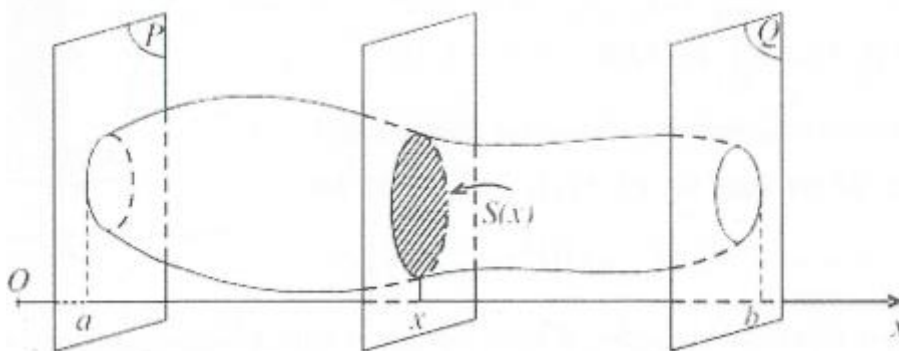


CHỦ ĐỀ 13: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

1) Tính thể tích vật thể

Cắt một vật thể (H) bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$; $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt (H) theo thiết diện là $S(x)$ (hình vẽ). Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Khi đó thể tích V của vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2) Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay quanh trục Ox

Giả sử một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay (hình vẽ). Khi đó ta có thể tích vật thể là:

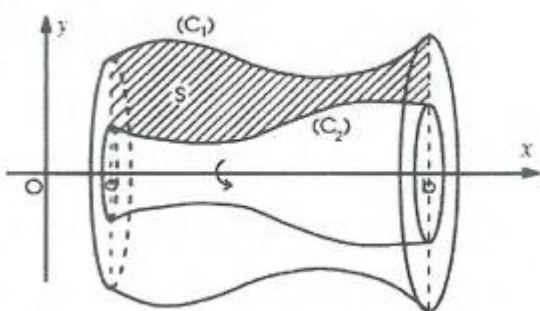
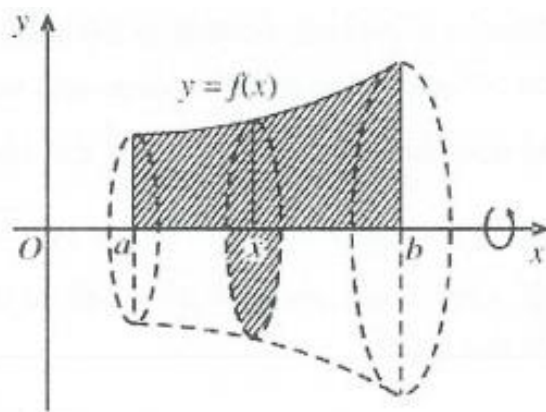
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Mặt khác tại điểm x ta có $S(x)$ là một hình tròn có bán kính $R = f(x)$

$$\Rightarrow S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x). \text{ Vậy } V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Trong trường hợp $S(x)$ giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ta được khối tròn xoay có thể tích là:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$



Chú ý: Khi bài toán không cho hai đường thẳng giới hạn $x=a$ và $x=b$ thì ta giải phương trình $f(x)=g(x)$ để tìm cận của tích phân, trong đó $x=a$ là nghiệm nhỏ nhất và $x=b$ là nghiệm lớn nhất của phương trình.

3) Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay quanh trục Oy

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ trục Oy và hai đường thẳng $y=f(a); y=f(b)$.

- **Bước 1:** Biến đổi $y=f(x)$ về dạng $x=f_1(y)$.

- **Bước 2:** Khi đó $V_{Oy} = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} f_1^2(y) dy$.

Tương tự: Trong trường hợp V_{Oy} sinh ra bởi diện tích hình phẳng của hai đồ thị hàm số $y=f(x); y=g(x)$ và hai đường thẳng

$y=m; y=n$ ta có $V_{Oy} = \pi \int_m^n |f_1^2(y) - g_1^2(y)| dy$.

Chú ý: Khi quay diện tích hình phẳng S quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V_{Ox} . Khi quay quanh trục Oy ta được khối tròn xoay có thể tích V_{Oy} .

Hầu như V_{Ox} **không** bằng V_{Oy} . Chúng chỉ bằng nhau trong một số trường hợp đặc biệt.

4) Ứng dụng tính thể tích khối cầu, khối chỏm cầu và một số hình đặc biệt

a) Thể tích của khối cầu

Trong hệ tọa độ Oxy cho nửa đường tròn có phương trình:

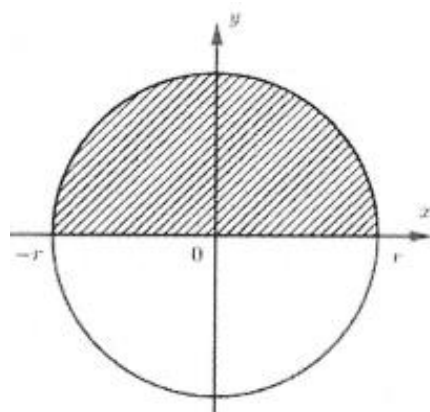
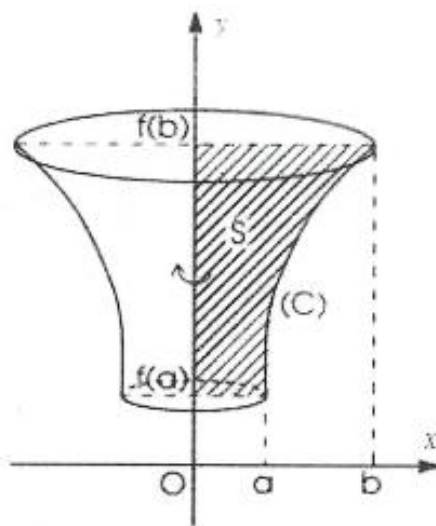
$(P): x^2 + y^2 = r^2$ với $r > 0; y \geq 0$ (hình vẽ). Quay nửa hình tròn đó quanh trục hoành ta được một mặt cầu có bán kính r .

Thể tích của mặt cầu này là: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ (đvtt).

Thật vậy: Ta có $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$

Với $y \geq 0$ ta có: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn phía trên trục hoành.

Khi đó thể tích khối cầu $V = \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r$

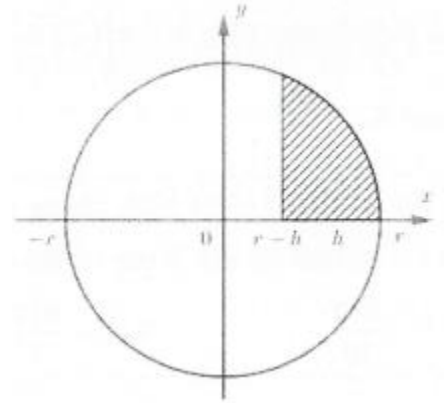


$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3} (đvtt)$$

b) Thể tích khối chỏm cầu

Khi quay hình phẳng tô đậm quanh trục Ox ta được khối 3 chỏm cầu bán kính r và chiều cao h .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } V_C &= \pi \int_{r-h}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(\frac{r^2 x}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{r-h}^r = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right). \end{aligned}$$

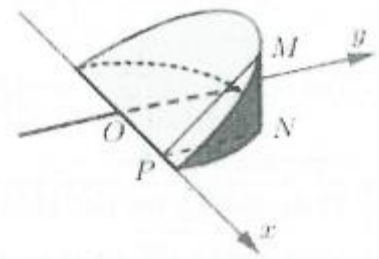


c) Thể tích khối nêm (xem hình vẽ)

$$\text{Đặt } OP = x; h = MN; \varphi = MPN \Rightarrow \tan \varphi = \frac{h}{R} \Rightarrow \begin{cases} NP = \sqrt{R^2 - x^2} \\ MN = NP \tan \varphi \end{cases}$$

$$V = \int_{-R}^R S(x) dx \text{ trong đó } S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \frac{h}{R}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \cdot \frac{h}{R} dx = \frac{1}{2} \frac{h}{R} \cdot \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{2R^2 h}{3} = \frac{2R^3 \tan \varphi}{3}$$



5) Hệ thống Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{8}{3}$.

