

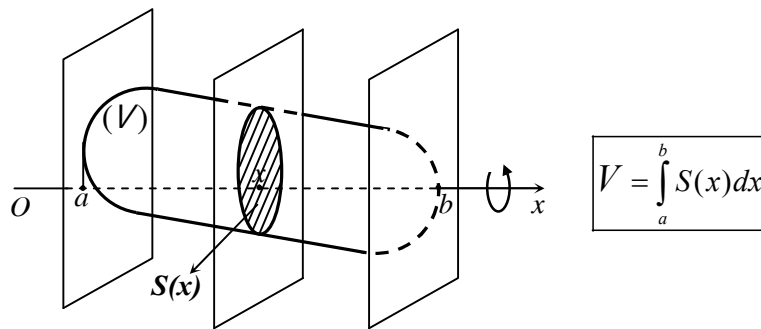
CHUYÊN ĐỀ

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ VỚI DỮ KIẾN TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Thể tích vật thể

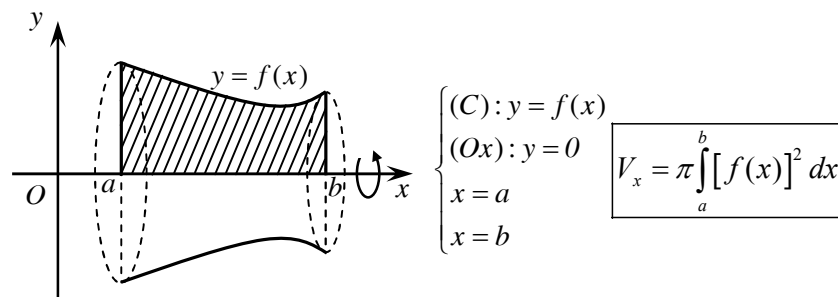
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$

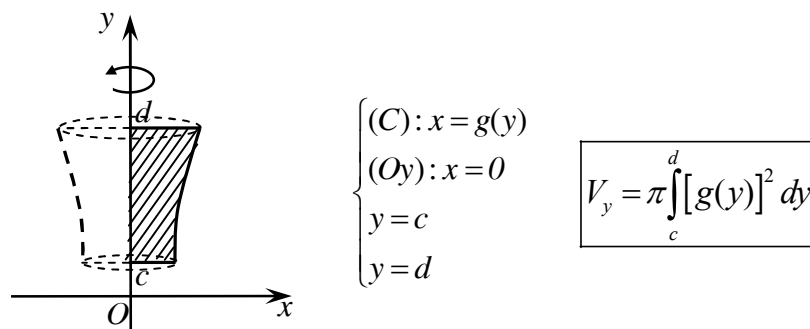
2. Thể tích khối tròn xoay

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Lưu ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

B. BÀI TẬP

Câu 1. Một Elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox .

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$.

Elip đối xứng qua trục Ox nên ta chỉ cần xét hàm số $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ khi quay quanh Ox .

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ và trục Ox : $2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Thể tích cần tính: $V = \pi \int_{-3}^3 4 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = 16\pi = 50,24$

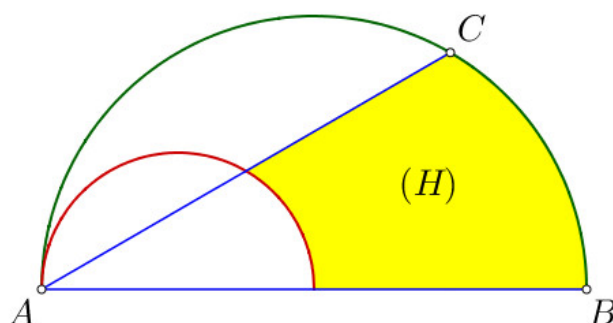
Câu 2. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x\sqrt{\ln(x+1)}$ và $x = 1$ xung quanh trục Ox .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x\sqrt{\ln(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Ta có: $V = \pi \int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{\pi}{18}(12 \ln 2 - 5)$

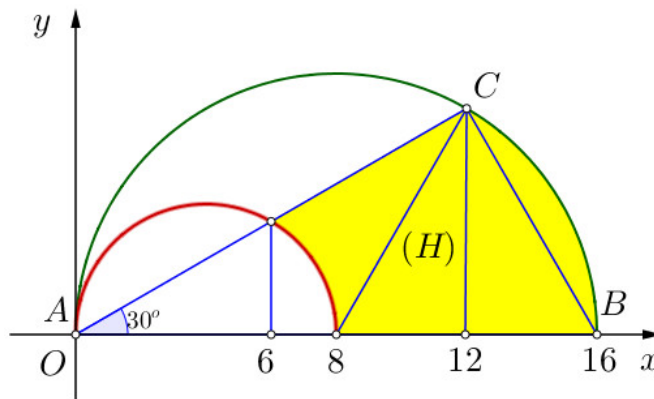
Câu 3. Người ta vẽ nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ.



Nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB .

Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



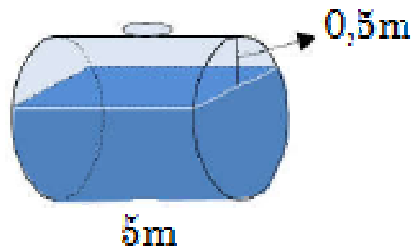
Ta có $\frac{1}{2}S = 32\pi \Leftrightarrow \pi R^2 = 64\pi \Leftrightarrow R = 8 \Rightarrow r = \frac{R}{2} = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C): y = \sqrt{64 - (x-8)^2} \\ (C'): y = \sqrt{16 - (x-4)^2} \end{cases}$$

$\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \text{PT } AC: y = x \cdot \tan 30^\circ \Leftrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$

Vậy $V = \pi \left(\int_6^{12} \frac{x^2}{3} dx + \int_{12}^{16} (64 - (x-8)^2) dx - \int_6^8 (16 - (x-4)^2) dx \right) = \frac{784}{3} \pi.$

Câu 4. Một bồn hình trụ chứa dầu được đặt nằm ngang, có chiều dài 5m, bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy.

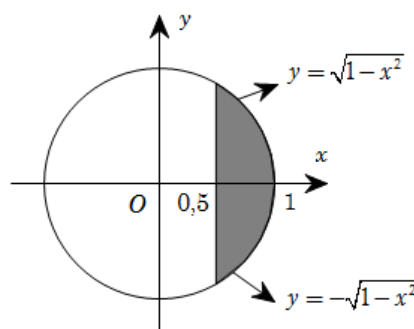


Tính thể tích của khối dầu còn lại trong bồn.

