

TRẦN ĐỨC HUYỀN – NGUYỄN DUY HIẾU

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

chuyên đề :

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Tiếp theo Bộ sách **Giải toán** dành cho học sinh lớp chuyên, nhóm tác giả trường THPT chuyên Lê Hồng Phong biên soạn Bộ sách **Tài liệu chuyên toán THPT theo chuyên đề** nhằm giúp các em học sinh tự học để nắm được trọng tâm kiến thức và luyện tập giải toán, qua đó giúp học sinh tự ôn thi vào đại học đạt kết quả tốt.

Cuốn sách Tài liệu chuyên Toán THPT chuyên đề : Hình học không gian gồm 2 phần chính :

Phần một : LÍ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Gồm 8 chương :

Chương 1. HÌNH LĂNG TRỤ

Chương 2. HÌNH HỘP

Chương 3. HÌNH CHÓP

Chương 4. HÌNH CẦU

Chương 5. HÌNH TRỤ

Chương 6. HÌNH NÓN

Chương 7. CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH

Chương 8. CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC

Phần hai : ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

Phần này gồm một số đề thi tuyển sinh đại học những năm gần đây, một số đề thi mẫu chọn lọc và những bài toán hình học không gian thường gặp trong giải toán.

Rất mong cuốn sách này giúp ích cho các em học sinh tự học và tự ôn thi vào đại học thành công.

Mặc dù rất cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng những khiếm khuyết là không thể tránh khỏi, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của các quý thầy cô và các em học sinh yêu toán để các lần tái bản sau, cuốn sách được hoàn chỉnh hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về theo địa chỉ :

Ban Biên tập Toán – Tin, Công ty CP Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam – 231 Nguyễn Văn Cừ, quận 5, TP. Hồ Chí Minh.

NHÓM TÁC GIẢ

CHƯƠNG 1. HÌNH LĂNG TRỤ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

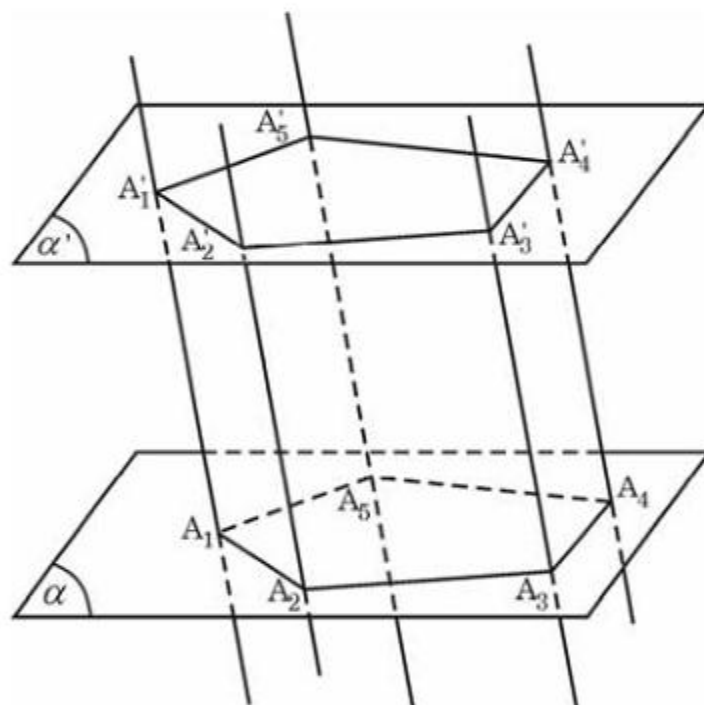
I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hai mặt phẳng (α) và (α') song song với nhau. Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt mp (α') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hai mặt đáy, các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các mặt bên, các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau và được gọi là cạnh bên.

Khoảng cách giữa hai đáy gọi là chiều cao của lăng trụ.

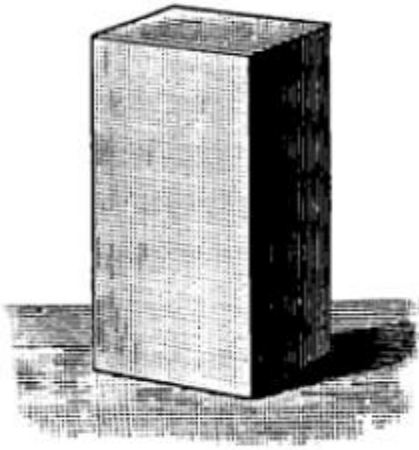


II. TÍNH CHẤT

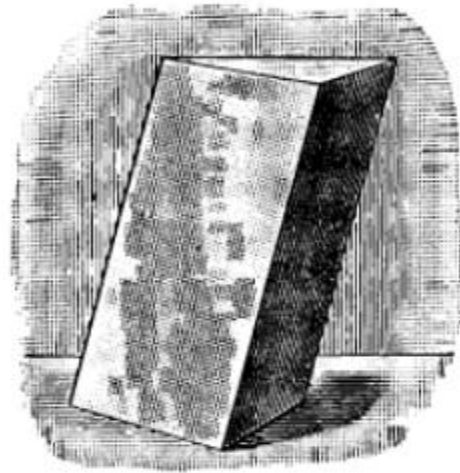
- Hai đáy là hai đa giác bằng nhau, có cạnh đôi một song song và bằng nhau.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Các mặt bên là hình bình hành.

III. PHÂN LOẠI

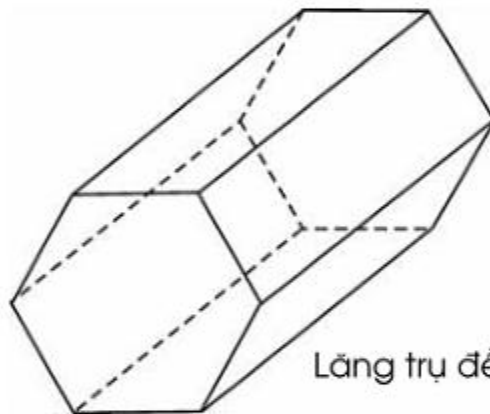
- *Hình lăng trụ đứng* là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- *Hình lăng trụ xiên* là hình lăng trụ có cạnh bên không vuông góc với mặt đáy.
- *Hình lăng trụ đều* là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.



Lăng trụ đứng



Lăng trụ xiên



Lăng trụ đều

IV. CÔNG THỨC

- Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó

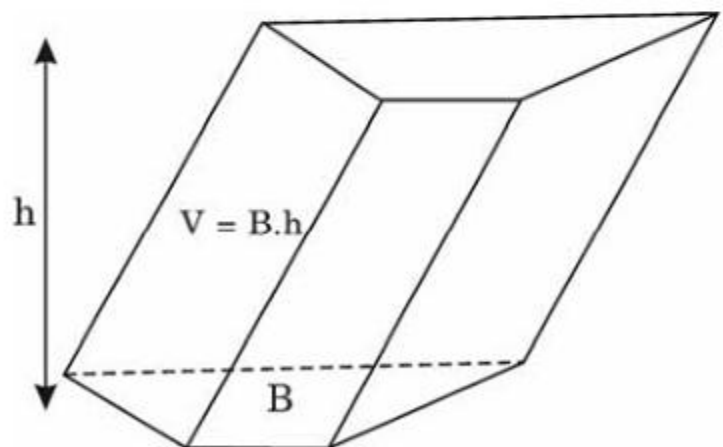
$$V = B.h$$

- Diện tích xung quanh bằng tổng diện tích các mặt bên

$$S_{xq} = \sum S_{\text{mặt bên}}$$

- Diện tích toàn phần bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B.$$



B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI



Chủ đề 1

|| Tính thể tích khối lăng trụ

I. PHƯƠNG PHÁP

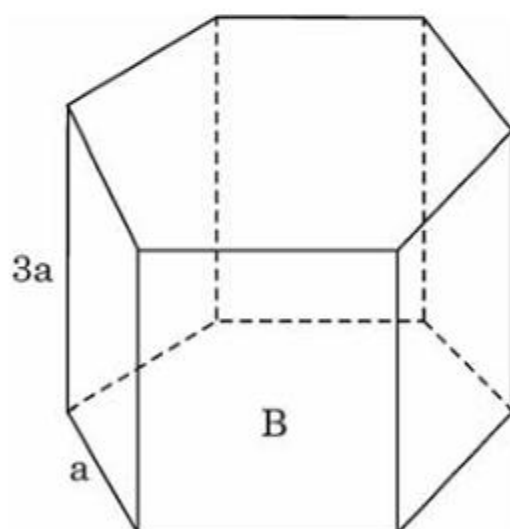
Để tính thể tích các khối lăng trụ ta thực hiện các bước :

- Xác định chân đường cao
- Vẽ đường cao
- Tính đường cao h
- Tính diện tích đáy B
- Tính thể tích lăng trụ theo công thức $V = Bh$.

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Tính thể tích khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng a và đường cao $3a$.

Giải



Ta có chiều cao lăng trụ là : $h = 3a$.

Diện tích đáy của lăng trụ là : $B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của lăng trụ là : $V = B \cdot h = 3a \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 2. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

Giải

Gọi I là trung điểm của BC , O là tâm của tam giác ABC nên O thuộc AI và $OI = \frac{1}{3}AI$.

Dựng $OH \perp A'I$ tại H , ta có :

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow BC \perp OH.$$

Lại có $OH \perp A'I$ nên $OH \perp (A'BC)$.

$$\text{Vậy } OH = d(O, (A'BC)) = \frac{a}{6}.$$

Đặt $AA' = x$ ($x > 0$), xét tam giác vuông $A'AI$ ta có :

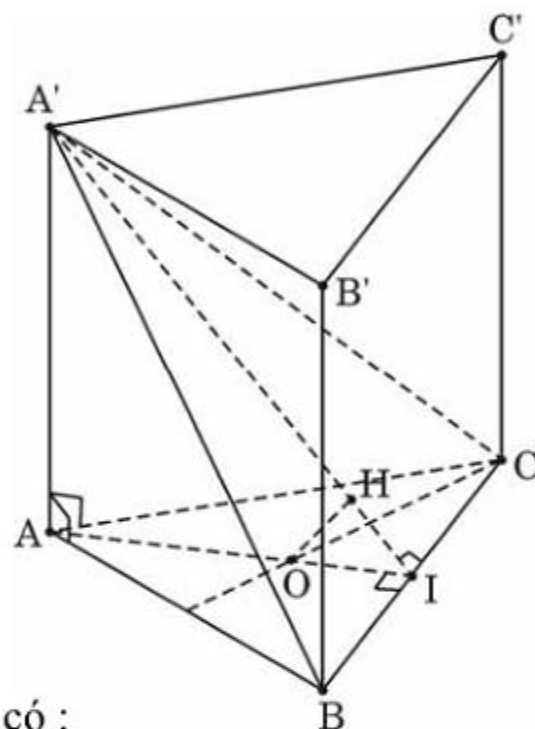
$$\begin{aligned} A'I &= \sqrt{AA'^2 + AI^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{3a^2}{4}}. \end{aligned}$$

Hai tam giác vuông OHI và $A'AI$ đồng dạng, suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{OH}{AA'} &= \frac{OI}{A'I} \Leftrightarrow OH \cdot A'I = OI \cdot AA' \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} + x^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot x \quad (\text{vì } OI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3a^2}{4} + x^2} = \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} + x^2 = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{8} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$:

$$V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{16}.$$





Chủ đề 2

Tính diện tích hình lăng trụ

I. PHƯƠNG PHÁP

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Để tính diện tích hình lăng trụ ta thực hiện các bước :

- Xác định hình tính các mặt
- Tính diện tích từng mặt
- Tính diện tích lăng trụ theo các công thức :

a) Diện tích xung quanh bằng tổng diện tích các mặt bên

$$S_{xq} = \sum S_{\text{mặt bên}}$$

b) Diện tích toàn phần bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B.$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng a và đường cao $3a$.

Giải

Ta có chiều cao lăng trụ là : $h = 3a$ (xem hình bài toán 1).

Diện tích đáy của lăng trụ là : $B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Mỗi mặt bên của lăng trụ là hình chữ nhật có diện tích $S = 3a^2$

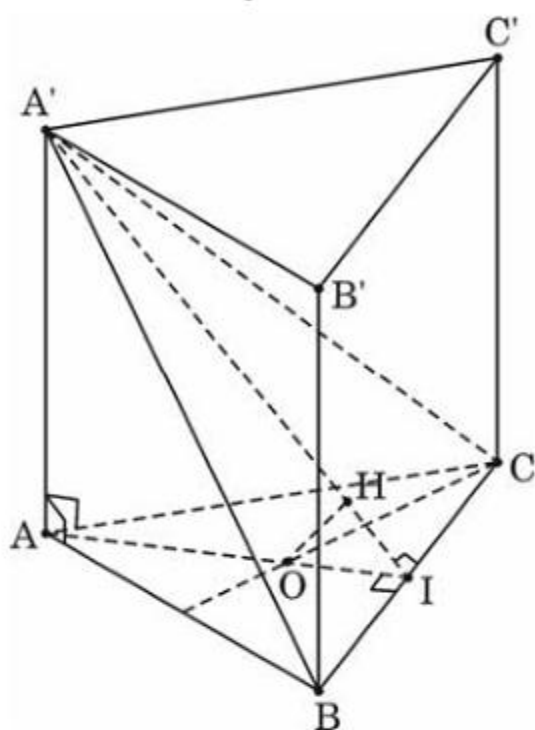
$$\Rightarrow S_{xq} = 6 \cdot 3a^2 = 18a^2$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + 2B = 18a^2 + 2 \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} = 3a^2(6 + \sqrt{3}).$$

Bài toán 4. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.

Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Giải



Theo chứng minh ở bài toán 2, ta đã có chiều cao của lăng trụ là : $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Các mặt bên của lăng trụ là các hình chữ nhật có kích thước a và $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Hai đáy là hai tam giác đều có cạnh bằng a .

Vậy diện tích toàn phần của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là :

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 3S_{ABB'A'} + 2S_{ABC} \\ &= 3AA' \cdot AB + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ &= 3a^2\sqrt{\frac{3}{8}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}(3\sqrt{2}+2)}{4}. \end{aligned}$$



Chủ đề 3

Phân loại hình lăng trụ theo đường cao

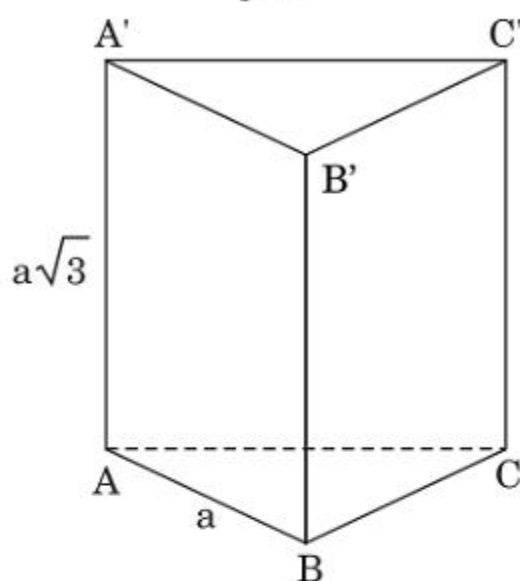
Để giải các bài toán về hình lăng trụ, điều quan trọng nhất là xác định được đường cao. Người ta phân loại lăng trụ theo các kiểu đường cao như sau :

Loại 1 : ĐƯỜNG CAO LÀ CẠNH BÊN

(Tất cả các lăng trụ đều thì có đường cao là cạnh bên).

Bài toán 5. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của lăng trụ.

Giải



Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên đáy ABC là tam giác đều và đường cao là cạnh bên : $h = AA' = a\sqrt{3}$.

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích } V = B.h = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$

$$\text{Diện tích toàn phần : } S_{tp} = S_{xq} + 2B = 3a^2\sqrt{3} + 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Bài toán 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B . $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của lăng trụ.

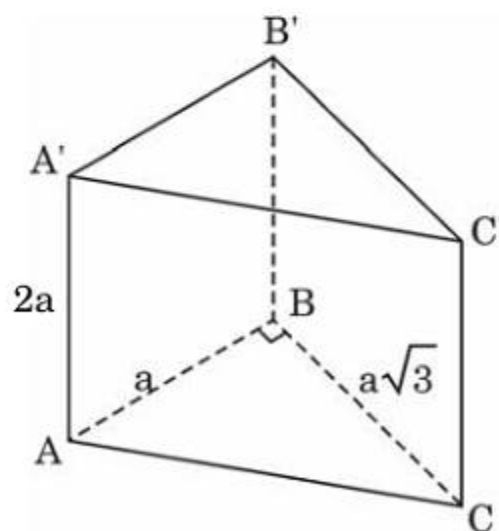
Giải

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao là cạnh bên : $h = AA' = 2a$.

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích } V = B.h = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = a^3\sqrt{3}.$$

Tam giác ABC vuông tại B nên ta có : $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 2a$.



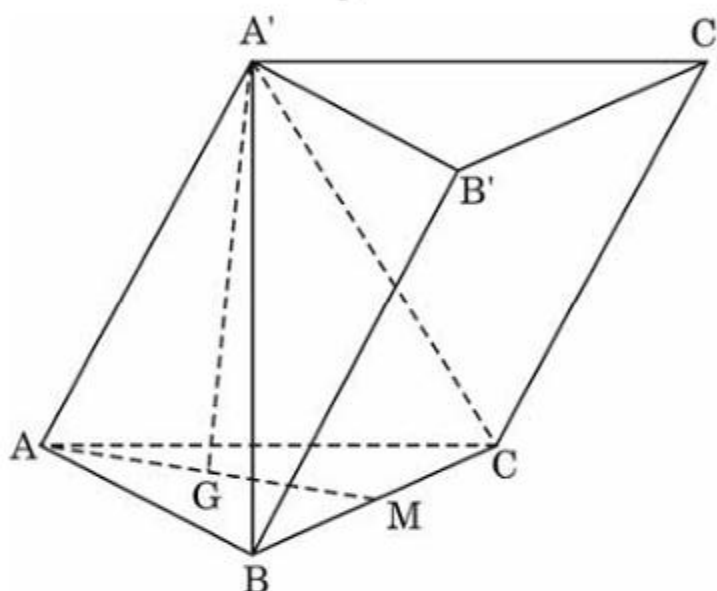
$$\begin{aligned}\text{Diện tích toàn phần : } S_{tp} &= S_{xq} + 2B = 2a(a + 2a + a\sqrt{3}) + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2a^2(3 + \sqrt{3}) + a^2\sqrt{3} = 3a^2(2 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Loại 2 : ĐƯỜNG CAO NẪM BÊN TRONG LĂNG TRỤ

Bài toán 7. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{3}$.

- Chứng minh tứ giác $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
- Tính thể tích của lăng trụ.

Giải



- Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC và gọi M là trung điểm BC , ta có :
 $A'A = A'B = A'C$, suy ra $A'G$ vuông góc với $mp(ABC)$.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp A'G \\ BC \perp AG \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AA'.$$

Mà $BB' \parallel AA' \Rightarrow BC \perp BB'$.

Tứ giác $BB'C'C$ là hình bình hành và có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

- ABC là tam giác đều nên : $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Chiều cao lăng trụ : } h = A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{24a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích lăng trụ : $V = B.h = S_{ABC}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 8. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a . Góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $A'A = A'B = A'D = a$. Tính thể tích của lăng trụ.

Giải

Tam giác ABD cân có một góc bằng 60° nên là tam giác đều. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABD và gọi O là trung điểm BD , ta có $A'A = A'B = A'D$ suy ra $A'G$ vuông góc với $mp(ABCD)$.

ABD là tam giác đều nên :

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chiều cao lăng trụ :

$$h = A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

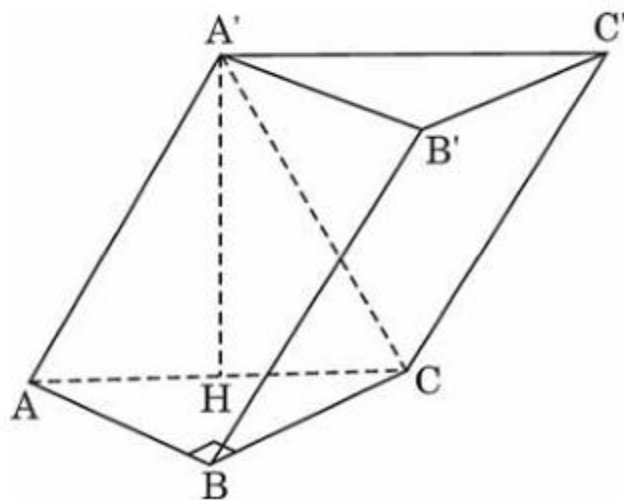
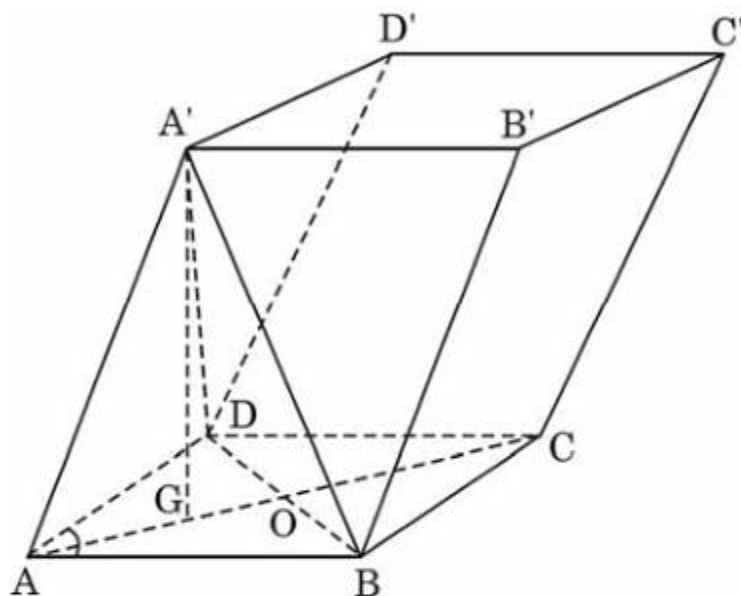
Thể tích lăng trụ : $V = B.h = S_{ABCD}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Loại 3 : ĐƯỜNG CAO NẪM TRONG MỘT MẶT BÊN

Bài toán 9. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Mặt bên $AA'C'C$ là hình thoi và vuông góc với mặt đáy. Cạnh bên AA' hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích của lăng trụ.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' xuống cạnh AC . Do mặt bên $AA'C'C$ vuông góc với mặt đáy nên ta có $A'H$ vuông góc với $mp(ABC)$, suy ra $\widehat{A'AH} = 60^\circ$.



Tam giác $A'AC$ cân có một góc bằng 60° nên là tam giác đều.

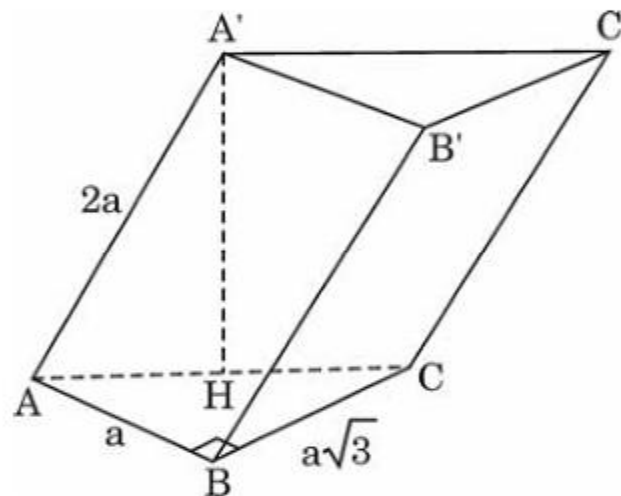
$$\text{Chiều cao lăng trụ : } h = A'H = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Thể tích lăng trụ : } V = B.h = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$$

Bài toán 10. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt đáy trùng với trung điểm H của cạnh AC . Tính thể tích của lăng trụ.

Giải



$$\text{Ta có } AC = \sqrt{BC^2 + BA^2} = 2a.$$

Ta có H là hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt đáy nên ta có $A'H$ vuông góc với mp (ABC) , suy ra chiều cao lăng trụ là :

$$\begin{aligned} h = A'H &= \sqrt{A'A^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

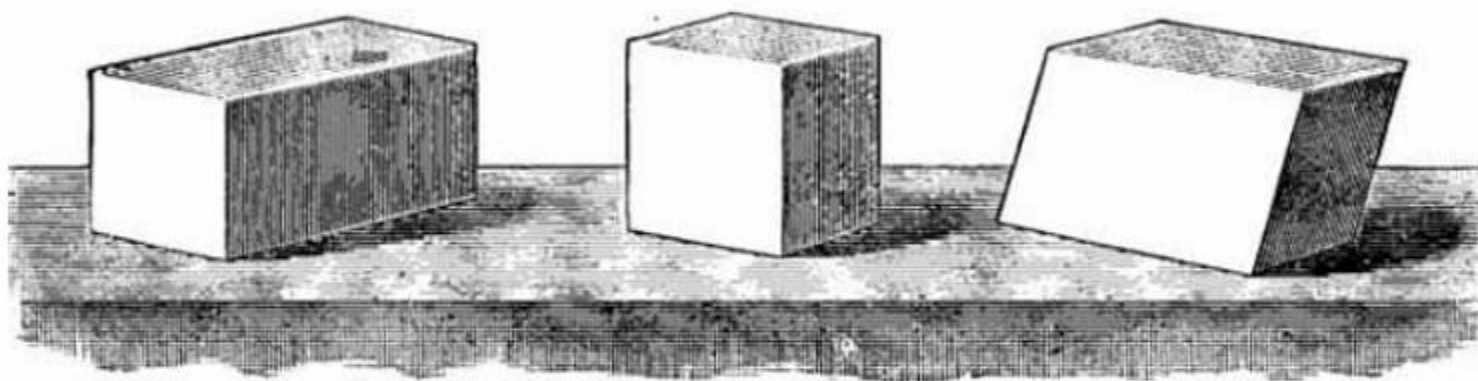
$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích lăng trụ : } V = B.h = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}.$$

CHƯƠNG 2. HÌNH HỘP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA



Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Khoảng cách giữa hai đáy gọi là chiều cao của hình hộp.

II. TÍNH CHẤT

- Cả 6 mặt của hình hộp đều là hình bình hành.
- Hình hộp là hình lăng trụ mà mọi mặt đều có thể lấy làm mặt đáy.
- Đoạn nối hai đỉnh không thuộc một mặt gọi là đường chéo của hình hộp.
- Ba đường chéo của hình hộp đồng quy tại một điểm, điểm đó là tâm đối xứng của hình hộp.

III. PHÂN LOẠI

Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với đáy.

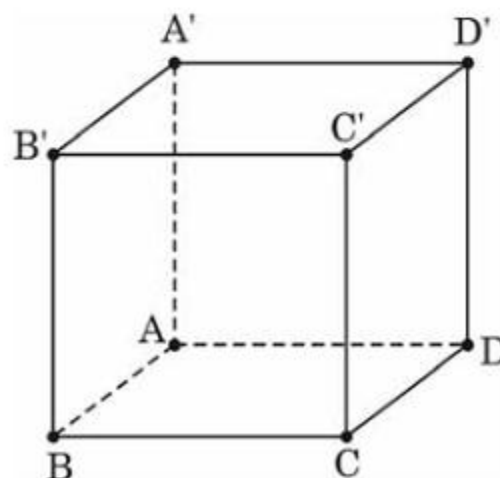
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt là hình vuông.

- Hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c thì đường chéo có độ dài :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- Hình lập phương có cạnh a thì $d = a\sqrt{3}$.



IV. CÔNG THỨC

- Thể tích của khối hộp được tính theo thể tích của khối lăng trụ :

$$V = Bh$$

- Đặc biệt thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích của ba kích thước

$$V = a.b.c$$

- và thể tích của khối lập phương bằng lập phương số đo của cạnh

$$V = a^3$$

- Diện tích xung quanh bằng tổng diện tích các mặt bên

$$S_{xq} = \sum S_{\text{mặt bên}}$$

- Diện tích toàn phần bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B.$$

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI



Chủ đề 1

Tính thể tích khối hộp

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tính thể tích các khối hộp ta thực hiện các bước :

- Xác định chân đường cao
- Vẽ đường cao
- Tính đường cao h
- Tính diện tích đáy B
- Tính thể tích khối hộp theo công thức $V = B.h$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường chéo BD' hợp với đáy một góc 60° . Gọi E là trung điểm của AD . Mặt phẳng BED' cắt hình hộp theo một thiết diện có diện tích bằng $4\sqrt{39} \text{ cm}^2$. Tính thể tích của khối hộp đã cho.

Giải

$$\begin{cases} (ABCD) // (A'B'C'D') \\ (BED') \cap (ABCD) = BE \Rightarrow (BED') \cap (A'B'C'D') = D'F // BE \quad (F \in B'C') \\ D' \in (BED') \cap (A'B'C'D') \end{cases}$$

Nối BF, thiết diện là tứ giác BED'F.

$$\begin{cases} (ADD'A') // (BCC'B') \\ (BED') \cap (ADD'A') = D'E \\ (BED') \cap (BCC'B') = BF \end{cases}$$

$\Rightarrow BF // D'E$.