B. $V = \frac{32}{5}$.

C. $V = \frac{8\pi}{3}$.

D. $V = \frac{32\pi}{5}$.

Lời giải:

Thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4\pi}{3}$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \frac{4}{3}$.

D. $V = 2$.

Lời giải:

Thể tích cần tính bằng $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2+1})^2 dx = \frac{4\pi}{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$; $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng:

- A.** $V = (\pi+1)\pi$. **B.** $V = \pi-1$. **C.** $V = \pi+1$. **D.** $V = (\pi-1)\pi$.

Lời giải:

Thể tích cần tính bằng $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2+\cos x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos x) dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi+1)\pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $d: y = x$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay do hình phẳng (H) quay xung quanh trục hoành.

- A.** $V = \frac{81\pi}{10}$. **B.** $V = \frac{81\pi}{5}$. **C.** $V = \frac{108\pi}{5}$. **D.** $V = \frac{108\pi}{10}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-x^2 + 4x = x \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

Thể tích cần tìm là: $V = \pi \int_0^3 \left| (4x-x^2)^2 - x^2 \right| dx = \frac{108\pi}{5}$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}$; $y=0$; $x=1$ khi xoay quanh trục Ox .

- A.** $V = \pi \left(\frac{2\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \right)$. **B.** $V = \pi \left(\frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \right)$. **C.** $V = \pi^2 \left(\frac{2\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \right)$. **D.** $V = \pi^2 \left(\frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \right)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x\sqrt{\ln(1+x^3)} = 0 \Leftrightarrow x=0$

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tìm ta có: $V = \pi \int_0^1 x^2 \ln(1+x^3) dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x^3) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{3x^2}{1+x^3} \\ v = \frac{x^3+1}{3} \end{cases} \Rightarrow V = \pi \left(\frac{x^3+1}{3} \ln(1+x^3) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \pi \left(\frac{2 \ln 2}{3} - \frac{1}{3} \right) \text{ (đvtt)}. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 6: Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0, y=x\sqrt{\ln(x+1)}; x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \frac{5\pi}{6}.$

B. $V = \frac{\pi}{6}(12 \ln 2 - 5).$

C. $V = \frac{5\pi}{18}.$

D. $V = \frac{\pi}{18}(12 \ln 2 - 5).$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x\sqrt{\ln(x+1)}=0 \Leftrightarrow x=0$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $\pi \int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = \frac{x^3+1}{3} \end{cases}$

Ta có: $\int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{x^3+1}{3} \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{1}{18}(12 \ln 2 - 5)$

Do đó $V = \frac{\pi}{18}(12 \ln 2 - 5)$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Tính thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=y^2+5; x=3-y$ quay quanh Oy .

A. $V = \frac{153}{3} \pi.$

B. $V = \frac{9}{2} \pi.$

C. $V = \frac{81}{10} \pi.$

D. $V = \frac{153}{5} \pi.$

Lời giải:

Tung độ giao điểm là: $-y^2+5=3-y \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=2 \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-1}^2 \left| (-y^2 + 5)^2 - (3-y)^2 \right| dy \xrightarrow{\text{CASIO}} V = \frac{153}{5} \pi$$

Vậy $V = \frac{153}{5} \pi$ (đvtt). **Chọn D.**

Ví dụ 8: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = 2^x$, $(d): y = -x + a$ và trục Oy . Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ bằng 1. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục Ox .

A. $V = \left(\frac{19}{3} - \frac{3}{\ln 4} \right) \pi.$

B. $V = \left(\frac{19}{3} + \frac{3}{\ln 4} \right) \pi.$

C. $V = \left(\frac{35}{3} - \frac{3}{\ln 4} \right) \pi.$

D. $V = \left(\frac{35}{3} + \frac{3}{\ln 4} \right) \pi.$

Lời giải:

Theo đề bài ta có $2 = -1 + a \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (d): y = -x + 3.$

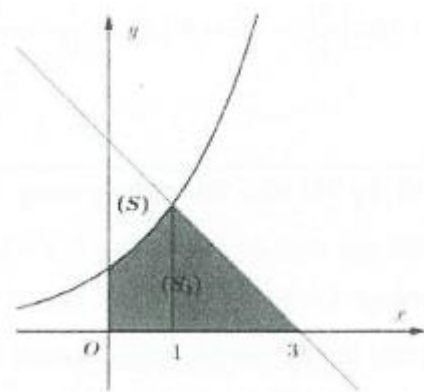
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (S_1) được giới hạn bởi các đường (C) , (d) , Oy , Ox như hình bên quanh

trục $Ox \Rightarrow V_1 = \pi \int_0^1 (2^x)^2 dx + \pi \int_1^3 (3-x)^2 dx$

$$\Rightarrow V_1 = \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{\ln 4} \right).$$

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đường (d) , Ox như hình bên quanh trục hoành,

Suy ra $V_2 = \pi \int_0^3 (3-x)^2 dx = 9\pi$. Khi đó $V = V_2 - V_1 = \left(\frac{19}{3} - \frac{3}{\ln 4} \right) \pi$. **Chọn A.**



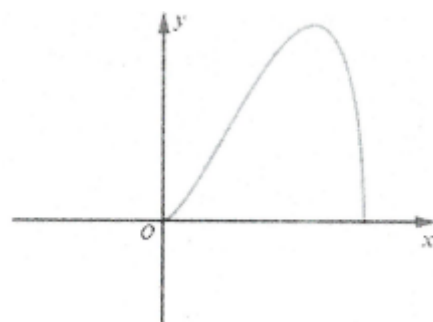
Ví dụ 9: Để tạo ra những chiếc chậu hoa hình quả lê, người ta dùng một chiếc khuôn là đường cong có phương trình trong hệ trục tọa độ là $y = \sqrt{x^3(k-x)}$ ($k > 0$). Biết rằng mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 dm. Hãy xác định k để thể tích chậu hoa là $12,15\pi$ dm³.

A. $k = 2.$

B. $k = 4.$

C. $k = 3.$

D. $k = \sqrt[4]{243}.$



Lời giải:

Ta có: $y^2 = x^3(k-x) \Rightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại điểm $(0; k)$.

$$\text{Thể tích của chậu hoa là: } V = \pi \int_0^k x^3(k-x) dx = \pi \left(k \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^k = \pi \left(\frac{k^5}{4} - \frac{k^5}{5} \right) = 12,15\pi$$

$$\Leftrightarrow k^5 = 243 \Leftrightarrow k = 3. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 10: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các

đường $y = \frac{1}{x}; y = 0; x = 1; x = 5$. Đường

thẳng $x = k$ với $1 < k < 5$ chia (H) thành hai phần là (S_1) và (S_2) quay quanh trục Ox ta thu được hai khối

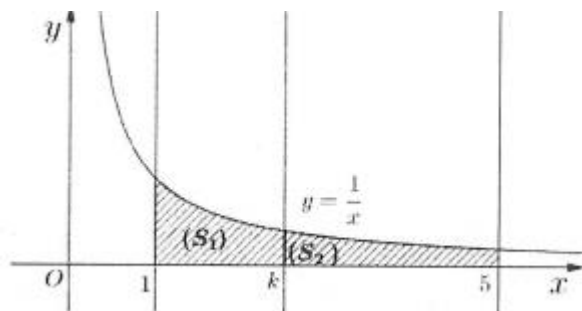
tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Xác định k để

A. $k = \frac{5}{3}$.

B. $k = \frac{15}{7}$.

C. $k = \ln 5$.

D. $k = \sqrt[3]{25}$.



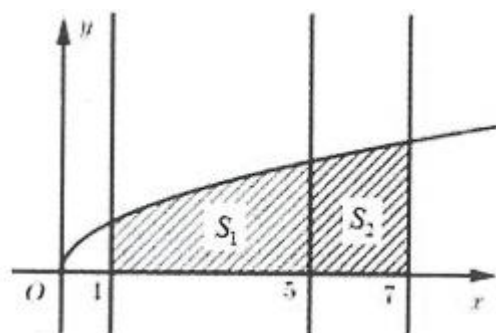
Lời giải:

$$\text{Ta có } \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} = F(x) \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \int_1^k \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx}{\pi \int_k^5 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx} = \frac{F(k) - F(1)}{F(5) - F(k)} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{15}{7}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 11: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường

$y = \sqrt{x}; y = 0; x = 1; x = 7$. Đường

thẳng $x = k$ với $1 < k < 7$ chia (H) thành hai phần là (S_1) và (S_2) quay quanh trục Ox ta thu được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 . Xác định k để $V_1 = 2V_2$.