Lời giải

Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi \text{ m}^3.$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, gốc tọa độ gắn với tâm của mặt đáy.



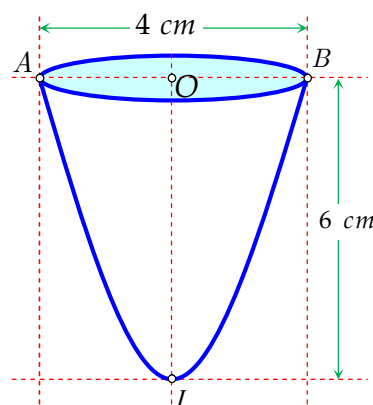
Đường tròn đáy có bán kính bằng 1 nên có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $y = \pm\sqrt{1-x^2}.$

Diện tích phần hình tròn đáy bị mất: $S = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx \approx 0,61 m^2$.

Thể tích phần dầu bị rút ra ngoài: $V_2 = S \times h = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx \times 5 \approx 3,07 m^3$.

Vậy thể tích của khối dầu còn lại trong bồn: $V = V_1 - V_2 \approx 12,637 m^3$

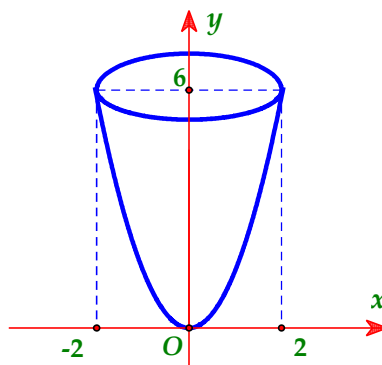
Câu 5. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây



Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích của vật thể đã cho.

Lời giải

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P) .



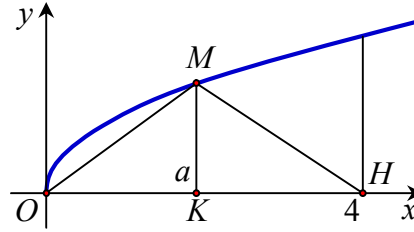
Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.

Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$.

Thể tích V bằng thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $x = \sqrt{\frac{2y}{3}}; x = 0; y = 0; y = 6$ quanh trục Oy

Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi \int_0^6 \left(\frac{2}{3}y \right) dy = 12\pi (cm^3)$.

Câu 6. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ sau).



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Tính a .

Lời giải

Ta có $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

Ta có $M(a; \sqrt{a})$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O , chiều cao $h_1 = OK = a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H , chiều cao $h_2 = HK = 4 - a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$

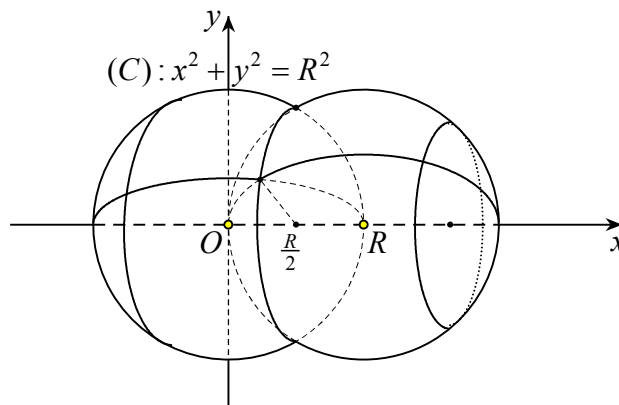
$$\text{Khi đó } V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{a})^2 \cdot a + \frac{1}{3}\pi (\sqrt{a})^2 \cdot (4 - a) = \frac{4}{3}\pi a$$

$$\text{Theo đề bài } V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi a \Rightarrow a = 3.$$

Câu 7. Một vật thể được tạo thành bởi hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

Lời giải

Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ



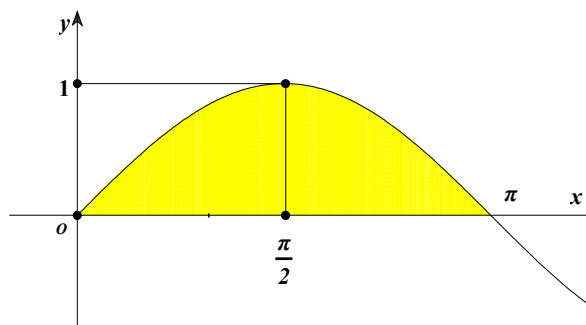
Khối cầu $S(O, R)$ chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2 + y^2 = R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}$$

Câu 8. Một vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình giới hạn bởi trục Ox và đường $y = \sin x, (0 \leq x \leq \pi)$ như hình vẽ

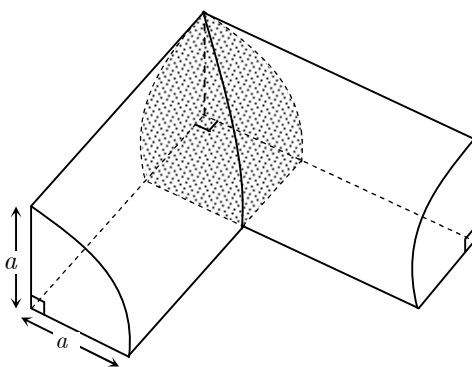


Tính thể tích vật thể.

Lời giải

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

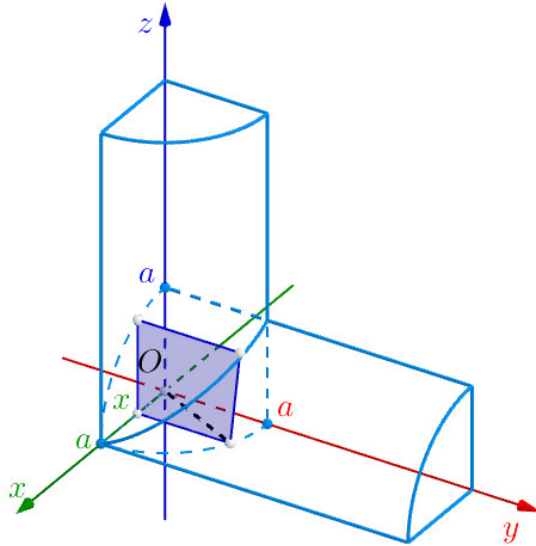
Câu 9. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ bên.



