

CHỦ ĐỀ 4: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

- **Định nghĩa 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$; $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu **ít nhất** một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$.
- **Định nghĩa 2:** Đường thẳng $x = x_0$ là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu **ít nhất** một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y = -\infty.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

✎ **Dạng 1: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số không chứa tham số**

Phương pháp giải:

Để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm miền xác định (tập xác định) của hàm số $y = f(x)$
- **Bước 2:** Tìm giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến biên của miền xác định.
- **Bước 3:** Từ các giới hạn và định nghĩa tiệm cận suy ra phương trình các đường tiệm cận.

Đặc biệt: Để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D .

- **Bước 2:**

+) Tìm tiệm cận ngang: Ta tính các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và kết luận tiệm cận ngang

+) Tìm tiệm cận đứng: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp hoặc phân tích nhân tử để đơn giản biểu thức

$\frac{f(x)}{g(x)}$ về dạng tối giản nhất có thể từ đó kết luận về tiệm cận đứng.

Chú ý:

- Nếu bậc của $f(x)$ **nhỏ hơn hoặc bằng bậc** của $g(x)$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.
- Nếu bậc của $f(x)$ **lớn hơn bậc** của $g(x)$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ví dụ 1: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{2-x}{1-x^2} (C).$

b) $y = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - 5x + 4} (C).$

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)} y = \infty$ nên $x = 1$ và $x = -1$ là các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 5x + 1}{(x-1)(x-4)} = -\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 5x + 1}{(x-1)(x-4)} = +\infty$) nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của (C).

Tương tự đường thẳng $x = 4$ cũng là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số đã cho.

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau

a) $y = \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{x^2 - 1}$.

b) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = [-3; +\infty) \setminus \{\pm 1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+3-4x^2}{\sqrt{x+3}+2x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(3+4x)}{(\sqrt{x+3}+2x)(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{3+4x}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2x)} = -\frac{7}{8} \Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)} y = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 + 7} - 4} = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$$\text{Lại có: } y = \frac{(x-1)(x-3)}{\frac{x^2+7-16}{\sqrt{x^2+7+4}}} = \frac{(\sqrt{x^2+7+4})(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(\sqrt{x^2+7+4})(x-1)}{x+3}$$

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -3$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 0$ và $y = 2$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 0$ và $x = 2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có TCD $x = 0$

Lại có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có TCD $x = 2$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

- A. $x = -1, y = \frac{1}{2}$.
- B. $x = -1, y = 2$.
- C. $x = 1, y = -2$.
- D. $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Trong các hàm số được nêu trong các phương án A, B, C, D đồ thị hàm số nào nhận đường thẳng $x = 2$ và $y = 1$ là các đường tiệm cận?

- A. $y = \frac{2x+2}{x-1}$.
- B. $y = \frac{x-2}{x-1}$.
- C. $y = \frac{1}{x^2-x-2}$.
- D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc \neq 0$ nhận $x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang.

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.
 C. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$; $x = 3$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow (-1)} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} y = \infty$ do đó $x = -1$; $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Đồ thị nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. B. $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$. C. $y = \frac{x - 1}{x + 2}$. D. $y = \frac{1}{x + 1}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. **Chọn A.**

Ví dụ 8: [Đề thi THPT QG 2017] Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$. Khi đó: $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 16} = \frac{(x + 1)(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{x + 1}{x + 4}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -4$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: [Đề thi THPT QG 2017] Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

A. 2.**B. 3.****C. 0.****D. 1.****Lời giải**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Khi đó $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \frac{(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)} y = \infty \end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: [Đề thi THPT QG 2017] Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}$ là:

A. 3.**B. 2.****C. 0.****D. 1.****Lời giải**

TXĐ: $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}..$

Khi đó: $y = \frac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x} = \frac{\frac{x+9-9}{\sqrt{x+9}+3}}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)}$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow (-1)} y = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn D.

Ví dụ 11: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}$.

A. $y = 2$.**B. $x = 1$.****C. $y = -2$ và $y = 0$.****D. $y = 1$.****Lời giải**

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}{1-\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}{1-\frac{1}{x}} = -2 \end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai đường tiệm

cận ngang là $y = 2$ và $y = 0$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: [Đề thi tham khảo năm 2018] Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải

Phân tích các đáp án:

Đáp án A. Ta có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2$ nên hàm số không có tiệm cận đứng.

Đáp án B. Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên hàm số không có tiệm cận đứng.

Đáp án C. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$ không có tiệm cận đứng.

Đáp án D. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x + 1}$ có tiệm cận đứng là $x = -1$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 1}$. Đồ thị hàm số có mấy đường tiệm cận?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 2] \cup [2; +\infty)$.

Ta thấy rằng $x = 1 \notin D \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 1; y = -1 \Rightarrow \text{đồ thị hàm số có}$$

hai đường tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.}$$

Và $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. **Chọn A.**

Ví dụ 15: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^2-4}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^2-4}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là } y = \pm 1.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm 2} y = \infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = \pm 2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận. **Chọn D.**

Ví dụ 16: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x}-1}{x(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Hàm số có tập xác định: $D = (-\infty; 2] \setminus \{0; 1\}$

Khi đó $y = \frac{\sqrt{2-x}-1}{x(x^2-4x+3)} = \frac{1-x}{x(x-1)(x-3)(\sqrt{2-x}+1)} = -\frac{1}{x(x-3)(\sqrt{2-x}+1)}.$

Suy ra $x(x-3)(\sqrt{2-x}+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Ví dụ 17: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x = -3; x = -2$.

B. $x = -3$.

C. $x = 3; x = 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Ta có:
$$y = \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{x^2-5x+6} = \frac{3x^2-5x-2}{(x-2)(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})}$$

Do vậy chỉ có đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. **Chọn D.**

Ví dụ 18: Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$.

A. $x = \pm 1, y = 0$.

B. $x = \pm 1, y = 1$.

C. $y = 0$.

D. $x = \pm 1$.

Lời giảiHàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} = \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}+2)(x^2-1)} = \frac{x^2-1}{(\sqrt{x^2+3}+2)(x^2-1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}.$$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2} = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$. **Chọn C.**

Ví dụ 19: Số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang } y = 3.$$

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận. **Chọn A.**

Ví dụ 20: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$

A. $x = -3$.

B. $x = -1$ và $x = 3$.

C. $x = 1$ và $x = -3$.

D. $x = 3$

Lời giảiHàm số có tập xác định $D = (-3; +\infty) \setminus \{1\}$.

$$\text{Khi đó } y = \frac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3} = \frac{(3x-1)^2-(x+3)}{(x^2+2x-3)(3x-1+\sqrt{x+3})} = \frac{9x^2-7x-2}{(x^2+2x-3)(3x-1+\sqrt{x+3})}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{9x+2}{(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})}$$

Ta thấy $(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$. **Chọn A.**

Ví dụ 21: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{2x+3} - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$. Hãy chọn mệnh đề đúng.