A. $k = 33$.

B. $k = \sqrt{33}$.

C. $k = \frac{33}{2}$.

D. $k = \sqrt[3]{33}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int x = \frac{x^2}{2} = F(x) \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \int_1^k (\sqrt{x})^2 dx}{\pi \int_k^7 (\sqrt{x})^2 dx} = \frac{F(k) - F(1)}{F(7) - F(k)} = 2 \Leftrightarrow F(k) - \frac{1}{2} = 2 \left(\frac{49}{2} - F(k) \right)$$

$$\Rightarrow F(k) = \frac{33}{2} \Rightarrow k = \sqrt{33}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 12: [Đề Tham khảo Bộ Giáo dục và Đào tạo 2017] Tính thể V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được một thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$?

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. B. $V = \frac{124\pi}{3}$. C. $V = \frac{124}{3}$. D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S(x) = S_{HCN} &= 3x\sqrt{3x^2 - 2} \Rightarrow V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{3x^2 - 2} d(3x^2 - 2) \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(3x^2 - 2)^3} \Big|_1^3 = \frac{124}{3}. \text{ Chọn C.} \end{aligned}$$

Ví dụ 13: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=1$, biết thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là x và $\ln(x^2 + 1)$.

A. $\ln 2 - 1$. B. $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$. C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} \ln 2 - 1$.

Lời giải:

Do thiết diện là hình chữ nhật nên diện tích thiết diện là: $S(x) = x \ln(x^2 + 1)$

$$\text{Ta có thể tích cần tính là } V = \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(x^2 + 1) d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1) d(\ln(x^2 + 1))$$

$$\ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 2x dx = \ln 2 - \frac{1}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 14: Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều có cạnh

bằng $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V = 8\sqrt{3}$.

B. $V = 2\pi\sqrt{3}$.

C. $V = 2\sqrt{3}$.

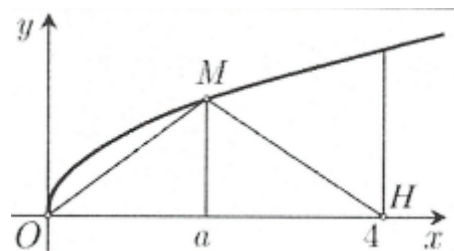
D. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải:

Diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{(2\sqrt{\sin x})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x$

Ta có thể tích cần tính là $V = \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 15: [Đề Chuyên Đại học Vinh 2017] Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



A. $a = 2\sqrt{2}$.

B. $a = \frac{5}{2}$.

C. $a = 2$.

D. $a = 3$.

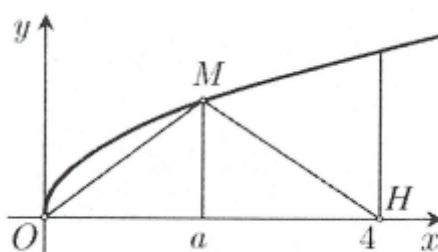
Lời giải:

Ta có $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \Rightarrow V_1 = 4\pi$.

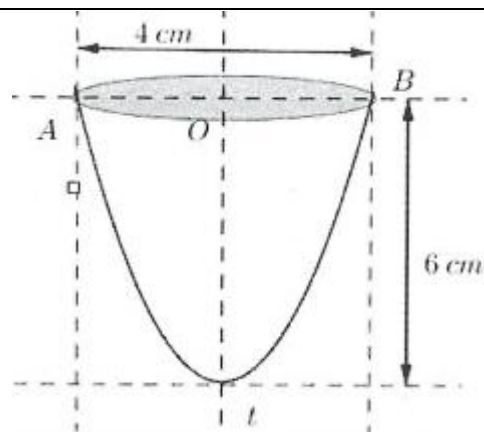
Gọi N là giao điểm của đường thẳng $x = a$ và trục hoành. Khi đó V_1 là thể tích tạo được khi xoay hai tam giác OMN và MNH quanh trục Ox với N là hình chiếu của M trên OH .

Ta có $V_1 = \frac{1}{3} \pi a (\sqrt{a})^2 + \frac{1}{3} \pi (4-a) (\sqrt{a})^2 = \frac{4}{3} \pi a = 4\pi \Leftrightarrow a = 3$.

Chọn D.



Ví dụ 16: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây: Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng qua trục đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\text{ (cm}^3\text{)}$ của vật thể đã cho?



A. $V = \frac{72\pi}{5}$.

B. $V = 12$.

C. $V = 12\pi$.

D. $V = \frac{72}{5}$.

Lời giải:

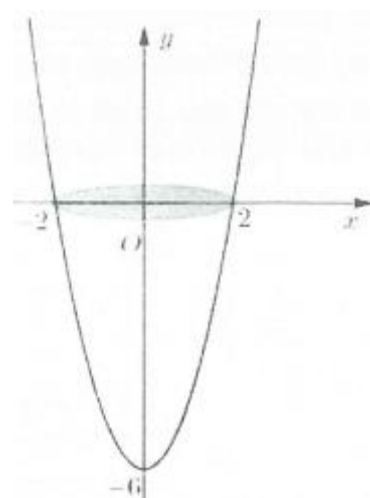
Chọn hệ trục tọa độ như hình suy ra phương trình Parabol là:

$$y = \frac{3x^2 - 12}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{2y + 12}{3}.$$

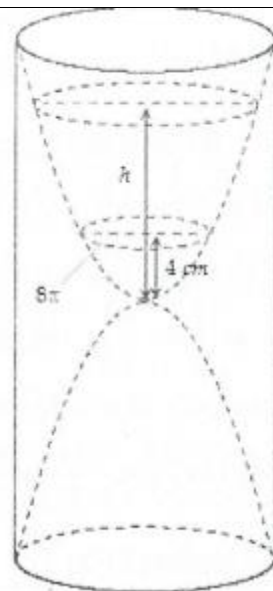
Thể tích của vật là thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) giới hạn

bởi các đường $x = \sqrt{\frac{2y + 12}{3}}$, $x = 0$, $y = -6$; $y = 0$ quanh trục tung.

Khi đó $V = \pi \int_{-6}^0 \frac{2y + 12}{3} dy = \pi \left(\frac{1}{3} y^2 + 4y \right) \Big|_{-6}^0 = 12\pi$. **Chọn C.**



Ví dụ 17: Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao h của mực cát bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bên đó (xem hình). Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $2,90\text{ cm}^3/\text{phút}$. Khi chiều cao của cát còn 4 cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn chu vi $8\pi\text{ cm}$ (xem hình). Biết sau 30 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài là bao nhiêu cm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8 cm .

B. 12 cm .

C. 9 cm .

D. 10 cm .

Lời giải:

Gọi (α) là mặt phẳng song song với đáy của hình trụ và cắt đồng hồ cát.

Khi đó mặt cắt là một hình tròn có bán kính là x nên diện tích hình tròn là $S_t = \pi R^2 = \pi x^2$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, gọi phương trình của parabol (P) là $y = ax^2 + bx + c$.

Vì (P) đi qua điểm $O(0;0)$, $A(4;4)$, $B(4;-4)$

Nên phương trình (P) : $y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow S = 4\pi y$.