Tính thể tích của (H) .

Lời giải

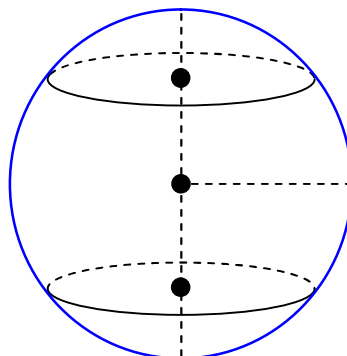
Gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a , thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

Thể tích khối (H) là $\int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 10. Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



Lời giải

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy , xét đường tròn $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C) , trục Ox , hai đường thẳng $x=0, x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài. Ta có $(x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y = \sqrt{25-(x-5)^2} = \sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (10x - x^2) dx = \pi \left(5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$

Cách 2: Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1 = \pi \int_d^R (R^2 - x^2) dx = \pi \int_3^5 (25 - x^2) dx = \frac{52\pi}{3}$$

Vậy thể tích của chiếc lu là $V = V_c - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi$

Câu 11. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t) = 10t + 500 \text{ (m}^3/\text{s)}$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

Lượng nước thoát ra là:

$$\int_0^{2400} (10t + 500) dt = \left(5t^2 + 500t \right) \Big|_0^{2400} = 3 \cdot 10^7 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Câu 12. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là đường tròn có bán kính là 40 cm, chiều cao thùng rượu là 1 m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt phẳng xung quanh thùng rượu là các đường parabol. Tính thể tích của thùng rượu.

Lời giải

Các đường xung quanh thùng rượu là các đường parabol. Đặt thùng rượu nằm ngang và chọn hệ trục có gốc tọa độ là tâm của đáy, trục hoành là trục đối xứng của thùng rượu. Gọi đường parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Theo bài ta có đường parabol này sẽ đi qua các điểm $(0; 0; 3), \left(\frac{1}{2}; 0; 4\right), (1; 0; 3)$.

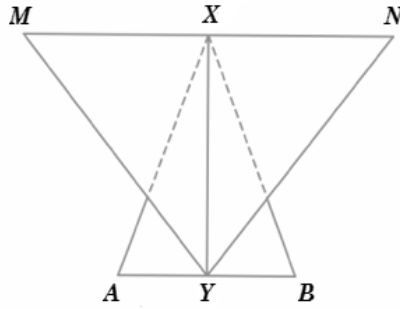
Suy ra $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}$.

Thể tích thùng rượu chính là thể tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}; y = 0; x = 1.$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10} \right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \text{ (m}^3\text{)} \approx 425,2 \text{ l}.$$

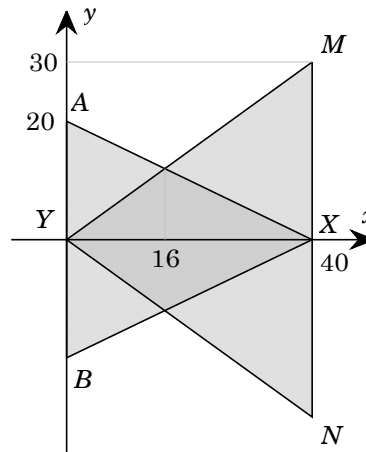
Câu 13. Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY = 40 \text{ cm}$ và cạnh đáy lần lượt là 40 cm và 60 cm , được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ.



Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



$$Y \equiv O(0;0), X(40;0), A(0;20), M(40;30).$$

$$\text{Phương trình đường } YM: 3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3x}{4}.$$

$$\text{Phương trình } AX: x + 2y - 40 = 0 \Rightarrow y = \frac{40 - x}{2}.$$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường } YM \text{ và } AX \text{ là: } \frac{3x}{4} = \frac{40 - x}{2} \Leftrightarrow x = 16.$$

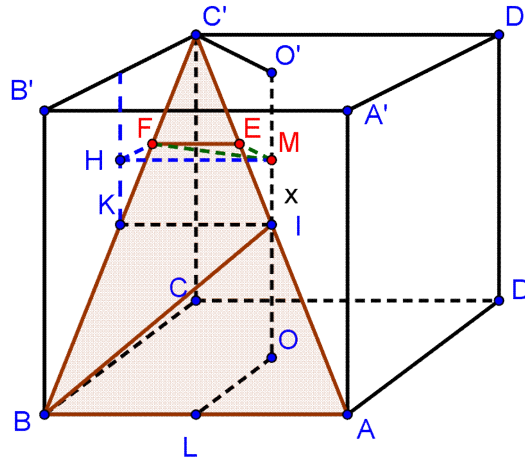
Thể tích vật thể cần tính:

$$V = \pi \int_0^{16} \left(\frac{40 - x}{2} \right)^2 dx + \pi \int_{16}^{40} \left(\frac{3x}{4} \right)^2 dx = \frac{46240\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

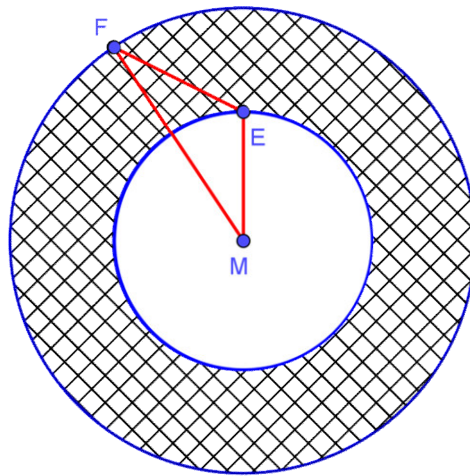
Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và hình vuông $A'B'C'D'$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi tam giác ABC' khi quay quanh trục OO' ?

Lời giải

Ta chia ΔOAB thành 2 phần gồm ΔIAB và $\Delta IBC'$.



Thể tích vật thể khi quay $\triangle IAB$ xung quanh trục OO' là phần chung của 2 hình nón có cùng chiều cao IO và bán kính đáy là OL, OA . Vậy $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot IO(OA^2 - OL^2) = \frac{\pi}{24}$.



Để tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay $\triangle KIC'$ xung quanh trục OO' ta chọn chiều dương IO' , xét mặt phẳng (P) qua M có tọa độ x và vuông góc với OO' , $(P) \cap IC' = E; (P) \cap KC' = F$.