- A. Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = 3$.
- B. Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng là $y = 1$ và $y = 3$.
- C. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
- D. Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải

Ta có: $D = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1; 3\}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } y &= \frac{2x+3-(2x-3)^2}{x^2-4x+3} = \frac{(1-2x)(x-3)}{(\sqrt{2x+3}+2x-3)(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{1-2x}{(\sqrt{2x+3}+2x-3)(x-1)}. \text{ Suy ra } \lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \text{ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng } x = 1. \end{aligned}$$

Lại có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Ví dụ 22: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số có hai TCN.}$$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận. **Chọn C.**

Ví dụ 23: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x-2}$.

- A. $x = 2$.
- B. $x = -2$.
- C. $x = -2$ và $x = -1$.
- D. $x = 2$ và $x = 1$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}. \text{ Khi đó: } y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x+2} = \frac{(x+1)^2 - (x^2+x+2)}{(x+1+\sqrt{x^2+x+2})(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1+\sqrt{x^2+x+2})(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x+2)(x+1+\sqrt{x^2+x+2})} \text{ và}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)} y = \infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. **Chọn B.**

Ví dụ 24: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

- A. Tiệm cận đứng $x = 2, x = 1$; tiệm cận ngang $y = 2$.
- B. Tiệm cận đứng $x = 2$; tiệm cận ngang $y = 2$.
- C. Tiệm cận đứng $x = 2, x = 1$; tiệm cận ngang $y = 2, y = 3$.
- D. Tiệm cận đứng $x = 2$; tiệm cận ngang $y = 2, y = 3$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2} = 2 \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang } y = 2.$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = \frac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2} = \frac{(3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2})(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2})}{(x^2-3x+2)(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{8x^4-7x-1}{(x^2-3x+2)(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2})} = \frac{(x-1)(8x^3+8x^2+8x+1)}{(x-1)(x-2)(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{8x^3+8x^2+8x+1}{(x-2)(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2})}$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng } x = 2. \text{ **Chọn B.**}$$

✎ Dạng 2: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Phương pháp giải:

- **Bước 1:** Dựa vào bảng biến thiên tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2:** Quan sát bảng biến thiên để suy ra giới hạn khi x đến biên của miền xác định.
- **Bước 3:** Kết luận.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ nhận đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng khi hàm số xác định tại $x = a$

và $y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)^n \cdot h(x)}{(x-a)^m \cdot k(x)}$ trong đó $m > n$ và $h(x), k(x)$ không có nghiệm $x = a$.

(Tức là số lần lặp lại nghiệm $x = a$ của $g(x)$ nhiều hơn số lần lặp lại nghiệm $x = a$ của $f(x)$).

Ví dụ 1: [Đề thi tham khảo năm 2019] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		2		3	5
		↗		↗	
			$+\infty$		

Tổng số tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow TCN : y = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow TCN : y = 5 \Rightarrow \text{Chọn C.} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow TCD : x = 1 \end{cases}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	0	↗ 2 ↘	$-\infty$	3 ↗ 5

- A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 0, y = 5$ và tiệm cận đứng là $x = 1$.
 B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = 3$.
 C. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 5$.
 D. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 0, y = 5$ và tiệm cận đứng là $x = 1$.

Chọn A.

Ví dụ 3: [Đề thi tham khảo năm 2017] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y				

$-\infty \nearrow +\infty$ $1 \searrow 0$

A. 1 **B. 3** **C. 2** **D. 4**

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 0, x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị đã cho có 3 tiệm cận. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
y'			-	0	+
y					

$-\infty \nearrow 0 \searrow -3$ $+\infty \searrow 1$

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 2 **B. 3** **C. 4** **D. 5**

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = -1; x = 4$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$5 \nearrow +\infty$		$4 \searrow 0 \nearrow +\infty$		

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty$

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	1	$+\infty$	0	3

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x)+2}$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Ta có phương trình $f(x) = -2$ có 2 nghiệm phân biệt suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x)+2}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow \frac{4}{-3+2} = -4 \Rightarrow y = 4$ là một đường tiệm cận ngang.

Khi $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$ là một đường tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x)+2}$ có 4 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	5	$+\infty$	$+\infty$	3	5

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(x)-2018}$ là:

A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Lời giải

Ta có phương trình $f(x) = 2018$ có 2 nghiệm phân biệt

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(x)-2018}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Khi $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 5 \Rightarrow y = \frac{2}{f(x)-2018} \rightarrow \frac{2}{-2013}$

Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 5 \Rightarrow \frac{2}{f(x)-2018} \rightarrow \frac{2}{-2013}$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(x)-2018}$ có 1 tiệm cận ngang. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	2	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{f^2(x)-5f(x)+4}$ là:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Ta có: $f^2(x) - 5f(x) + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 4 \\ f(x) = 1 \end{cases}$

Phương trình $f(x) = 4$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Phương trình $f(x) = 1$ có 1 nghiệm kép $x = 2$ (do vậy mẫu số có dạng $(x-2)^2$) nên $x = 2$ vẫn là TCD của đồ thị hàm số.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{f^2(x) - 5f(x) + 4}$ có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	+		-	0	+
y	2	9	$-\infty$	0	-3
				5	2

Biết số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{1}{f(x)+1}$ lần lượt là m và n . Khi đó tổng $m+n$ bằng

A. 6.

B. 7.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Tiệm cận đồ thị $y = f(x)$: Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $\Rightarrow m = 2$.

Mặt khác $f(x) = -1$ có 2 nghiệm phân biệt và $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có 1

đường tiệm cận ngang và 2 đường tiệm cận đứng.

Vậy $m = 2; n = 3 \Rightarrow m + n = 5$. **Chọn D.**

Dạng 3: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào đồ thị hàm số

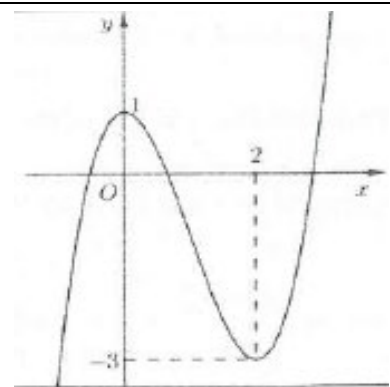
Phương pháp giải:

- Dựa vào đồ thị hàm số để xác định nghiệm của mẫu số và tử số từ đó suy ra các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ để tìm các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ví dụ 1: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số đường tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{f(x)+3}$ là:

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.