Tam giác BAD có $AB = AD$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, E là trung điểm của AD, suy ra $BE \perp AD$, mặt khác cũng có $BE \perp AA'$ (vì $AA' \perp (ABCD)$), do đó

$$BE \perp (ADD'A') \Rightarrow BE \perp D'E.$$

Tứ giác BED'F có $D'F // BE$, $BF // D'E$, $BE \perp D'E$ nên là hình chữ nhật.

Hình chiếu vuông góc của BD' trên $(ABCD)$ là BD do đó góc giữa BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{D'BD}$, theo giả thiết ta có $\widehat{D'BD} = 60^\circ$.

Đặt cạnh hình thoi là x, thì $BE = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $BD = x$, $DD' = BD \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông D'DE, ta có :

$$D'E^2 = DD'^2 + DE^2 = 3x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{13x^2}{4} \Rightarrow D'E = \frac{x\sqrt{13}}{2}.$$

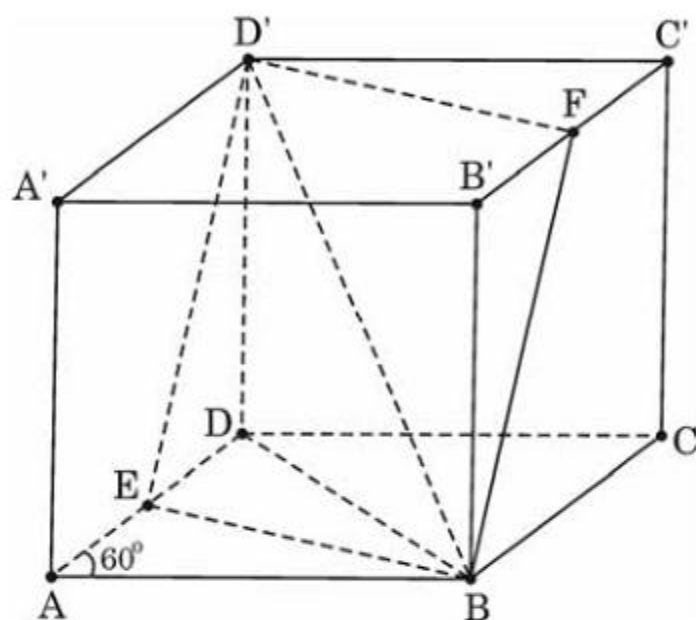
Diện tích thiết diện BED'F là :

$$S = BE \cdot D'E = \frac{x^2 \sqrt{39}}{4} = 4\sqrt{39} \Rightarrow x = 4 \text{ (cm)}.$$

Diện tích mặt đáy ABCD là :

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 60^\circ = x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

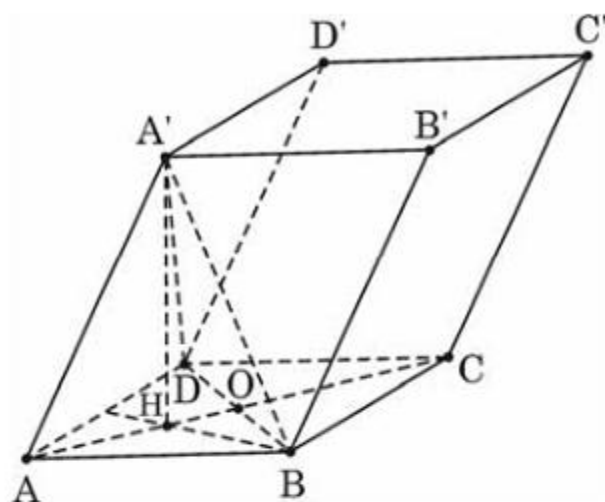
Thể tích khối hộp là : $V = S_{ABCD} \cdot DD' = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 96 \text{ (cm}^3\text{)}.$



Bài toán 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $A'A = A'B = A'D = a$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Giải

$A'A = A'B = A'D = a$ nên A' thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD , gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ thì $A'H$ vuông góc với $(ABCD)$ và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Vì tam giác ABD có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ABD là tam giác đều, suy ra



$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (với } O \text{ là giao điểm của } AC \text{ và } BD).$$

Xét tam giác vuông $A'HA$ (vuông tại H), ta có :

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là :

$$\begin{aligned} V_{ABCD.A'B'C'D'} &= S_{ABCD} \cdot A'H \\ &= AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$



Chủ đề 2

Tính diện tích hình hộp

I. PHƯƠNG PHÁP

- Hình hộp có 6 mặt là hình bình hành.
- Hình hộp đứng có 4 mặt là hình chữ nhật, hai đáy là hình bình hành.
- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình chữ nhật.
- Hình lập phương có 6 mặt là hình vuông.

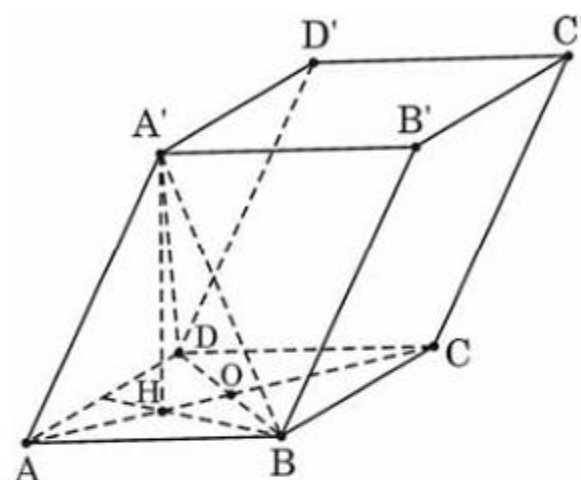
II CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $A'A = A'B = A'D = a$. Tính diện tích toàn phần của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Giải

Ta có $A'A = A'B = A'D = a$ nên A' thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD , gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ thì $A'H$ vuông góc với $(ABCD)$ và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Vì tam giác ABD có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ABD là tam giác đều, suy ra

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (\text{với } O \text{ là giao điểm của } AC \text{ và } BD).$$



Xét tam giác vuông $A'HA$ (vuông tại H), ta có :

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích toàn phần của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$:

$$S_{\text{tp}} = 2(S_{ABB'A'} + S_{ADD'A'} + S_{ABCD}).$$

Tam giác $A'AB$ có $A'A = A'B = AB = a$ nên là tam giác đều và

$$S_{A'AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABB'A'} = 2S_{A'AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \text{ Tương tự } S_{ADD'A'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{\text{tp}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3}.$$

Bài toán 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

Tìm điểm M trên cạnh AA' sao cho mặt phẳng (MBD') cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Giải

Gọi N là điểm ở trên CC' sao cho $AM = NC' = x$.

Ta có : $MD' \parallel BN$ và $MD' = BN$.

Vậy $BMD'N$ là thiết diện của (MBD') với hình lập phương.

Diện tích S của thiết diện $BMD'N$ bằng 2 lần diện tích tam giác MBD' .

Tam giác MBD' có cạnh đáy $D'B$ không đổi nên :

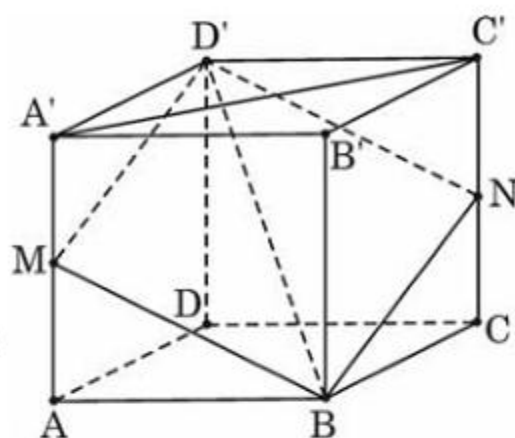
Diện tích tam giác MBD' nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ đường cao MH ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ MH là đoạn vuông góc chung của $A'A$ và $D'B$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm AA' và H là trung điểm của $D'B$.

Vậy khi M là trung điểm AA' thì $S_{BMD'N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài toán 5. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh đáy bằng a, thể tích khối hộp bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Tính diện tích thiết diện $A'BD$.

Giải

Gọi I là giao điểm AC và BD, ta có :

$BD \perp IA'$. Vậy tam giác $A'DB$ cân và $A'I$ là đường cao.

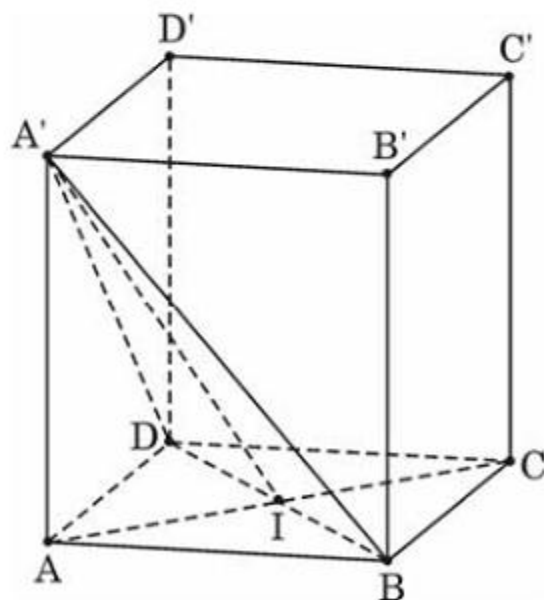
Đặt $AA' = x$.

$$\text{Ta có : } V = a^2 \cdot x = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Mà } A'I^2 = x^2 + AI^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = a^2$$

$$\Rightarrow A'I = a$$

$$\Rightarrow S_{A'BD} = \frac{1}{2} A'I \cdot BD = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

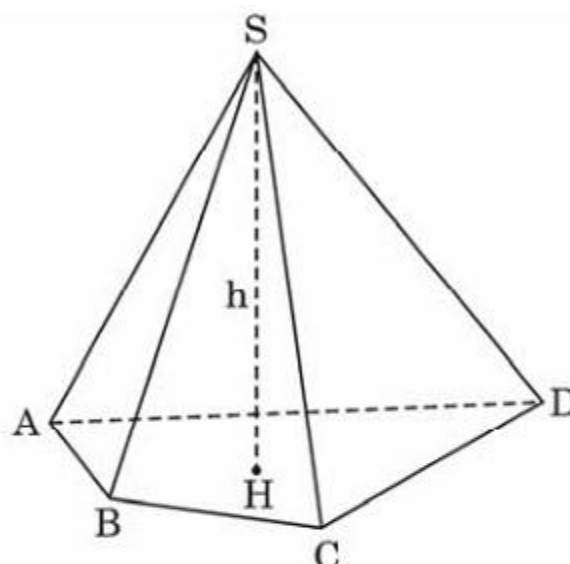
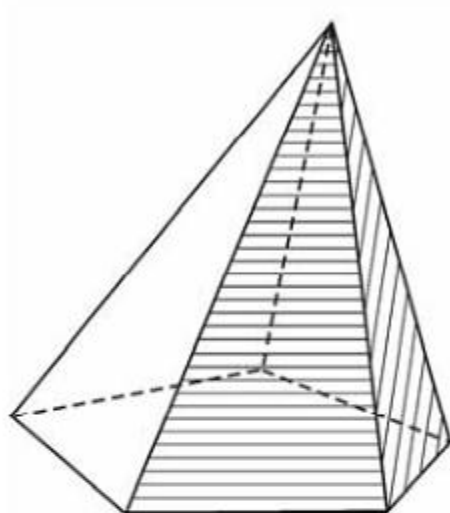




CHƯƠNG 3. HÌNH CHÓP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

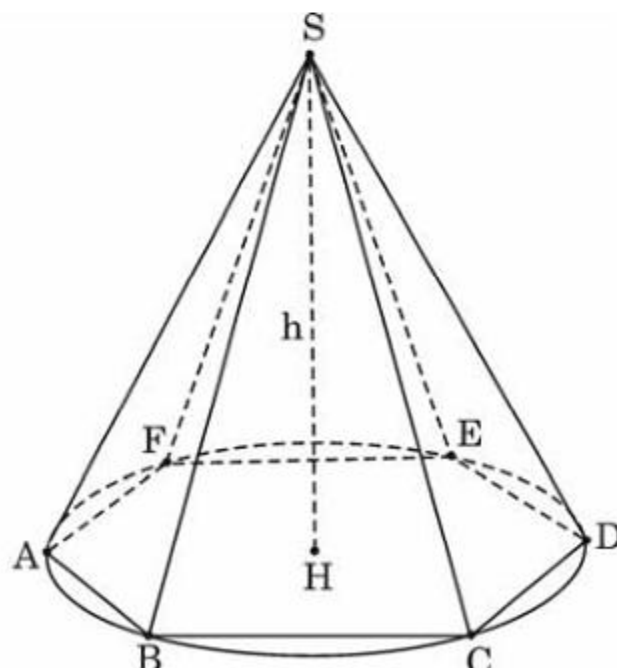
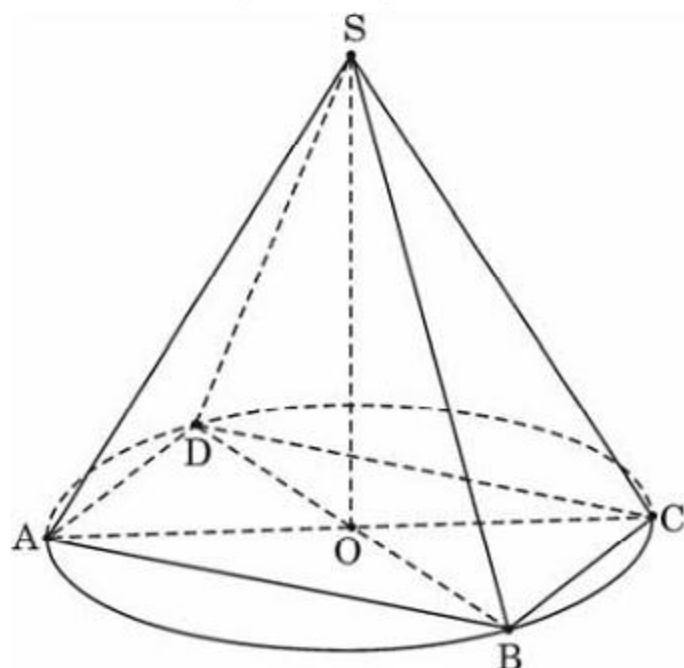


Hình chóp là khối đa diện có một mặt là đa giác được gọi là đáy, các mặt còn lại đều là tam giác có chung một đỉnh và được gọi là mặt bên (hình chóp $S.ABCD$).

Khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy gọi là chiều cao của hình chóp.

II. TÍNH CHẤT

- Các mặt bên đều là hình tam giác có chung một đỉnh
- Mặt đáy là đa giác bất kì



- Số cạnh đáy được dùng để gọi hình chóp, ví dụ :
Hình chóp tứ giác có đáy là tứ giác, hình chóp ngũ giác có đáy là ngũ giác ...
- **Hình chóp đều** là hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau. Do đó hình chiếu vuông góc của đỉnh xuống đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện.

III. CÔNG THỨC

- Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ tích số của diện tích đáy và chiều cao

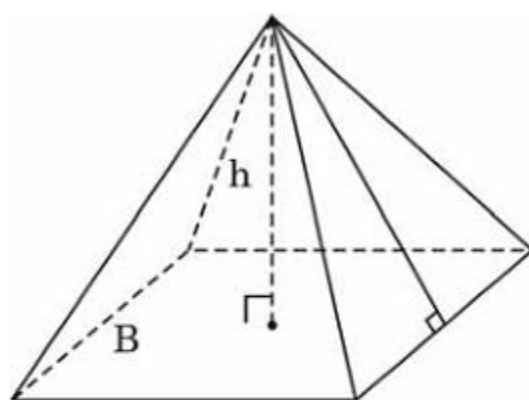
$$V = \frac{1}{3} Bh$$

- Diện tích xung quanh bằng tổng diện tích các mặt bên

$$S_{xq} = \sum S_{\text{mặt bên}}$$

- Diện tích toàn phần bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + B.$$



B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI



Chủ đề 1

|| Tính thể tích khối chóp

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tính thể tích các khối chóp ta thực hiện các bước :

- Xác định chân đường cao
- Vẽ đường cao
- Tính đường cao h
- Tính diện tích đáy B
- Tính thể tích khối chóp theo công thức : $V = \frac{1}{3} Bh$.

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Tính thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

Giải

Tam giác ASC vuông tại S vì có ba cạnh thỏa mãn

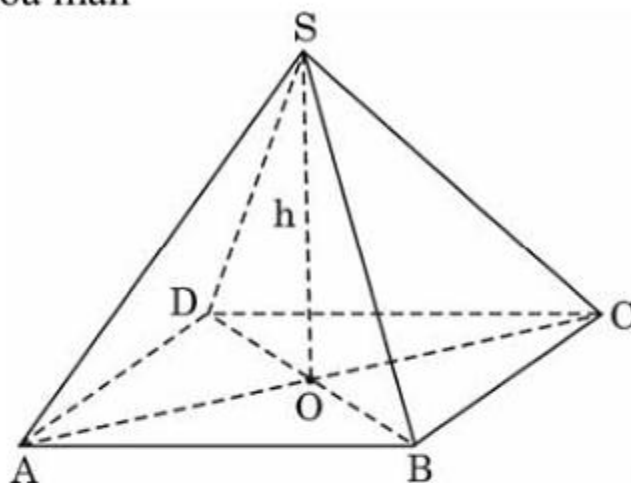
$$SA^2 + SC^2 = AC^2.$$

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Do S.ABCD là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABCD)$, suy ra chiều cao của khối chóp là :

$$h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Diện tích đáy khối chóp : $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp là : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$



Bài toán 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B,

$AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cho biết góc giữa SD và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp.

Giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa SD với mặt đáy là :

$$\widehat{SDA} = 60^\circ.$$

Chiều cao của khối chóp là :

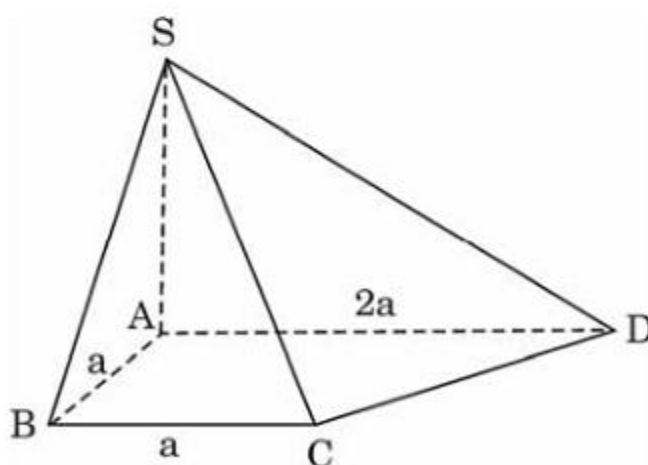
$$h = SA = AD \cdot \tan 60^\circ = 2a \cdot \sqrt{3}.$$

Diện tích đáy khối chóp :

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{(2a + a)a}{2} \\ &= \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

Vậy thể tích khối chóp là :

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2} \cdot 2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$$





Chủ đề 2

Tính diện tích hình chóp

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tính diện tích hình chóp ta thực hiện các bước :

- Xác định hình tính các mặt
- Tính diện tích từng mặt
- Tính diện tích hình chóp theo công thức :

a) Diện tích xung quanh bằng tổng diện tích các mặt bên

$$S_{xq} = \sum S_{\text{mặt bên}}$$

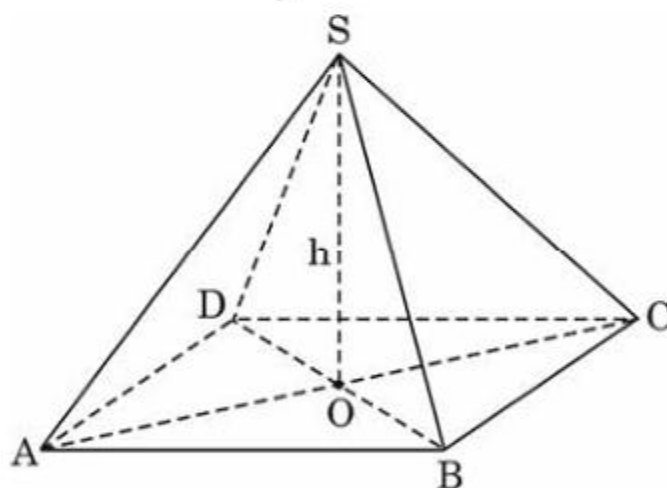
b) Diện tích toàn phần bằng diện tích xung quanh cộng cho diện tích đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + B.$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

Giải



Diện tích đáy của hình chóp là : $B = a^2$.

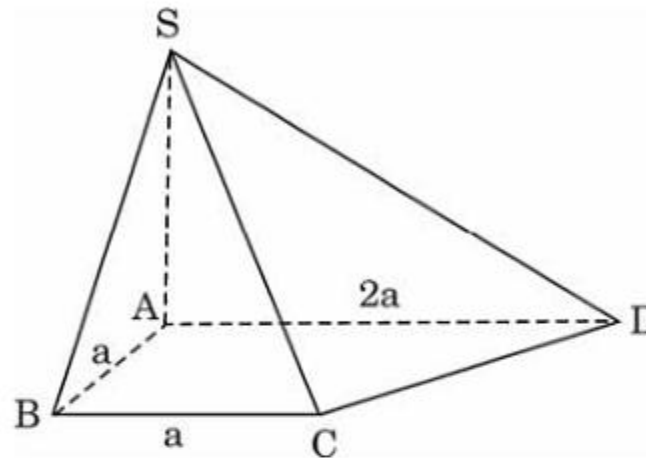
Mỗi mặt bên của hình chóp là tam giác đều cạnh bằng a nên có diện tích

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{xq} = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + B = a^2 + a^2 \sqrt{3} = a^2 (1 + \sqrt{3}).$$

Bài toán 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Cho biết góc giữa SD và mặt đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần hình chóp.

Giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa SD với mặt đáy là :

$$\widehat{SDA} = 60^\circ.$$

Chiều cao của hình chóp là :

$$h = SA = AD \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}.$$

Diện tích đáy hình chóp :

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{(2a + a)a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{12a^2 + a^2} = a\sqrt{13}$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{12a^2 + 2a^2} = a\sqrt{14}.$$

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp SB.$$

Ta cũng có $CD \perp AC$ nên

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp SC$$

và $AC = CD = a\sqrt{2}.$

Các mặt bên hình chóp đều là các tam giác vuông, do đó

Diện tích các mặt bên :

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = \frac{1}{2} 2a\sqrt{3} \cdot a = a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{SAD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} a\sqrt{13} \cdot a = \frac{a^2 \sqrt{13}}{2}$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} SC \cdot CD = \frac{1}{2} a\sqrt{14} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2 \sqrt{28}}{2} = a^2 \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = a^2 \sqrt{3} + 2a^2 \sqrt{3} + \frac{a^2 \sqrt{13}}{2} + a^2 \sqrt{7} = a^2 (3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{7})$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + B = a^2 (3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{7} + \frac{3}{2}).$$



Chủ đề 3

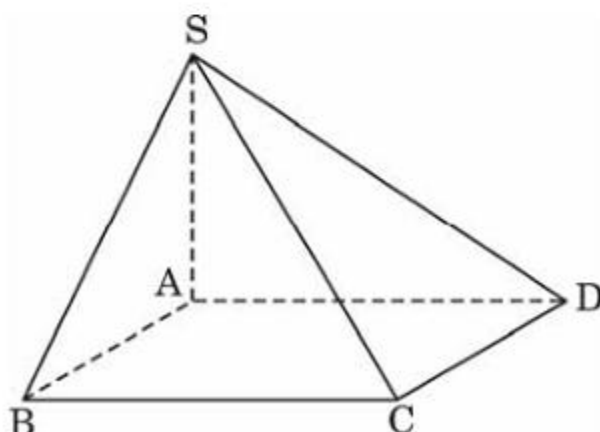
Phân loại hình chóp theo đường cao

Để giải nhiều bài toán về hình chóp, điều quan trọng nhất là xác định được đường cao. Người ta phân loại hình chóp theo các kiểu đường cao như sau :

Loại 1 : ĐƯỜNG CAO LÀ MỘT CẠNH BÊN

Bài toán 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải



Diện tích đáy $B = S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2.2a = \frac{2a^3}{3}$.

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$$

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$$

Vậy các mặt bên hình chóp đều là các tam giác vuông.

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}, \text{ tương tự}$$

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Diện tích các mặt bên :

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}SA.AB = \frac{1}{2}2a.a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{SAD} = \frac{1}{2}SA.AD = \frac{1}{2}2a.a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{1}{2}a\sqrt{5}.a = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}SD.CD = \frac{1}{2}a\sqrt{5}.a = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}.$$

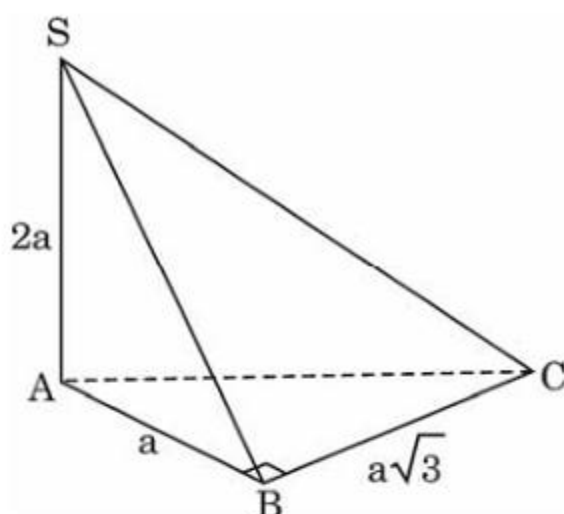
Diện tích toàn phần :

$$S_{tp} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2} + \frac{a^2\sqrt{5}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + a^2 = a^2(2 + \sqrt{5}).$$

Bài toán 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mp (ABC) và $SA = 2a$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} S_{ABC}.SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp SB$$

Vậy các mặt bên hình chóp đều là các tam giác vuông, do đó :

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}, \text{ tương tự}$$

$$AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

Diện tích các mặt bên :

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA.AB = \frac{1}{2} 2a.a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} SA.AC = \frac{1}{2} 2a.2a = 2a^2$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB.BC = \frac{1}{2} a\sqrt{5}.a\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích toàn phần :

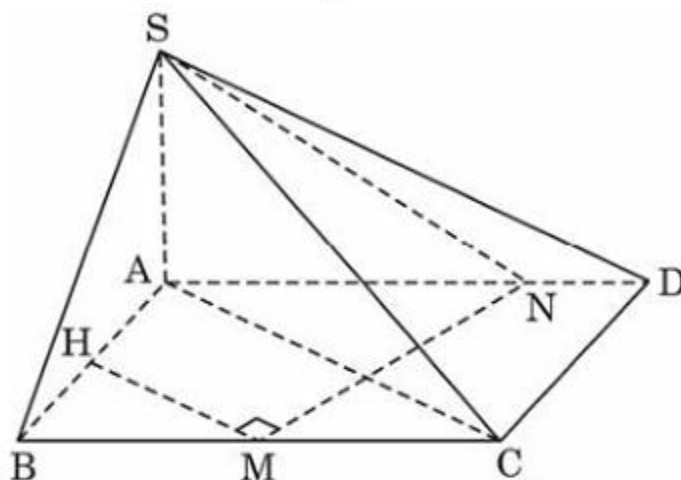
$$S_{tp} = \frac{a^2}{2} + 2a^2 + \frac{a^2 \sqrt{15}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2} (5 + \sqrt{15} + \sqrt{3}).$$

Bài toán 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD với $AB = 2a$, $AD = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) ; góc giữa SC và mp(ABCD) là 60° .

a) Tính thể tích của hình chóp S.ABCD.

b) Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, BC ; N ở trên cạnh AD sao cho $DN = a$. Tính thể tích của khối chóp S.AHMN.

Giải



a) $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 8a^2$.

$$SA \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow$ SC có hình chiếu trên (ABCD) là AC

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

Tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{5}$.

Tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{15}$.