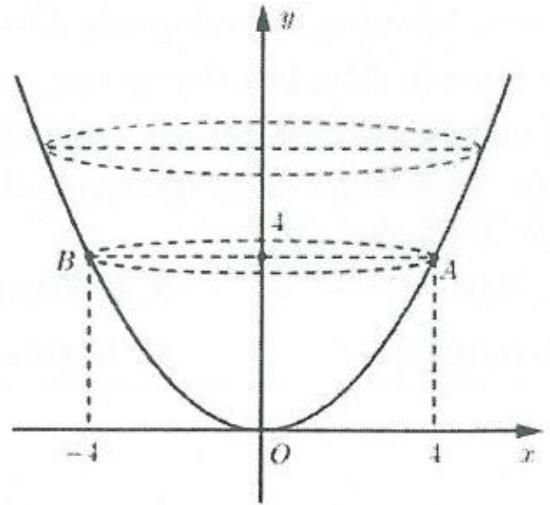
→ Thể tích cát ban đầu là $V = \int_0^h S_t dy$ vì mặt cắt vuông góc

với Oy . Suy ra $V = \int_0^h (4\pi y) dy$ mà thể tích khối cát

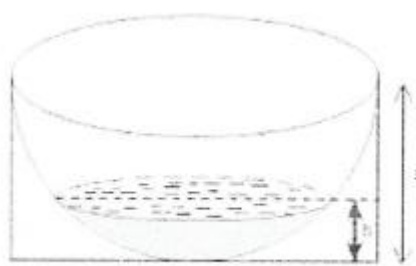
$$V_c = 2,9.30 = 87 \text{ cm}^3.$$

$$\Rightarrow \int_0^h (4\pi y) dy = 87 \Leftrightarrow 2\pi y^2 \Big|_0^h = 87 \Rightarrow 2\pi h^2 = 87 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{87}{2\pi}}.$$

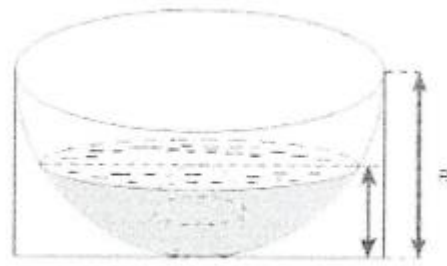
Vậy chiều cao của khối trụ bên ngoài là $2 \cdot \frac{4}{3} \cdot h = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{87}{2\pi}} \approx 9,92 \text{ cm}$. **Chọn D.**



Ví dụ 18: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10 \text{ cm}$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (Hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h = 4 \text{ cm}$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (Hình 2). Bán kính của viên bi **gần bằng**:



Hình 1



Hình 2.

A. 9,63.

B. 2,09.

C. 1,72.

D. 4,01.

Lời giải:

Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

Chú ý: Công thức thể tích chỏm cầu: $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$.

Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào:

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 16\pi \left(10 - \frac{4}{3} \right) = \frac{416}{3} \pi$$

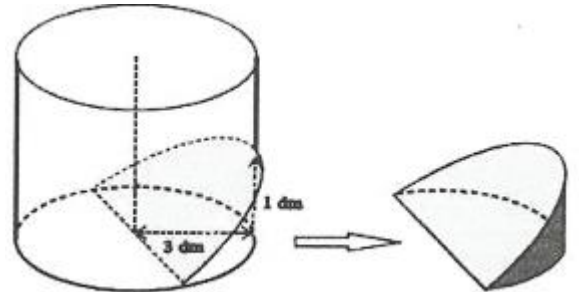
Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có thể tích là:

$$V_2 = \pi (2x)^2 \left(R - \frac{2x}{3} \right) = \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3}$$

Ta có phương trình: $V_2 - V_1 = \frac{4}{3} \pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2 (30 - 2x) - 416\pi = 4\pi x^3$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 9,626 > 5 \text{ (loại)} \\ x \approx 2,0940 < 5 \\ x = -1,72 \text{ (loại)} \end{cases} \quad \text{. Chọn B.}$$

Ví dụ 19: Từ một khối gỗ hình trụ có đường kính 6 dm, bác nông dân dùng cưa để cắt theo mặt cắt đi qua một điểm trên đường sinh cách đáy 1 dm và đi qua đường kính của đáy (như hình vẽ) để được một "khối nêm". Giúp bác nông dân tính thể tích của "khối nêm" đó ?



- A. $0,06 \text{ m}^3$. B. $0,006\pi \text{ m}^3$.
C. $0,018 \text{ m}^3$. D. $0,006 \text{ m}^3$.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó khúc gỗ bé có đáy là nửa hình tròn có phương trình:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad (x \in [-3; 3])$$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ

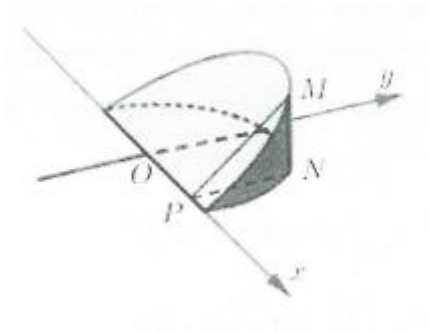
$$x, x \in [-3; 3]$$

cắt khúc gỗ bé theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

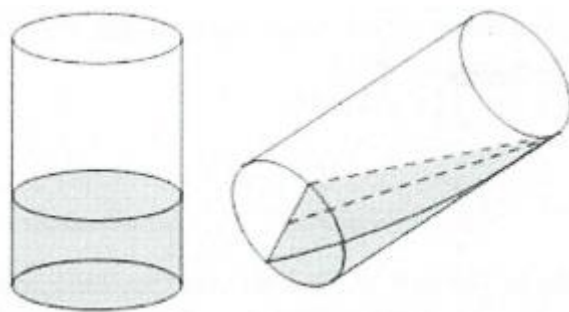
Đễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan \varphi = \sqrt{9 - x^2} \tan \varphi$

$$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot PN = \frac{1}{2} (9 - x^2) \tan \varphi \text{ trong đó } \tan \varphi = \frac{1}{3}$$

Khi đó thể tích khúc gỗ bé là : $V = \int_{-3}^3 S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (9 - x^2) \tan \varphi dx = 0,006 \text{ m}^3$. **Chọn D.**



Ví dụ 20: [Đề thi chuyên Đại học Vinh 2017] Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc.



- A. $15\pi \text{ cm}^3$. B. $60\pi \text{ cm}^3$.
C. 60 cm^3 . D. 70 cm^3 .

Lời giải:

Áp dụng công thức thể tích nêm có bán kính đáy $R=3$, chiều cao $h=10$ ta có:

$$V = \frac{2R^2h}{3} = \frac{2R^3 \cdot \tan \varphi}{3} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 10}{3} = 60 \text{ cm}^3. \text{ Chọn C.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx.$

C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx.$

D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

Câu 2: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

B. $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

D. $V = \int_a^b f(x) dx.$

Câu 3: Cho (H) là miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b$ ($a < b$) và đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$. Gọi V là thể tích của vật thể tròn xoay khi quay (H) quanh Ox . Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$

B. $V = \pi \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx.$

C. $V = \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$

D. $V = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx.$

Câu 4: Cho hình (D) giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = \pi, x = e$. Quay (D) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V . Khi đó V được xác định bằng công thức nào sau đây?