Khi đó thiết diện khi cắt vật thể bởi mặt phẳng (P) là 1 vành tròn như hình vẽ bên. Do đó

$$V_2 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} S(x) dx. \text{ Ta có:}$$

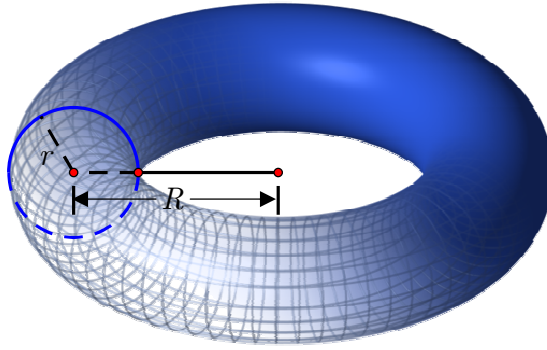
$$\frac{IM}{IO'} = \frac{ME}{O'C'} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{EM}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow EM = x\sqrt{2}.$$

$$\text{Tương tự } HF = x \Rightarrow MF = \sqrt{MH^2 + HF^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

$$\Rightarrow S(x) = \pi(MF^2 - ME^2) = \pi\left(\frac{1}{4} - x^2\right) \Rightarrow V_2 = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) dx = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{24}.$$

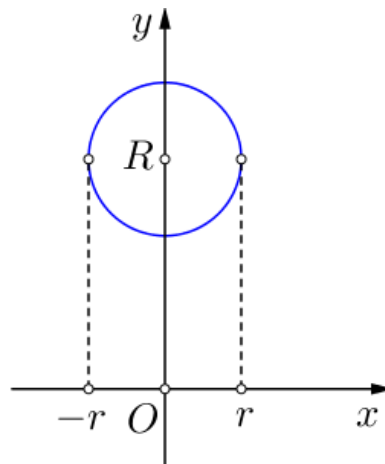
Câu 15. Một hình xuyên dạng cái phao có kích thước như hình vẽ.



Tính thể tích của hình đó theo R và r .

Lời giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó hình xuyên dạng cái phao được tạo ra khi ta quay đường tròn tâm $(0; R)$ và bán kính r xung quanh trục Ox .

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường tròn } x^2 + (y - R)^2 = r^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = R + \sqrt{r^2 - x^2} \\ y = R - \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right) dx = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = r \sin t \Leftrightarrow dx = r \cos t dt \xrightarrow[-r \rightarrow -\frac{\pi}{2}]{r \rightarrow \frac{\pi}{2}} V = 4\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \cos t)^2 dt$$

$$= 2\pi r^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi r^2 R \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 r^2 R.$$

Câu 16. Cho phần vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt

phần vật thể (H) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$.

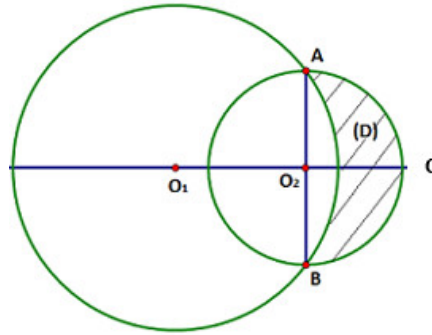
Tính thể tích V của phần vật thể (H) .

Lời giải

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta} = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\Delta} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 17. Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2; 3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ).



Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn $(O_2): x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - (x+4)^2}$, trục Ox , $x = 0$, $x = 1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox , $x = 0$, $x = 3$.

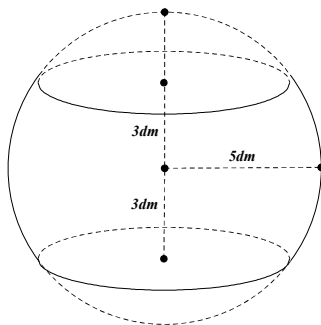
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox .

Ta có $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 [25 - (x+4)^2] dx = \pi \left[25x - \frac{(x+4)^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$.

Câu 18. Một khối cầu có bán kính 5dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm 3dm để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



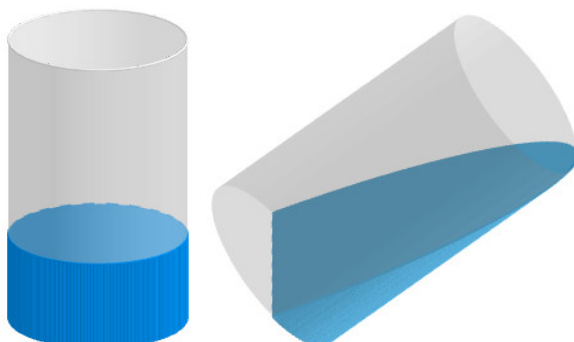
Lời giải

Đặt hệ trục với tâm O , là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox , đường thẳng ngang là Oy , đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$.

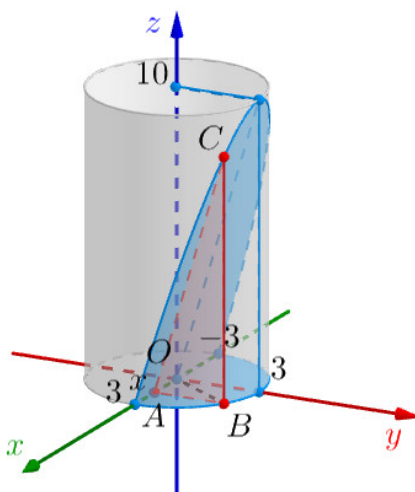
Thể tích là do hình giới hạn bởi Ox , đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x = 3, x = -3$ quay quanh Ox .

$$\text{Ta có } V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = 132\pi.$$

Câu 19. Bạn A có một cốc thuỷ tinh hình trụ, đường kính trong long cốc là $6cm$, chiều cao trong long cốc là $10cm$ đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Tính thể tích lượng nước trong cốc.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Cắt khối trụ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($0 < x \leq 3$) ta được thiết diện là tam giác ABC vuông tại B . Khi đó thể tích lượng nước có trong cốc là

$$V = 2 \int_0^3 S(x) dx, \text{ (với } S(x) = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{5(9-x^2)}{3} \text{)}.$$

$$\Rightarrow V = 2 \int_0^3 S(x) dx = \frac{10}{3} \int_0^3 (9-x^2) dx = 60 \text{ cm}^3.$$

Câu 20. Trong hệ trục Oxy , cho tam giác OAB vuông ở A , điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất. A nằm trên trục hoành, $OB = 2017$. Góc $\widehat{AOB} = \alpha$, ($0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$). Khi quay tam giác đó quanh trục Ox ta được khối nón tròn xoay. Thể tích của khối nón lớn nhất. Tính góc α .

