 \pm 10\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

Câu 39: Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường cong (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$.

a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.

b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C).

Lời giải

a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.

$$\text{Điều kiện để (C) là đường tròn : } m^2 + 4(m+1)^2 - 3m - 14 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 5m - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases} \quad (1)$$

b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C).

$$\text{Tâm } I(m; 2m+2) \Rightarrow \begin{cases} x_I = m \\ y_I = 2m+2 \end{cases} \Leftrightarrow y_I = 2x_I + 2.$$

Theo điều kiện (1) (câu a), ta được quỹ tích tâm I của (C) là một phần đường thẳng có phương trình : $y = 2x + 2$ ứng với $x < -2; x > 1$.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x - 8y + 15 = 0$ và có bán kính $R = 3$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C).

(C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x - 8y + 15 = 0$ và có bán kính $R = 3$, nên:

$$d(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|6x_I - 8y_I + 15|}{10} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_I - 8y_I - 15 = 0 \\ 6x_I - 8y_I + 45 = 0 \end{cases}$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là hai đường thẳng song song có phương trình :

$$6x - 8y - 15 = 0 \text{ và } 6x - 8y + 45 = 0.$$

Câu 41: Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) có bán kính $R = 2$, biết (C) tiếp xúc tiếp xúc với đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C).

(C) tiếp xúc với (C') $\begin{cases} I'(2; -3) \\ R' = 4 \end{cases}$ và có bán kính $R = 2$, nên:

$$II' = R + R' \Leftrightarrow (x_I - 2)^2 + (y_I + 3)^2 = 36.$$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là đường tròn có phương trình :

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$$

Câu 42: Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C), biết (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 6 = 0$, $d_2: 3x - 2y + 9 = 0$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C) .

(C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 6 = 0$, $d_2: 3x - 2y + 9 = 0$, nên:

$$d(I, d_1) = d(I, d_2) \Leftrightarrow \frac{|2x_I - 3y_I + 6|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x_I - 2y_I + 9|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I + y_I + 3 = 0 \\ x_I - y_I + 3 = 0 \end{cases}$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là hai đường thẳng vuông góc có phương trình :
 $x + y + 3 = 0$ và $x - y + 3 = 0$.

Câu 43: Trong mặt phẳng Oxy , tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) , biết (C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C) .

(C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$ nên:

$$d(I, Ox) = AI \Leftrightarrow |y_I| = \sqrt{x_I^2 + (y_I - 1)^2} \Leftrightarrow y_I = \frac{1}{2}x_I^2 + \frac{1}{2}.$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là đường Parabol có phương trình : $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 44: Cho $(C): x^2 + y^2 - 2mx - 2m^2y - 1 = 0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C) .

Lời giải

(C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m; b = m^2; c = -1$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + (m^2)^2 + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow m^4 + m^2 + 1 > 0 \text{ (Lđ } \forall m \text{)}$$

Khi đó, (C) có tâm $I \begin{cases} x_I = m \\ y_I = m^2 \end{cases} \Rightarrow y_I = x_I^2 (*)$. Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$.

Vậy I nằm trên Parabol có phương trình $y = x^2$.

Câu 45: Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y + 6 = 0$.

Lời giải

(C) có tâm $I(x_I; y_I)$. Theo giả thiết $d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_I - 2y_I - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_I - 2y_I + 6|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow |x_I - 2y_I - 3| = |x_I - 2y_I + 6|$$

$$\Leftrightarrow 2x_I - 4y_I - 9 = 0 (*). \text{ Tọa độ tâm } I(x_I; y_I) \text{ thỏa mãn } (*)$$

Vậy tâm I nằm trên đường thẳng $2x - 4y - 9 = 0$.

Câu 46: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2(m-1)x - 4my + 3m + 11 = 0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn.

 Lời giải

(C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m - 1; b = 2m; c = 3m + 11$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + (2m)^2 - (3m + 11) > 0$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 5m - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$$

Khi đó, (C) có tâm $I \begin{cases} x_I = m - 1 \\ y_I = 2m \end{cases} \Rightarrow 2x_I - y_I + 2 = 0 (*)$. Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$.

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Vậy I nằm trên đường thẳng $2x - y + 2 = 0$ với $x > 1$ hoặc $x < -2$

 **Câu 47:** Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C') : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ và có bán kính $R = 1$.

 Lời giải

(C') có tâm $I'(2; -3)$ và bán kính $R' = 4$

(C) có tâm $I(x_I; y_I)$ và bán kính $R = 1$

Theo giả thiết ta có $II' = R + R' \Leftrightarrow II' = 5 \Leftrightarrow II'^2 = 25$

$$\Leftrightarrow (x_I - 2)^2 + (y_I + 3)^2 = 25 (*)$$

Tọa độ tâm $I(x_I; y_I)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy quỹ tích tâm I đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

----- TOANMATH.com -----