Lời giải

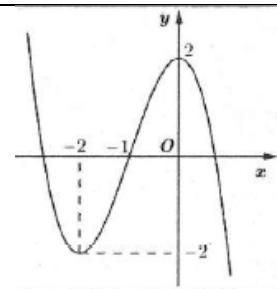
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-3$ có nghiệm kép $x=2$ và một nghiệm $x=a < 0$.

Do đó $y = \frac{x-2}{f(x)+3} = \frac{x-2}{k(x-a).(x-2)^2} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x=a$ và $x=2$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Tổng số đường

tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x}{f(x)+2}$ là

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.



Lời giải

Dựa vào đồ thị dễ thấy hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $a \neq 0$.

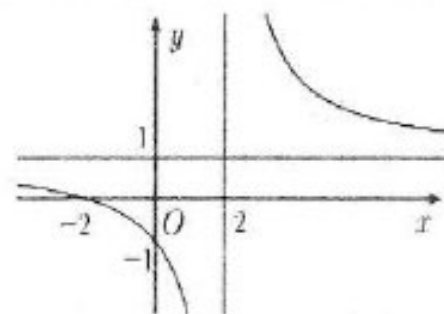
Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{f(x)+2} = 0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Phương trình $f(x)=-2$ có nghiệm kép $x=-2$ và một nghiệm $x > 0$

Phương trình $x^2+2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \end{cases}$ do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x}{f(x)+2}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên.



Tính tổng $T = a + 2b + 3c$.

- A. $T = 0$.
- B. $T = -1$.
- C. $T = 3$.
- D. $T = 2$.

Lời giải

Từ hình vẽ, ta có nhận xét sau:

Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C) $\Rightarrow x = -\frac{b}{c} = 2 \Leftrightarrow b = -2c$.

Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C) $\Rightarrow y = \frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow a = c$.

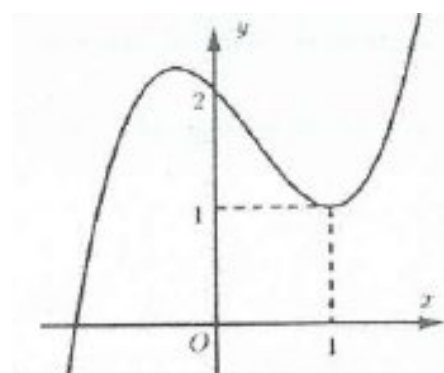
Điểm $M(0; -1) \in (C)$ suy ra $y(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{b} = -1 \Leftrightarrow b = -2$.

Suy ra $\begin{cases} b = -2 \\ b = -2c = -2a \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow T = a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot (-2) + 3 = 0$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Số tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 3f(x) + 2}$ là:

- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.



Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} f(x) - 1 \neq 0 \\ f(x) - 2 \neq 0 \end{cases}$. Ta có: $y = \frac{x(x-1)}{[f(x)-1][f(x)-2]}$

Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có nghiệm kép $x = 1$ và $x = x_1 < 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1, x = x_1$.

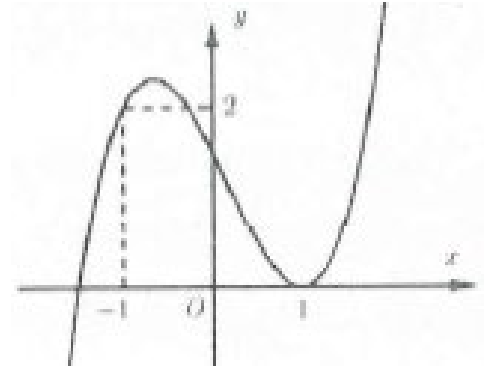
Phương trình $f(x) - 2 = 0$ có nghiệm $x = 0$ và $x = x_2 < 0; x = x_3 > 1$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_2$ và $x = x_3$.

Do đó đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Số tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ là:

- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.



Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \\ f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \end{cases}.$$

Ta có:
$$y = \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{f(x)[f(x)-2]}$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = 1$ và $x = x_1 < -1$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = x_1$.

Phương trình $f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó
$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_3 \in (-1; 0) \\ x_4 > 1 \end{cases}$$
 do đó đồ thị hàm số có tiệm cận

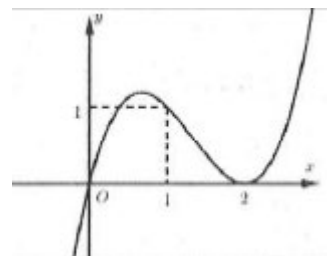
đứng $x = x_4$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Cho hàm số bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - x}}{f^2(x) - f(x)}$ là:

- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.



Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \quad \text{và } y = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x(x-1)}}{f(x)[f(x)-1]}$$

Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=0$ và nghiệm kép $x=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0, x=2$.

$$\text{Phương trình } f(x)-1=0 \text{ có 3 nghiệm đơn } \begin{cases} x = x_1 \in (0;1) \\ x = 1 \\ x = x_2 > 2 \end{cases} \text{ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng } x = x_2.$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng. **Chọn A.**

✎ Dạng 4: Các bài toán tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số

Một số mẫu toán thường gặp:

☑ **Mẫu 1:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$.

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $ad - bc \neq 0$.

☑ **Mẫu 2:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - x_0}$ với $a \neq 0$.

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm $x = x_0 \Leftrightarrow g(x_0) \neq 0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x = x_0 \Leftrightarrow g(x_0) = 0$.

☑ **Mẫu 3:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x - x_0}{ax^2 + bx + c}$ (C) với $a \neq 0$.

- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g(x) = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x) = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

☑ **Mẫu 4:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{(x - x_1)(x - x_2)}$ (C) với $a \neq 0, x_1 \neq x_2$.

- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ không nhận x_1, x_2 là

$$\text{nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x_1) \neq 0 \\ g(x_2) \neq 0 \end{cases}.$$

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi phương trình $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x = x_1$ hoặc

$$x = x_2 \Rightarrow \begin{cases} g(x_1) = 0 \\ g(x_2) = 0 \end{cases} \text{ (Chú ý hai điều kiện này không đồng thời xảy ra).}$$

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ nhận $x = x_1$ và $x = x_2$ là nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x_1) = 0 \\ g(x_2) = 0 \end{cases}.$$

☑ **Mẫu 5:** Biện luận số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bậc của mẫu số lớn hơn hoặc bậc của mẫu số và phải tồn tại các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$.