Thể tích của khối chóp S.ABCD là :

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 8a^2 \cdot 2a\sqrt{15} = \frac{16a^3 \sqrt{15}}{3}.$$

b) $S_{AHMN} = S_{ABCD} - S_{BMH} - S_{MCDN}$

$$= 8a^2 - a^2 - \frac{(a + 2a) \cdot 2a}{2}$$

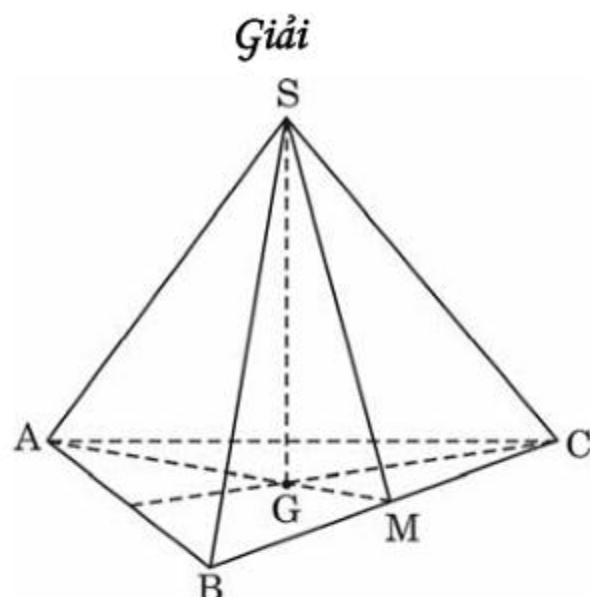
$$= 7a^2 - 3a^2 = 4a^2.$$

Thể tích của khối chóp S.AHMN là :

$$V_{S.AHMN} = \frac{1}{3} S_{AHMN} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot 2a\sqrt{15} = \frac{8a^3 \sqrt{15}}{3}.$$

Loại 2 : ĐƯỜNG CAO NẪM BÊN TRONG HÌNH CHÓP

Bài toán 8. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp.



Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC và gọi M là trung điểm BC. Do hình chóp S.ABC là hình chóp đều nên ta có SG vuông góc với mp(ABC).

$$ABC \text{ là tam giác đều nên : } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chiều cao khối chóp :

$$h = SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{24a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp : } V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

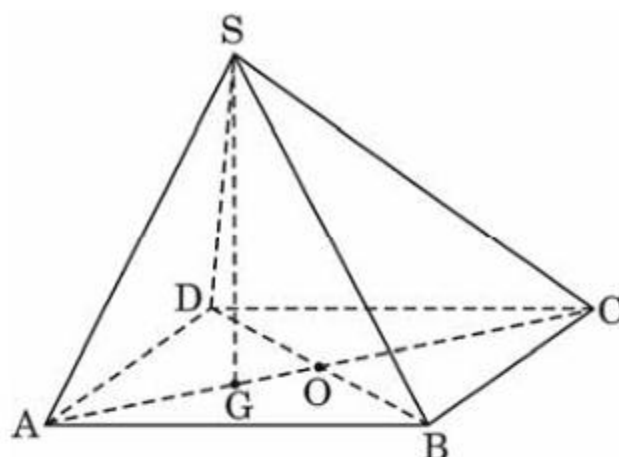
Bài toán 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh bằng a. Góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = a$. Tính thể tích khối chóp.

Giải

Tam giác ABD cân có một góc bằng 60° nên là tam giác đều. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABD và gọi O là trung điểm BD, ta có $SA = SB = SD$, suy ra SG vuông góc với mp(ABCD).

$$ABD \text{ là tam giác đều nên : } AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Chiều cao hình chóp : } h = SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



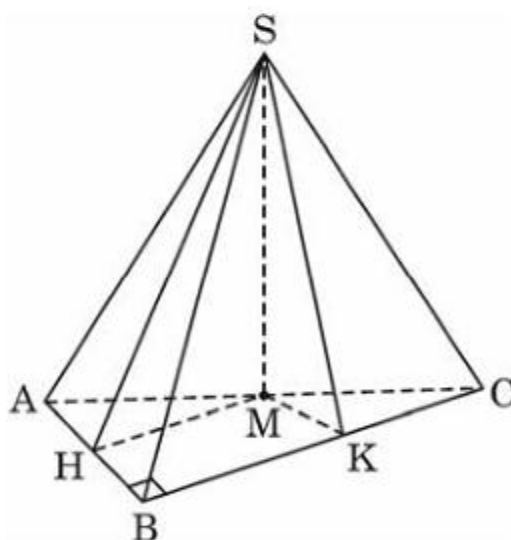
Diện tích đáy $B = S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp : $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$.

Loại 3 : ĐƯỜNG CAO NẪM TRONG MỘT MẶT BÊN

Bài toán 10. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AB = a$. Mặt bên (SAC) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích của khối chóp và diện tích toàn phần của hình chóp S.ABC.

Giải



Trong tam giác vuông cân ABC ta có :

$$AC = a\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Do mặt bên (SAC) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAC đều nên ta có SM vuông góc với mp (ABC), suy ra chiều cao hình chóp là :

$$h = SM = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Diện tích đáy } B = S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp : } V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BA và BC, ta có

$$MH \parallel BC \Rightarrow MH \perp BA \Rightarrow SH \perp BA$$

$$MK \parallel BA \Rightarrow MK \perp BC \Rightarrow SK \perp BC$$

$$SH = \sqrt{SM^2 + MH^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Mà } SH = SK \text{ nên } SK = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Diện tích các mặt của hình chóp là :

$$S_{SBA} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Ta có } S_{SBA} = S_{SBC} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}.$$

$$S_{SAC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích toàn phần của hình chóp S.ABC là :

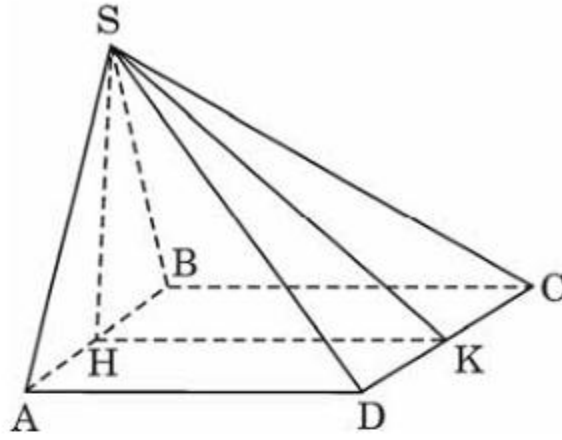
$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{SBA} + S_{SBC} + S_{SAC} + S_{ABC} \\ &= \frac{a^2\sqrt{7}}{4} + \frac{a^2\sqrt{7}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1). \end{aligned}$$

Bài toán 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh bằng a và mp(SAB) vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp và diện tích toàn phần hình chóp S.ABCD.

Giải

Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Do mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy nên ta có SH vuông góc với mp (ABCD), suy ra chiều cao hình chóp là :

$$h = SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Diện tích đáy

$$B = S_{ABCD} = a^2.$$

Thể tích khối chóp :

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Gọi K là trung điểm của CD, ta có

$$HK \parallel BC \Rightarrow HK \perp CD \Rightarrow SK \perp CD$$

$$SK = \sqrt{KH^2 + SH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Diện tích các mặt của hình chóp là :

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{SAD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{SDC} = \frac{1}{2} SK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$S_{SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

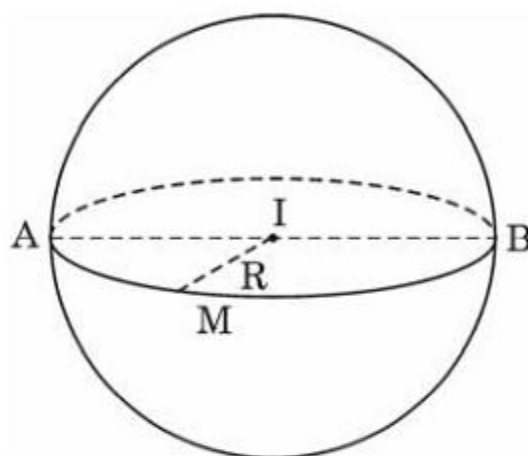
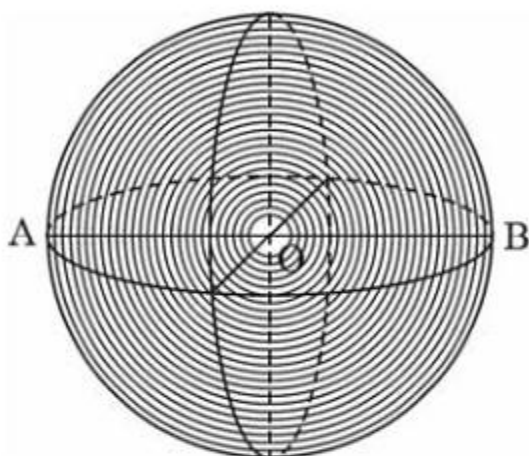
Diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD là :

$$S_{tp} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{7}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 = \frac{a^2}{4}(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 8).$$

CHƯƠNG 4. HÌNH CẦU

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. MẶT CẦU



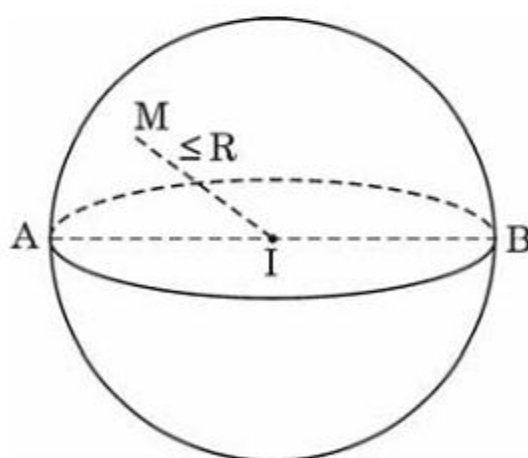
Mặt cầu (S) là tập hợp các điểm M trong không gian luôn cách điểm I cố định một khoảng bằng R không đổi.

I gọi là tâm, R là bán kính của mặt cầu (S).

$$S(I; R) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid IM = R\}.$$

Cho hai điểm A, B trên mặt cầu (S) sao cho tâm I là trung điểm của AB, ta gọi đoạn AB là đường kính của mặt cầu (S).

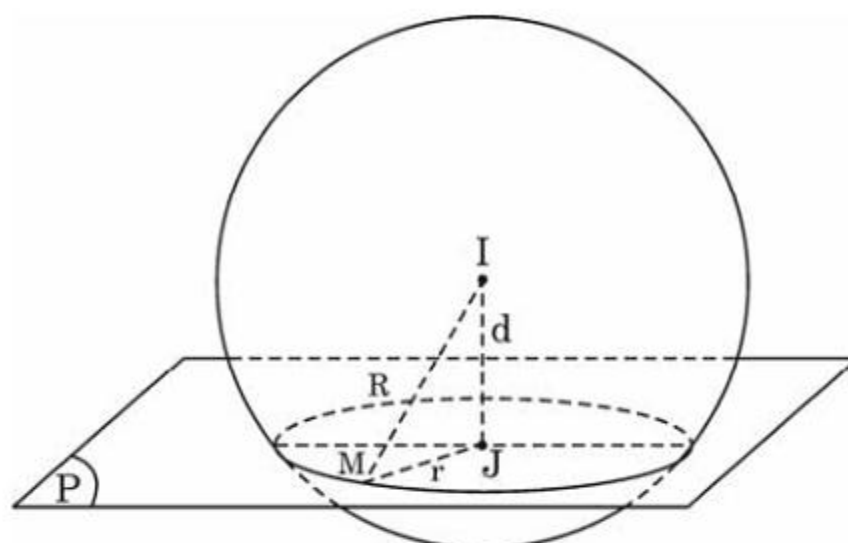
II. KHỐI CẦU



Cho một điểm cố định I và một độ dài không đổi R. Khối cầu (B) là tập hợp các điểm M trong không gian luôn cách điểm I một khoảng nhỏ hơn hoặc bằng R.

$$B(I; R) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid IM \leq R\}.$$

III. THIẾT DIỆN CỦA MẶT PHẶNG VỚI MẶT CẦU



Cho mặt cầu $S(I ; R)$ và mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách d từ I đến (P) nhỏ hơn R . Mặt phẳng (P) luôn cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn $C(J ; r)$ với :

– J là hình chiếu của I xuống (P)

– r được tính theo công thức : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

IV. CÔNG THỨC

Diện tích mặt cầu có bán kính R được tính theo công thức :

$$S = 4\pi R^2$$

Thể tích khối cầu có bán kính R được tính theo công thức :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI



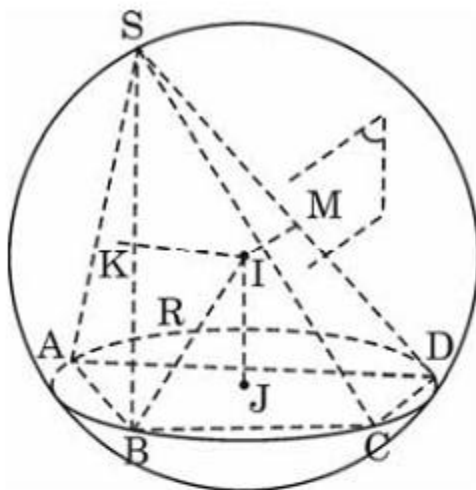
Chủ đề 1

|| Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

I. PHƯƠNG PHÁP

- Một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp nếu đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
- Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp đáy với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, hoặc là giao của trục đường tròn ngoại tiếp đáy với trục đường tròn ngoại tiếp một mặt bên.

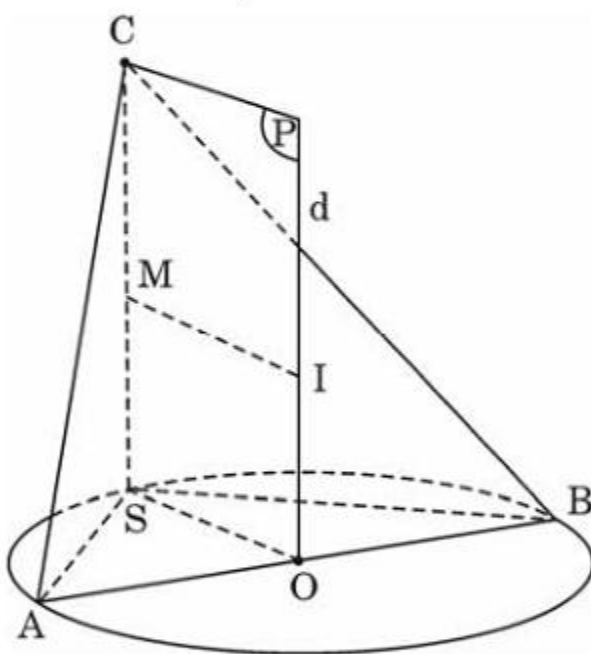
– Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là độ dài của đoạn nối từ tâm mặt cầu đến một đỉnh của hình chóp.



II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = a$, $SC = 2a$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Gọi O và M lần lượt là trung điểm của SC và AB.

Do tam giác ASB vuông tại S nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ASB. Vẽ trục d vuông góc với mp(SAB) tại O, ta có d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ASB.

Đường thẳng d song song với SC nên d và SC xác định mặt phẳng (P). Trong mp(P) đường trung trực của SC cắt d tại I.

Ta có $IA = IB = IC = IS = R$. Vậy mặt cầu $S(I; R)$ ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Ta có tam giác SAB vuông cân tại S, suy ra : $AB = a\sqrt{2}$.

$$\text{Mặt khác, } SO = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

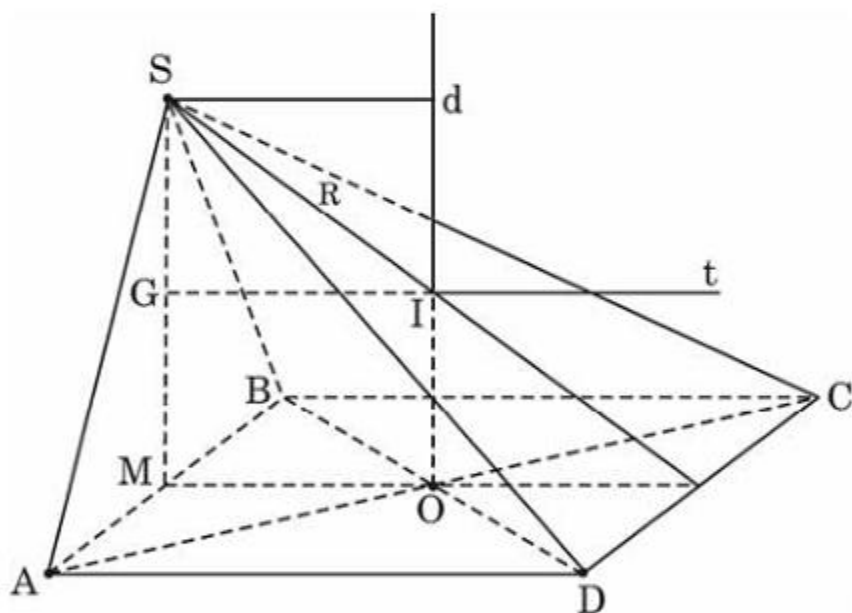
$$IO = MS = \frac{SC}{2} = a.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là :

$$\begin{aligned} R = IS &= \sqrt{IO^2 + OS^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Bài toán 2. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB là tam giác đều và mp (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABCD). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, M là trung điểm đoạn AB và G là trọng tâm tam giác SAB.

Vẽ trục d và trục t của các đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD và tam giác đều SAB. Ta có d và t vuông góc và cùng nằm trong mp(SMO) do đó d cắt t tại điểm I.

Ta có $IS = IA = IB = IC = ID = R$.

Vậy mặt cầu $S(I; R)$ ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Ta có tam giác SAB là tam giác đều có cạnh bằng a, suy ra :

$$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$SG = \frac{2}{3}SM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có:

$$GI = MO = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là :

$$\begin{aligned} R = IS &= \sqrt{IG^2 + GS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}. \end{aligned}$$



Chủ đề 2

Tính diện tích và thể tích khối cầu

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tính diện tích, thể tích khối cầu ta thực hiện các bước :

Xác định tâm

Tính bán kính R

Tính diện tích khối cầu theo công thức :

$$S = 4\pi R^2.$$

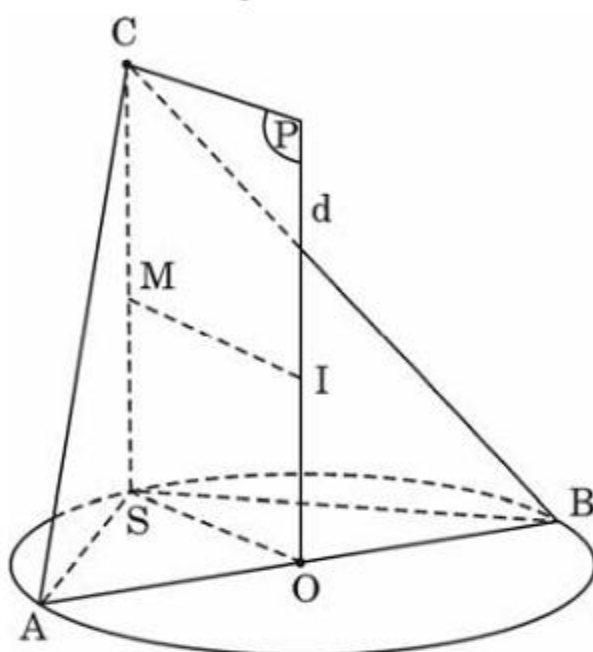
– Tính thể tích khối cầu theo công thức :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc và SA = SB = a, SC = 2a. Tính diện tích và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Theo chứng minh ở bài toán 1, ta được bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là :

$$R = IS = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là :

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{6a^2}{4} = 6\pi a^2.$$

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{6a^3\sqrt{6}}{8} = \pi a^3\sqrt{6}.$$

Bài toán 4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB là tam giác đều và mp (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABCD). Tính diện tích và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

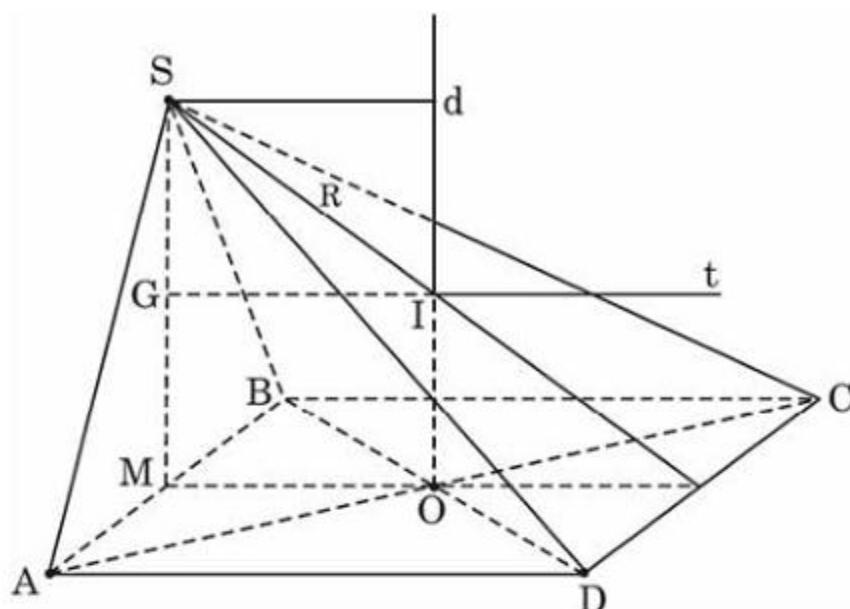
Giải

Theo chứng minh ở bài toán 2, ta được bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

S.ABCD là : $R = IS = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$

Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là :

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{21a^2}{36} = \frac{21\pi a^2}{9}.$$



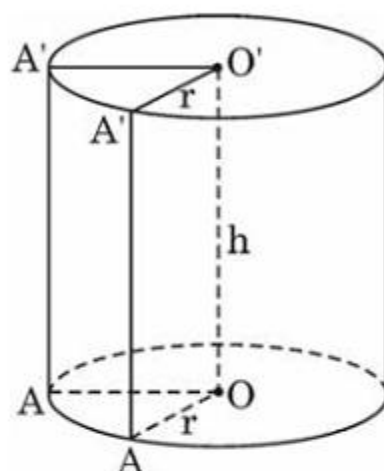
Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là :

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{21}}{6} \right)^3 \\
 &= \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{21a^3 \sqrt{21}}{216} = \frac{7a^3 \sqrt{21}}{54}.
 \end{aligned}$$

CHƯƠNG 5. HÌNH TRỤ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA



Xét hình chữ nhật AA'O'O. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh OO', thì đường gấp khúc OAA'O' tạo thành một hình được gọi là *hình trụ*.

$h = OO'$ gọi là chiều cao của hình trụ.

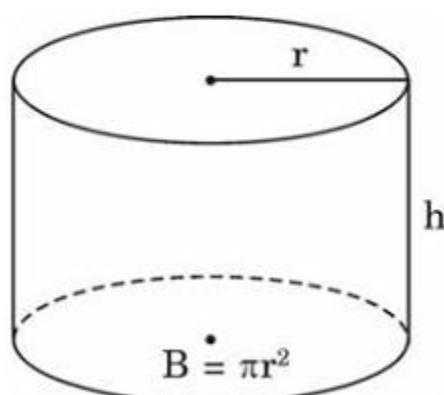
$r = AO$ gọi là bán kính đáy của hình trụ.

AA' gọi là đường sinh của hình trụ.

OO' gọi là trục của hình trụ.

Phần không gian bên trong hình trụ kể cả hình trụ gọi là khối trụ.

II. CÔNG THỨC



– Thể tích của khối trụ bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao của khối trụ đó

$$V = Bh = \pi r^2 h$$

- Diện tích xung quanh bằng chu vi đáy nhân với chiều cao

$$S_{xq} = ph = 2\pi rh$$

- Diện tích toàn phần bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI



Chủ đề 1

Tính thể tích khối trụ

I. PHƯƠNG PHÁP

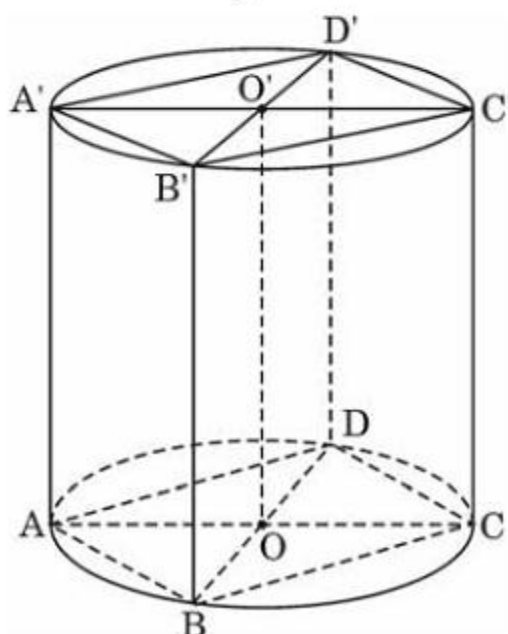
- Tính đường cao h
- Tính bán kính đáy r
- Tính diện tích đáy $B = \pi r^2$
- Tính thể tích khối trụ theo công thức $V = Bh = \pi r^2 h$.

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho hình trụ $\mathcal{T}$ có bán kính đáy bằng a , chiều cao $3a$.

- Tính thể tích của khối trụ $\mathcal{T}$.
- Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ $\mathcal{T}$.

Giải



Do đó tam giác AOB' là tam giác đều.

Vẽ OH vuông góc với AB' , ta có OH vuông góc với mặt phẳng (ABB') .

Mặt khác, $OO' \parallel mp(ABB')$ suy ra :

$$d(OO', AB) = d(O, (ABB')) = OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$



Chủ đề 2

Tính diện tích hình trụ

I. PHƯƠNG PHÁP

- Tính đường cao h
- Tính bán kính đáy r
- Tính diện tích đáy $B = \pi r^2$
- Tính diện tích hình trụ theo công thức

$$S_{xq} = ph = 2\pi rh$$

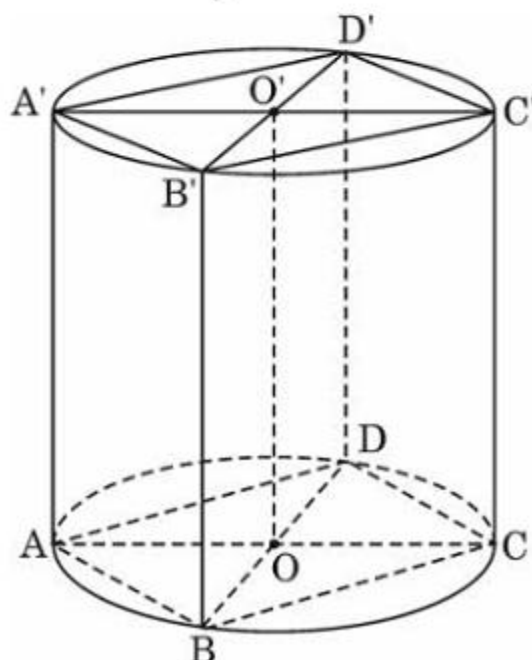
$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. Cho hình trụ $\mathcal{T}$ có bán kính đáy bằng R . Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $2R$.

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ $\mathcal{T}$.
- Tính diện tích xung quanh hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ $\mathcal{T}$.

Giải



a) Chiều cao của hình trụ :

$$h = 2R$$

Diện tích xung quanh của hình trụ :

$$S_{xq} = ph = 2\pi Rh = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Diện tích toàn phần của hình trụ :

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

b) Hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng $R\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $2R$, vậy diện tích xung quanh của hình lăng trụ là :

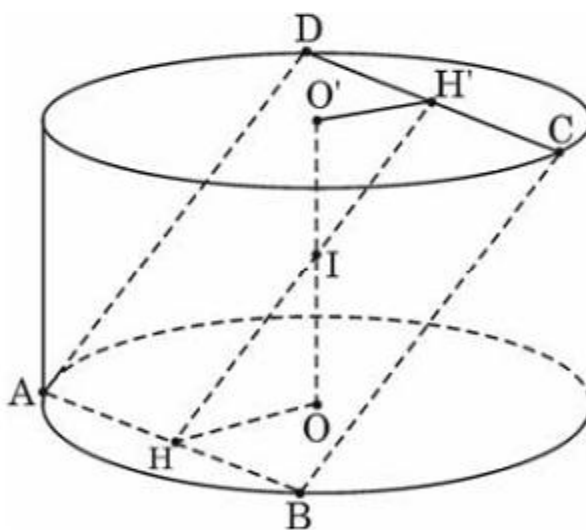
$$S_{xq} = 4R\sqrt{2} \cdot 2R = 8R^2\sqrt{2}.$$

Bài toán 4. Cho hình trụ có bán kính r và có chiều cao cũng bằng r . Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC và AD không phải là đường sinh của hình trụ.

a) Tính diện tích toàn phần hình trụ và diện tích hình vuông ABCD.

b) Tính sin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

Giải



$$a) S_{tp} = S_{xp} + 2B = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của hai dây cung AB và CD, ta có

$$OH \perp AB$$

$$O'H' \perp CD$$

HH' cắt OO' tại I, ta có $OH = O'H'$ suy ra $IH = IH'$ và $IO = IO'$.