A. $V = \pi \int_e^\pi |f(x)| dx.$

B. $V = \pi \int_\pi^e f^2(x) dx.$

C. $V = \pi \int_e^\pi f^2(x) dx.$

D. $V = \int_e^\pi |f(x)| dx.$

Câu 5: Thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x$ quay xung quanh Ox được xác định bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_0^1 x^4 dx.$

$$\text{C. } V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx.$$

Câu 6: Thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox được xác định bằng công thức nào sau đây?

$$\text{A. } V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx.$$

Câu 7: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$. Khối tròn xoay tạo ra khi (H) quay quanh Ox có thể tích V được xác định bằng công thức nào?

$$\text{A. } V = \pi \int_0^1 (x^4 - x) dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx.$$

Câu 8: Thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$ và $y = x^2 - x + 2$ quanh trục Ox được xác định bằng công thức nào sau đây?

$$\text{A. } V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_1^2 [(x^2 - x + 2)^2 - 4x^2] dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_1^2 [4x^2 - (x^2 - 3x + 2)^2] dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_1^2 [(x^2 - 3x + 2)^2 + 4x^2] dx.$$

Câu 9: Hình phẳng (H) giới hạn bởi đường parabol $(P): y = x^2 + 1$, trục tung và tiếp tuyến với (P) tại điểm $M(1; 2)$ khi quay quanh trục Ox . Công thức nào sau đây sử dụng để tính thể tích V của hình (H) ?

$$\text{A. } V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^1 [(x^2 + 1)^2 - 4x^2] dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \int_0^1 (2x)^2 dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)^2 dx.$$

Câu 10: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

- A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. B. $V = \frac{124\pi}{3}$. C. $V = \frac{124}{3}$. D. $V = (32 + \sqrt{5})\pi$.

Câu 11: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9-x^2}$.

- A. $V = 3$. B. $V = 18$. C. $V = 20$. D. $V = 22$.

Câu 12: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=2$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{4-x^2}$.

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = 16$. D. $V = \frac{3}{16}$.

Câu 13: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một tam giác đều có cạnh bằng x .

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{12}{5}$. C. $V = 1$. D. $V = \frac{12\pi}{5}$.

Câu 14: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là x và $2\sqrt{\sin x}$.

- A. $V = 8\sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$. C. $V = 2\sqrt{3}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Câu 15: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$; biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) là tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\cos x + \sin x}$.

- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 2\sqrt{3}$. C. $V = 2\pi\sqrt{3}$. D. $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16: Tính thể tích V của khối tròn xoay trong không gian $Oxyz$, giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=\pi$ và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm $(x;0;0)$ bất kỳ là đường tròn bán kính $\sqrt{\sin x}$.

- A. $V=2$. B. $V=\pi$. C. $V=4\pi$. D. $V=2\pi$.

Câu 17: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5}x^2$.

- A. $V=8\sqrt{5}\pi$. B. $V=2\sqrt{5}$. C. $V=4\pi$. D. $V=4\sqrt{5}\pi$.

Câu 18: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=4$ biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 4$) thì được thiết diện là một hình lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

- A. $V=63\sqrt{3}\pi$. B. $V=126\sqrt{3}$. C. $V=63\sqrt{3}$. D. $V=126\sqrt{3}\pi$.

Câu 19: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3x, y=x, x=0, x=1$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

- A. $V=\frac{8\pi}{3}$. B. $V=\frac{4\pi}{3}$. C. $V=\frac{2\pi}{3}$. D. $V=\pi$.

Câu 20: Hình (H) giới hạn bởi $y=x^2-4x+4, y=0, x=0, x=1$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

- A. $V=\frac{8\pi}{3}$. B. $V=\frac{4\pi}{3}$. C. $V=\frac{2\pi}{3}$. D. $V=\frac{31\pi}{5}$.

Câu 21: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ quay quanh trục hoành.

- A. $V=\frac{2\pi}{3}$. B. $V=\frac{8\pi}{15}$. C. $V=\frac{16\pi}{15}$. D. $V=\frac{4\pi}{3}$.

Câu 22: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox .

- A. $V=\frac{\pi^2}{2}$. B. $V=\pi R^2$. C. $V=\frac{\pi^2}{3}$. D. $V=2\pi$.

Câu 23: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{e^x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được sinh ra khi ta quay hình (H) quanh trục Ox .

- A. $V = \pi(e-1)$. B. $V = \pi(e+3)$. C. $V = \pi e$. D. $V = e+1$.

Câu 24: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{\sqrt{3x+1}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ quay quanh Ox .

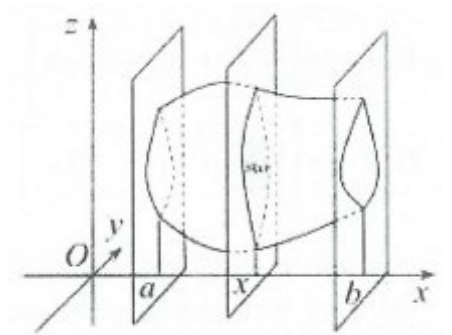
- A. $V = \pi e^2$. B. $V = \pi e$. C. $V = \pi(e^2 + e)$. D. $V = \pi(e^2 - e)$.

Câu 25: Tính thể tích của vật thể tròn xoay được sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{\sqrt{3x+1}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ quay quanh Ox .

- A. $\frac{\pi}{6}(3e^4 - e^2)$. B. $\pi\left(\frac{1}{3}e^3 - e\right)$. C. $\frac{1}{3}\pi(e^3 + e)$. D. $\pi(e^3 - e)$.

Câu 26: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và $x = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{7\pi}{6}$. B. $V = \frac{7\pi^2}{6}$. C. $V = \frac{7}{6}$.



Câu 27: (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = a$ và $x = b$ ($a < b$). Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $a \leq x \leq b$. Giả sử hàm số $y = S(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Thể tích V của vật thể (H) được xác định bởi công thức nào?

- A. $V = \int_a^b S(x) dx$. B. $V = \int_a^b [S(x)]^2 dx$.
C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b [S(x)]^2 dx$.

Câu 28: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$ trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình (D) quay quanh trục Ox .

A. $V = \pi^2 \int_0^1 e^x dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 e^x dx.$

C. $V = \left(\int_0^1 e^{2x} dx \right)^2.$

D. $\pi \int_0^1 e^{2x} dx.$

Câu 29: Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên và các đường thẳng $x = a, x = b$. Thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay S quanh trục Ox được tính bởi công thức nào sau đây?

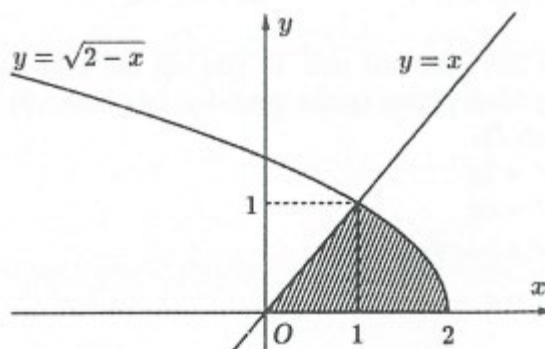
A. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx.$

$V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$

B.

D. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$



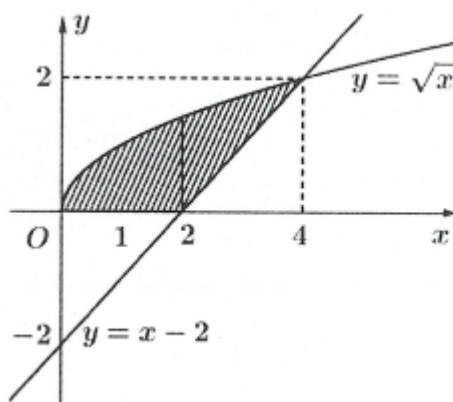
Câu 30: Nêu công thức tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \pi \int_0^1 (2-x) dx + \pi \int_1^2 x^2 dx.$

B. $V = \pi \int_0^2 (2-x) dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_1^2 \sqrt{2-x} dx.$

D. $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx.$

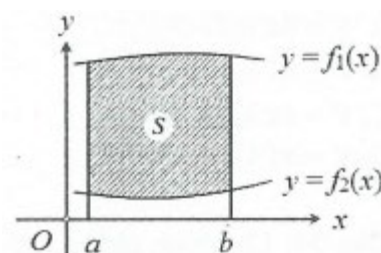


Câu 31: Nêu công thức tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \pi \left[\int_0^4 x dx + \int_2^4 (x-2) dx \right].$

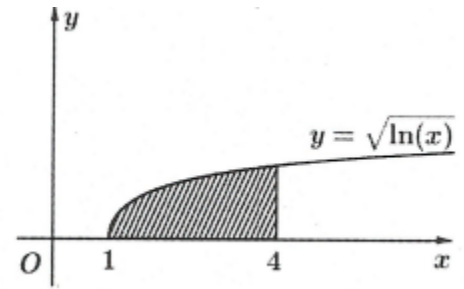
B. $V = \pi \left[\int_0^4 x dx - \int_2^4 (x-2)^2 dx \right].$

C. $V = \pi \left[\int_0^2 x dx + \int_2^4 (x-2)^2 dx \right].$



D. $V = \pi \left[\int_0^2 \sqrt{x} dx - \int_2^4 (x-2) dx \right].$

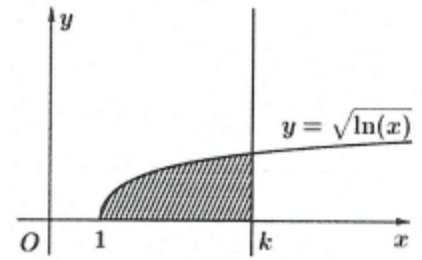
Câu 32: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .



A. $V = \frac{15\pi}{\ln 4}.$ B. $V = \frac{8\pi}{\ln 2}.$

C. $V = \frac{15\pi}{\ln 2}.$ D. $V = \frac{17\pi}{\ln 4}.$

Câu 33: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .



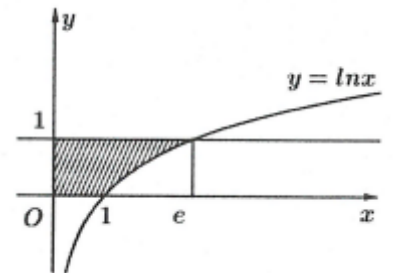
A. $V = 4\pi \ln 4 - 3.$

B. $V = \pi(4 \ln 2 - 3).$

C. $V = 4\pi \ln 2 - 3\pi.$

D. $V = \pi(4 \ln 4 - 3).$

Câu 34: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = k$ với $k > 1$ như hình vẽ. Gọi V_k là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox . Biết rằng $V_k = \pi$, hãy chọn khẳng định **đúng**?



A. $3 < k < 4.$

B. $1 < k < 2.$

C. $2 < k < 3.$

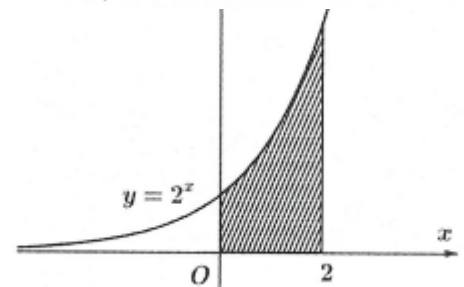
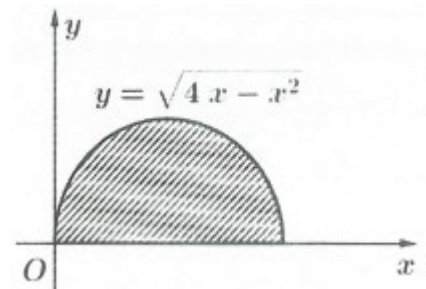
Câu 35: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = 2\pi.$

B. $V = e\pi.$

C. $V = (e+1)\pi.$

D. $V = \pi.$



Câu 36: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \frac{35\pi}{3}$.

B. $V = \frac{31\pi}{3}$.

C. $V = \frac{32\pi}{3}$.

D. $V = \frac{34\pi}{3}$.

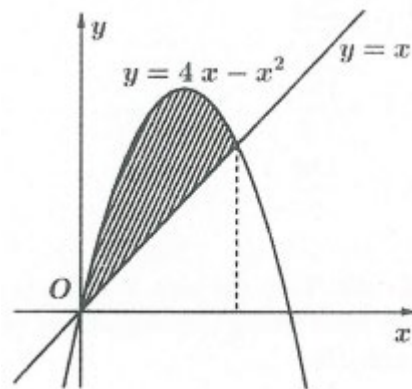
Câu 37: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. 24π .

B. 27π .

C. 25π .

D. 26π .



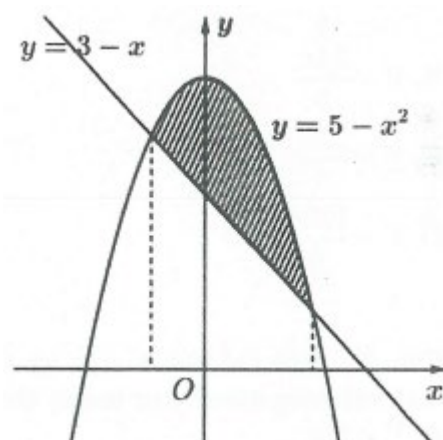
Câu 38: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \frac{81}{10}\pi$.

B. $V = \frac{81}{5}\pi$.

C. $V = \frac{108}{5}\pi$.

D. $V = 50\pi$.



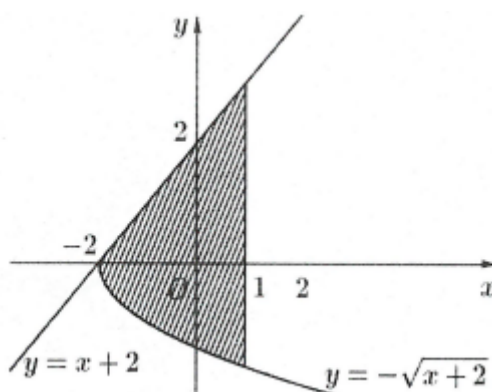
Câu 39: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \frac{12\pi}{5}$.

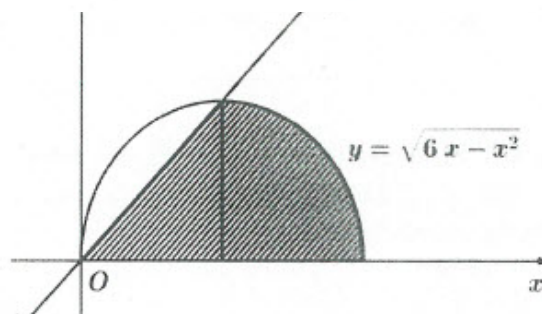
B. $V = \frac{53\pi}{15}$.

C. $V = \frac{153\pi}{5}$.

D. $V = \frac{31\pi}{13}$.



Câu 40: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

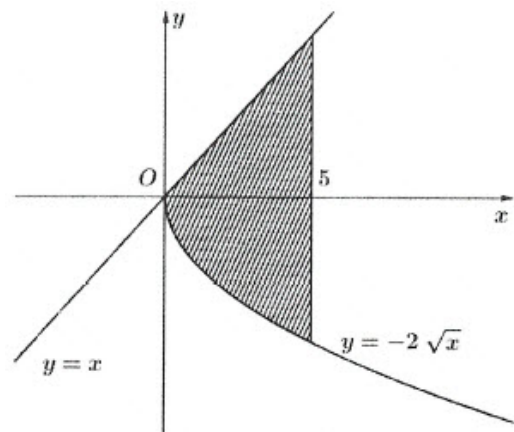


A. $V = \frac{27\pi}{2}$.

B. $V = \frac{9\pi}{2}$.

C. $V = \frac{11\pi}{3}$.

D. $V = \frac{55\pi}{6}$.



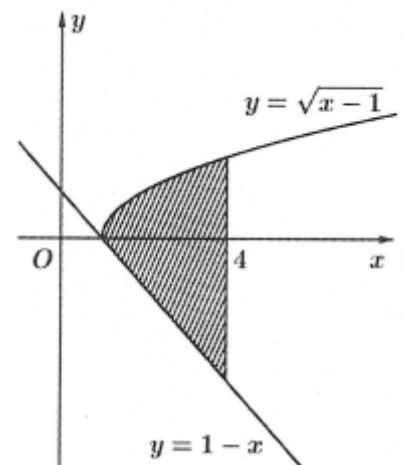
Câu 41: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \frac{125\pi}{3}$.