Ví dụ 1: [Đề thi minh họa Bộ GD&ĐT năm 2017]: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ

thị của hàm số: $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có 2 tiệm cận ngang.

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m < 0$

C. $m = 0$

D. $m > 0$

Lời giải

• Với $m > 0$ ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}}$ là một tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{mx^2+1}}{-x}} = \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y = \frac{-1}{\sqrt{m}}$ là một tiệm cận ngang.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

• Với $m = 0$ suy ra $y = \frac{x+1}{1}$ đồ thị hàm số không có hai tiệm cận ngang.

• Với $m < 0$ đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận ngang vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow \infty} y$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{2x-1}{4x^2+4mx+1}$ có đúng một đường tiệm cận là

- A. $[-1;1]$ B. $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. C. $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$. D. $(-1;1)$

Lời giải

Để thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi đó phương trình $4x^2 + 4mx + 1 = 0$ vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1 \Leftrightarrow m \in (-1;1). \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $m > 1$. B. $m \neq 0$. C. $m = 1$. D. $m = 1$ và $m = 0$.

Lời giải

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng $x = m$ thì là nghiệm của $p(x) = 2x^2 - 3x + m$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m(m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 4: Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - mx + m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $m = 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \in \{0;4\}$ D. $m \geq 4$.

Lời giải

Xét phương trình $g(x) = x^2 - mx + m = 0$

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1 hoặc

$$g(x) = 0 \text{ có nghiệm kép khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ g(1) = 0 \\ \Delta = m^2 - 4m = 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 0 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + m}$ có hai tiệm cận đứng.

- A. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -8 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + m} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 2x + m}$

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi PT $f(x) = x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{thỏa mãn } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \\ f(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m-1 \neq 0 \\ m+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases} . \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 6: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-m}}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

- A. $(-\infty; +\infty) \setminus \{1\}$. B. $(-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$ C. $(-\infty; +\infty)$ D. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$

Lời giải

Ta có: $D = (0; +\infty)$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-m}}{x-1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Chú ý: Với $m = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Với $m \neq 1$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $m \neq 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng.

- A. $m \neq 2$ B. $m < 2$ C. $m \leq -2$ D. $m \neq -2$

Lời giải

Đồ thị hàm số có TCD $\Leftrightarrow g(x) = mx + 2 = 0$ không có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $m \in \{-1; -4\}$. B. $m = -1$ C. $m = 4$. D. $m \in \{1; 4\}$

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}$, đặt $f(x) = x^2 + m$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ m+4=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-1; -4\} . \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 tiệm cận

- A. $\begin{cases} m=0 \\ m=-16 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m=-16 \\ m=0 \\ m=4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m=-16 \\ m=-8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m=0 \\ m=16 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{m}{x^2}}} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{m}{x^2}}} = -1$ nên đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì nó có 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + m$ có nghiệm kép hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm $x=4 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-16 \end{cases} . \text{ Chọn A.}$

Ví dụ 10: Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{(m^2-1)x^2+x+2}}{x+1}$ có đúng một tiệm cận ngang.

- A. $m < 1$ hoặc $m > 1$. B. $m > 0$. C. $m = \pm 1$. D. Với mọi giá trị m

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(m^2-1)x^2+x+2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m^2-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{m^2-1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(m^2-1)x^2+x+2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{m^2-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -\sqrt{m^2-1} \end{cases} . \text{ (Với } (m^2-1) \geq 0 \text{)}$$

Đồ thị hàm số có một TCN khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y \Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} = -\sqrt{m^2-1} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Chọn C.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{(m+2)x^2 - 3x - 3m} - |x|}{x-2}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận khi tham số thực m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $(-2; 2) \cup (2; +\infty)$ B. $(-2; 2)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-3; -1)$

Lời giải

Với $m < -2$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ (không t/mãn)

Với $m = -2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{-3x-6} - |x|}{x-2}$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang (không t/mãn)

Với $m > -2$ đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \sqrt{m+2} - 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1\sqrt{m+2} + 1$;

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì nó phải có thêm 1 tiệm cận đứng.

Khi đó tử số không có nghiệm $x = 2$ và $f(x) = (m+2)x^2 - 3x - 3m$ xác định tại $x = 2$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} f(2) = 4(m+2) - 6 - 3m \geq 0 \\ \sqrt{f(2)} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ \sqrt{m+2} - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Do đó $m > -2$; $m \neq 2$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Tập hợp các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1)}$ có đúng một đường tiệm cận là

A. $\{0\}$ B. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ D. $\emptyset$

Lời giải

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Suy ra để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH1: Phương trình: $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

TH2: Phương trình $4x^2 + 4mx + 1 = 0$ vô nghiệm, phương trình: $mx^2 - 2x + 1 = 0$ (*) có đúng 1 nghiệm

$$\text{đơn } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4 < 0 \\ m = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m = 0$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{(x-m)^2(2x-m)}{\sqrt{4x-x^2}-2}$ có tiệm cận đứng.

- A. $m \neq 4$. B. $m \in \mathbb{R}$ C. $m \neq 2$ D. $m \neq \{2; 4\}$

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = [0; 4] \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{(x-m)^2(2x-m)}{\sqrt{4x-x^2}-2} = -\frac{(x-m)^2(2x-m)(\sqrt{4x-x^2}+2)}{(x-2)^2}$$

Với $m = 2 \Rightarrow y = -(2x-2)(\sqrt{4x-x^2}+2) \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Với $m = 4 \Rightarrow y = -\frac{2(x-4)^2(\sqrt{4x-x^2}+2)}{x-2} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng.

Với $m \neq \{2; 4\}$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

Suy ra để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $m \neq 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2017 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 3m}}$ có hai đường tiệm cận đứng là:

- A. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ B. $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$

Lời giải

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2 - mx - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (-m)^2 - 4(-3m) > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12m > 0 \\ m \geq -2 \\ 1 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{1}{2}\right]. \text{ **Chọn B.**}$$

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = \sqrt{mx^2 + 2x} - x$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang.