Gọi x là cạnh của hình vuông, khi đó :

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$OI = \frac{r}{2}.$$

Trong tam giác vuông OHI ta có :

$$IH^2 = IO^2 + OH^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{r^2}{4} + r^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{r^2}{4} + r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{5r^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10r^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{r\sqrt{10}}{2}.$$

Vậy cạnh của hình vuông là $\frac{r\sqrt{10}}{2}$ suy ra diện tích của hình vuông là :

$$S = \frac{5r^2}{2}.$$

b) Gọi φ là góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy. Ta có :

$$\varphi = \widehat{IHO}$$

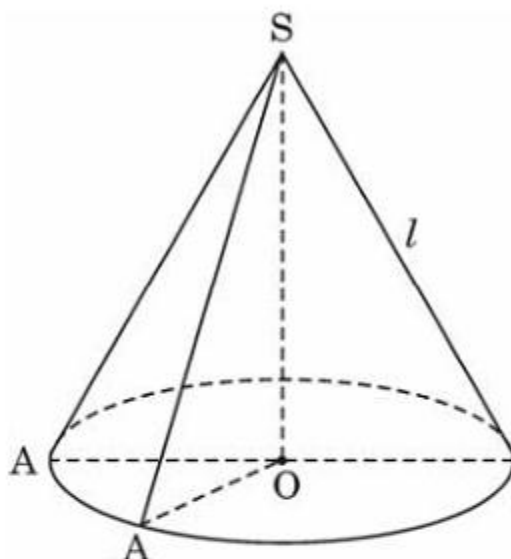
$$\sin \varphi = \sin \widehat{IHO} = \frac{IO}{IH}$$

$$= \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{10}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

CHƯƠNG 6. HÌNH NÓN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA



Cho tam giác SAO vuông tại O . Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông SO thì đường gấp khúc SAO tạo thành một hình được gọi là *hình nón*.

S gọi là đỉnh của hình nón

$h = SO$ gọi là chiều cao của hình nón

$r = AO$ gọi là bán kính đáy của hình nón

$l = SA$ gọi là đường sinh của hình nón

SO gọi là trục của hình nón.

Phần không gian bên trong hình nón kể cả hình nón gọi là khối nón.

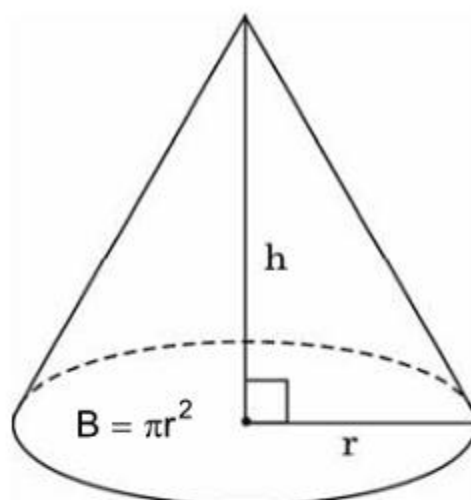
II. TÍNH CHẤT

- Thiết diện qua đỉnh là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.
- Thiết diện vuông góc với trục là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.

III. CÔNG THỨC

- Thể tích của khối nón bằng một phần ba tích số của diện tích đáy và chiều cao

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

- Diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{xq} = \pi r l$$

- Diện tích toàn phần bằng diện tích xung quanh cộng cho diện tích đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + B = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chủ đề 1

|| Tính thể tích khối nón

I. PHƯƠNG PHÁP

- Tính đường cao h
- Tính bán kính đáy r
- Tính diện tích đáy

$$B = \pi r^2$$

- Tính thể tích khối nón theo công thức

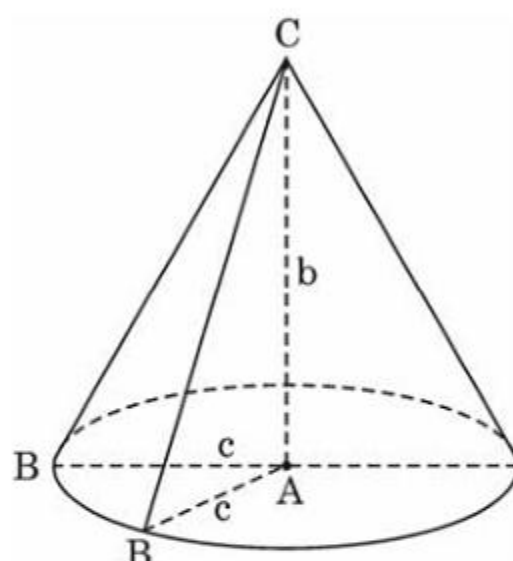
$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó khi quay quanh

- đường thẳng AC
- đường thẳng BC.

Giải



- Khi quay quanh cạnh góc vuông AC, tam giác vuông ABC tạo thành hình nón có chiều cao $h = AC = b$, bán kính đáy $r = AB = c$.

Thể tích khối nón là :

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi c^2 b.$$

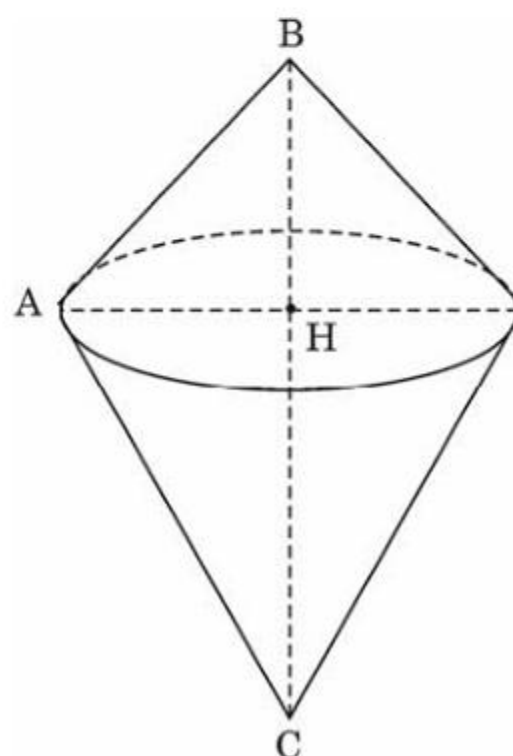
- Khi quay quanh cạnh huyền BC, tam giác vuông ABC tạo thành hai hình nón có tổng hai chiều cao là $h_1 + h_2 = BC$, và cùng có bán kính đáy là $r = AH$.

Ta có :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{c^2 + b^2}.$$

Xét tam giác vuông ABC vuông tại A, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$



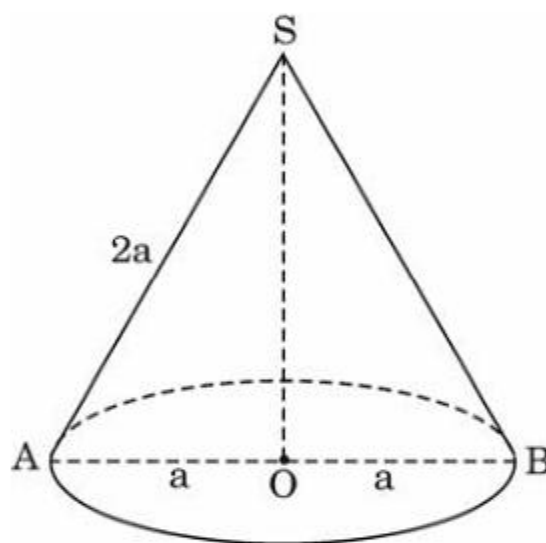
$$\Rightarrow AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}.$$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra là :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} B(h_1 + h_2) = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC \\ &= \frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Bài toán 2. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích đáy của hình nón và thể tích của khối nón đó.

Giải



Hình nón có đường sinh :

$$l = SA = 2a.$$

Chiều cao :

$$h = SO = a\sqrt{3}.$$

Bán kính đáy :

$$r = AO = a.$$

Diện tích đáy của hình nón :

$$B = S = \pi a^2.$$

Thể tích của khối nón :

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi a^3 \sqrt{3}$$



Chủ đề 2

Tính diện tích hình nón

I. PHƯƠNG PHÁP

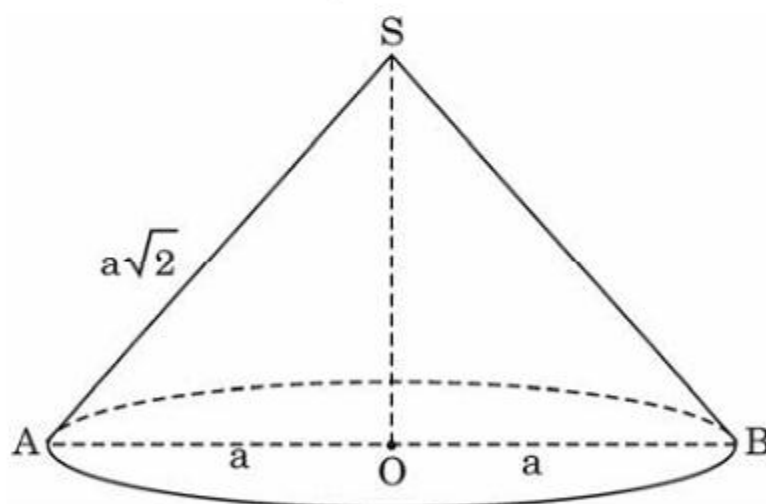
- Tính đường cao h
- Tính bán kính đáy r
- Tính đường sinh l
- Tính chu vi đáy $p = 2\pi r$
- Tính diện tích hình nón theo công thức

$$S_{xq} = \frac{1}{2}ph = \pi rl.$$

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. Cắt hình nón đỉnh S bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

Giải



a) Hình nón có

Chiều cao : $h = SO = a$

Bán kính đáy : $r = OB = a$

Đường sinh : $l = SB = a\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón :

$$S_{xq} = \pi rl = \pi a \cdot a\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi a^2.$$

Diện tích đáy :

$$B = \pi a^2.$$

Thể tích của khối nón :

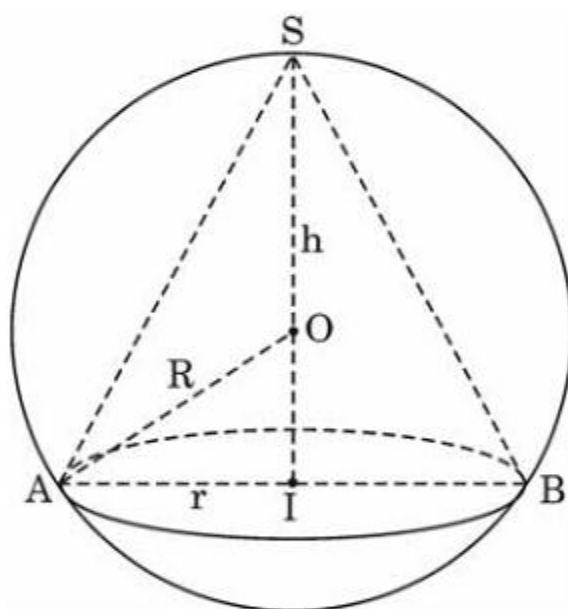
$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a = \frac{1}{3} \pi a^3.$$

Bài toán 4. Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh của hình nón và đi qua đường tròn đáy của hình nón. Hình nón như vậy gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

a) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r . Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó.

b) Cho hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính R . Nếu hình nón đó có chiều cao bằng h thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu ? Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

Giải



a) Gọi I là tâm của đường tròn đáy và SAB là một thiết diện qua trục của hình nón. Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

Trong tam giác vuông AOI ta có :

$$\begin{aligned} AO^2 &= AI^2 + OI^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + (h - R)^2 \\ &\Rightarrow R^2 = r^2 + h^2 - 2Rh + R^2 \\ &\Rightarrow R = \frac{r^2 + h^2}{2h}. \end{aligned}$$

b) Theo câu a) ta có :

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h} \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2Rh - h^2} = \sqrt{h(2R - h)}.$$

Đường sinh của hình nón là :

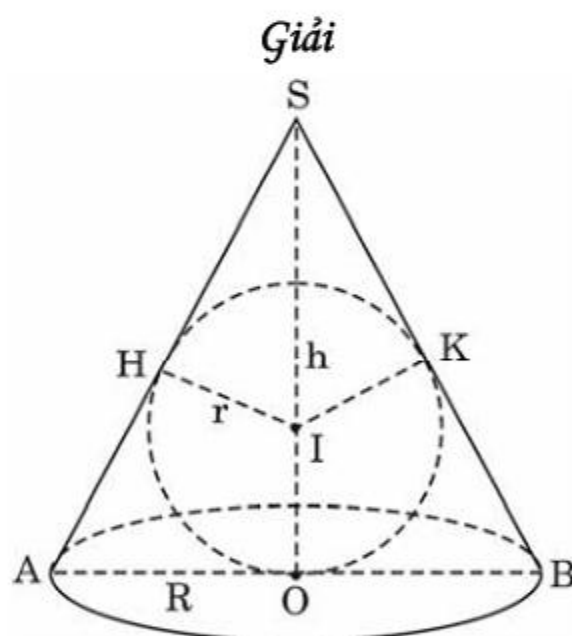
$$l = SA = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2Rh}.$$

Diện tích xung quanh của hình nón :

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{h(2R - h)} \sqrt{2Rh}$$

$$= \pi h \sqrt{2R(2R - h)}.$$

Bài toán 5. Một mặt cầu gọi là nội tiếp hình nón nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón. Khi đó hình nón được gọi là ngoại tiếp mặt cầu. Cho biết hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng R . Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp.



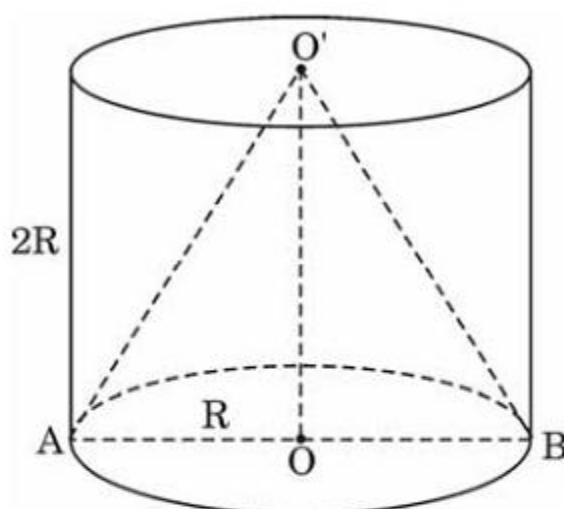
Gọi SAB là một thiết diện qua trục của hình nón. Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác SAB chính là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón, và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác SAB cũng chính là bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón.

Ta có :

$$r = \frac{2S_{SAB}}{SA + SB + AB} = \frac{2hR}{2\sqrt{h^2 + R^2} + 2R}.$$

Bài toán 6. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao $h = 2R$. Tính thể tích khối nón và diện tích toàn phần hình nón nội tiếp hình trụ.

Giải



Chiều dài đường sinh của hình nón :

$$l = \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}.$$

Diện tích toàn phần hình nón :

$$\begin{aligned} S_{tp} &= 2\pi R.l + \pi R^2 = 2\pi R.R\sqrt{5} + \pi R^2 \\ &= 2\sqrt{5}\pi R^2 + \pi R^2 = \pi R^2(1 + 2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Thể tích khối nón :

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\pi R^2.2R = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

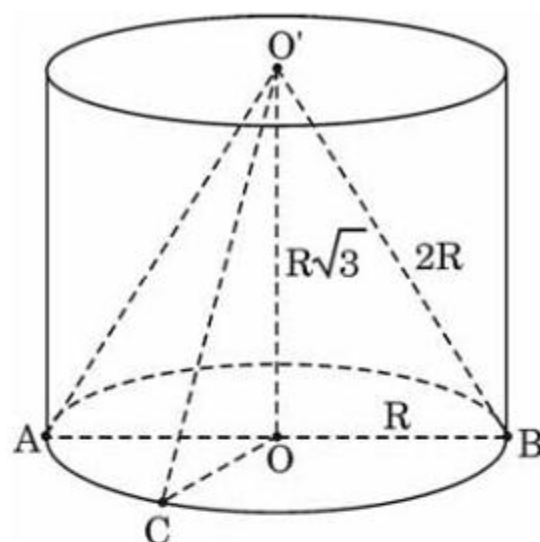
Bài toán 7. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O ; R)$ và $(O' ; R)$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn $(O ; R)$. Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón, hãy tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

Giải

Hình trụ có chiều cao $h = R\sqrt{3}$, đường sinh của hình nón $l = 2R$.

Diện tích xung quanh của hình trụ :

$$S_1 = 2\pi Rh = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3}.$$



Diện tích xung quanh của hình nón :

$$S_2 = \pi R l = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$$

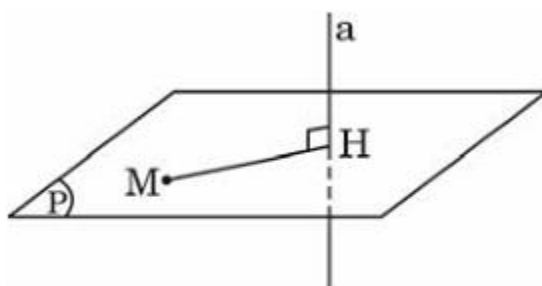
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3} .$$

CHƯƠNG 7. CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

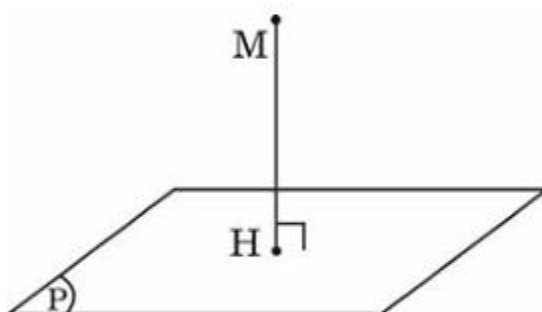
I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng



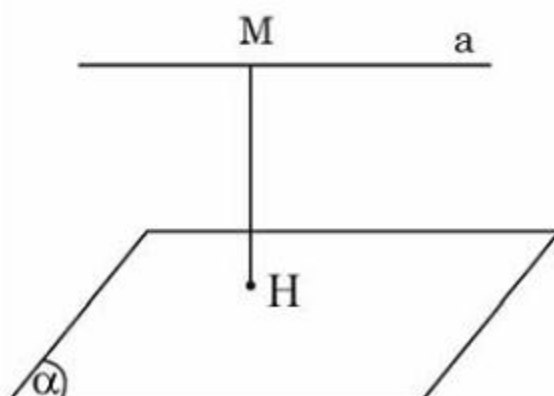
Độ dài đoạn vuông góc MH vẽ từ M đến đường thẳng a được gọi là khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng a. Kí hiệu $d(M; a)$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng



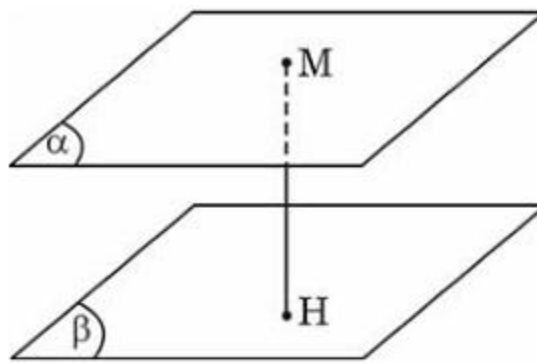
Độ dài đoạn thẳng MH vẽ từ M đến mặt phẳng (P) được gọi là khoảng cách từ điểm M tới mp(P). Kí hiệu $d(M; (P))$.

3. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song



Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Khoảng cách từ điểm M bất kì của đường thẳng a tới mp(α) không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, được gọi là khoảng cách từ đường thẳng a tới mp(α). Kí hiệu $d(a; (\alpha))$.

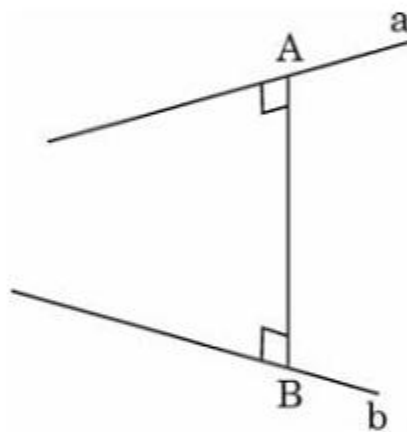
4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song



Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) .

Khoảng cách từ một điểm M bất kì của $mp(\alpha)$ tới $mp(\beta)$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) . Kí hiệu $d((\alpha); (\beta))$.

5. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau



Đoạn thẳng AB là đoạn thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo

$$\text{nghau } a \text{ và } b \Leftrightarrow \begin{cases} A \in a, B \in b \\ AB \perp a \\ AB \perp b \end{cases}$$

II. CÁC ĐỊNH LÝ

1. Định lý 1. Hai đường thẳng chéo nhau có một và chỉ một đoạn vuông góc chung.

2. Định lý 2. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất nối hai điểm lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a và b .

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. PHƯƠNG PHÁP

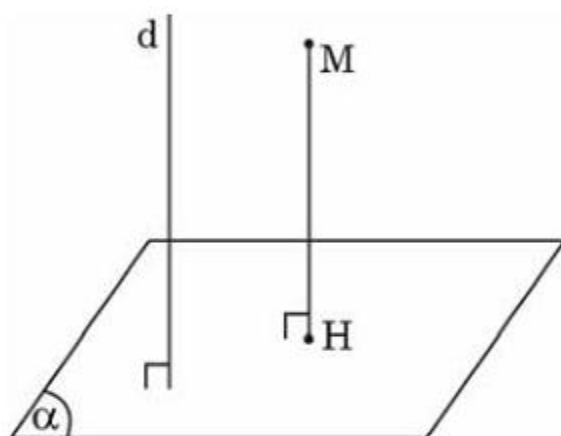


Chủ đề 1

|| Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α)

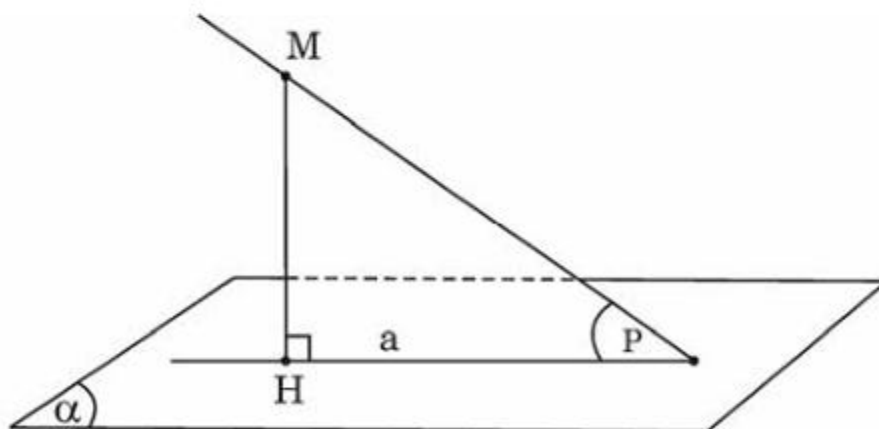
1. Dựng $MH \perp (\alpha)$, $H \in (\alpha)$

Cách 1: Nếu đã có đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì từ M ta dựng đường thẳng $\Delta // d$. Đường thẳng này cắt (α) tại H. Ta có $MH = d(M; (\alpha))$.

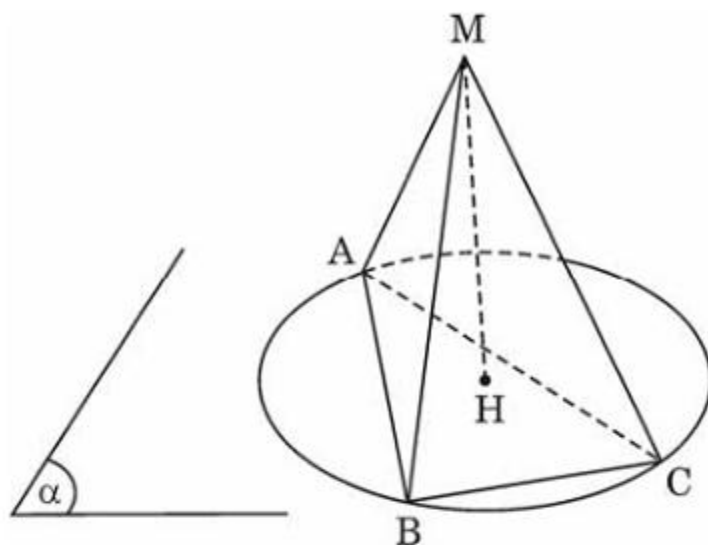


Cách 2 :

- Qua M, xác định (hoặc dựng) mặt phẳng $(P) \perp (\alpha)$, mặt phẳng (P) cắt (α) theo giao tuyến a.
- Trong mặt phẳng (P) dựng MH vuông góc với giao tuyến a tại H
- Ta có : $MH \perp (\alpha)$.



Cách 3 : Nếu có ba đoạn xiên $MA = MB = MC$ (A, B, C thuộc $mp(\alpha)$) thì H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



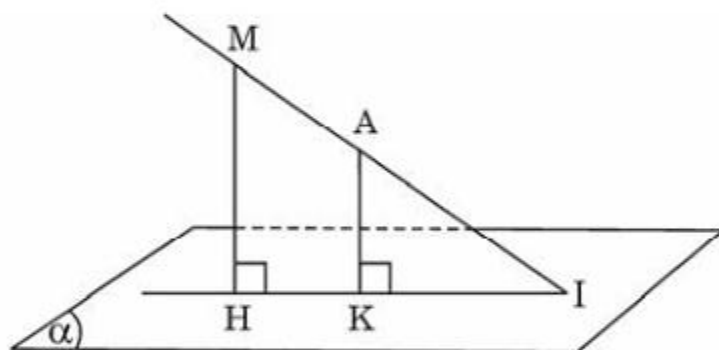
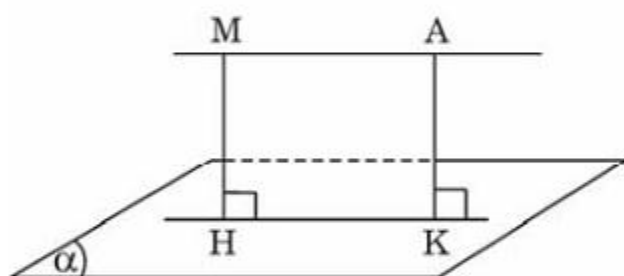
2. Tính khoảng cách từ M đến mp(α)

Cách 1 : Dựng $MH \perp (\alpha)$ và tính MH.

Cách 2 : Nếu biết khoảng cách từ một điểm A đến (α) thì ta có thể tính khoảng cách từ M đến (α) dựa vào các kết quả sau :

Nếu $MA \parallel (\alpha)$ thì $d(M; (\alpha)) = d(A; (\alpha))$.

Nếu MA cắt (α) tại I thì $\frac{d(M; (\alpha))}{d(A; (\alpha))} = \frac{IM}{IA}$.



Chủ đề 2

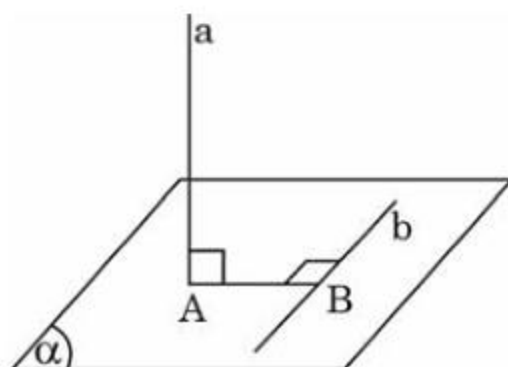
Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Cách 1 (Áp dụng cho trường hợp hai đường thẳng vuông góc nhau a và b) :

Dựng, hoặc tìm một mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a tại A.

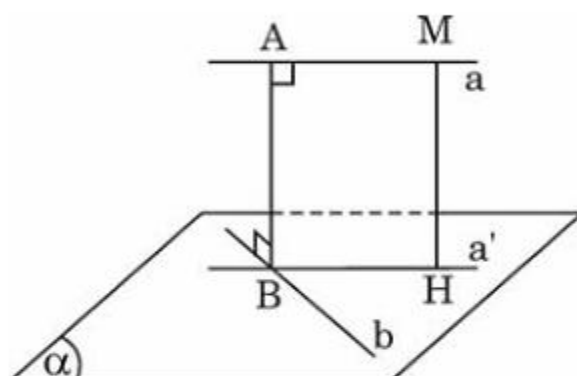
Trong (α) , dựng đoạn $AB \perp b$ tại B.

Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



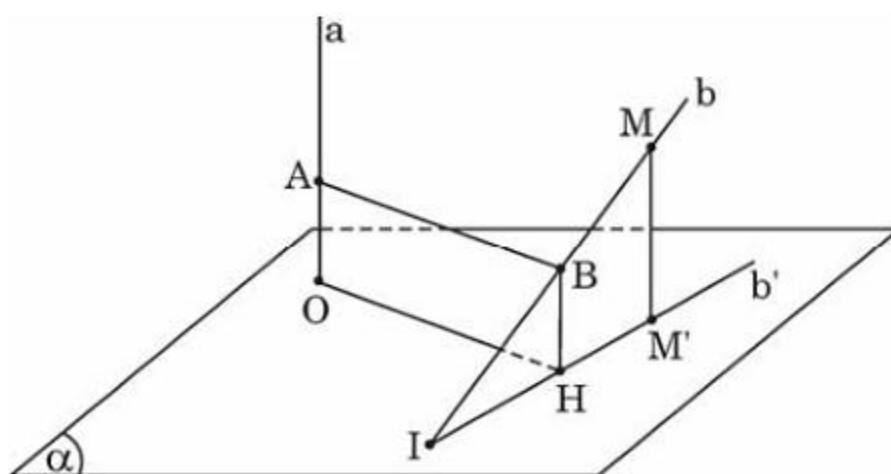
Cách 2 :

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a .
- Dựng hình chiếu a' của a lên (α) bằng cách từ một điểm M tùy ý trên a , dựng đoạn $MH \perp (\alpha)$ tại H . Trong mặt phẳng (α) , từ H dựng đường thẳng $a' \parallel a$, a' cắt b tại B .
- Trong mặt phẳng (a, a') , từ B dựng đường thẳng song song với MH cắt a tại A và chứng minh đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .



Cách 3 :

- Dựng, hoặc tìm một mặt phẳng (α) vuông góc với a tại O , cắt b tại I .
- Dựng hình chiếu b' của b lên (α) bằng cách từ M trên b , hạ $MM' \perp (\alpha)$ thì IM' là b' .
- Trong (α) dựng $OH \perp b'$ tại H .
- Trong mặt phẳng (b, b') , dựng từ H một đường thẳng song song với MM' , cắt b tại $B \Rightarrow HB \parallel MM' \parallel a$.
- Trong mặt phẳng (a, BH) , từ B dựng đường thẳng song song với OH , cắt a tại A .
- AB chính là đoạn vuông góc chung của a và b .

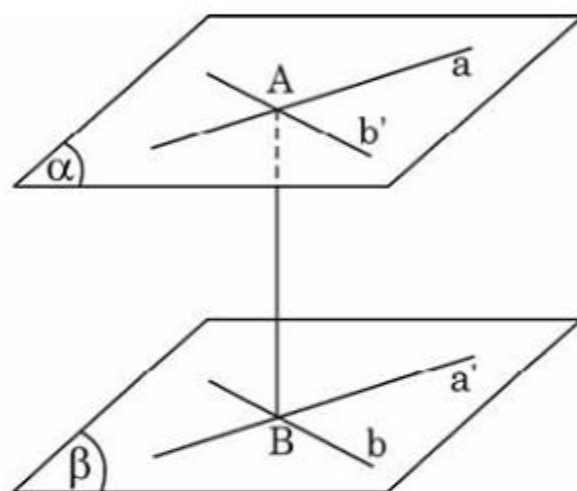
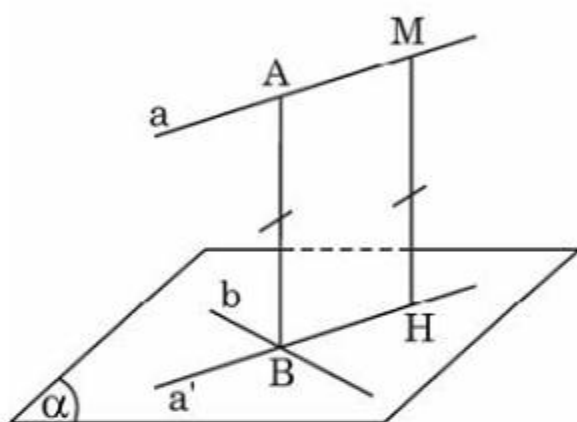




Chủ đề 3

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b bằng khoảng cách từ đường thẳng thứ nhất đến mặt phẳng chứa đường thẳng thứ hai song song với đường thẳng thứ nhất.
- Khoảng cách đó cũng bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa a và b .



II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

- Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

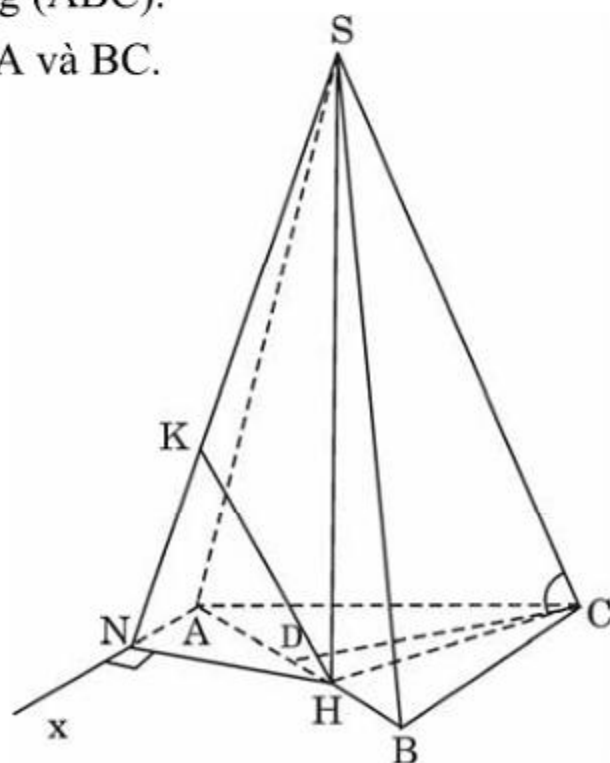
Giải

a) Ta có SH vuông góc với $mp(ABC)$, do đó SH chính là khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .

Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và $mp(ABC)$, suy ra $\widehat{SCH} = 60^\circ$.

Gọi D là trung điểm của cạnh AB .

Ta có $HD = \frac{a}{6}$, $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,



$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(S ; (ABC)) = SH = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

b) Kẻ $Ax \parallel BC$. Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN. Ta có $BC \parallel (SAN)$ và $BA = \frac{3}{2}HA$ nên

$$d(SA ; BC) = d(B ; (SAN)) = \frac{3}{2}d(H ; (SAN)).$$

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SAN)$.

Suy ra $d(H ; (SAN)) = HK$.

$$AH = \frac{2a}{3}, HN = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + NH^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(SA ; BC) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{12} = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Bài toán 2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC.

a) Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Giải

a) Gọi D là trung điểm của cạnh AB và O là tâm của tam giác ABC.

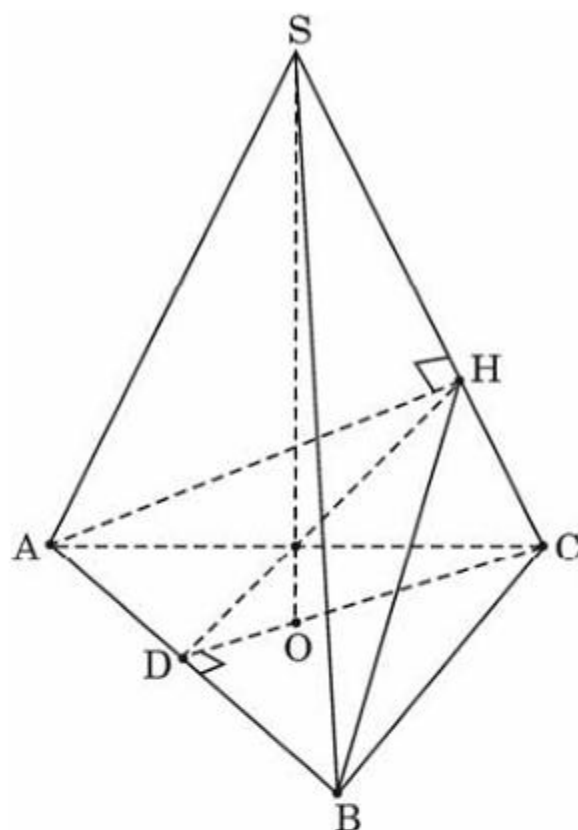
Do S.ABC là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABC)$ do đó :

$$d(S ; (ABC)) = SO.$$

Tính SO :

Ta có $AB \perp CD$ và $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SCD)$, do đó $AB \perp SC$.

Mặt khác $SC \perp AH$ suy ra $SC \perp (ABH)$.



Ta có $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

nên $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Vậy $d(S ; (ABC)) = SO = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} DH \perp AB \\ DH \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow d(SC ; AB) = DH.$$

Ta có : $DH = \frac{SO \cdot CD}{SC} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$.

Do đó $d(SC ; AB) = DH = \frac{a\sqrt{11}}{4}$.

Bài toán 3. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông. Tam giác A'AC vuông cân, A'C = a.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'.

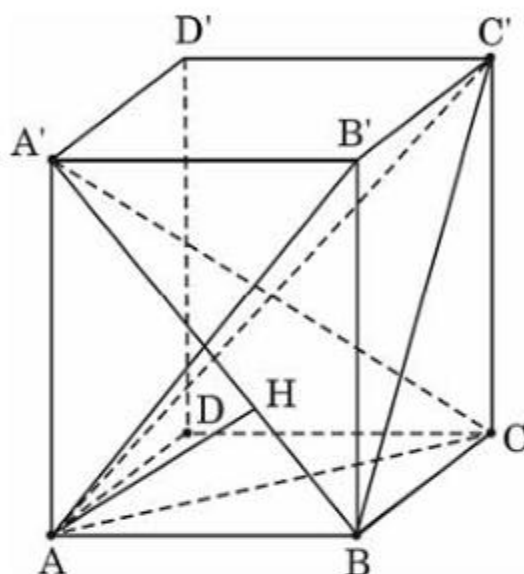
b) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD').

Giải

$$a) \text{ Ta có : } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp CC' \end{array} \right\} \Rightarrow d(AB ; CC') = BC .$$

Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A và $A'C = a$ nên :

$$A'A = AC = \frac{a}{\sqrt{2}} . \text{ Do đó } AB = BC = \frac{a}{2} .$$



$$\text{Vậy } d(AB ; CC') = BC = \frac{a}{2} .$$

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') .

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác $A'AB$. Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH \perp (BCD') .$$

Do đó $AH = d(A ; (BCD'))$.

$$\text{Ta có : } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{6}{a^2} . \text{ Do đó :}$$

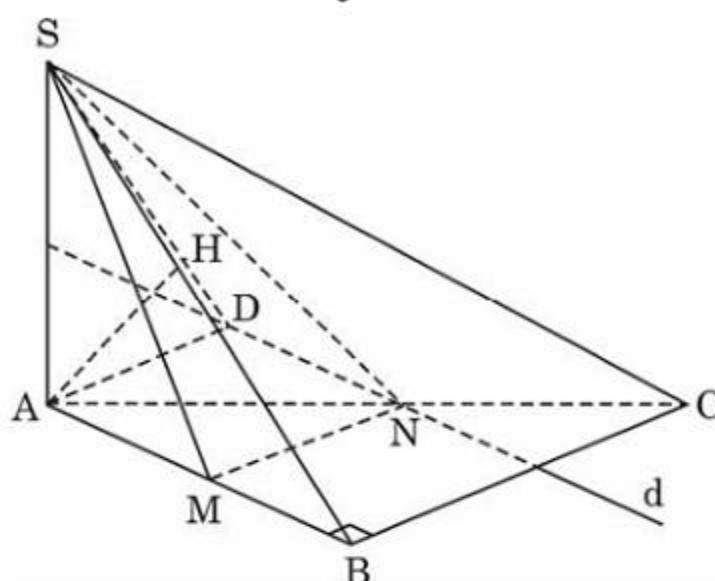
$$d(A ; (BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6} .$$

Bài toán 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° .

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN .

Giải



a) Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mp(ABC) suy ra SA vuông góc với (ABC). Vậy $d(S; (ABC)) = SA$.

AB vuông góc với BC suy ra SB vuông góc với BC, suy ra góc giữa mp(SBC) và mp(ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

Ta có : $\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra $d(S; (ABC)) = SA = 2a\sqrt{3}$.

b) Mặt phẳng qua SM song song với BC, cắt AC tại N, do đó

$MN \parallel BC$ và $NA = NC$.

$$MN = \frac{BC}{2} = a.$$

Kẻ đường thẳng d đi qua N và song song với AB. Hạ AD vuông góc với d tại D.

Ta có $AB \parallel (SND)$.

$d(AB; SN) = d(AB; (SND)) = d(A; (SND))$.

Hạ AH vuông góc với SD tại H.

Ta có AH vuông góc với (SND) suy ra $d(A; (SND)) = AH$.

$$AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

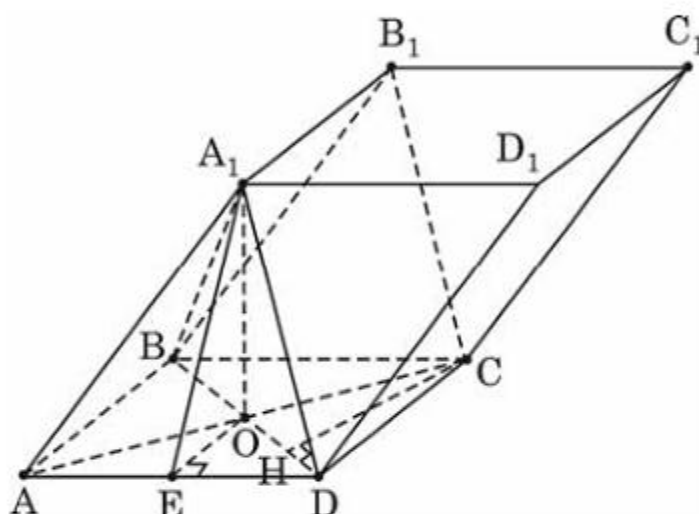
$$\text{Vậy : } d(AB; SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Bài toán 5. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và A_1B_1 .

b) Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng $((A_1BD))$ theo a .

Giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có $A_1O \perp (ABCD)$.

Mà $d(AD; A_1B_1) = d((ABCD); ((A_1B_1C_1D_1))) = A_1O$.

Gọi E là trung điểm của AD ta có :

$$\left. \begin{array}{l} AD \perp EA_1 \\ AD \perp EO \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{OEA_1} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A_1O = \frac{AB}{2} \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow d(AO; A_1B_1) = A_1O = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng $((A_1BD))$ theo a .

Ta có $B_1C // A_1D \Rightarrow B_1C // (A_1BD)$.

Hạ CH vuông góc với BD , ta có CH vuông góc với (A_1BD) . Vậy :

$$d(B_1; (A_1BD)) = d(C; (A_1BD)) = CH.$$

$$\text{Ta có } CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } d(B_1; (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài toán 6. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Giải

Hạ SH vuông góc với BC tại H. Do hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) vuông góc nên SH vuông góc với (ABC). Ta có :

$$SH = SB.\sin\widehat{SBC} = a\sqrt{3}$$

$$BH = SB.\cos\widehat{SBC} = 3a.$$

Ta có $AC = 5a$; $HC = BC - BH = a$.

Vẽ HD vuông góc với AC tại D, ta có hai tam giác CHD và CAB đồng dạng do đó :

$$\frac{HD}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{5} \Rightarrow HD = \frac{3a}{5}.$$

Trong tam giác SHD, vẽ HK vuông góc với SD tại K. Ta có :

$$HK = \frac{HS.HD}{\sqrt{HS^2 + HD^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

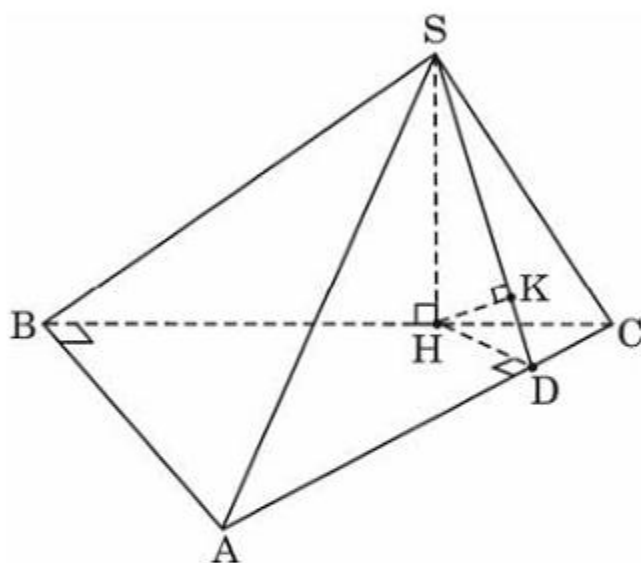
$$\text{Do } BC = 4HC \text{ nên ta có : } d(B; (SAC)) = 4d(H; (SAC)) = 4HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

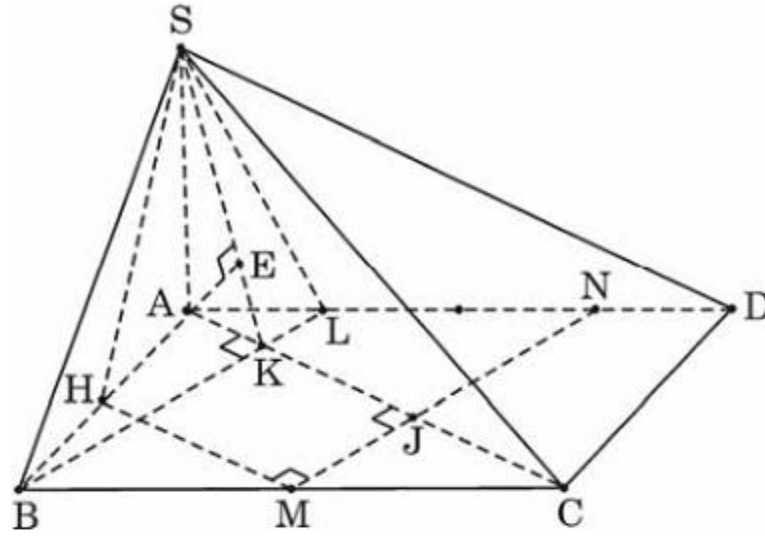
Bài toán 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = 2a$, $AD = 4a$, $SA \perp (ABCD)$ và $(SC, (ABCD)) = 60^\circ$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, BC; N là điểm trên cạnh AD sao cho $DN = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SB.

Giải

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SC$ có hình chiếu trên (ABCD) là AC

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = 60^\circ.$$





ΔBAC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{5}$

$$\Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{15}.$$

Lấy điểm L trên cạnh AD sao cho $AL = a$.

Ta có MBLN là hình bình hành nên $MN \parallel BL \Rightarrow MN \parallel (SBL)$

$$\Rightarrow d(MN; SB) = d(MN; (SBL)) = d(N; (SBL)).$$

$$\text{Ta có : } \frac{d(N; (SBL))}{d(A; (SBL))} = \frac{LN}{LA} = 2 \Rightarrow d(N; (SBL)) = 2d(A; (SBL)).$$

$$\text{Ta có : } MH^2 + MN^2 = MB^2 + BH^2 + BL^2 = 4a^2 + a^2 + 5a^2 = 10a^2 = NH^2$$

$\Rightarrow \Delta HMN$ vuông tại M.

Lại có $HM \parallel AC \Rightarrow AC \perp MN$ tại J mà $MN \parallel BL \Rightarrow BL \perp AC$ tại K.

Dựng $AE \perp SK$ tại E. Ta có $AE \perp (SBL) \Rightarrow AE = d(A; (SBL))$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AL^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{60a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{76}{60a^2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{285}}{19} \Rightarrow d(A; (SBL)) = \frac{a\sqrt{285}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(MN; SB) = 2d(A; (SBL)) = \frac{2a\sqrt{285}}{19}.$$

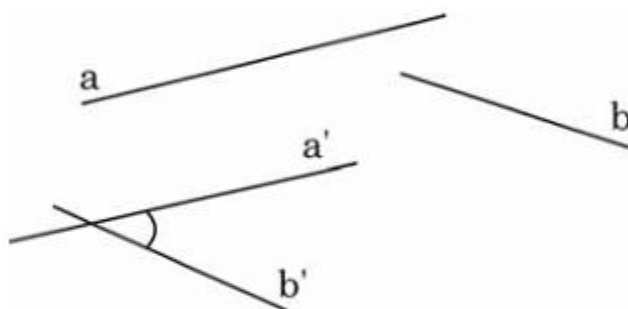
CHƯƠNG 8. CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

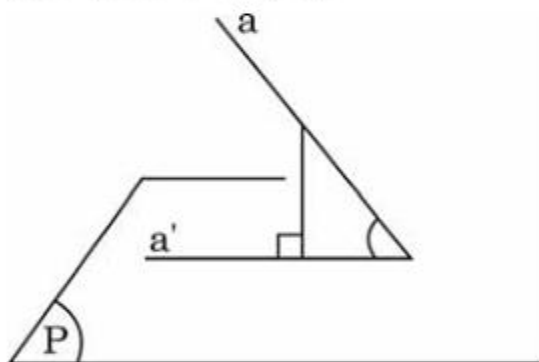
Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b .

Kí hiệu góc giữa hai đường thẳng a và b là $(\widehat{a; b})$.



II. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

- * Nếu đường thẳng a vuông góc với $mp(P)$ thì ta nói góc giữa a và (P) bằng 90° .
- * Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó lên (P) gọi là góc giữa a và (P) .



Kí hiệu : $(\widehat{a, (P)})$

$(\widehat{a, (P)}) = (\widehat{a, a'})$ trong đó a' là hình chiếu của a trên (P) .

Chú ý : Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá 90° .

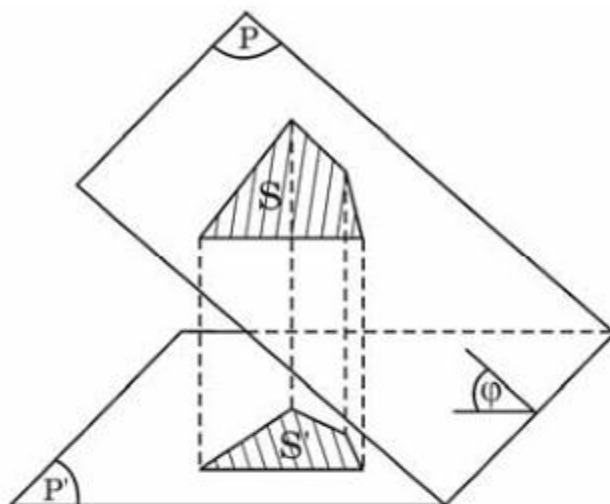
$$0^\circ \leq (\widehat{a, (P)}) \leq 90^\circ.$$

III. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Kí hiệu : $(\widehat{(P), (Q)})$.

Định lý về diện tích hình chiếu



Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mặt phẳng (P') thì :

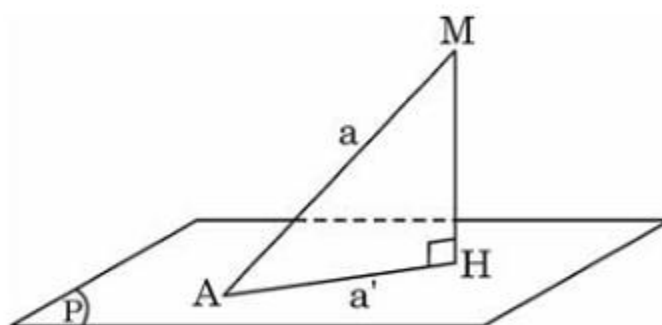
$$S' = S \cdot \cos \varphi$$

trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .

B. CÁC BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



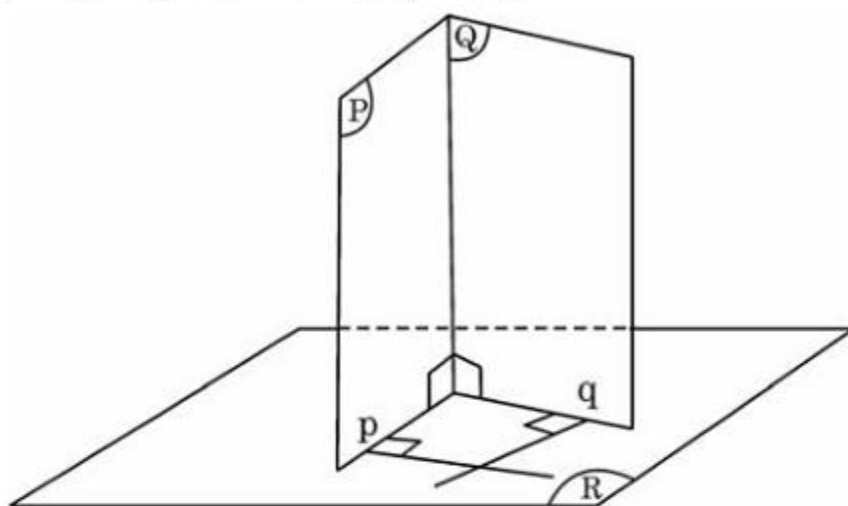
Để tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Tìm giao điểm A của a và (P)

Bước 2 : Lấy điểm M trên a , vẽ MH vuông góc với (P) tại H .

Bước 3 : Tính góc $(\widehat{a, (P)}) = \widehat{MAH}$.

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng



Để tính góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta thực hiện một trong hai cách sau đây :

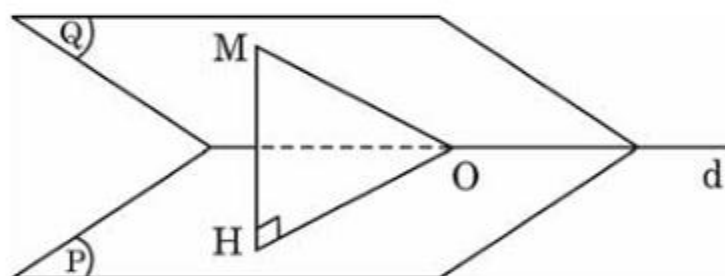
Cách 1 : Xác định một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ của (P) và (Q) thì

$\varphi = (\widehat{p, q})$ trong đó p, q lần lượt là giao tuyến của (R) với (P), (Q).

Cách 2 : Xác định góc của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng.

Cách 3 : Dùng công thức diện tích hình chiếu : $S' = S \cdot \cos \varphi$ ta có : $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$.

Cách 4 :



Bước 1 : Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bước 2 : Lấy điểm M thuộc mp (Q), vẽ MH vuông góc với (P) tại điểm H.

Bước 3 : Vẽ HO vuông góc với d tại điểm O.

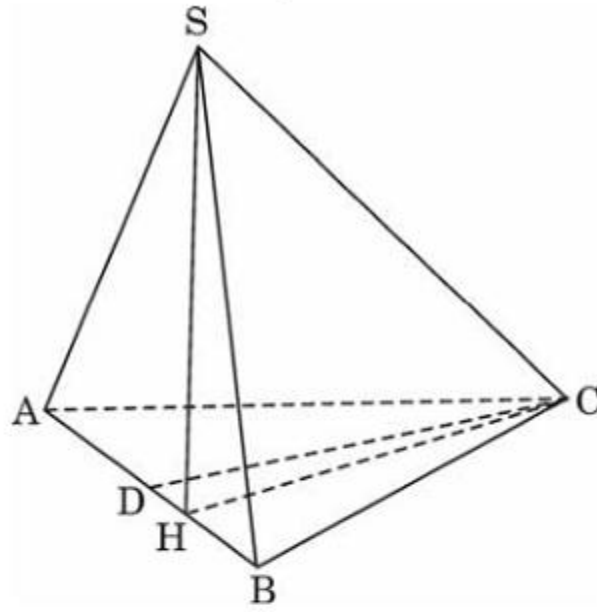
Bước 4 : Tính góc $((P), (Q)) = \widehat{MOH}$.

II. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$ và

$SH = \frac{a\sqrt{21}}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).

Giải



Ta có SH vuông góc với mặt phẳng (ABC), do đó $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và (ABC).

Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Ta có $HD = \frac{a}{6}$, $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{3}}{\frac{a\sqrt{7}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ.$$

Bài toán 2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

b) Gọi D là trung điểm của AB, tính cosin của góc giữa đường thẳng DC và mặt phẳng (ABH).

Giải

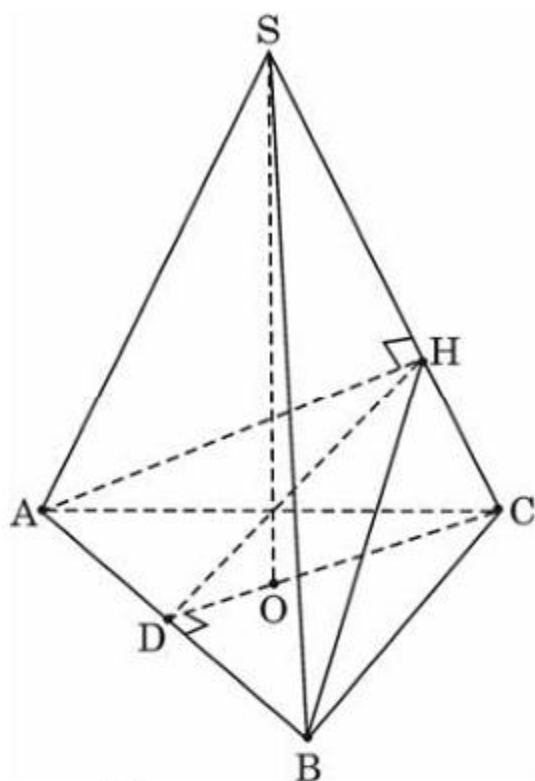
a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Ta có :

$AB \perp CD$ và $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SCD)$, do đó $AB \perp SC$.