Lời giải

Phương trình đường thẳng OB : $y = x \cdot \tan \alpha$, $OA = 2017 \cos \alpha$.

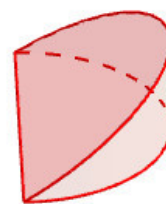
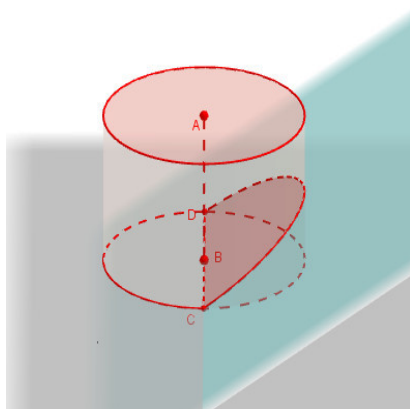
Khi đó thể tích nón tròn xoay là:

$$V = \pi \int_0^{2017 \cos \alpha} x^2 \tan^2 \alpha \cdot dx = \frac{2017^3 \pi}{3} \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{2017^3 \pi}{3} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Đặt $t = \cos \alpha \Rightarrow t \in (0; \frac{1}{2})$. Xét hàm số $f(t) = t(1-t^2)$, $t \in (0; \frac{1}{2})$.

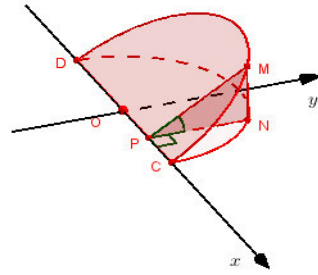
Ta tìm được $f(t)$ lớn nhất khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 21. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây). Ký hiệu V là thể tích của hình nêm. Tính V .



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{225 - x^2}$, $x \in [-15; 15]$.

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-15; 15]$) cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

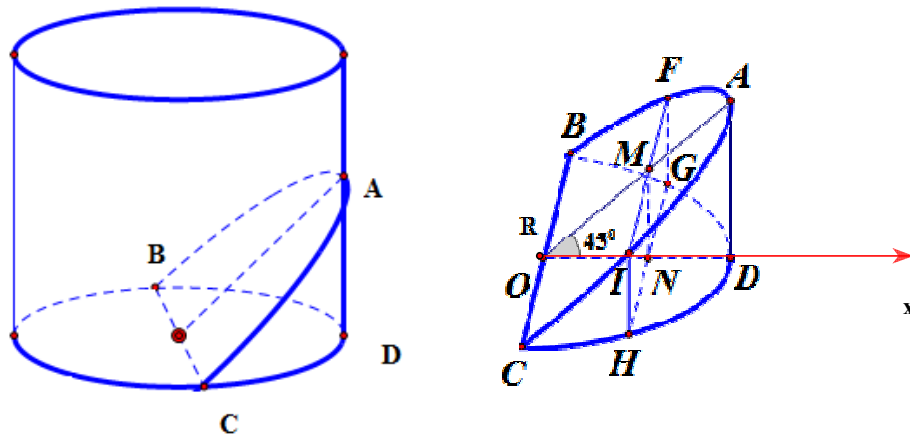
Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{15 - x^2}$ khi đó

$$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} (225 - x^2).$$

Suy ra thể tích hình nêm là $V = \int_{-15}^{15} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-15}^{15} (225 - x^2) dx = 2250 (\text{cm}^3)$.

Câu 22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R . Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy một góc 45° .

Lời giải



Gọi BC là đường kính đáy

Điểm A là điểm thuộc mặt phẳng cắt khối trụ sao cho $OA \perp BC$.

D là hình chiếu vuông góc của A trên (BCD)

Ta có: $\widehat{((ABC); (BCD))} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 45^\circ$

Gắn trục tọa độ Ox như hình vẽ.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với trục Ox

Cắt khối vật thể theo một thiết diện là hình chữ nhật $FGHI$.

$M = OA \cap IF$; $N = OD \cap HG$

Đặt $ON = x$

Ta có: $IH = FG = MN = x \cdot \tan 45^\circ = x$

$$HG = 2NH = 2\sqrt{OH^2 - ON^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

Diện tích hình chữ nhật $FGHI$ bằng: $MN \cdot HG = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Diện tích $FGHI$ là một hàm liên tục trên đoạn $[0; R]$

Thể tích khối vật thể tạo thành:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx = -\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} d(R^2 - x^2) \\ &= -\frac{2}{3}(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3 \end{aligned}$$

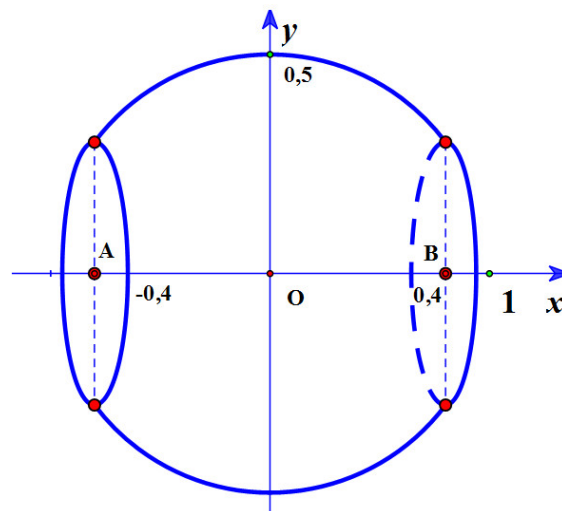
Công thức tổng quát khi mặt phẳng cắt khối trụ tạo với đáy góc α thì thể tích tạo thành:

$$V = \frac{2}{3}R^3 \tan \alpha$$

Câu 23. Cối cái trống trường là vật thể giới hạn bởi một mặt cầu bán kính $R = 0,5\text{m}$ và hai mặt phẳng song song cách đều tâm I . Biết chiều cao của trống là $h = 0,8\text{m}$ Tính thể tích V của cái trống.