- A. $m = 1$. B. $m \in \{-2; 2\}$ C. $m \in \{-1; 1\}$ D. $m > 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{mx^2 - x^2 + 2x}{\sqrt{mx^2 + 2x} + x} = \frac{(m-1)x^2 + 2x}{\sqrt{mx^2 + 2x} + x}$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc của tử bé hơn bậc của mẫu và tồn tại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 16: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng 1 tiệm cận

ngang là

A. $m = 4$

B. $0 \leq m \leq 4$

C. $m = 0$.

D. $m = 0$ hoặc $m = 4$.

Lời giải

+) Với $m = 0$, ta có $y = \frac{x-1}{2x+2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+) Với $m < 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow \infty} y$.

$$+) \text{ Với } m > 0, \text{ ta có } y = \frac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2x+|x|\sqrt{m+\frac{4}{x^2}}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2+\sqrt{m}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2-\sqrt{m}} \end{cases}$$

Để hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2-\sqrt{m}} = \infty$

Cho $2-\sqrt{m} = 0 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$. Vậy $m = 0$ hoặc $m = 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 17: Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{mx^2 - x + 1} + 1$ có tiệm cận ngang.

A. $m = 4$

B. $m = -4$

C. $m = 2$

D. $m = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = (2x+1) + \sqrt{mx^2 - x + 1} = \frac{4x^2 + 4x + 1 - (mx^2 - x + 1)}{2x+1-\sqrt{mx^2 - x + 1}} = \frac{(4-m)x^2 + 5x}{2x+1-\sqrt{mx^2 - x + 1}}$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc của tử số bé hơn hoặc bằng bậc của mẫu số và

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = y_0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4-m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 18: Biết đồ thị $y = \frac{(a-2b)x^2 + bx + 1}{x^2 + x - b}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là

$y = 0$. Tính $a + 2b$.

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1 \Rightarrow PT: x^2 + x - b = 0$ có nghiệm $x=1$ và $(a-2b)x^2 + bx + 1 = 0$

không có nghiệm $x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+1-b=0 \\ a-2b+b+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a \neq 1 \end{cases}$. Hàm số có dạng $y = \frac{(a-4)x^2 + 2x + 1}{x^2 + x - 2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-4)x^2 + 2x + 1}{x^2 + x - 2} = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-4) + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a-4}{1} = 0 \Leftrightarrow a-4=0 \Rightarrow a=4 \Rightarrow a+2b=8. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 19: Biết đồ thị $y = \frac{(a-3b)x^2 + bx - 1}{x^2 + ax - a}$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$. Tính $a+b$.

A. 5.

B. 3.

C.

D.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2 \Rightarrow PT: x^2 + ax - a = 0$ có nghiệm $x=2$

$$\Rightarrow 4 + 2a - a = 0 \Rightarrow a = -4$$

Hàm số có tiệm cận ngang $y=-1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = -1 \Leftrightarrow \frac{a-3b}{1} = -1 \Leftrightarrow a-3b = -1 \Leftrightarrow b = \frac{a+1}{3} = -1$

Khi đó $y = \frac{-x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 4}$ có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=-1$

Vậy $a+b = -5$. **Chọn C.**

Ví dụ 20: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, có đồ thị (C) . Gọi P, Q là hai điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P hoặc Q đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là:

A. $4\sqrt{2}$

B. $5\sqrt{2}$

C. 4

D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=1$.

Gọi $P\left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0-2}\right) \in (C)$ khi đó tổng khoảng cách từ P đến hai đường tiệm cận là:

$$d = d(P, x=2) + d(P, y=1) = |x_0 - 2| + \left| \frac{x_0+2}{x_0-2} - 1 \right| = |x_0 - 2| + \left| \frac{4}{x_0 - 2} \right|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cossi ($AM - GM$) ta có: $d \geq 2\sqrt{|x_0 - 2| \cdot \left|\frac{4}{x_0 - 2}\right|} = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi $|x_0 - 2| = \frac{4}{|x_0 - 2|} \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \Rightarrow y = 3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

Khi đó $P(4;3), Q(0;-1) \Rightarrow PQ = 4\sqrt{2}$. **Chọn A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 2: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là

- A. $y = 2$. B. $x = 2$. C. $x = 2$. D. $y = 1$.

Câu 3: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ là đường thẳng:

- A. $x = -2$. B. Không có tiệm cận đứng.
C. $x = -1$; $x = -2$. D. $x = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

- A. $I(-2; 2)$. B. $I(2; 2)$. C. $I(2; -2)$. D. $I(-2; -2)$.

Câu 5: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

- A. $y = 5$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $y = 0$.

Câu 6: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$.

- A. $y = 2$. B. $y = 4$. C. $y = \frac{1}{2}$. D. $y = -2$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng.

- A. $y = \frac{x+2}{x-1}$. B. $y = \frac{x^3}{x^2+2}$. C. $y = \sqrt{x^2+1}$. D. $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

- A. $y = -1$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $y = 1$.

Câu 9: Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng có đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau đây?

- A. $y = \frac{2x-3}{x-1}$. B. $y = \frac{3x+2}{3x-1}$. C. $y = \frac{x+3}{x+1}$. D. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Câu 10: Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = 2^x$. B. $y = \log_2 x$. C. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. D. $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1}$.

Câu 11: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 12: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 3x + 2}$.

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào dưới đây có hai tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ B. $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ C. $y = \frac{x+1}{x^2+x}$ D. $y = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x^2-5x+6}$

Câu 14: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 15: Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

- A. $f(x) = 3^x$ B. $g(x) = \log_3 x$ C. $h(x) = \frac{1}{1+x}$ D. $k(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

Câu 16: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 17: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1}$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 18: Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

- A. $y = \frac{1-2x}{1+x}$ B. $y = \frac{1}{4-x^2}$ C. $y = \frac{x+3}{3x-1}$ D. $y = \frac{x}{x^2-x+9}$

Câu 19: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$?

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

Câu 20: Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 đường tiệm cận?

- A. $y = \frac{x+1}{x^2-9}$. B. $y = \frac{x+2}{x-1}$. C. $y = \frac{x+2}{x^2+3x+6}$. D. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

Câu 21: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x+2}{x^2+1}$. B. $y = \frac{x+2}{x+1}$. C. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$. D. $y = \frac{1}{x+2}$.

Câu 22: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 24: Đồ thị của hàm số $y = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 25: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 3 B. 1 C. 4 D. 2

Câu 26: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 27: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{6-x^2}}{x^2 + 3x - 4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 28: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2 - 5x + 6}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 29: Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 - 2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 30: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x}$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 31: Số đường tiệm cận của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2}$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 32: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 33: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2-x-x^2}}$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 34: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5-x^2} - 2}{x^2 - 1}$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x + \sqrt{4x^2 - 3}}{2x + 3}$ (C). Gọi m là số tiệm cận của đồ thị hàm số (C) và n là giá trị của hàm số (C) tại $x = 1$ thì tích $m.n$ là:

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{14}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{15}$

Câu 36: Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 37: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{3x+1}{x-1}$ B. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$
C. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ D. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x-2}$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	0	+
$f(x)$	3	$+\infty$	$-\infty$	5

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 40: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 41: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của

đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$?