Vậy $(\widehat{SC, AB}) = 90^\circ$.

b) Ta có $SC \perp AH$ suy ra $SC \perp (ABH)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng DC và mặt phẳng (ABH), ta có $\varphi = \widehat{CDH}$.



Ta có $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

nên $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Do đó $DH = \frac{SO \cdot CD}{SC} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$.

Suy ra : $\cos \varphi = \frac{DH}{DC} = \frac{\frac{a\sqrt{11}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$.

Bài toán 3. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N.

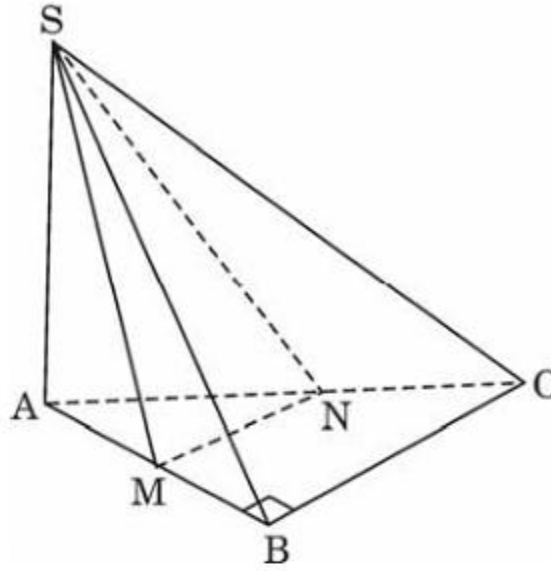
a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

b) Tính tan của góc giữa hai đường thẳng SN và BC.

Giải

a) Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) suy ra SA vuông góc với (ABC).

AB vuông góc với BC suy ra SB vuông góc với BC suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.



Ta có : $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{2a\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

b) Tính tan của góc giữa hai đường thẳng SN và BC.

Mặt phẳng qua SM song song với BC, cắt AC tại N, do đó $MN \parallel BC$ và $NA = NC$.

$$AM = MN = \frac{BC}{2} = a.$$

$$(\widehat{SN, BC}) = (\widehat{SN, NM}) = \widehat{SNM}.$$

Ta có : $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{12a^2 + a^2} = a\sqrt{13}$

$$\tan \widehat{SNM} = \frac{SM}{MN} = \frac{a\sqrt{13}}{a} = \sqrt{13}.$$

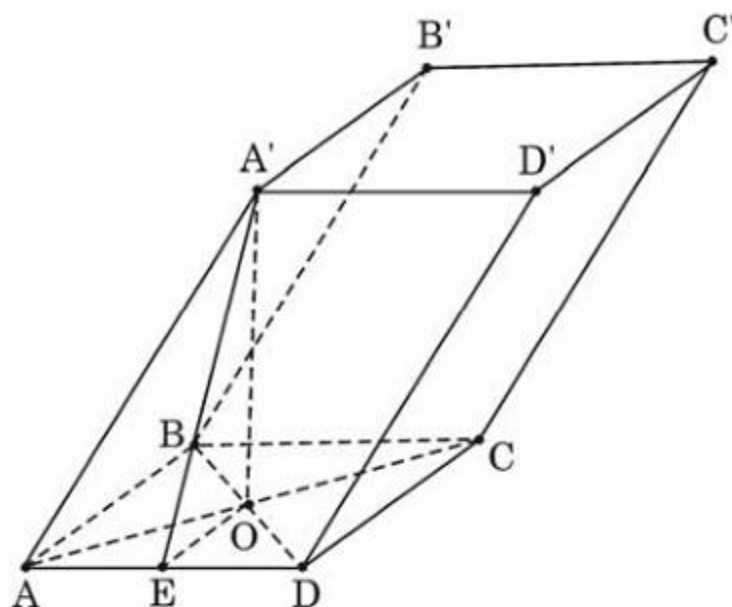
Bài toán 4. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD . Cho biết $A'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$.

b) Tính tan của góc giữa hai đường thẳng BB' và AC .

Giải

a) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$. Ta có hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD , do đó $A'O$ vuông góc với $(ABCD)$. Vẽ OE vuông góc với AD , suy ra $A'E$ vuông góc với AD . Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'EO} = \varphi$.



Ta có $OE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$$\tan \varphi = \frac{A'O}{OE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

b) Đặt $\alpha = (\widehat{BB', AC})$. Ta có $BB' \parallel AA'$ suy ra :

$$\alpha = (\widehat{BB', AC}) = (\widehat{AA', AC}) = \widehat{A'AO}.$$

$$AO = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BD^2}}{2} = a$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

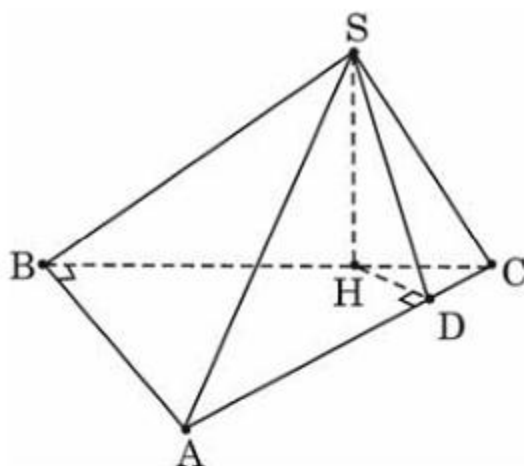
Bài toán 5. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC).

Giải

Hạ SH vuông góc với BC tại H. Do hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) vuông góc nên SH vuông góc với (ABC). Ta có :

$$SH = SB \cdot \sin \widehat{SBC} = a\sqrt{3}$$

$$BH = SB \cdot \cos \widehat{SBC} = 3a.$$



Ta có $AC = 5a$; $HC = BC - BH = a$.

Vẽ HD vuông góc với AC tại D, ta có hai tam giác CHD và CAB đồng dạng do đó :

$$\frac{HD}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{5} \Rightarrow HD = \frac{3a}{5}.$$

Ta có

$$\widehat{((SAC), (ABC))} = \widehat{SDH}$$

$$\tan \widehat{SDH} = \frac{SH}{HD} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{3a}{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

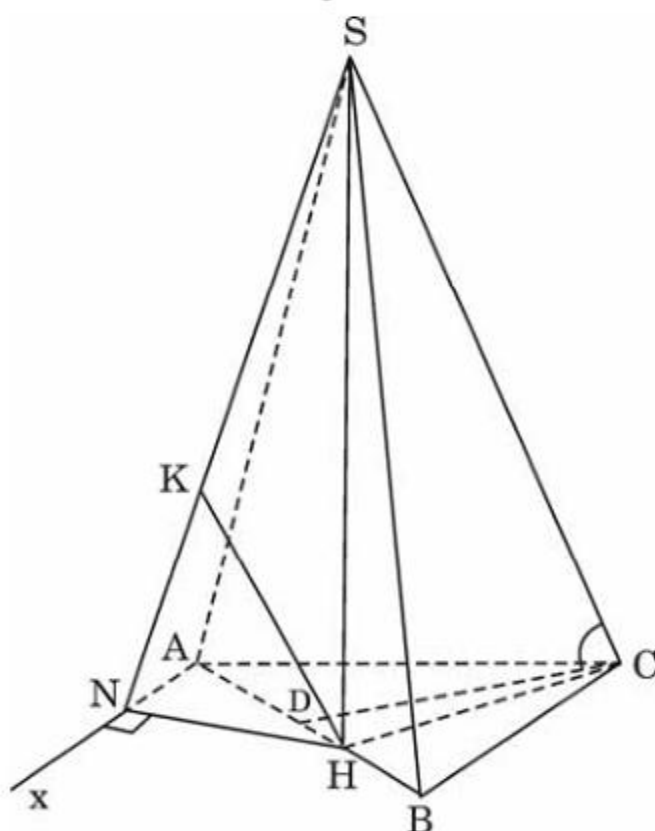
PHẦN HAI

ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

Bài 1. (Trích đề thi Đại học khối A – 2012)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Giải



* Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và $mp(ABC)$, suy ra $\widehat{SCH} = 60^\circ$.

Gọi D là trung điểm của cạnh AB , ta có $HD = \frac{a}{6}$, $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}.$$

* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC

Kẻ Ax // BC. Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

Ta có BC // (SAN) và BA = $\frac{3}{2}$ HA nên

$$d(SA; BC) = d(B; (SAN)) = \frac{3}{2}d(H; (SAN)).$$

Ta cũng có Ax $\perp$ (SHN) nên Ax $\perp$ HK. Do đó

HK $\perp$ (SAN). Suy ra d(SA; (SAN)) = HK.

$$AH = \frac{2a}{3}, HN = AH.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + NH^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Bài 2. (Trích đề thi Đại học khối B – 2012)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a ; AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp S.ABH theo a.

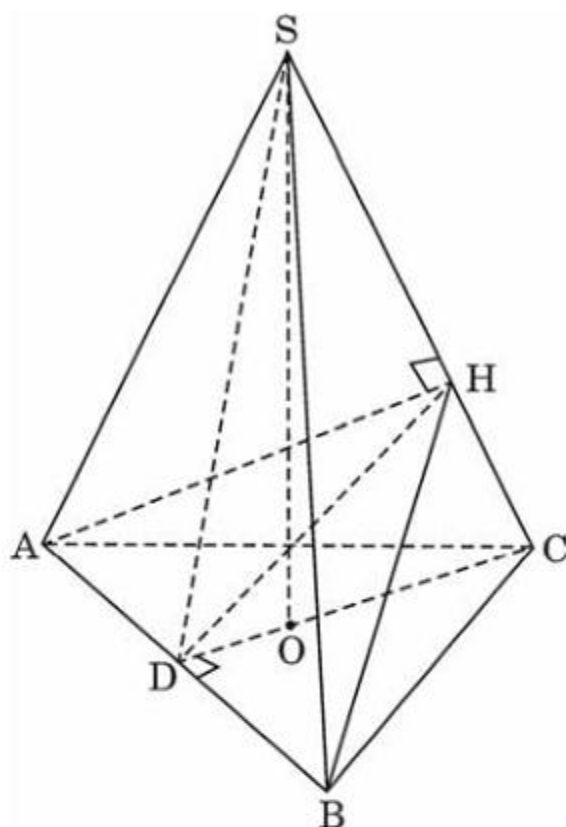
Giải

Gọi D là trung điểm của cạnh AB và O là tâm của tam giác đều ABC. Ta có :

AB $\perp$ CD và AB $\perp$ SO nên AB $\perp$ (SCD), do đó AB $\perp$ SC.

Mặt khác SC $\perp$ AH suy ra SC $\perp$ (ABH).

$$\text{Ta có } CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ nên } SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$



$$\text{Do đó } DH = \frac{SO \cdot CD}{SC} = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{a^2 \sqrt{11}}{8}.$$

$$\text{Ta có } SH = SC - HC = SC - \sqrt{CD^2 - DH^2} = \frac{7a}{4}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABH} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABH} = \frac{7a^3 \sqrt{11}}{96}.$$

Bài 3. (Trích đề thi Đại học khối D – 2012)

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông. Tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

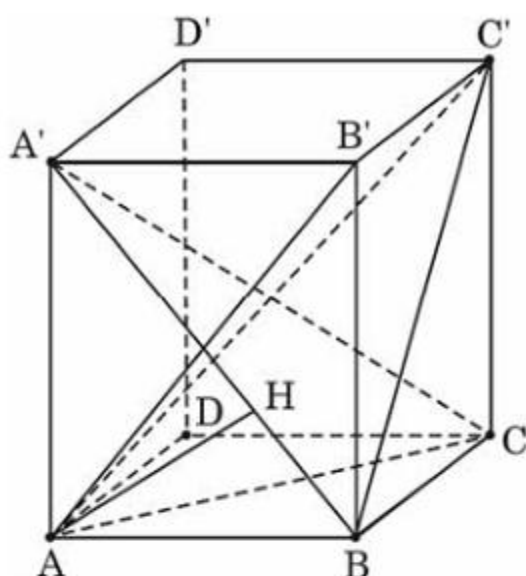
Giải

* Tính thể tích khối tứ diện $ABB'C'$

Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A và $A'C = a$ nên :

$$A'A = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}. \text{ Do đó } AB = B'C' = \frac{a}{2}.$$

$$V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} B'C' \cdot S_{ABB'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}.$$



* Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD')

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác A'AB. Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow AH \perp (BCD').$$

Do đó $AH = d(A; (BCD'))$.

Ta có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{6}{a^2}$. Do đó :

$$d(A; (BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Bài 4. (Trích đề thi Đại học khối A – 2011)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Giải

* Tính thể tích khối chóp S.BCNM

Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) $\Rightarrow SA \perp (ABC)$.

$AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa (SBC) và (ABC) $\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$
 $\Rightarrow SA = AB \tan \widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$.

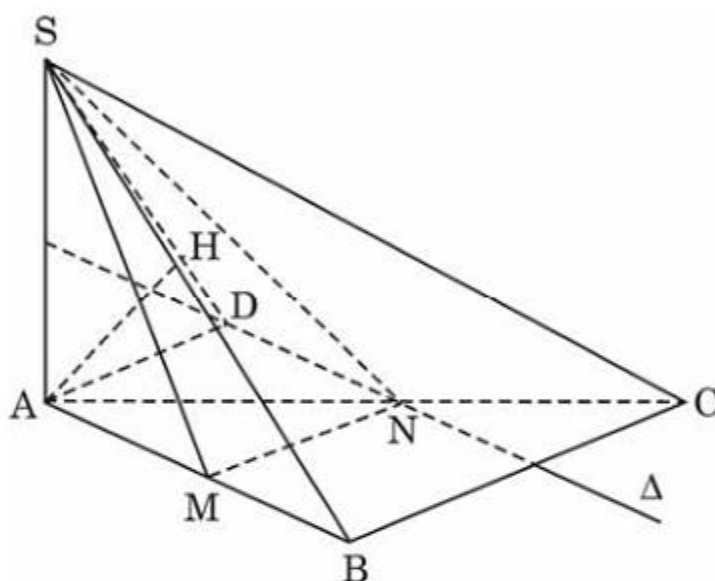
Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N

$\Rightarrow MN \parallel BC$ và N là trung điểm của AC.

$$MN = \frac{BC}{2} = a, BM = \frac{AB}{2} = a.$$

$$S_{\text{BCNM}} = \frac{(\text{BC} + \text{MN}) \cdot \text{MB}}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} S_{BCNM} \cdot SA = a^3 \sqrt{3}.$$



* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN

Kẻ đường thẳng Δ đi qua N và song song với AB. Hạ $AD \perp \Delta$ ($D \in \Delta$)

$$\Rightarrow AB \parallel (SND)$$
$$\Rightarrow d(AB; SN) = d(AB; (SND)) = d(A; (SND)).$$
$$\text{Ha } AH \perp SD \text{ (H} \in SD) \Rightarrow AH \perp (SND) \Rightarrow d(A; (SND)) = AH.$$

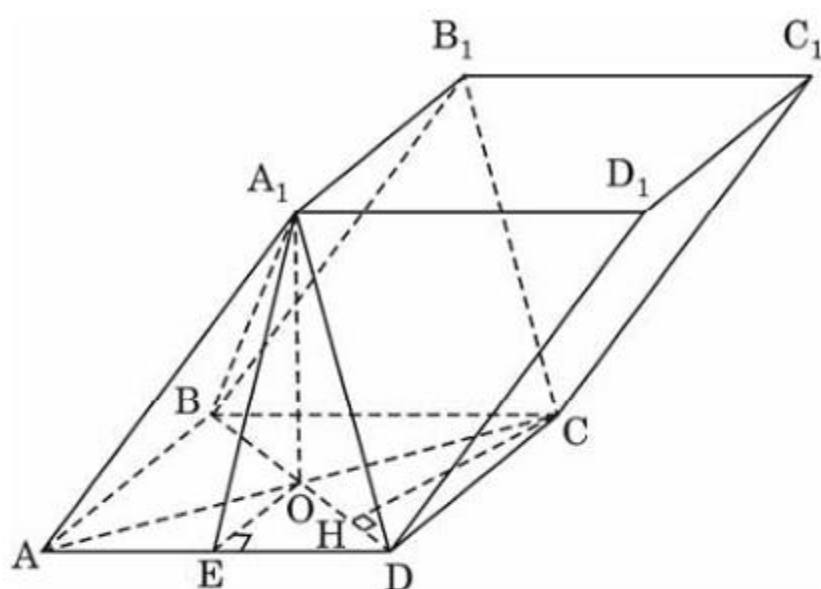
Tam giác SAD vuông tại A có $AH \perp SD$ và $AD = MN = a$

$$\Rightarrow d(AB ; SN) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Bài 5. (Trích đề thi Đại học khối B – 2011)

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng $((A_1, BD))$ theo a .

Giải



* Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$

Gọi O là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow A_1O \perp (ABCD)$.

Gọi E là trung điểm AD $\Rightarrow OE \perp AD$ và $A_1E \perp AD$

$\Rightarrow \widehat{A_1EO}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{A_1EO} = 60^\circ$

$$\Rightarrow A_1O = OE \tan \widehat{A_1EO} = \frac{AB}{2} \tan \widehat{A_1EO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}.$$

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot A_1O = \frac{3a^3}{2}.$$

* Tính khoảng cách từ B_1 đến mp(A_1DB)

Ta có $B_1C \parallel A_1D \Rightarrow B_1C \parallel (A_1DB)$

$\Rightarrow d(B_1; (A_1DB)) = d(C; (A_1DB)).$

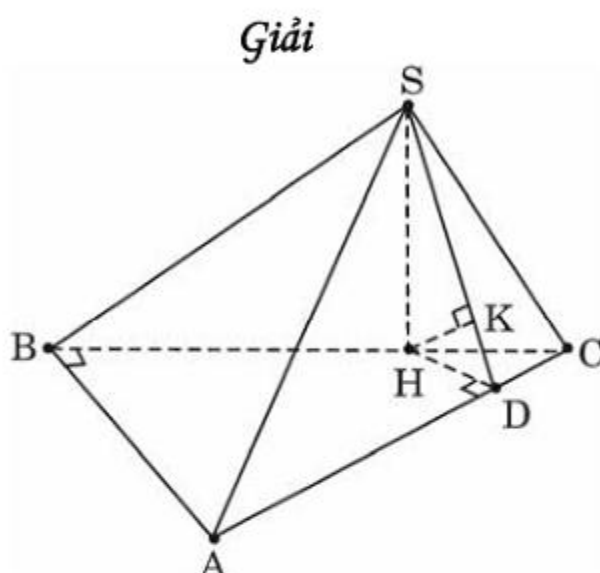
Hạ $CH \perp BD$ ($H \in BD$) $\Rightarrow CH \perp (A_1DB)$

$\Rightarrow d(C; (A_1DB)) = CH.$

$$\text{Suy ra } d(B_1; (A_1DB)) = CH = \frac{CD \cdot CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 6. (Trích đề thi Đại học khối D – 2011)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.



* Tính thể tích khối chóp S.ABC

Hạ $SH \perp BC$ ($H \in BC$), $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$SH = SB \cdot \sin \widehat{SBC} = a\sqrt{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = 6a^2.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = 2a^3\sqrt{3}.$$

* Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

Hạ $HD \perp AC$ ($D \in AC$), $HK \perp SD$ ($K \in SD$)

$\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H; (SAC)).$

$$BH = SB \cos \widehat{SBC} = 3a \Rightarrow BC = 4HC \Rightarrow d(B; (SAC)) = 4d(H; (SAC)).$$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 5a$$

$$HC = BC - BH = a \Rightarrow HD = BA \cdot \frac{HC}{AC} = \frac{3a}{5}.$$

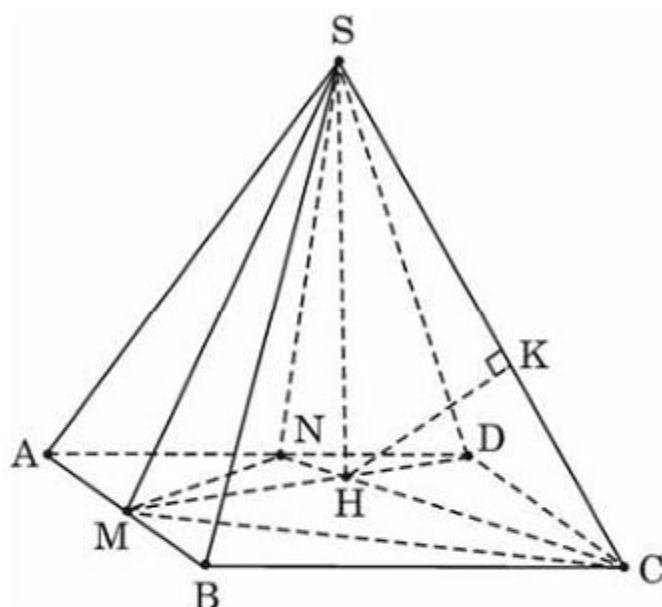
$$HK = \frac{SH \cdot HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(B; (SAC)) = 4HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

Bài 7. (Trích đề thi Đại học khối A – 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải



* Tính thể tích khối chóp S.CDNM

$$\begin{aligned} S_{\text{CDNM}} &= S_{\text{ABCD}} - S_{\text{AMN}} - S_{\text{BCM}} \\ &= AB^2 - \frac{1}{2}AM \cdot AN - \frac{1}{2}BC \cdot BM \\ &= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}. \end{aligned}$$

$$V_{\text{S.CDNM}} = \frac{1}{3} S_{\text{CDNM}} \cdot SH = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}.$$

* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC

$\triangle ADM = \triangle DCN \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow DM \perp CN$, kết hợp với $DM \perp SH$ suy ra $DM \perp (SHC)$.

Hạ $HK \perp SC$ ($K \in SC$), suy ra HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC, do đó $d(DM; SC) = HK$.

$$\text{Ta có : } CN = \sqrt{CD^2 + ND^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông NDC có đường cao DH, } HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

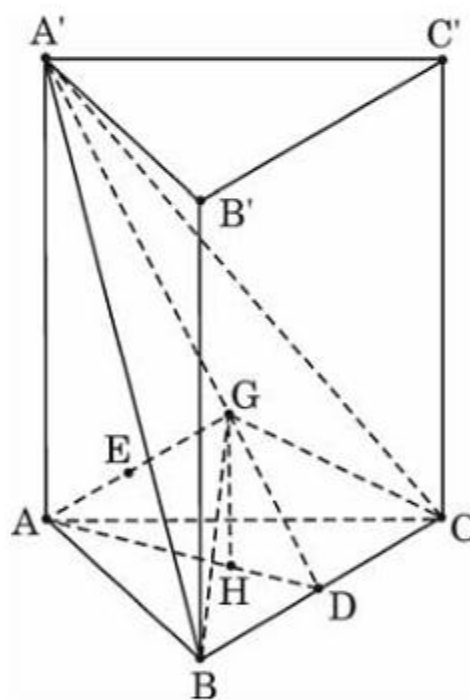
$$\text{Xét tam giác vuông SHC có đường cao HK, } HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Do đó } d(DM; SC) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Bài 8. (Trích đề thi Đại học khối B – 2010)

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .

Giải



* Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Gọi D là trung điểm BC , ta có : $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp A'D$, suy ra $\widehat{ADA'} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } AA' = AD \tan \widehat{ADA'} = \frac{3a}{2}; S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

* Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, suy ra :

$GH \parallel A'A \Rightarrow GH \perp (ABC)$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC, ta có I là giao điểm của GH với trung trực của AG trong mặt phẳng (AGH).

Gọi E là trung điểm của AG, ta có :

$$R = GI = \frac{GE \cdot GA}{GH} = \frac{GA^2}{2GH}.$$

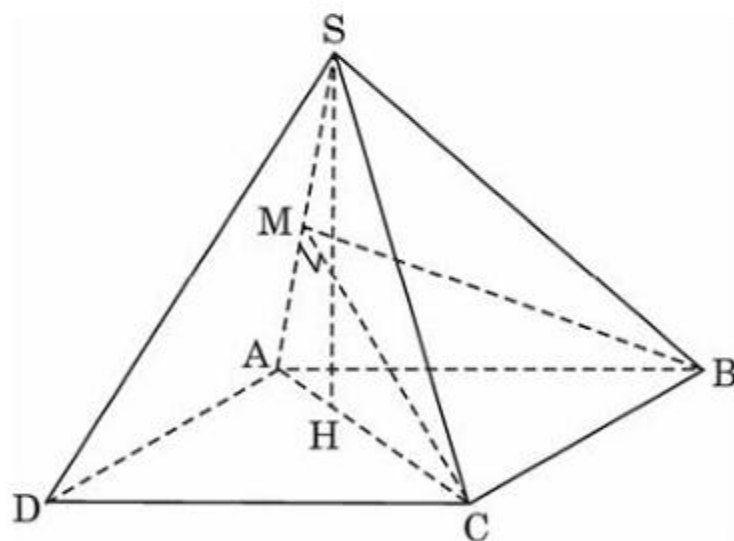
$$\text{Ta có } GH = \frac{AA'}{3} = \frac{a}{2}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; GA^2 = GH^2 + AH^2 = \frac{7a^2}{12}.$$

$$\text{Do đó } R = \frac{7a^2}{2 \cdot 12} \cdot \frac{2}{a} = \frac{7a}{12}.$$

Bài 9. (Trích đề thi Đại học khối D – 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a ; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Giải



$$* AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}; SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = AC.$$

Do đó tam giác SAC cân tại C, suy ra M là trung điểm SA.

* Tính thể tích khối tứ diện SBCM

$$M \text{ là trung điểm } SA \Rightarrow S_{SCM} = \frac{1}{2} S_{SCA}$$

$$\Rightarrow V_{SBCM} = V_{B.SCM} = \frac{1}{2} V_{B.SCA} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{SBCM} = \frac{1}{6} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{14}}{48}.$$

Bài 10. (Trích đề thi Đại học khối A – 2009)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$; $CD = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải

Ta có $SI \perp (ABCD)$ vì hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mp(ABCD).

Ta có :

$$IC = a\sqrt{2}, IB = a\sqrt{5}, BC = a\sqrt{5}.$$

$$\text{Kẻ } IH \perp BC \text{ tại } H, IH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

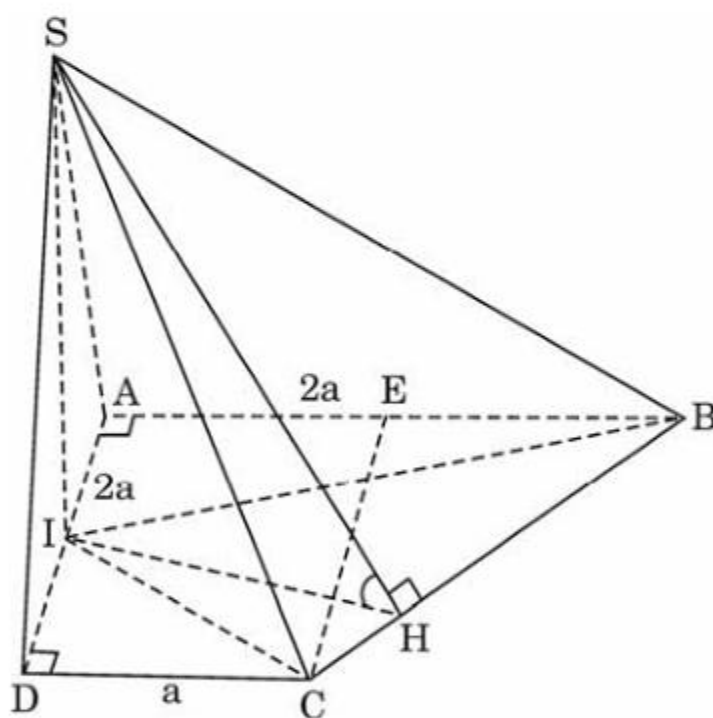
Trong tam giác vuông SIH,

$$SI = IH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

Vì E là trung điểm AB nên

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ADCE} + S_{EBC} \\ &= 2a^2 + a^2 = 3a^2. \end{aligned}$$

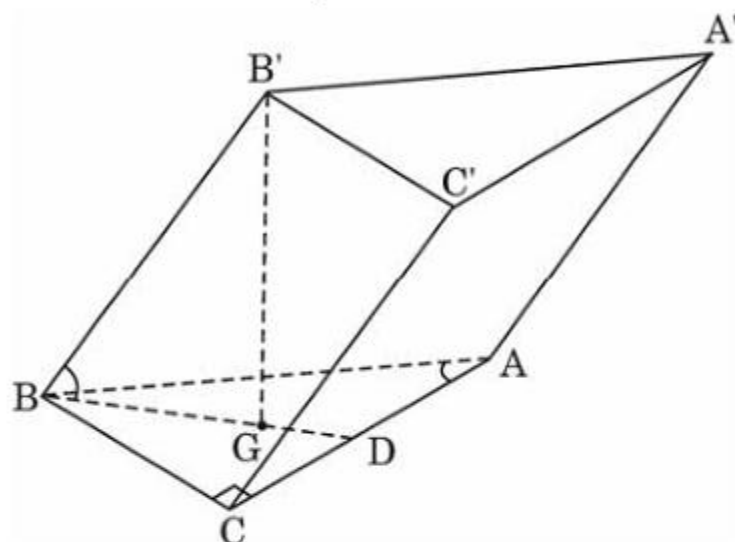
$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot \frac{3a\sqrt{15}}{5} = 3a^3 \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



Bài 11. (Trích đề thi Đại học khối B – 2009)

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; tam giác ABC vuông tại C và góc BAC bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a .