B. $V = \frac{25\pi}{3}$.

C. $V = \frac{157\pi}{3}$.

D. $V = \frac{13\pi}{2}$.



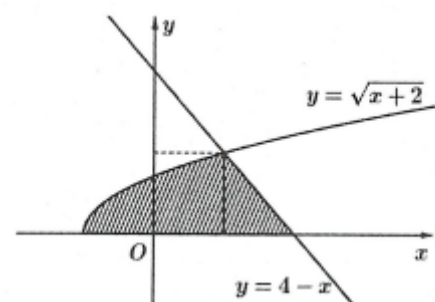
Câu 42: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = \frac{55\pi}{6}$.

B. $V = \frac{24\pi}{3}$.

C. $V = \frac{25\pi}{3}$.

D. $V = \frac{125\pi}{9}$.



Câu 43: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox .

A. $V = 11\pi$.

B. $V = \frac{31\pi}{3}$.

C. $V = \frac{32\pi}{3}$.

D. $V = \frac{34\pi}{3}$.

Câu 44: Biết $V = \frac{15\pi}{4} + 4\pi \ln 2$ là thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox . Tìm k , biết $k > 1$.

A. $k = \frac{4e}{3}$.

B. $k = \frac{e^2}{2}$.

C. $k = \frac{3}{2} \ln 2$.

D. $k = 4$.

Câu 45: Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{(x-1)e^{x^2-2x}}$, $y = 0$, $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh Ox .

A. $V = \frac{\pi(2e-3)}{2e}$.

B. $V = \frac{\pi(e-3)}{2e}$.

C. $V = \frac{\pi(2e-1)}{2e}$.

D. $V = \frac{\pi(e-1)}{2e}$.

Câu 46: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ quay quanh Ox .

A. $V = \frac{2e^3+1}{9}\pi$.

B. $V = \frac{2e^3-1}{9}\pi$.

C. $V = \frac{2e^3+1}{3}\pi$.

D. $V = \frac{2e^3-1}{3}\pi$.

Câu 47: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình (H) giới hạn bởi $y = \frac{1}{x} + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = k$ ($k > 1$) quay xung quanh Ox . Tìm k để

$V = \pi \left(\frac{15}{4} + \ln 16 \right)$.

A. $k = 4$.

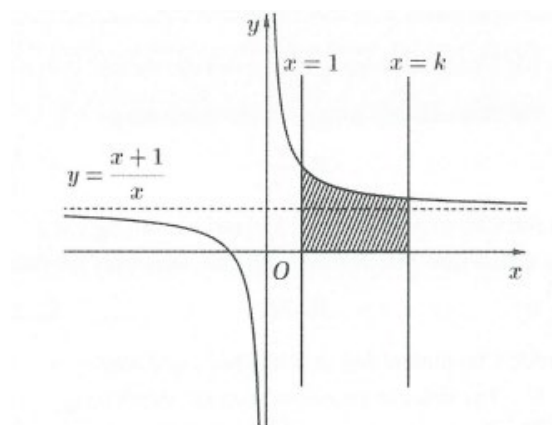
B. $k = 4e$.

C.

$k = e^2$.

D. $k = 8$.

Câu 48: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Tính thể tích khối tròn



xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $\frac{\pi(5e^3 - 2)}{25}$. B. $\frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}$. C. $\frac{\pi(5e^3 + 2)}{25}$. D. $\frac{\pi(5e^3 + 2)}{27}$.

Câu 49: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = e$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{4e^3 + 1}{9}\pi$. B. $\frac{4e^3 - 1}{9}\pi$. C. $\frac{2e^3 + 1}{9}\pi$. D. $\frac{2e^3 - 1}{9}\pi$.

Câu 50: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y = 0$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{729\pi}{35}$. B. $\frac{27\pi}{4}$. C. $\frac{256608\pi}{35}$. D. $\frac{776\pi}{5}$.

Câu 51: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{88\pi}{5}$. B. $\frac{9\pi}{70}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{6\pi}{5}$.

Câu 52: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \ln \frac{4}{3}$. B. $V = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$. C. $V = \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$. D. $V = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{4}$.

Câu 53: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos 4x$, Ox , $x = 0$, $x = \frac{\pi}{8}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{\pi^2}{2}$. B. $\frac{\pi^2}{16}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\left(\frac{\pi+1}{16}\right)\pi$.

Câu 54: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 3$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{3}{2}\pi$. B. 3π . C. 2π . D. π .

Câu 55: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{79\pi}{63}$.

B. $\frac{23\pi}{14}$.

C. $\frac{5\pi}{4}$.

D. 9π .

Câu 56: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = ax^2$, $y = bx$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) quay xung quanh trục Ox .

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{b^3}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \pi$.

B. $\frac{b^5}{5a^3} \pi$.

C. $\frac{b^5}{3a^3} \pi$.

D. $\frac{b^5}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \pi$.

Câu 57: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox .

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

B. $\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$.

Câu 58: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3x$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\frac{8}{3}\pi$.

B. $\frac{4}{3}\pi$.

C. $\frac{2}{3}\pi$.

D. π .

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **Chọn A.**

Câu 2: Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **Chọn A.**

Câu 3: Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$. **Chọn A.**

Câu 4: Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_e^\pi f^2(x) dx$. **Chọn C.**

Câu 5: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Dựa vào hình vẽ, thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx$. **Chọn C.**

Câu 6: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do $2x > x^2, \forall x \in (0; 2)$ nên thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 4x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx$. **Chọn A.**

Câu 7: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) là $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 \left| (x^2)^2 - (\sqrt{x})^2 \right| dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$. **Chọn D.**

Câu 8: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 - x + 2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_1^2 \left[4x^2 - (x^2 - 3x + 2)^2 \right] dx$. **Chọn C.**

Câu 9: Ta có $y' = x^2 + 1 \longrightarrow y'(1) = 2$ nên phương trình tiếp tuyến của (P) là $y = 2x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 \left[(x^2 + 1)^2 - 4x^2 \right] dx$. **Chọn B.**

Câu 10: Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$. **Chọn C.**

Câu 11: Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2} dx = 18$. **Chọn B.**

Câu 12: Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 2x\sqrt{4 - x^2} dx = \frac{16}{3}$. **Chọn B.**

Câu 13: Diện tích tam giác đều cạnh x là $S(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 14: Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S(x) = 2x\sqrt{\sin x}$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi 2x\sqrt{\sin x} dx = 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 15: Diện tích tam giác đều cạnh x là $S(x) = \frac{(2\sqrt{\sin x + \cos x})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(\sin x + \cos x)$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3}(\sin x + \cos x) dx = 2\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 16: Diện tích đường tròn bán kính $\sqrt{\sin x}$ là $S(x) = \pi \cdot (\sqrt{\sin x})^2 = \pi \sin x$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi \pi \sin x dx = 2\pi$. **Chọn D.**

Câu 17: Bán kính đường tròn $R = \frac{d}{2} = \frac{x^2\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ Diện tích nửa đường tròn bán kính R là $S(x) = \frac{5\pi x^4}{8}$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \pi \cdot \frac{5x^4}{8} dx = 4\pi$. **Chọn C.**

Câu 18: Diện tích tam giác đều cạnh $2x$ là $S_{\Delta} = \frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3}$

Suy ra diện tích lục giác đều cạnh $2x$ là $S(x) = 6 \times S_{\Delta} = 6\sqrt{3}x^2$.