A. $x = 1$.

B. $x = -2$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Câu 43: Cho đường cong $(C): y = \frac{2x+3}{x-1}$ và M là một điểm nằm trên (C) . Giả sử d_1, d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) , khi đó $d_1.d_2$ bằng:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 44: Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng?

A. -2.

B. -1.

C. 0.

D. 3.

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $d = 1$.

C. $d = \sqrt{2}$.

D. $d = \sqrt{5}$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2+4}}$ có hai tiệm cận đứng

A. $m < 0$

B. $m = 0$

C. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$

D. $m < 1$

Câu 47: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1. \\ m < \frac{1}{5} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1. \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{5} \end{cases}$

Câu 48: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ B. $m > 2$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Câu 49: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ D. $-2 < m < 2$.

Câu 50: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m^2x-m-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng.

A. $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$. B. $\mathbb{R}$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{2}{3}\right\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$

Câu 51: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)}$ có đúng một tiệm cận là

A. $\{0\}$. B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$. D. $\emptyset$

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 53: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$. B. $\emptyset$
C. $\{0\} \cup (1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Câu 54: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. B. $(0; +\infty)$ C. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - (1-m)x + 2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x-9}{\sqrt{x^2 + 2mx + 2m+8}}$ có đúng hai đường tiệm cận.

- A. $-2 < m < 4$. B. $-2 < m < 5$. C. $-1 < m < 5$. D. $-1 < m < 4$.

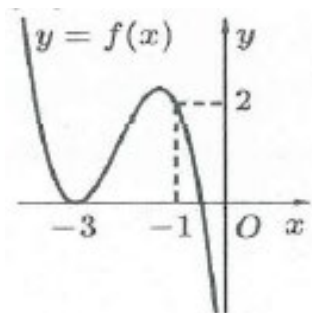
Câu 57: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 2x - m - x - 1}}$ có đúng bốn đường tiệm cận.

- A. $m \in [-5; 4] \setminus \{-4\}$ B. $m \in [-5; 4]$
C. $m \in (-5; 4) \setminus \{-4\}$ D. $m \in (-5; 4] \setminus \{-4\}$

Câu 58: Cho đồ thị hàm bậc ba $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$$
 có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 6 B. 3
C. 2 D. 4

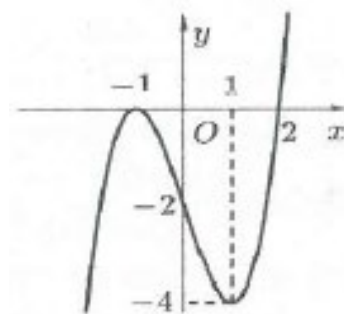


Câu 59: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2 - 4x + 3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

đứng?

- A. 2 B. 1
C. 3 D. 4



Câu 60: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm

số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x+1}}{(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		5		0		$+\infty$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 6

Câu 61: Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$
		0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{[f^2(x)-2f(x)](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7

B. 6

C. 5

D. 4

Câu 62: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) . Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B . Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng.

A. $4\sqrt{2}\pi$

B. 8π

C. 2π

D. 4π

Câu 63: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $y = \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x+1}{x+4} \Rightarrow$ TCD: $x = -4$. **Chọn C.**

Câu 2: Ta có tiệm cận đứng $x = 2$. **Chọn B.**

Câu 3: $y = \frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2-x-2}{x+2} \Rightarrow$ TCD: $x = -2$. **Chọn A.**

Câu 4: Ta có tiệm cận đứng $x = -2$.

Lại có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2 \Rightarrow TCN : y = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2 \Rightarrow TCN : y = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 2)$. **Chọn A.**

Câu 5: Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x-1} = 0 \Rightarrow TCN : y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x-1} = 0 \Rightarrow TCN : y = 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 6: Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-4x}{2x-1} = -2 \Rightarrow TCN : y = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-4x}{2x-1} = -2 \Rightarrow TCN : y = -2 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có TCD $x = 1$. **Chọn A.**

Câu 8: Ta có tiệm cận đứng $x = -1$. **Chọn B.**

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có TCD $x = 1$. **Chọn A.**

Câu 10: Dễ thấy đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ có TCD $x = 0$. **Chọn B.**

Câu 11: $y = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow$ TCD: $x = -2$. **Chọn A.**

Câu 12: $y = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow$ TCD: $x = 1; x = 2$.

Mặt khác $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow TCN : y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow TCN : y = 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 13: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x^2-5x+6}$ có hai tiệm cận đứng là $x = 2, x = 3$. **Chọn D.**

Câu 14: $y = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$. **Chọn D.**

Câu 15: Đồ thị hàm số $\log_3 x$ không có tiệm cận ngang. **Chọn B.**

Câu 16: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$ và $x = -3$, tiệm cận ngang $y = 0$. **Chọn C.**

Câu 17: $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} = \frac{x - 6}{x + 1}$ có tiệm cận đứng là $x = -1$, tiệm cận ngang là $y = 1$. **Chọn B.**

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = \frac{1 - 2x}{1 + x}$ có 2 đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4 - x^2}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = \pm 2$. Mặt khác $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4 - x^2}$ có 3 đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 19: TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

Suy ra đồ thị có hai đường tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và không có tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 20: Xét hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 - 9} = \frac{x + 1}{(x - 3)(x + 3)} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $x = \pm 3$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 - 9}$ có 3 đường tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 21: Hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ có bậc của tử số lớn hơn bậc của mẫu số nên đồ thị của nó không có tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Câu 22: TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{|x| + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-x + 1} = -1$$

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$. **Chọn C.**

Câu 23: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$.

Khi đó: $y = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x + 3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -3} y = \infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là

$x = 1, x = -3$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow \infty} y - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 24: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

Khi đó: $y = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(3x-1)(x-2)}{(2x-1)(x-2)} = \frac{3x-1}{2x-1} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$.

Chọn A.

Câu 25: Ta có: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2-3x}} = \frac{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-3x}}{x^2-4-(x^2-3x)} = \frac{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-3x}}{3x-4}$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-3x}}{3x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị

hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-3x}}{3x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{3}{x}}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{3}$ là tiệm cận ngang của

đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang. **Chọn D.**

Câu 26: TXĐ: $D = [-2; 2]$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{\sqrt{(x+2)(2-x)}} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x+1}{\sqrt{(x+2)(2-x)}} = -\infty$.