Giải



Gọi D là trung điểm của AC và G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $B'G \perp (ABC)$

$$\Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow B'G = B'B \cdot \sin \widehat{B'BG} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ có } BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}; AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow CD = \frac{AB}{4}.$$

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13}; AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}.$$

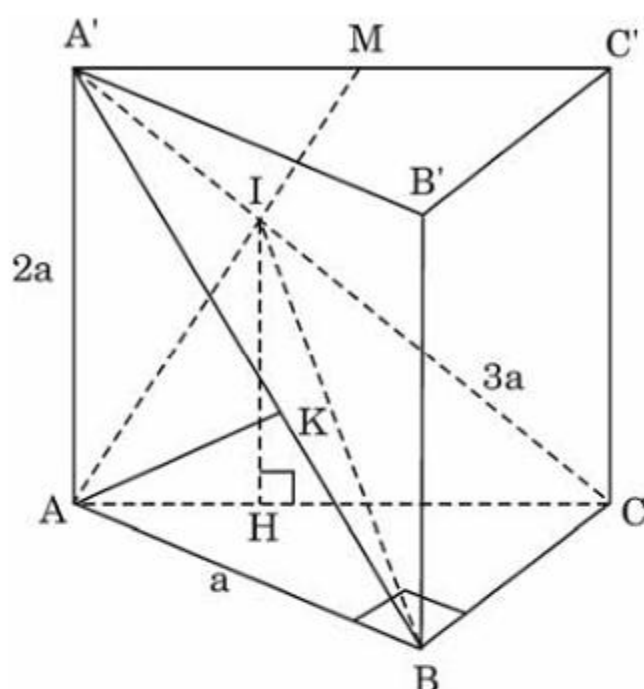
Thể tích khối tứ diện $A'ABC$ là :

$$V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3} B'G \cdot S_{ABC} = \frac{9a^3}{208}.$$

Bài 12. (Trích đề thi Đại học khối D – 2009)

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

Giải



* Tính thể tích khối tứ diện IABC

Hạ $IH \perp AC$ ($H \in AC$) $\Rightarrow IH \perp (ABC)$, IH là đường cao của tứ diện IABC

$$\Rightarrow IH \parallel AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}.$$

$$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5};$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = a^2$$

$$V_{IABC} = \frac{1}{3}IH \cdot S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}.$$

* Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC)

Hạ $AK \perp A'B$ ($K \in A'B$). Vì $BC \perp (ABB'A')$ nên $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$.

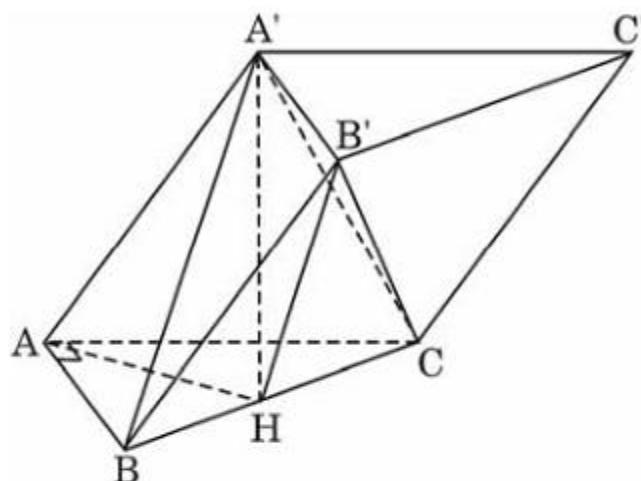
Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

$$AK = \frac{2S_{A'AB}}{A'B} = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Bài 13. (Trích đề thi Đại học khối A – 2008)

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' , $B'C'$.

Giải



* Tính thể tích khối chóp $A'.ABC$

Gọi H là trung điểm của BC . Suy ra

$$A'H \perp (ABC) \text{ và } AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a.$$

$$\text{Do đó } A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{a^3}{2}.$$

* Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' , $B'C'$

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có : $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ cân tại B' .

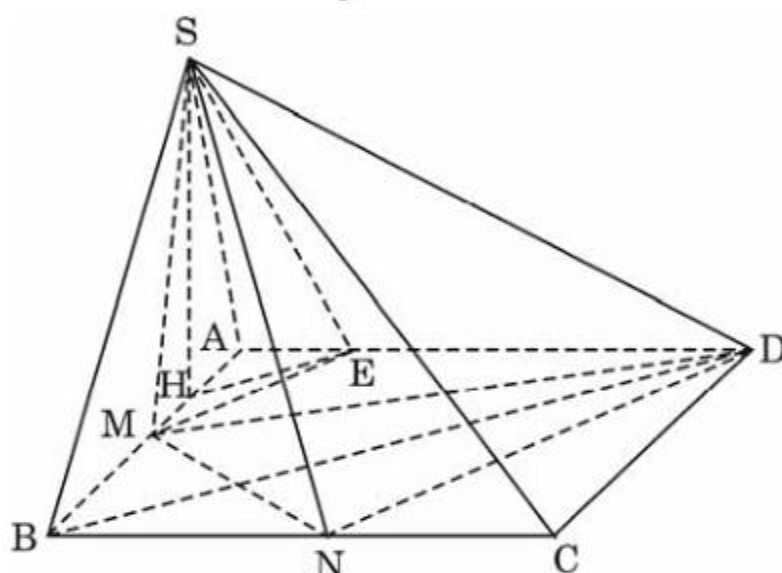
Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ thì $\varphi = \widehat{B'BH}$.

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}.$$

Bài 14. (Trích đề thi Đại học khối B – 2008)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Giải



* Tính thể tích của khối chóp S.BMDN

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có : $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$ nên tam giác SAB vuông tại S, suy ra

$$SM = \frac{AB}{2} = a.$$

Do tam giác SAM đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác BMDN là $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$.

Thể tích khối chóp S.BMDN là : $V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

* Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

Kẻ $ME \parallel DN$ ($E \in AD$) suy ra $AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có : $(\widehat{SM, ME}) = \varphi$.

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SA \perp AE$.

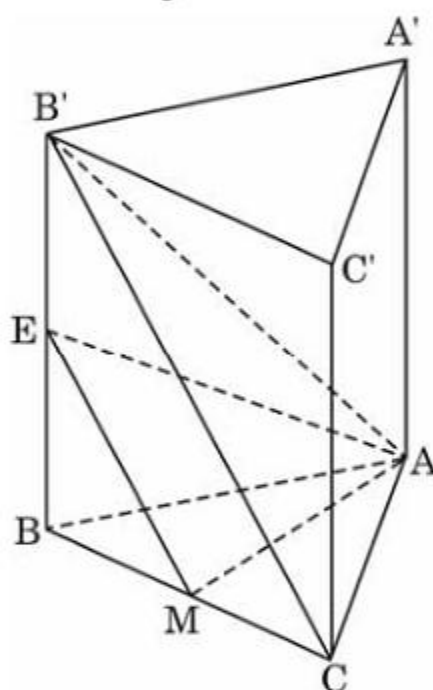
$$\text{Suy ra } SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Tam giác SME cân tại E nên } \widehat{SME} = \varphi \text{ và } \cos \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Bài 15. (Trích đề thi Đại học khối D – 2008)

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , $B'C$.

Giải



* Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B .

$$\text{Thể tích khối lăng trụ là: } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a^3.$$

* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , $B'C$

Gọi E là trung điểm của BB' . Khi đó mặt phẳng (AME) song song với $B'C$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng khoảng cách giữa $B'C$ và mặt phẳng (AME) .

Mà khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AME) .

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME). Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên

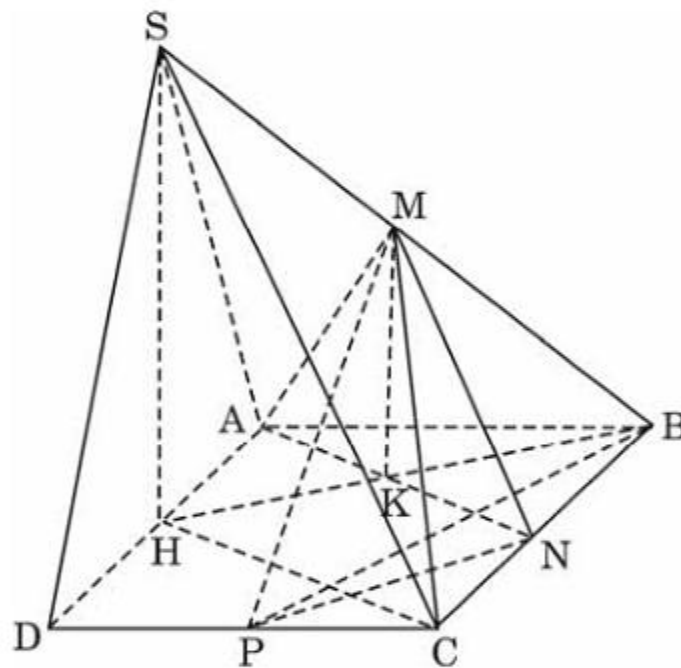
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 16. (Trích đề thi Đại học khối A – 2007)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

Giải



* Chứng minh AM vuông góc với BP

Gọi H là trung điểm của AD . Do tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow SH \perp BP \quad (1)$$

Xét hình vuông $ABCD$ ta có $\triangle CDH = \triangle BCP$

$$\Rightarrow CH \perp BP \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BP \perp (SHC)$.

Vì $MN \parallel SC$ và $AN \parallel CH$ nên $(AMN) \parallel (SHC)$.

Suy ra $BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$.

* Tính thể tích của khối tứ diện CMNP

Kẻ $MK \perp (ABCD)$ với $K \in (ABCD)$.

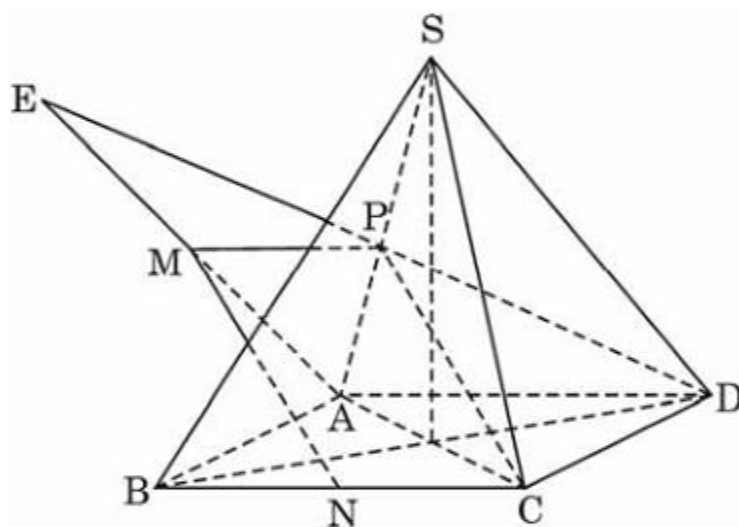
$$\text{Ta có : } V_{CMNP} = \frac{1}{3} MK \cdot S_{CNP}.$$

$$\text{Vì } MK = \frac{1}{2} SH = \frac{a\sqrt{3}}{4} ; S_{CNP} = \frac{1}{2} CN \cdot CP = \frac{a^2}{8} \text{ nên } V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

Bài 17. (Trích đề thi Đại học khối B – 2007)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Giải



* Chứng minh MN vuông góc với BD

Gọi P là trung điểm của SA . Ta có $MNCP$ là hình bình hành nên $MN \parallel (SAC)$.

Mặt khác, $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MN$.

* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC

Vì $MN \parallel (SAC)$ nên

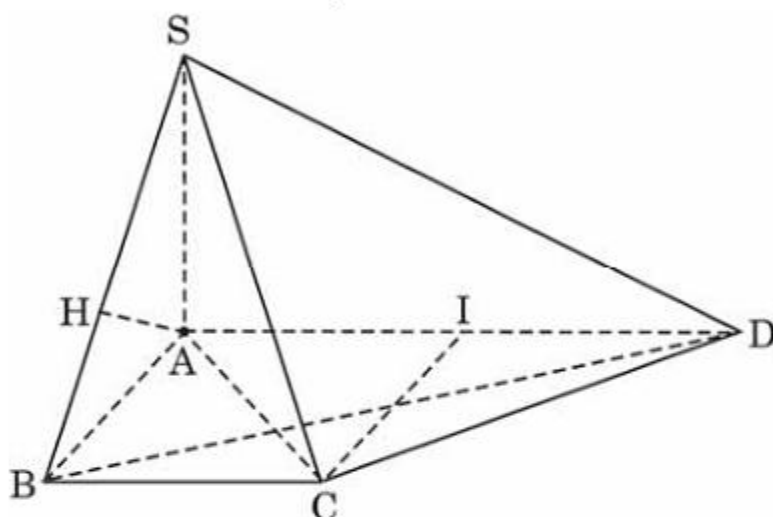
$$\begin{aligned} d(MN ; AC) &= d(N ; (SAC)) = \frac{1}{2} d(B ; (SAC)) \\ &= \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d(MN ; AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 18. (Trích đề thi Đại học khối D – 2007)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Giải



* Chứng minh tam giác SCD vuông

Gọi I là trung điểm của AD. Ta có : $IA = ID = IC = a \Rightarrow CD \perp AC$.

Mặt khác, $CD \perp SA$, suy ra $CD \perp SC$ nên tam giác SCD vuông tại C.

* Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

Trong tam giác vuông SAB ta có : $\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$.

Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mặt phẳng (SCD) thì :

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1.$$

Vì d_1 là khoảng cách từ B đến mp(SCD) nên :

$$d_1 = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA.S_{BCD}}{S_{SCD}}.$$

$$\text{Mà } S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a^2$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}.\sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}.$$

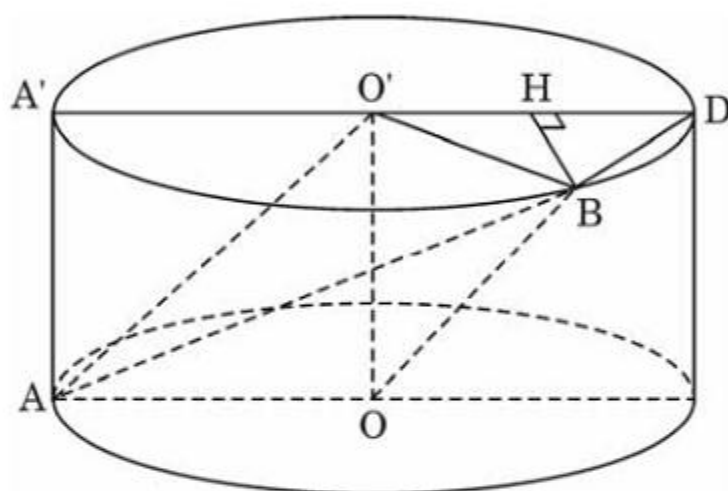
$$\text{Suy ra } d_1 = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là : } d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}.$$

Bài 19. (Trích đề thi Đại học khối A – 2006)

Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

Giải



Kẻ đường sinh AA' . Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng $A'D$.

Do $BH \perp A'D$ và $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (AOO'A')$.

$$\text{Suy ra } V_{OO'AB} = \frac{1}{3}BH.S_{AOO'}.$$

$$\text{Ta có : } A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$$

$$\Rightarrow \triangle BO'D \text{ đều} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vì } AOO' \text{ là tam giác vuông cân cạnh bên bằng } a \text{ nên : } S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2.$$

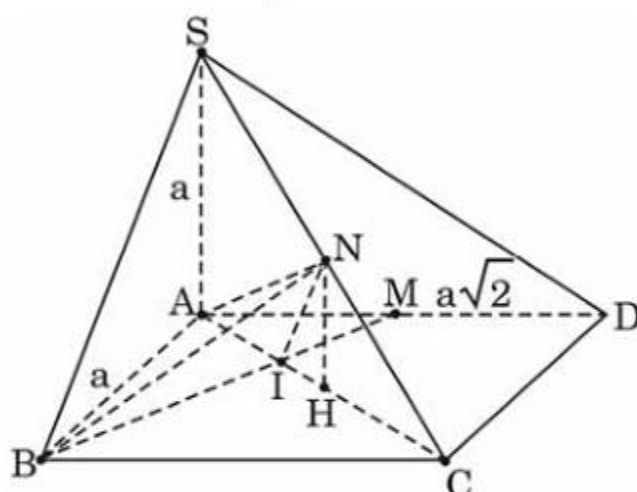
Vậy thể tích khối tứ diện OO'AB là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Bài 20. (Trích đề thi Đại học khối B – 2006)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Giải



* Chứng minh mp(SAC) vuông góc với mp(SMB)

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BCA$ đều vuông và có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \triangle ABM$ đồng dạng với $\triangle BCA$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MB \perp AC \quad (1)$$

$$\text{Ta cũng có } SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC).$$

* Tính thể tích khối tứ diện ANIB

Gọi H là trung điểm của AC $\Rightarrow NH$ là đường trung bình của $\triangle SAC$

$$\Rightarrow NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \text{ và } NH \parallel SA \text{ nên } NH \perp (ABI), \text{ do đó } V_{ANIB} = \frac{1}{3} NH \cdot S_{ABI}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

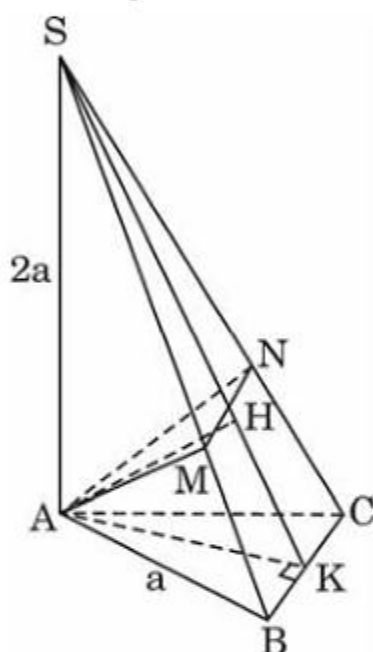
$$BI^2 = AB^2 - AI^2 \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S_{ABI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}.$$

$$V_{ANIB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$$

Bài 21. (Trích đề thi Đại học khối D – 2006)

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Giải



Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SK.

Do $BC \perp AK$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp AH$.

Do $AH \perp SK$, $AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$.

Xét tam giác vuông SAK : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$

Xét tam giác vuông SAB : $SA^2 = SM.SB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4}{5}.$

Xét tam giác vuông SAC : $SA^2 = SN.SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{5}.$

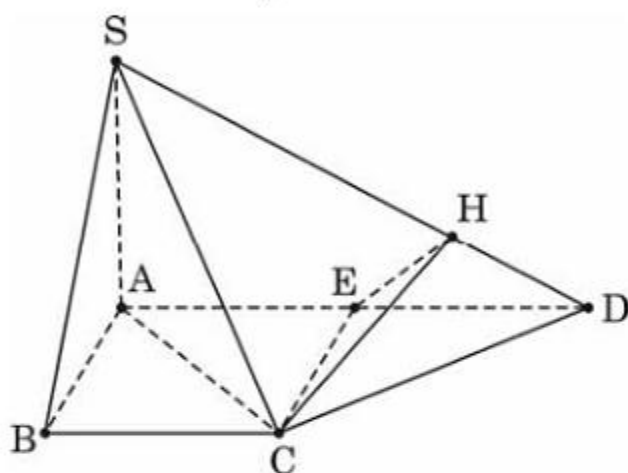
Suy ra $\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{BCNM} = \frac{9}{25} S_{SBC} = \frac{9\sqrt{19}a^2}{100}.$

Vậy thể tích của khối chóp A.BCNM là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCNM} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}.$$

Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, góc giữa hai mặt (SAD) và (SCD) là 60° . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện SABC và SACD. Tính tỉ số giữa V_1 và V_2 .

Giải



Ta có : $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$.

Suy ra $BC \perp SB$ (1)

Mặt khác $AS \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra S, A, B và C nằm trên mặt cầu có đường kính SC.

Gọi E là trung điểm AD, ta có $AE \parallel BC$ và $AE = BC$ nên AECB là hình bình hành $\Rightarrow EC = AE = ED$

$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$, mà $CD \perp SA$

$\Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow CD \perp SC$ (3)

Lại có $SA \perp AD$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow S, A, C, D$ nằm trên mặt cầu đường kính SD.

Dựng $EH \perp SD$ tại H ta có:

$CE \perp AD$ và $CE \perp SA$ nên $CE \perp SD$

$EH \perp SD$

Do đó $SD \perp (CEH) \Rightarrow (\widehat{(SAD), (SCD)}) = (\widehat{EH, HC}) = \widehat{CHE} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông CEH (vuông tại E), ta có : $EH = CE \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hai tam giác vuông SAD và EHD có chung góc nhọn D nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{SD}{ED} = \frac{AD}{HD} \Rightarrow SD = \frac{ED \cdot AD}{HD} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{ED^2 - EH^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{\frac{2a^2}{3}}} = a\sqrt{6}.$$

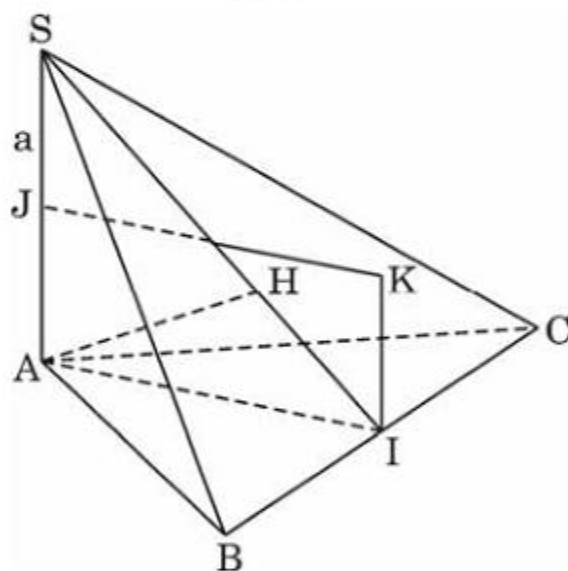
$$\Delta SAD \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$$

ΔSAC vuông tại A có $SA = AC$ nên $SC = 2a$.

$$\text{Do đó : } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{SC}{SD}\right)^3 = \left(\frac{2a}{a\sqrt{6}}\right)^3 = \frac{8}{6\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Bài 23. Cho tứ diện SABC có tam giác ABC cân tại A, SA vuông góc với mp(ABC), $SA = a$, diện tích tam giác SBC gấp hai lần diện tích tam giác ABC. Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC) và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Giải



* Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC)

$$\text{Ta có : } V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot d[A; (SBC)]$$

$$\Rightarrow d[A; (SBC)] = \frac{S_{ABC} \cdot SA}{S_{SBC}} = \frac{a}{2}.$$

* Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC

Gọi I là trung điểm BC, J là trung điểm SA. Vẽ hình chữ nhật AIKJ. Ta có : I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $KI \perp (ABC)$ nên KI là trục của tam giác ABC, suy ra $KA = KB = KC$.

Mặt khác : $KJ \perp SA$ tại J $\Rightarrow$ KJ là trung trực của SA $\Rightarrow KA = KS$.

Do đó ta có : $KS = KA = KB = KC$.

Vậy K là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Ta có :

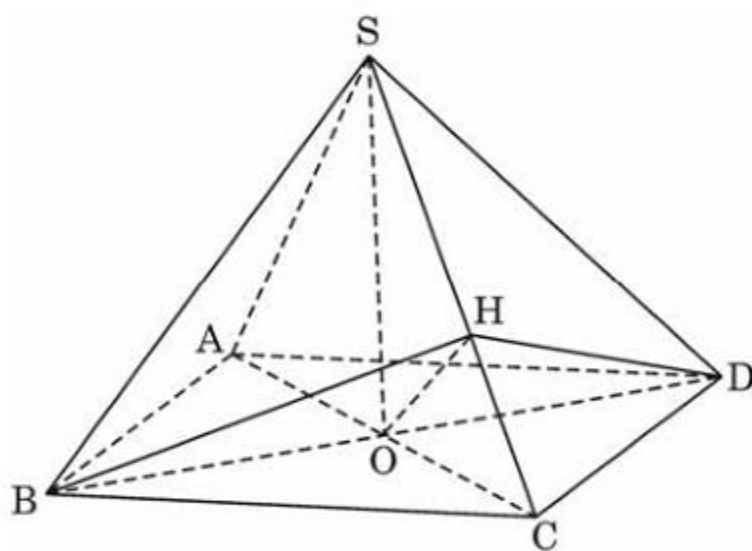
$$\cos \widehat{SIA} = \frac{AI}{SI} = \frac{S_{ABC}}{S_{SBC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AI = SA \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } R = KA = IJ = \sqrt{AI^2 + AJ^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Bài 24. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải



* Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD

Ta có : $\triangle SAB$ là tam giác đều cạnh a nên $S_{SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó : $S_{xq} = 4S_{SAB} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

$$\text{Suy ra : } S_{tp} = S_{xq} + S_d = a^2(\sqrt{3} + 1).$$

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= 4.V_{S.OCD} = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot OS \cdot OC \cdot OD \\ &= \frac{2}{3} \cdot OC^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

* Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD)

Vẽ $OH \perp SC$ tại H, vì $BD \perp SC$ nên $SC \perp (DHB)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng HB và HD.

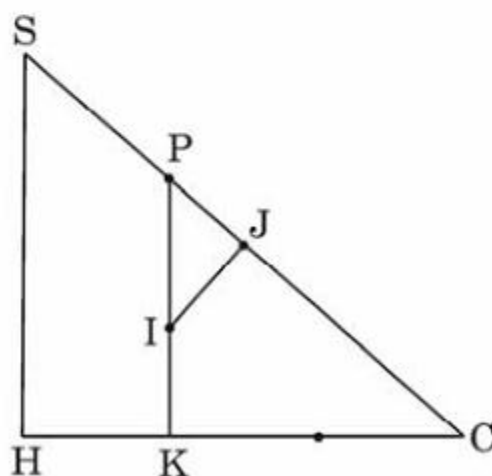
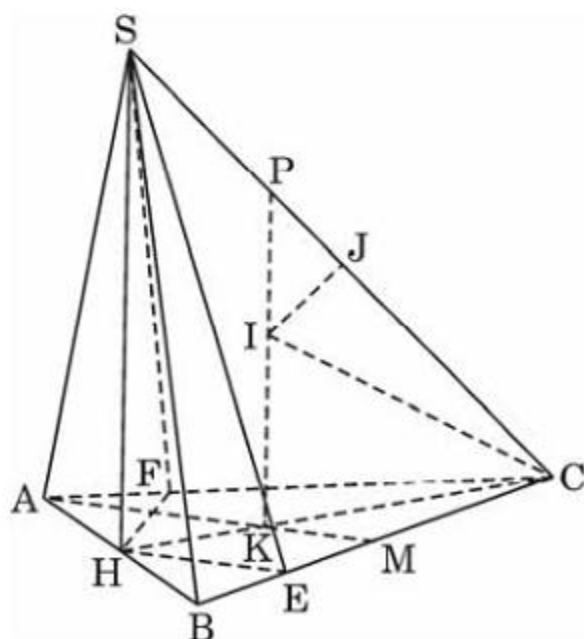
$$\begin{aligned} \text{Ta có : } BH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \cos \widehat{BHD} &= \frac{2BH^2 - BD^2}{2HB^2} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{3a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{BHD} \text{ tù}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{BHD} = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \widehat{BHD}} - 1} = -\sqrt{9 - 1} = -2\sqrt{2}.$$

Bài 25. Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a, mp(SAB) vuông góc với mp(ABC), góc giữa hai mặt bên (SBC) và (SAC) với mp(ABC) cùng bằng 60° . Tính thể tích hình chóp S.ABC, xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải



* Tính thể tích hình chóp S.ABC

Vì $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB nên vẽ $SH \perp AB$ tại H thì $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm BC và E là trung điểm BM

$$\Rightarrow BC \perp (SHE) \Rightarrow \widehat{SEH} = 60^\circ \Rightarrow SH = HE \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

* Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Vẽ $HF \perp AC$ tại F ta có AC vuông góc mp(SHF) nên $\widehat{SFH} = 60^\circ$.

Do đó $\triangle SHE = \triangle SHF \Rightarrow HE = HF$

mà $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow CH$ là phân giác và trung trực của $\triangle ABC$.

Gọi $K = AM \cap CH$ thì K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Dựng đường thẳng d qua K và song song SH thì d là trục của $\triangle ABC$, $d \subset (SHC)$, d cắt SC tại P.