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



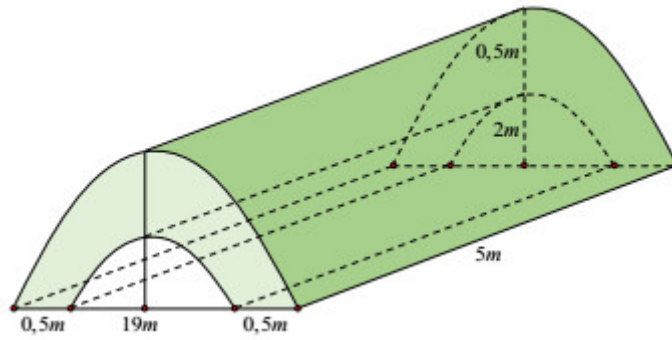
Để tạo ra hình trống, ta cho cung tròn nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 0,5^2$ quanh trục Ox

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{0,5^2 - x^2}$$

Vì chiều cao trống $h = 0,8 \Rightarrow OA = OB = \frac{AB}{2} = 0,4$

$$\text{Thể tích của trống: } V = \pi \int_{-0,4}^{0,4} (0,5^2 - x^2) dx = \frac{59}{375} \pi$$

Câu 24. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Gọi (P_1) là Parabol nằm ở phía dưới.

(P_2) là Parabol nằm ở phía trên.

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

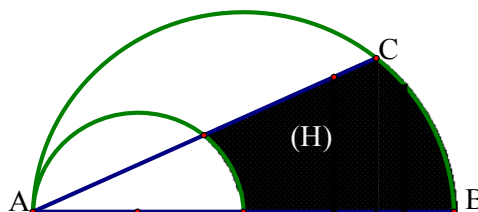
Ta có thể tích của bê tông là:

$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right) dx \right] = 40m^3$$

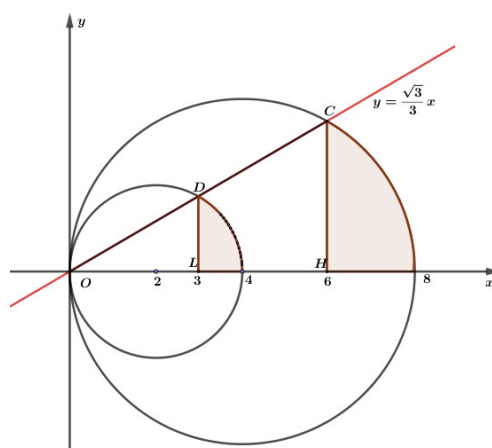
Câu 25. Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do nửa đường tròn lớn bằng 8π nên bán kính của nó bằng 4, suy ra bán kính đường tròn nhỏ bằng 2.



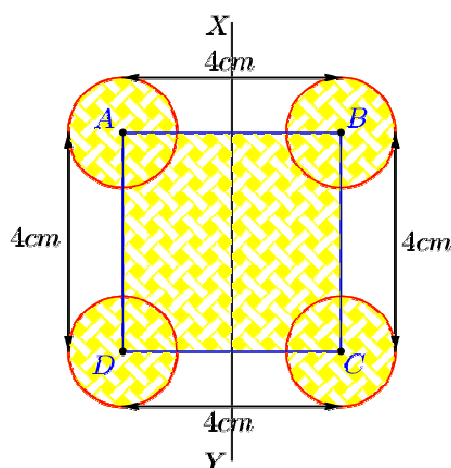
Phương trình đường tròn lớn $(x-4)^2 + y^2 = 16$ nên nửa trên đường tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - (x-4)^2}$.

Phương trình đường tròn nhỏ $(x-2)^2 + y^2 = 4$ nên nửa trên đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$.

Đường thẳng tạo với trục hoành góc 30° nên phương trình đường thẳng là $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Thể tích cần tính bằng $\pi \int_3^6 \frac{1}{3}x^2 dx - \pi \int_3^4 (4 - (x-2)^2) dx + \pi \int_6^8 (16 - (x-4)^2) dx = \frac{98}{3}\pi$.

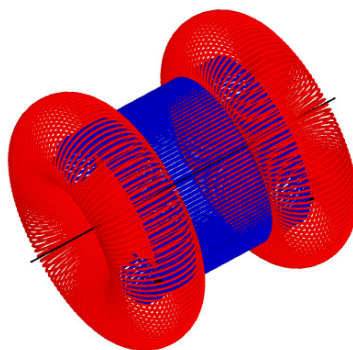
Câu 26. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4cm$. Tại bốn đỉnh A, B, C, D người ta vẽ lần lượt bốn đường tròn có bán kính bằng nhau và bằng $1cm$.



Tính thể tích phần được tô màu khi quay hình phẳng xung quanh trục XY .

Lời giải

Ta có vật thể được tạo thành khi quay hình phẳng xung quanh trục XY có hình dạng như hình sau

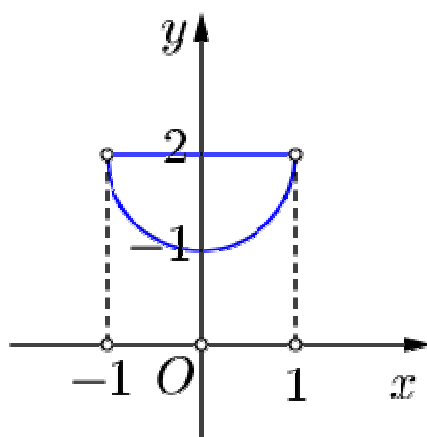


Khi đó thể tích vật thể được tạo thành sẽ bằng tổng thể tích của hình trụ có bán kính $R = 2$, chiều cao $h = 4$ và 2 hình xuyên dạng cái phao có $R = 2$, $r = 1$ trừ đi 2 lần thể tích của $\frac{1}{2}$ nửa bên trong hình xuyên dạng cái phao có $R = 2$, $r = 1$.

$$\text{Vậy } V_{(H)} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + 2 \cdot 2\pi^2 \cdot 1^2 \cdot 2 - V' = 8\pi^2 + 16\pi - V'.$$

Với V' là thể tích một nửa bên trong của hình xuyên dạng cái phao có $R = 2$, $r = 1$