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $x = \pm 2$. **Chọn A.**

Câu 27: TXĐ: $D = [-\sqrt{6}; \sqrt{6}] \setminus \{1\}$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6-x^2}}{(x-1)(x+4)} = \infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = 1$. **Chọn D.**

Câu 28: TXĐ: $D = [-2; 2)$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(2-x)(x+2)}}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+2}}{-\sqrt{2-x}} \cdot \frac{1}{x-3} = +\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng

của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 2$. **Chọn B.**

Câu 29: TXĐ: $D = [-1; 1] \setminus \{0\}$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(x+2)} = \infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)} y$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Câu 30: Tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

Khi đó $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 3$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 31: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = -1$.

Suy ra $y = \pm 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = \infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 32: TXĐ: $D = (-1; 1)$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$y = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{(1-x)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = 1$. **Chọn A.**

Câu 33: TXĐ: $D = (-2; 1)$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có: $y = \frac{x-1}{\sqrt{(1-x)(x+2)}} = -\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = -2$. **Chọn D.**

Câu 34: TXĐ: $D = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \setminus \{-1; 1\}$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $y = \frac{5-x^2-4}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^2}+2)} = \frac{1-x^2}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^2}+2)} = -\frac{1}{\sqrt{5-x^2}+2} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. **Chọn A.**

Câu 35: TXĐ: $D = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có: $n = y(1) = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 3}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{4 - \frac{3}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{3}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 - 3}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{4 - \frac{3}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)} y = \infty \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 3, n = \frac{2}{5} \Rightarrow m.n = \frac{6}{5}$. **Chọn A.**

Câu 36: TXĐ: $D = [-2; +\infty) \setminus \{2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-\sqrt{x+2}} = \infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 37: Đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là $y = 3$. **Chọn A.**

Câu 38: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5 \Rightarrow y = 3, y = 5$ là 2 đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 39: Xét phương trình $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$.

Dựa vào BBT suy ra phương trình $f(x) = \frac{5}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 40: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \frac{4x^2 + 4x + 3 - (4x^2 + 1)}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}}$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = -1$

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$. **Chọn A.**

Câu 41: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2; 0\}$

Khi đó: $y = \frac{(x-1)(x-2)\sin x}{(x-2)(x+2)x} = \frac{(x-1)\sin x}{(x+2)x}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$.

Do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -2$. **Chọn A.**

Câu 42: $y = \frac{1}{f(x)-2} = \frac{1}{\frac{3x-1}{x-1}-2} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$.

Chọn C.

Câu 43: Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = 1(\Delta_1)$ và tiệm cận ngang $y = 2(\Delta_2)$.

Gọi $M\left(a; \frac{2a+3}{a-1}\right) \in (C) (a \neq 1)$ ta có: $d_1 = d(M; \Delta_1) = |a-1|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \left|\frac{2a+3}{a-1} - 2\right| = \frac{5}{|a-1|}$.

Khi đó $d_1 \cdot d_2 = |a-1| \cdot \frac{5}{|a-1|} = 5$. **Chọn C.**

Câu 44: Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -1(\Delta_1)$ và tiệm cận ngang $y = 2(\Delta_2)$.

Gọi $M\left(a; \frac{2a+3}{a+1}\right) \in (C) (a \neq -1)$ ta có: $d_1 = d(M; \Delta_1) = |a+1|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \left|\frac{2a+3}{a+1} - 2\right| = \frac{5}{|a+1|}$.

Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $d_1 + d_2 = |a+1| \geq 2\sqrt{|a+1| \cdot \frac{1}{|a+1|}} = 2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |a+1| = \frac{1}{|a+1|} \Leftrightarrow (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0;3) \\ M(-2;1) \end{cases}$.

Do $x_0 < 0$ nên $M(-2;1) \Rightarrow x_0 + y_0 = -2 + 1 = -1$. **Chọn B.**

Câu 45: Gọi $M\left(a; \frac{a-1}{2a-3}\right) \left(a \neq \frac{3}{2}\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = \frac{-1}{(2a-3)^2}(x-a) + \frac{a-1}{2a-3} (d)$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$, tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Khi đó } d(I; d) = \frac{\left| \frac{a - \frac{3}{2}}{(2a-3)^2} - \frac{1}{2} + \frac{a-1}{2a-3} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(2a-3)^2} + 1}} = \frac{\left| \frac{1-2a+3+2a-2}{2(2a-3)} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(2a-3)^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a-3)^2} + (2a-3)^2}}$$

$$\text{Do } \frac{1}{(2a-3)^2} + (2a-3)^2 \geq 2 \sqrt{\frac{1}{(2a-3)^2} \cdot (2a-3)^2} = 2 \Rightarrow d \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $d_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn A.**

Câu 46: Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $g(x) = m(x-1)^2 + 4$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ g(-1) - 4m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 47: Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang của mọi m .

Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = mx^2 - 2x + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1 - 3m > 0 \\ g(1) = m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 48: Do $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận thì có phải có 2 đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx + 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ g(-1) = 5 + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 49: Do $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2 - mx + 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận thì nó phải có 2 đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ g(-1) = 5 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 50: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = x^2 + m^2x - m - 1 = 0$ không nhận $x = -2$ là

$$\text{nghiệm} \Leftrightarrow g(-2) = 4 - 2m^2 - m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 51: Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Suy ra để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH1: $m \neq 0$ và phương trình: $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset.$$

TH2: Phương trình: $4x^2 + 4mx + 1 = 0$ vô nghiệm. Phương trình: $mx^2 - 2x + 1 = 0$ (*) có đúng 1 nghiệm

$$\text{đơn } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4 < 0 \\ m = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m = 0$. **Chọn A.**

Câu 52: Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = m \Rightarrow$ Đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang

là đường thẳng $y = m$. Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận khi nó có một tiệm cận khi nó có một

tiệm cận đứng. Ta có: $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{mx^2 - 1}{(x-1)(x-2)}$, đặt $f(x) = mx^2 - 1$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 4m - 1 = 0 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left\{1; \frac{1}{4}\right\}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 53: Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Suy ra để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH1: $m \neq 0$ và phương trình: $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4m + 1) = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ 4m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow m > 1.$$

TH2: Phương trình: $4x^2 + 4m + 1 = 0$ vô nghiệm. Phương trình: $mx^2 - 2x + 1 = 0$ (*) có đúng 1 nghiệm đơn

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+1 > 0 \\ m=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m=0. \end{cases}$$