Do đó, thể tích cần tính là $V = \int_1^4 S(x) dx = \int_1^4 6\sqrt{3}x^2 dx = 126\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 19: Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{8\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 20: $V = \pi \int_0^1 (x^2 - 4x + 4)^2 dx = \frac{31\pi}{5}$. **Chọn D.**

Câu 21: $V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \frac{8\pi}{15}$. **Chọn B.**

Câu 22: $V = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}$. **Chọn A.**

Câu 23: $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{e^x})^2 dx = \pi \int_0^1 e^x dx = \pi(e - 1)$. **Chọn A.**

Câu 24: $V = \pi \int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x e^x dx = \pi e^2$. **Chọn A.**

Câu 25: $V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{3x+1}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2\sqrt{3x+1}} dx = \frac{\pi}{6}(3e^4 - e^2)$. **Chọn A.**

Câu 26: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Do đó, thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \frac{7\pi}{6}$. **Chọn A.**

Câu 27: Công thức thể tích vật thể (H) là: $V = \int_a^b S(x) dx$. **Chọn A.**

Câu 28: $V = \pi \int_0^1 \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 e^x dx$. **Chọn B.**

Câu 29: Dựa vào hình vẽ ta có: $f_1(x) > f_2(x) > 0$ với mọi $x \in [a; b] \Rightarrow f_1^2(x) > f_2^2(x) \forall x \in [a; b]$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay S quanh trục là:

$$V = \pi \int_a^b \left| f_1^2(x) - f_2^2(x) \right|^2 dx = \pi \int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x) \right]^2 dx. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 30: $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 \left[(\sqrt{2-x})^2 \right] dx = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx$. **Chọn D.**

Câu 31: $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_2^4 (x-2)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx - \pi \int_2^4 (x-2)^2 dx$. **Chọn B.**

Câu 32: $V = \pi \int_0^2 (2^x)^2 dx = \pi \int_0^2 4^x dx = \pi \frac{4^x}{\ln 4} \Big|_0^2 = \frac{15\pi}{\ln 4}$. **Chọn A.**

Câu 33: $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{\ln x})^2 dx = \pi \int_1^4 \ln x dx$.

$$\text{Lại có: } \int_1^4 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 x d(\ln x) = 4 \ln 4 - \int_1^4 dx = 4 \ln 4 - 3.$$

Do đó $V = \pi(4 \ln 4 - 3)$. **Chọn D.**

Câu 34: $V = \pi \int_1^k (\sqrt{\ln x})^2 dx = \pi \int_1^k \ln x dx$

$$\text{Lại có: } \int_1^k \ln x dx = x \ln x \Big|_1^k - \int_1^k x d(\ln x) = k \ln k - \int_1^k dx = k \ln k - (k - 1)$$

Do đó $V = \pi \Leftrightarrow k \ln k - k + 1 = 1 \Leftrightarrow k(\ln k - 1) = 0 \xrightarrow{k > 1} \ln k = 1 \Rightarrow k = e$. **Chọn C.**

Câu 35: Thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox là: $V = \pi \int_0^e 1^2 dx - \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \pi \left(e - \int_1^e \ln^2 x dx \right)$

Sử dụng máy tính **CASIO** ta được: $V = 2\pi$. **Chọn A.**

Câu 36: Ta có: $\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox là: $V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{4x - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx = \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32\pi}{3}$. **Chọn C.**

Câu 37: Giải phương trình hoành độ giao điểm: $x = \sqrt{6x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 6x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Thể tích V của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành Ox là: $V = \pi \int_0^3 x^2 dx + \pi \int_3^6 \left(\sqrt{6x - x^2} \right)^2 dx = \frac{\pi x^3}{3} \Big|_0^3 + \pi \int_3^6 (6x - x^2) dx$
 $= 9\pi + \pi \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_3^6 = 27\pi$. **Chọn B.**

Câu 38: Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là: $x = 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$V = \pi \int_0^3 \left[(4x - x^2)^2 - x^2 \right] dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 15x^2) dx \xrightarrow{\text{CASIO}} V = \frac{108\pi}{5}$. **Chọn C.**

Câu 39: Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là: $3 - x = 5 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_{-1}^2 \left[(5 - x^2)^2 - (3 - x)^2 \right] dx$

$= \pi \int_{-1}^2 (x^4 - 11x^2 + 6x + 16) dx \xrightarrow{\text{CASIO}} V = \frac{153\pi}{5}$. **Chọn C.**

Câu 40: Lấy đối xứng đường thẳng $y = -\sqrt{x+2}$ qua trục Ox ta được đường thẳng $y = \sqrt{x+2}$.

Giải phương trình $\sqrt{x+2} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} (\sqrt{x+2})^2 dx + \pi \int_{-1}^1 (x+2)^2 dx \xrightarrow{CASIO} V = \frac{55\pi}{6}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 41: Lấy đối xứng đường thẳng $y = -2\sqrt{x}$ qua trục Ox ta được đường thẳng $y = 2\sqrt{x}$.

Giải $2\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int_0^4 (2\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_4^5 x^2 dx \xrightarrow{CASIO} V = \frac{157\pi}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 42: Lấy đối xứng đường thẳng $y = 1-x$ qua trục Ox ta được đường thẳng $y = x-1$

Giải phương trình $x-1 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là $V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x-1})^2 dx + \pi \int_2^4 (1-x)^2 dx \xrightarrow{CASIO} V = \frac{55\pi}{6}$. **Chọn A.**

Câu 43: Xét phương trình $\sqrt{x+2} = 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x+2 = 16-8x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_{-2}^2 (x+2) dx + \pi \int_2^4 (4-x)^2 dx$.

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^2 + \pi \left(16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{32\pi}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 44: Thể tích khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_1^k \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^k \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$

$$V = \pi \int_1^k \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \left(x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^k = \pi \left(k - 1 + 2 \ln k + 1 - \frac{1}{k} \right)$$

$$\text{Do } V = \frac{15\pi}{4} + 4\pi \ln 2 \Rightarrow \frac{15}{4} + 4 \ln 2 = k - \frac{1}{k} + 2 \ln k \Leftrightarrow k = 4. \text{ Chọn D.}$$

Câu 45: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $\sqrt{(x-1)e^{x^2-2x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó, $V = \pi \int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^2 e^{x^2-2x} d(x^2-2x) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{x^2-2x} \Big|_1^2 = \frac{\pi(e-1)}{2e}$. **Chọn D.**

Câu 46: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó, thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 (x\sqrt{\ln x})^2 dx = \frac{2e^3+1}{9} \pi$ (bấm máy). **Chọn A.**

Câu 47: Thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int_1^k \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^2 dx = \pi \left(x - \frac{1}{x} + 2 \ln |x| \right) \Big|_1^k$
 $= \pi \left(k - \frac{1}{k} + 2 \ln k \right) = \pi \left(\frac{15}{4} + \ln 16 \right) \longrightarrow k - \frac{1}{k} + 2 \ln k = \frac{15}{4} + \ln 16 \Rightarrow k = 4$. **Chọn A.**

Câu 48: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó, thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 (x \cdot \ln x)^2 dx = \frac{\pi(5e^3-2)}{27}$ (bấm máy). **Chọn B.**

Câu 49: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó, thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 (x\sqrt{\ln x})^2 dx = \frac{2e^3+1}{9} \pi$ (bấm máy). **Chọn C.**

Câu 50: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Khi đó, thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)^2 dx = \frac{729\pi}{35}$. **Chọn A.**

Câu 51: Ta có $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = \sqrt{4x} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $2x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Khi đó, thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 \left| (2x^2)^2 - (2\sqrt{x})^2 \right| dx = \frac{6\pi}{5}$. **Chọn D.**

Câu 52: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $\sqrt{\frac{x}{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó, $V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{x}{4-x^2}} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$ (bấm máy). **Chọn C.**

Câu 53: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos 4x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1 + \cos 8x}{2} dx = \pi \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi^2}{16}$. **Chọn B.**

Câu 54: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó, $V = \pi \int_1^3 (\sqrt{x-1})^2 dx = \pi \int_1^3 (x-1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = 2\pi$. **Chọn C.**

Câu 55: $V = \pi \int_0^1 (x^3 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{23\pi}{14}$. **Chọn B.**

Câu 56: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $ax^2 = bx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{b}{a} \end{cases}$.

Khi đó, thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^{\frac{b}{a}} |a^2 x^4 - b^2 x^2| dx = \frac{b^5}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \pi$. **Chọn D.**

Câu 57: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là $\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó, thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{3} \right)^2 \right| dx = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$. **Chọn B.**

Câu 58: Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{8}{3}\pi$. **Chọn A.**