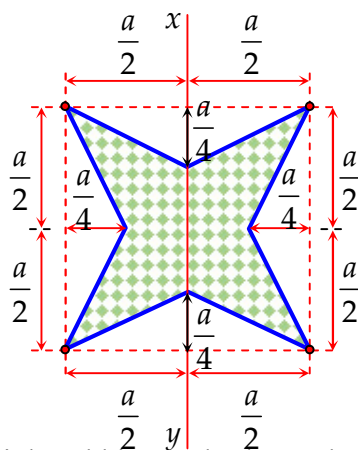
$\Rightarrow V'$ là thể tích của nửa hình tròn tâm $I(0; 2)$, bán kính $r = 1$ quay xung quanh trục Ox như hình vẽ.



$$\Rightarrow V' = \pi \int_{-1}^1 \left| 2^2 - \left(2 - \sqrt{1 - x^2} \right)^2 \right| dx = \pi \int_{-1}^1 \left(x^2 - 1 + 4\sqrt{1 - x^2} \right) dx = 2\pi^2 - \frac{4}{3}\pi \quad \text{Vậy}$$

$$V_{(H)} = 8\pi^2 + 16\pi - \left(2\pi^2 - \frac{4}{3}\pi \right) = 6\pi^2 + \frac{52\pi}{3}.$$

Câu 27. Bên trong hình vuông cạnh a , dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho ở trong hình).

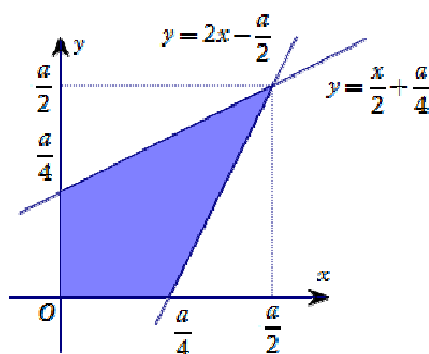


Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy .

Lời giải

Do hình sao có tính đối xứng nên ta quay theo trục thẳng đứng hay nằm ngang đều cho thể tích như nhau.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

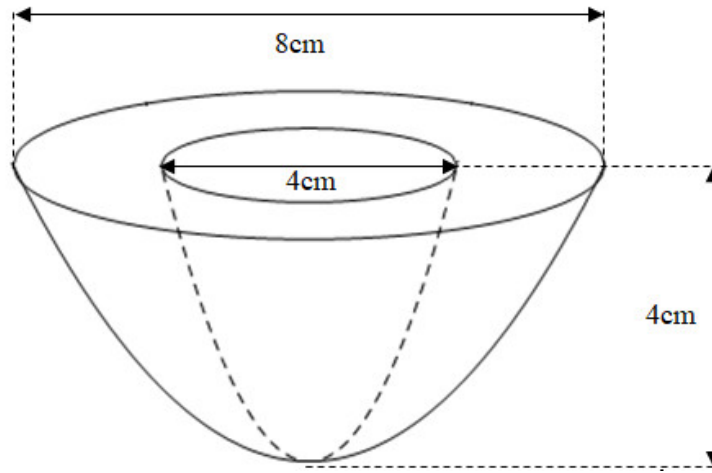


- + Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính.
- + Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng được tô màu trong hình bên quanh trục hoành.

Khi đó $V = 2V_1$. Ta có
$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4} \right)^2 dx - \pi \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \left(2x - \frac{a}{2} \right)^2 dx = \frac{5\pi a^3}{96}.$$

Thể tích cần tính
$$V = 2V_1 = \frac{5\pi a^3}{48}.$$

Câu 28. Người ta thiết kế đầu đạn của một quả bom là một khối tròn xoay đặc, được khoét vào trong. Biết rằng thiết diện qua trục đối xứng của đầu đạn là hai Parabol với các kích thước như hình vẽ dưới đây.



Tính thể tích của đầu đạn đó.

Lời giải

Ta có $V = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 \cdot (4^2 - 2^2) = 24\pi$.

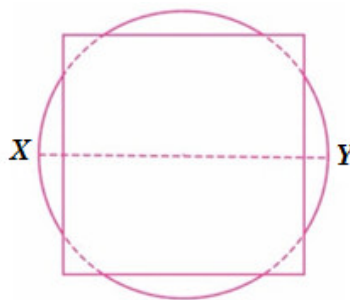
Câu 29. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích của phần vật thể B .

Lời giải

Tam giác đều cạnh $x\sqrt{2-x}$ có diện tích là: $S(x) = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

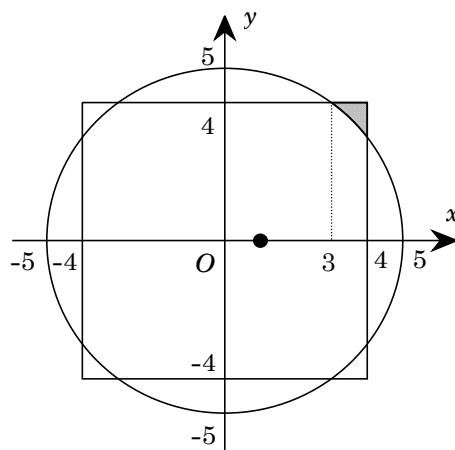
Câu 30. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8 cm và một hình tròn có bán kính 5 cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ.



Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY .

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



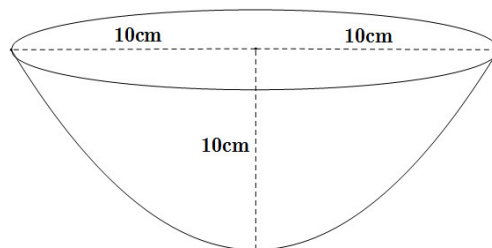
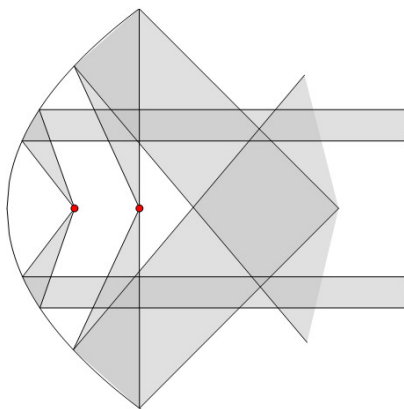
+ Thể tích khối cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500\pi}{3}$.

+ Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) (phần tô màu) được giới hạn bởi đường thẳng $y = 4$, đường tròn $y^2 = 25 - x^2$ và $x = 4$ quanh trục hoành

$$\Rightarrow V_2 = \pi \int_3^4 4^2 - (25 - x^2) dx = \frac{10\pi}{3}.$$

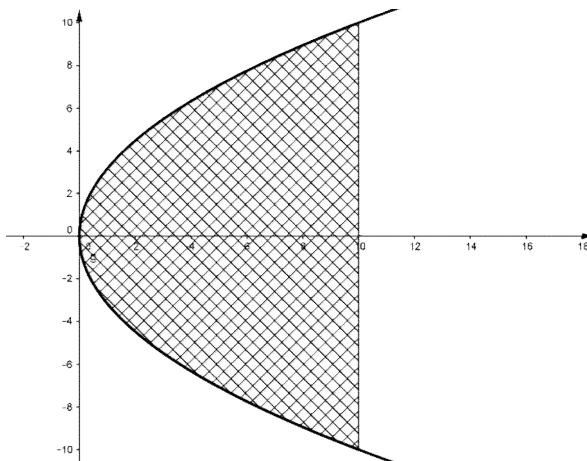
Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + 2V_2 = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Câu 31. Khi bật công tắc đèn pha từ chế độ chiếu xa sang chiếu gần, bạn hãy hiểu rằng toán học, cụ thể hơn là các tính chất của parabol, đang phát huy tác dụng. Chùm sáng chiếu xa được tạo thành khi nguồn sáng đặt tại vị trí tiêu điểm của gương phản xạ và khi đó tia sáng đi song song với trục đối xứng của parabol. Khi thay đổi vị trí của nguồn sáng, các tia phản xạ không còn song song với trục đối xứng, ta được chế độ chiếu gần.



Gương phản xạ ở phía sau đèn pha có dạng paraboloid (hình thu được khi cho parabol quay tròn quanh trục đối xứng của nó) và có các kích thước như hình vẽ trên. Hãy tính thể tích của chiếc đèn.

Lời giải



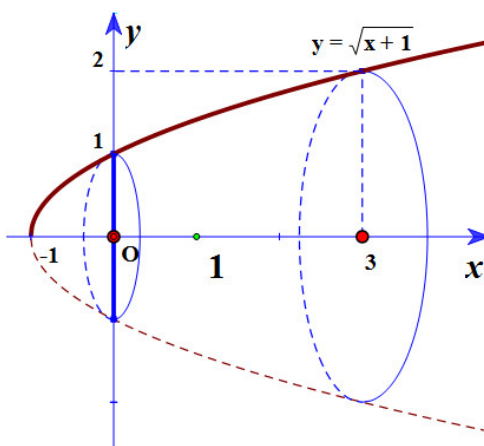
Đặt parabol nằm ngang có dạng $x = ky^2$.

Parabol đi qua điểm $(10;10)$ do đó $k = \frac{1}{10}$. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$y = \sqrt{10x}, y = 0, x = 0, x = 10$ xoay quanh trục hoành.

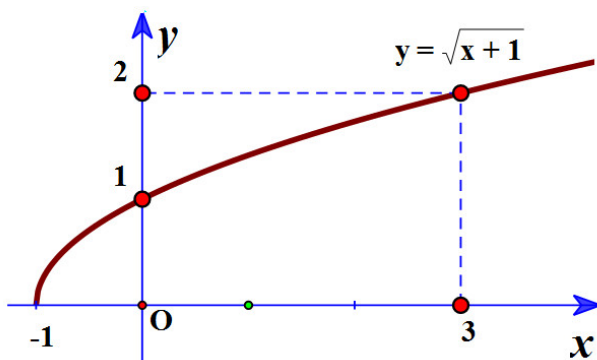
Khi đó thể tích của đèn pha là: $V = \pi \int_0^{10} 10x dx = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

- Câu 32.** Một Béc tơ gồm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ (đồ thị như hình vẽ bên dưới) và trục Ox quay quanh trục Ox . Biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm .



Tính thể tích V của lọ.

Lời giải

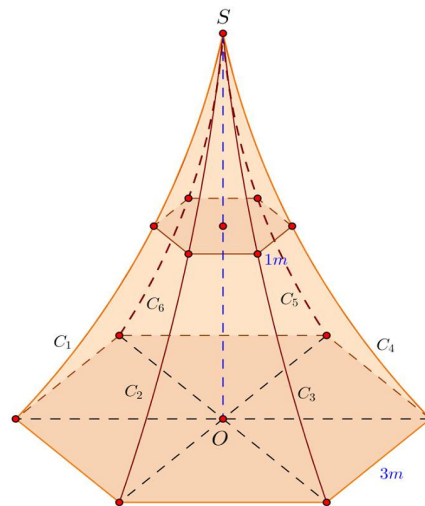


Bán kính hai đáy lần lượt là 1 dm và 2 dm

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0; \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x = 3$$

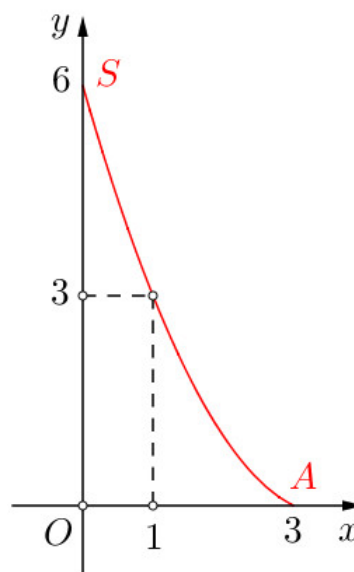
$$\text{Thể tích của lọ: } V = \pi \int_0^3 (x+1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{15\pi}{2}.$$

Câu 33. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Gọi phương trình parabol của (C_1) là:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} 0 = 9a + 3b + c \\ 3 = a + b + c \\ 6 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6.$$

Khi cắt (H) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm có tung độ y , $(0 < y \leq 6)$ ta được thiết diện là một hình lục giác đều có độ dài cạnh x xác định bởi $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$.

$$\text{Do } 0 < x \leq 3 \Rightarrow x = \frac{7 - \sqrt{1+8y}}{2} \Rightarrow S(y) = 6 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7 - \sqrt{1+8y}}{2} \right)^2.$$

$$\text{Vậy thể tích tứ diện là: } V = \int_0^6 S(y) dy = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7 - \sqrt{1+8y}}{2} \right)^2 dy = \frac{135\sqrt{3}}{8} (m^3).$$