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m \in \{0\} \cup (1; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 54: Ta thấy $1 + \sqrt{x+1} > 0 (\forall x \geq -1)$. Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - 3m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \geq -1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (-m)^2 - 4(-3m) > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12m > 0 \\ m \geq -2 \\ 1 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[0; \frac{1}{2}\right]. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 55: Ta thấy $1 + \sqrt{x+1} > 0 (\forall x \geq -1)$. Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow x^2 - (1-m)x + 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \geq -1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - 8m > 0 \\ x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 1 > 0 \\ 1 - m \geq -2 \\ 2m + (1-m) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 - 6\sqrt{2} \geq m \geq -2.$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2, -1, 0\}$. **Chọn C.**

Câu 56: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-9}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{2m}{x}+\frac{2m+8}{x^2}}} = 5.$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-9}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-\frac{9}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2m}{x}+\frac{2m+8}{x^2}}} = -5$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = \pm 5$.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì nó phải không có tiệm cận đứng.

Khi đó phương trình $x^2 + 2mx + 2m + 8 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

TH1: Phương trình $x^2 + 2mx + 2m + 8 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 4.$

TH2: Phương trình $x^2 + 2mx + 2m + 8 = 0$ có nghiệm kép $x = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 2m \cdot \left(\frac{9}{5}\right) + 2m + 8 = 0 \end{cases}$ (hệ

phương trình này vô nghiệm).

Vậy $-2 < m < 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 57: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{2 - \frac{2}{x} - \frac{m}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{2 - \frac{2}{x} - \frac{m}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{2} - 1}$

Do đó đồ thị hàm số luôn có 2 đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x - m} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x - m = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ g(x) = x^2 - 4x - m - 1 = 0 \end{cases}$$

có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow g(x)$ có nghiệm $\Leftrightarrow x_1 > x_2 \geq -1$ và $\Leftrightarrow x_1; x_2 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + m + 1 > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ g(1) = -4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ 6 < 0 \\ x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ 6 > 0 \\ -m - 1 + 5 \geq 0 \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-5; 4] \setminus \{-4\} . \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 58: Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2] \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -1 \\ f(x) \cdot [f(x) - 2] \neq 0 \end{cases}$

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{f(x)[f(x)-2]} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -3$ và nghiệm $x = x_1 \in (-1; 0)$.

Phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm $x = -1$ và 2 nghiệm $x_2, x_3 < -1$.

Do đó đồ thị hàm số có các đường tiệm cận $x = 0, x = -3, x = x_2, x = x_3$. **Chọn D.**

Câu 59: Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f(x) = a(x+1)^2 \cdot (x-2)$ trong đó $a > 0$.

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2 (x^2 - 4x + 3)} = \frac{\sqrt{a} \cdot |x+1| \cdot \sqrt{x-2}}{(x+1)^2 (x-1)(x-3)} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{x-2}}{|x+1| \cdot (x-1)(x-3)}$$

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [2; +\infty) \setminus \{3\}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 3$. **Chọn B.**

Câu 60: Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x-1)(x-2) = 3a(x^2 - 3x + 2)$

Đồng nhất 2 vế ta có: $2b = -9a, c = 6a \Rightarrow f(x) = ax^3 - \frac{9a}{2}x^2 + 6ax + d$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(1) = 5 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{9}{2}a + 6a + d = 5 \\ 8a - 18a + 12a + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{19} \\ d = \frac{-20}{19} \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Hàm số có tập xác định là $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

$$\text{Khi đó: } g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x+1}}{(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot f(x)} = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{2x+1}}{(x^2-1)(x^2-4) \cdot f(x)} = \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+1)(x+2) \cdot f(x)}$$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}, x = 2$. **Chọn C.**

Câu 61: Dựa vào BBT ta có: $f(x) = ax^2(x+1)(x-2)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \frac{f(x) \cdot \sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x^2-4)(x^2-1)(2x+1)} = \frac{ax^2(x+1)(x-2)\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x^2-4)(x^2-1)(2x+1)} \\ &= \frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x+2)(x-1)(2x+1)} \end{aligned}$$

Dựa vào BBT suy ra phương trình $f(x) = 2$ có 2 nghiệm $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$ trong đó $\begin{cases} a < 0 \\ b > 2 \end{cases}$.

$$\text{Với điều kiện } x^2 + x \geq 0 \text{ thì phương trình } [f(x)-2](x+2)(x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng.

Mặt khác bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 62: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 1 \Rightarrow I(2;1)$.

Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$ với $a \neq 2$ suy ra phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y = \frac{-4}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a-2} \quad (d).$$

$$\text{Ta có: } d \cap x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{-4}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a-2} \Rightarrow A\left(2; \frac{a+6}{a-2}\right) \end{cases}$$

$$d \cap y = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{-4}{(a-2)^2}(x-a) + \frac{a+2}{a-2} \Rightarrow A\left(2; \frac{a+6}{a-2}\right) \Rightarrow B(2a-2; 1) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } IA = \left| \frac{a+6}{a-2} - 1 \right| = \frac{8}{|a-2|}, IB = |2a-4| \Rightarrow IA \cdot IB = 16$$

Do $\triangle IAB$ vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB là $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{IA^2 + IB^2}}{2}$

$$\text{Mặt khác } IA^2 + IB^2 \geq 2IA \cdot IB = 32 \Rightarrow R \geq \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng: $C_{\min} = 2\pi R_{\min} = 4\pi\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 63: Giao điểm của 2 đường tiệm cận là $I(-2; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Hàm số đã cho là hàm đồng biến, có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các đường tiệm cận có phương trình là $y = x$ và $y = -x$.

Do tính chất đối xứng nên: $AB \perp d : y = -x \Rightarrow AB : y = x + m$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (C) \text{ và } AB \text{ là: } \frac{x-1}{x+2} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ g(x) = x^2 + (m+1)x + 2m+1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện để } AB \text{ cắt } (C) \text{ tại 2 điểm phân biệt là: } \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(2m+1) > 0 \\ g(-2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó gọi } A(x_1; x_1 + m); B(x_2; x_2 + m), \text{ theo Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m-1 \\ x_1 x_2 = 2m+1 \end{cases}$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ luôn cân tại } I \text{ suy ra nó đều khi } IH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Leftrightarrow d(I; AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \Leftrightarrow (m-3)^2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 3(m^2 + 2m + 1 - 8m - 4)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m = 9 \Rightarrow AB = \sqrt{2(m^2 - 6m - 3)} = 2\sqrt{3}. \text{ **Chọn B.}**$$