Trong mp(SHC) vẽ trung trực của SC cắt d tại I và SC tại J. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

$$\text{Ta có } \frac{SP}{SJ} = 2 \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{JP}{JS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{JP}{SC} = \frac{1}{6} \Rightarrow JP = \frac{1}{6} SC$$

$$\Rightarrow IJ = JP \tan P = \frac{SC}{6} \cdot \cot C = \frac{SC}{6} \cdot \frac{HC}{SH} = \frac{SC}{6} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{4}} = \frac{SC\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow R^2 = IC^2 = IJ^2 + JC^2 = \frac{SC^2}{27} + \frac{SC^2}{4} = \frac{31 \cdot SC^2}{108}.$$

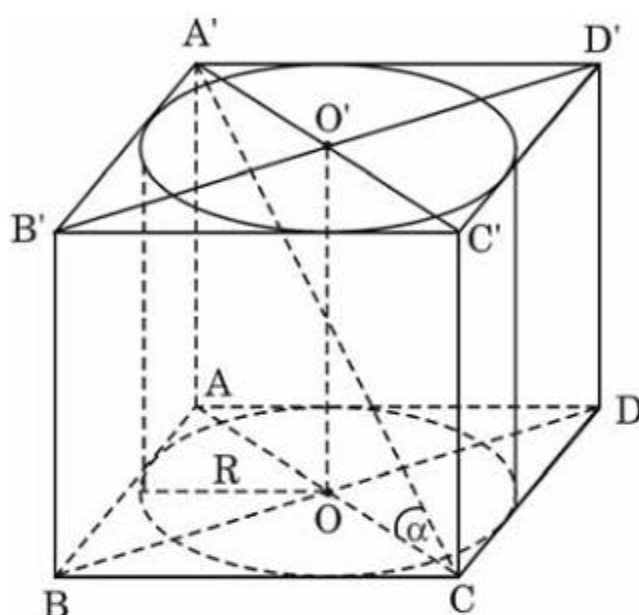
$$\text{Mà } SC^2 = SH^2 + HC^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{4} = \frac{21a^2}{16}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{31}{108} \cdot \frac{21a^2}{16} = \frac{217a^2}{36 \cdot 16}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{217}}{24}.$$

Bài 26. Cho hình trụ bán kính đáy R nội tiếp trong lăng trụ tứ giác đều có đường chéo hợp với đáy một góc α . Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ và tính thể tích của lăng trụ ngoại tiếp.

Giải



Hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn đáy hình trụ bán kính R nên có cạnh

$$AB = 2R \Rightarrow AC = 2R\sqrt{2}.$$

Đường chéo $A'C$ của lăng trụ hợp với đáy một góc $\alpha \Rightarrow \widehat{ACA'} = \alpha$.

Tam giác $AA'C$ vuông tại A có :

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow AA' = AC \cdot \tan \alpha = 2\sqrt{2}R \tan \alpha = OO'.$$

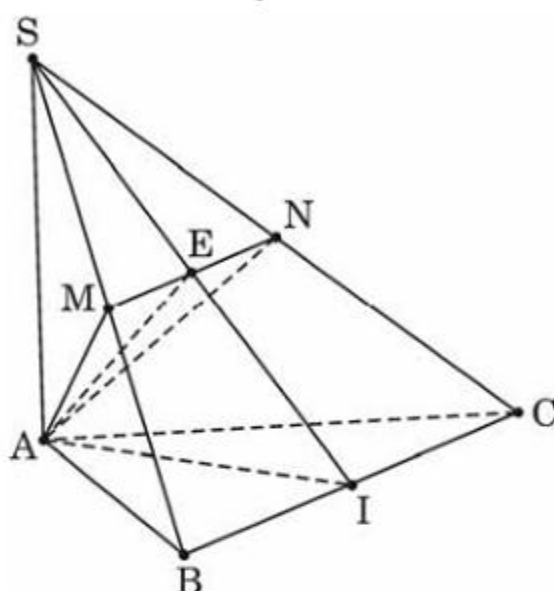
$$V_{h.trụ} = \pi R^2 \cdot OO' = \pi R^2 \cdot 2\sqrt{2}R \tan \alpha = 2\sqrt{2}\pi R^3 \tan \alpha;$$

$$S_{xq.h.trụ} = 2\pi R \cdot OO' = 2\pi R \cdot 2\sqrt{2}R \tan \alpha = 4\sqrt{2}\pi R^2 \tan \alpha;$$

$$V_{l.trụ} = AB^2 \cdot AA' = 4R^2 \cdot 2\sqrt{2}R \tan \alpha = 8\sqrt{2}R^3 \tan \alpha.$$

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC) , gọi I là trung điểm cạnh BC . Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SI cắt SB , SC lần lượt tại M , N . Biết rằng $V_{SAMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABC}$, hãy tính $V_{S.ABC}$ ($V_{S.AMN}$, $V_{S.ABC}$ lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AMN$ và $S.ABC$).

Giải



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) suy ra giao tuyến SA của chúng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Ta có :

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI.$$

$$\begin{cases} BC \perp SI \\ (P) \perp SI \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel BC.$$

Vì $(P) \cap (SBC) = MN$ nên $MN \parallel BC$, suy ra $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$.

$$\text{Ta có : } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \left(\frac{SM}{SB} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}.$$

Do đó M là trung điểm của cạnh SB và N là trung điểm của cạnh SC.

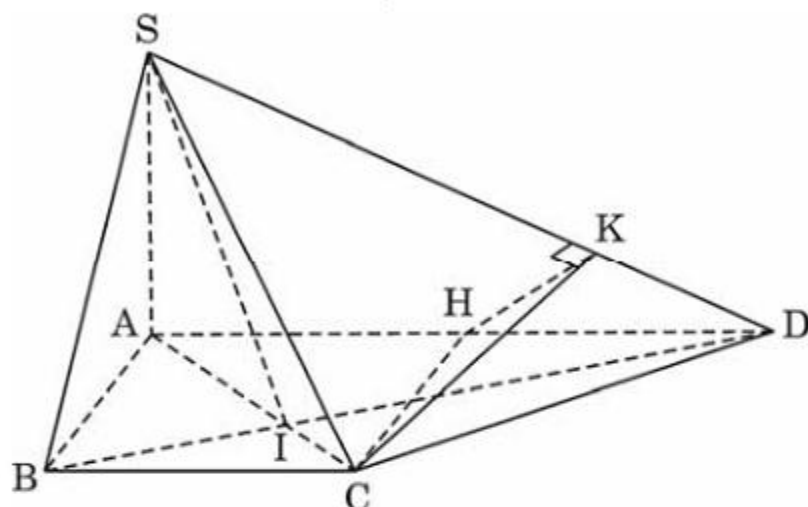
Gọi E là giao điểm của MN và SI thì E là trung điểm của SI và vì AE chứa trong (P) nên AE vuông góc với SI.

Tam giác SAI có AE là trung tuyến và cũng là đường cao nên tam giác SAI cân tại A, suy ra $SA = AI = a\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = a^3.$$

Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Cho biết góc giữa (SAD) và (SCD) bằng 60° . Tính thể tích hình chóp.

Giải



$$\text{Ta có : } S_{ABCD} = \frac{(AD + BC).AB}{2} = \frac{(2a + a)a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Gọi H là trung điểm AD và K là hình chiếu của H trên SD . Ta có :

$$CH \perp (SAD) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} CH \perp SD \\ SD \perp HK \end{array} \right\} \Rightarrow SD \perp (CHK)$$

$$\Rightarrow \widehat{CKH} \text{ là góc giữa } (SAD) \text{ và } (SCD)$$

$$\Rightarrow \widehat{CKH} = 60^\circ \Rightarrow HK = CH \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Mặt khác, } KD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Ta có : } \triangle SAD \sim \triangle HKD \Rightarrow \frac{SA}{HK} = \frac{AD}{KD} \Rightarrow SA = \frac{AD}{KD} \cdot HK = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{2}.$$

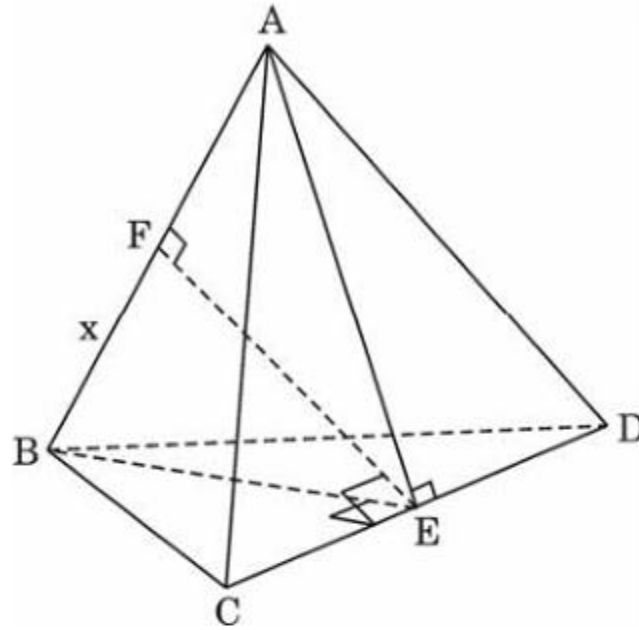
$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 29. Cho hình chóp $A.BCD$ có $AB = x$ ($x > 0$), các cạnh còn lại đều bằng $\sqrt{3}$. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và CD . Tính thể tích của hình chóp, tìm điều kiện của x để bài toán có nghĩa.

Giải

* Tính thể tích của hình chóp

Gọi E là trung điểm của CD .



Ta có : $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ đều

$\Rightarrow CD \perp AE$ và $CD \perp BE \Rightarrow CD \perp (ABE)$

mà $EA = EB = \frac{CD\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$, nên gọi F là trung điểm của AB thì EF chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Mặt khác, $EF^2 = AE^2 - AF^2 = \frac{9}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{9 - x^2}{4}$

$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}$.

Thể tích hình chóp là :

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle AEB} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EF \cdot CD = \frac{1}{6} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} x \sqrt{9 - x^2}.$$

* Điều kiện đề bài toán có nghĩa là $0 < x < 3$.

Bài 30. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Biết $AB = AC = AA' = a$. M là điểm di động trên AC' , N là điểm di động trên BC sao cho $M \neq A$ và $AM = BN$.

a) Chứng minh $MN \parallel (ABB'A')$.

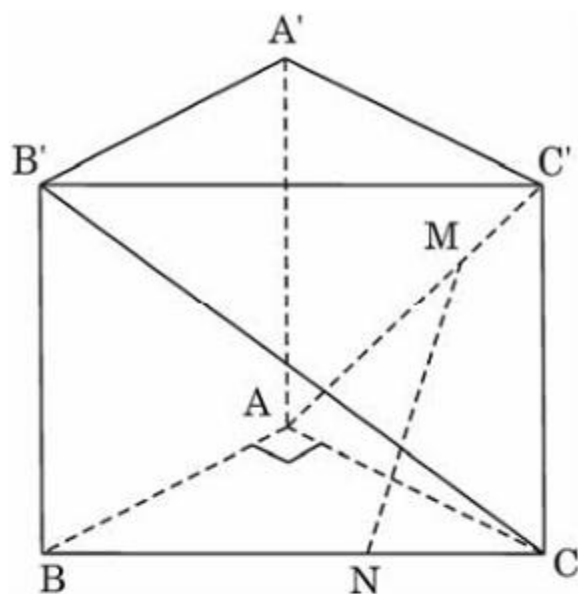
b) Xác định vị trí của MN sao cho độ dài MN ngắn nhất.

Giải

Xét hệ trục tọa độ Oxyz sao cho :

O trùng A, $B(a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$ và $A'(0; 0; a)$.

Ta có : $C'(0; a; a)$.



a) Hai tam giác $AA'C'$ và BAC vuông cân nên $AC' = BC = a\sqrt{2}$.

Đặt $AM = BN = x$.

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{BN} = \frac{x}{a\sqrt{2}} \overrightarrow{BC} = \frac{x}{a\sqrt{2}} (-a; a; 0)$$

$$\Rightarrow N(a - \frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}; 0).$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{x}{a\sqrt{2}} \overrightarrow{AC'} = \frac{x}{a\sqrt{2}} (0; a; a) \Rightarrow M(0; \frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{mà } \vec{n}_{(ABB'A')} = \vec{k} = (0; 1; 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_{(ABB'A')} = 0 \text{ và } M \notin (ABB'A') \Rightarrow MN \parallel (ABB'A').$$

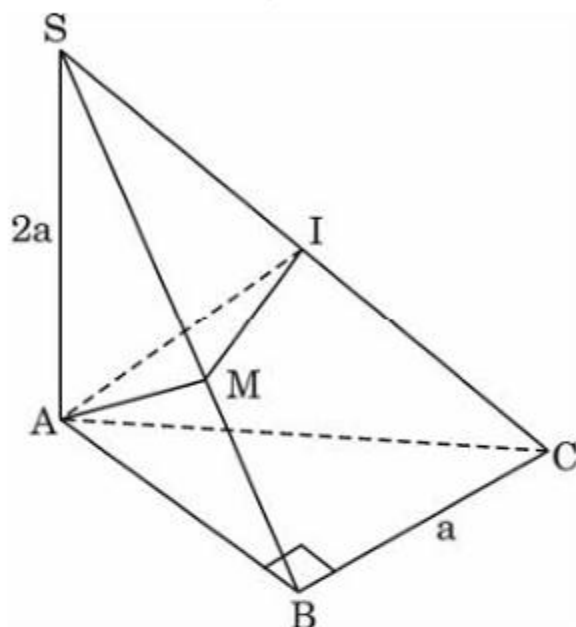
$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } MN^2 &= \frac{1}{2} [(a\sqrt{2} - x)^2 + x^2] = x^2 - ax\sqrt{2} + a^2 \\ &= \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm AC' và N là trung điểm BC .

Vậy khi M là trung điểm AC' và N là trung điểm BC thì MN nhỏ nhất và $\min MN$ bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, SA vuông góc với $mp(ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là điểm bất kì trên cạnh SB . Tính diện tích tam giác AIM khi $(AIM) \perp (SBC)$.

Giải



Ta có : $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$ mà $(AMI) \perp (SBC)$

$\Rightarrow AM \perp (SBC)$

$\Rightarrow AM \perp MI$ và $AM \perp SB$.

Xét tam giác vuông SAB ta có :

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

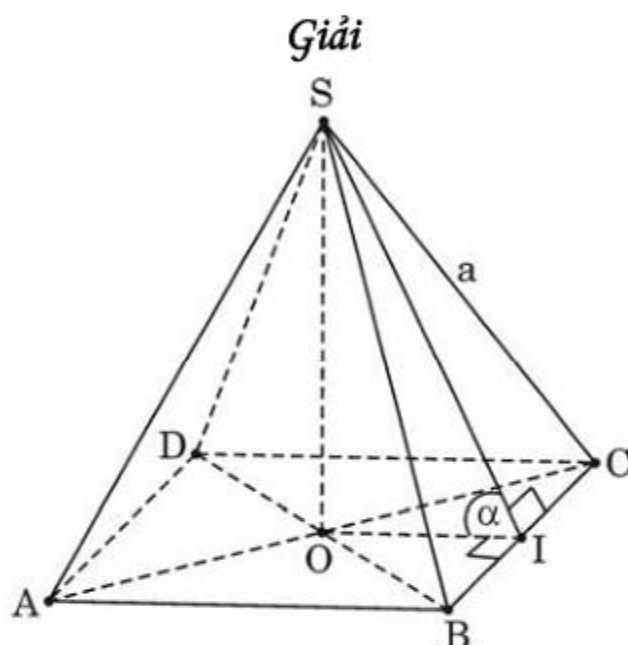
$$\Rightarrow MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4} - \frac{4a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{20}}.$$

$$\text{Vậy } S_{AMI} = \frac{1}{2} AM \cdot MI = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{20}} = \frac{a^2 \sqrt{14}}{10}.$$

Bài 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a , góc hợp bởi mặt bên và đáy là α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

a) Tính thể tích của khối chóp đã cho theo a và α .

b) Giả sử a không đổi và α biến thiên trong $(0; \frac{\pi}{2})$. Xác định α để thể tích trên đạt giá trị lớn nhất.



a) O là tâm của đáy $ABCD$ và I là trung điểm của BC . Theo tính chất của hình chóp đều, ta có SO vuông góc với $(ABCD)$ và SI, OI cùng vuông góc với BC , suy ra góc hợp bởi mặt bên (SBC) và đáy là $\widehat{SIO} = \alpha$.

Gọi cạnh của hình vuông $ABCD$ là x ($x > 0$).

Xét tam giác vuông SOC (vuông tại O) ta có :

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

Xét tam giác vuông SOI (vuông tại O), ta có :

$$SO = OI \tan \alpha = \frac{x}{2} \tan \alpha \Rightarrow SO^2 = \frac{x^2}{4} \tan^2 \alpha. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{x^2}{2} &= \frac{x^2}{4} \tan^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} (2 + \tan^2 \alpha) = a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4a^2}{2 + \tan^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Thể tích khối chóp S.ABCD là :

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{x}{2} \tan \alpha = \frac{1}{6} x^3 \tan \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{(\sqrt{2 + \tan^2 \alpha})^3}.$$

b) Ta có $V^2 = \frac{16a^6}{9} \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{(2 + \tan^2 \alpha)^3} = \frac{16a^6}{9} \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương

$$\frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha}, \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha}, \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \text{ ta được :}$$

$$V^2 \leq \frac{16a^6}{9} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \right) \right]^3$$

$$= \frac{16a^6}{9} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\tan^2 \alpha + 2}{\tan^2 \alpha + 2} \right]^3 = \frac{1}{27} \cdot \frac{16a^6}{9}.$$

Suy ra $V \leq \frac{4a^3 \sqrt{3}}{27}.$

$$\begin{aligned} V = \frac{4a^3 \sqrt{3}}{27} &\Leftrightarrow \frac{\tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2 + \tan^2 \alpha} \\ &\Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1. \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

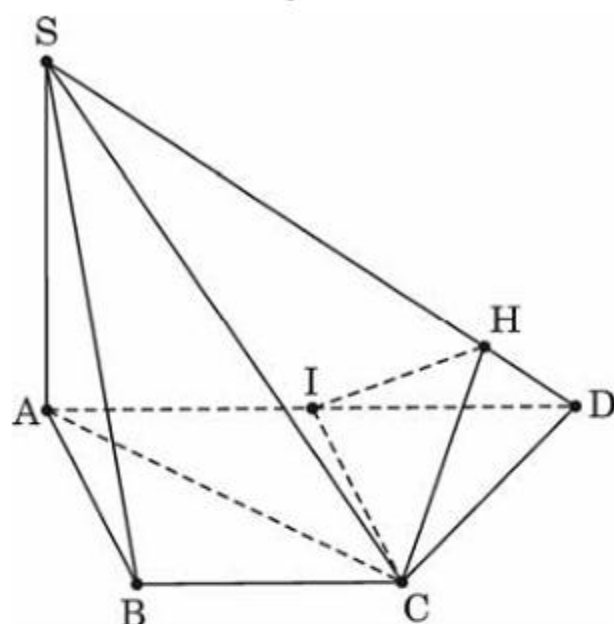
Vậy $\text{Max } V = \frac{4a^3 \sqrt{3}}{27}$ đạt được khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}.$

Bài 33. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA', cắt hình lăng trụ ABC.A'B'C' theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Giải

O là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) nên $A'O \perp (ABC).$

Giải



Gọi I là trung điểm của AD. Tứ giác ABCD có AI song song với BC, $AI = BC = AB = a$, $AB \perp BC$ nên ABCI là hình vuông.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên SD thì :

$$\begin{cases} CI \perp AD \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAD)$$

$$\Rightarrow CI \perp SD \quad (1)$$

$$\text{Lại có } IH \perp SD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $SD \perp (CHI)$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SDC) là $\widehat{CHI}$. Theo giả thiết, ta có $\widehat{CHI} = 60^\circ$.

Tam giác ACD có trung tuyến $CI = a = \frac{1}{2}AD$ do đó tam giác ACD vuông tại C.

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \widehat{SCD} = 90^\circ \quad (3)$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow \widehat{SAD} = 90^\circ \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ACD là mặt cầu đường kính SD.

Trong tam giác vuông CIH (vuông tại I), ta có :

$$IH = CI \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Hai tam giác vuông SAD và IHD có chung góc nhọn D nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{SD}{ID} = \frac{AD}{HD} \Rightarrow SD = \frac{ID \cdot AD}{HD} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{ID^2 - IH^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{\frac{2a^2}{3}}} = a\sqrt{6}.$$

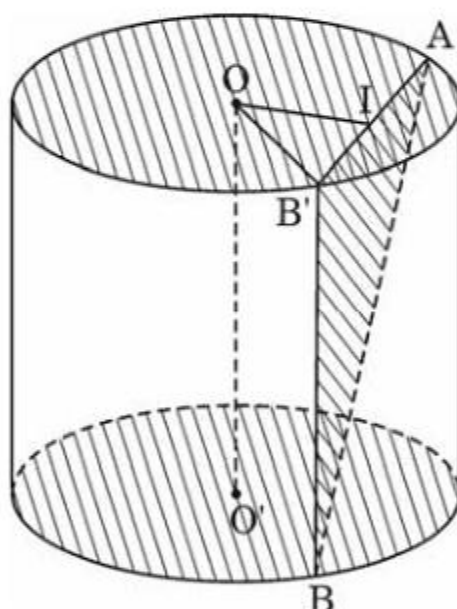
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ACD là :

$$S = 4\pi \left(\frac{SD}{2} \right)^2 = 6\pi a^2.$$

Bài 35. Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O'. Gọi A, B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn đáy (O), (O'). Biết thể tích của khối trụ là πa^3 ;

$AB = a\sqrt{2}$; khoảng cách giữa OO' và AB là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính đáy và đường cao của hình trụ đã cho.

Giải



Dựng đường sinh BB'. Gọi R và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ thì thể tích của khối trụ

$$V = \pi R^2 h \Leftrightarrow \pi a^3 = \pi R^2 h \Leftrightarrow R^2 h = a^3 \Leftrightarrow h = \frac{a^3}{R^2}.$$

Xét tam giác vuông BB'A, ta có :

$$AB'^2 = AB^2 - BB'^2 = 2a^2 - h^2 \quad (1)$$

Ta có $OO' \parallel BB'$, suy ra $OO' \parallel (ABB')$ mà $AB \subset (ABB')$ do đó

$$d(OO', AB) = d(O, (ABB')).$$

Gọi I là trung điểm của AB' thì $OI \perp AB'$ và $OI \perp BB'$ suy ra $OI \perp (ABB')$.

$$\text{Do đó } OI = d(O, (ABB')) = d(OO'; AB) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } OIB', \text{ ta có : } IB'^2 = OB'^2 - OI^2 = R^2 - \frac{3a^2}{4}$$

$$AB'^2 = 4IB'^2 = 4R^2 - 3a^2 = \frac{4a^3}{h} - 3a^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } 2a^2 - h^2 = \frac{4a^3}{h} - 3a^2 \Leftrightarrow h^3 - 5a^2h + 4a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (h - a)(h^2 + ah - 4a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = a \\ h = \frac{a(\sqrt{17} - 1)}{2} \end{cases}$$

Với $h = a$ thì $R = a$.

$$\text{Với } h = \frac{a(\sqrt{17} - 1)}{2} \text{ thì } R = a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{17} - 1}}.$$

Bài 36. Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh bằng 60° ; SA, SB là hai đường sinh của hình nón, biết diện tích của tam giác SAB có giá trị lớn nhất bằng $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Tính thể tích của khối nón đã cho và thể tích của khối chóp tam giác đều nội tiếp trong hình nón (hình chóp tam giác đều nội tiếp hình nón khi có chung đỉnh với hình nón và có đáy là một tam giác đều nội tiếp trong đáy của hình nón).

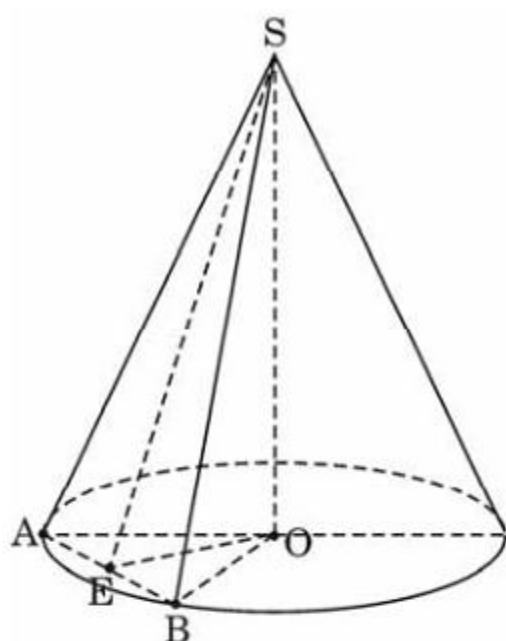
Giải

Trước hết ta chứng minh góc ở đỉnh của hình nón là góc lớn nhất trong các góc tạo bởi hai đường sinh của hình nón.

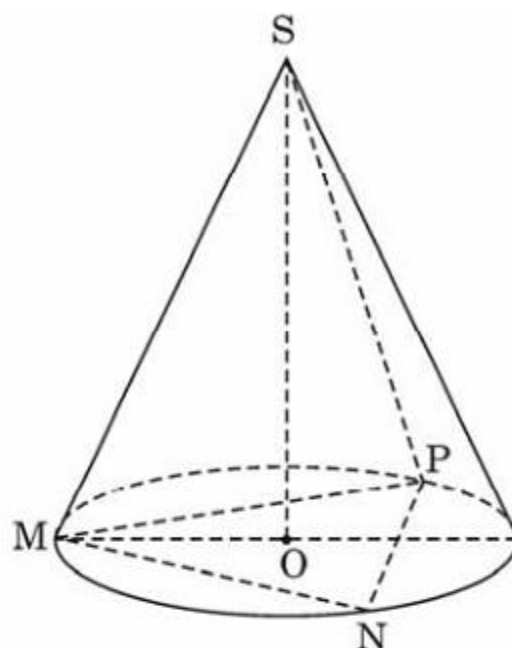
Xem hình 1, gọi góc ở đỉnh của hình nón là 2α thì $\widehat{ASO} = \alpha$, gọi góc của hai đường sinh SA, SB của hình nón là 2β và E là trung điểm của AB, ta có $SE \perp AB$ và $\widehat{ASE} = \beta$.

$$\text{Xét tam giác vuông } SEA, \text{ ta có : } \sin \beta = \frac{AE}{SA} \quad (1)$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SOA, \text{ ta có : } \sin \alpha = \frac{OA}{SA} \quad (2)$$



Hình 1



Hình 2

Trong tam giác vuông OEA, OA là cạnh huyền nên $AE \leq OA$.

Từ (1) và (2) suy ra $\sin \beta \leq \sin \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha$ (vì α, β là các góc nhọn) (đpcm).

* Tính thể tích khối nón

$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \widehat{ASB}$, vì góc ở đỉnh của hình nón là 60° và theo trên thì $0 \leq \widehat{ASB} \leq 60^\circ \Rightarrow 0 \leq \sin \widehat{ASB} \leq \sin 60^\circ$. Vậy S_{SAB} đạt giá trị lớn nhất khi $\widehat{ASB}$ là góc ở đỉnh của hình nón, khi đó tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và tam giác SAB là tam giác đều.

$$S_{SAB} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 4 \Rightarrow SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Gọi V_1 là thể tích khối nón đã cho thì :

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \cdot SO = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

* Tính thể tích khối chóp tam giác đều nội tiếp trong hình nón (hình 2)

Tam giác đều MNP nội tiếp trong đáy của hình nón nên ta có :

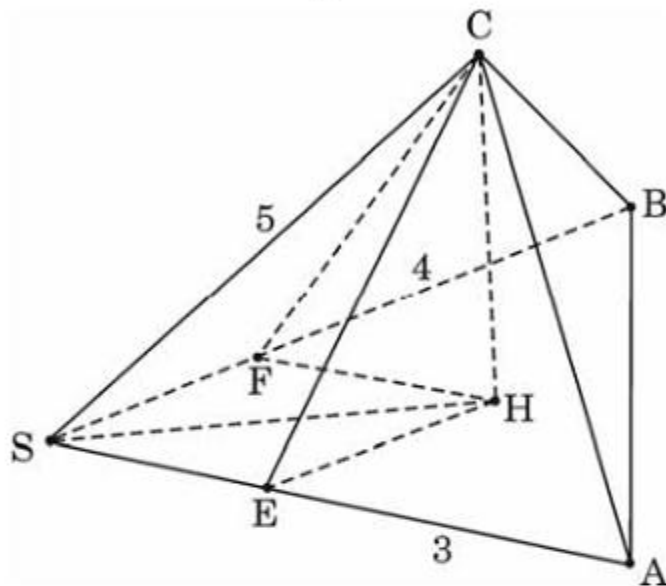
$$MN = OM\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{MNP} = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

Gọi V_2 là thể tích khối chóp tam giác đều S.MNP thì ta có :

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{MNP} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Bài 37. Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, SA = 3dm, SB = 4dm, SC = 5dm. Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

Giải



Gọi H là hình chiếu của C trên mặt phẳng (SAB). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên SA, SB ; theo định lí ba đường vuông góc, ta có $CE \perp SA$, $CF \perp SB$.

Hai tam giác vuông SEC và SFC có SC chung, $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 60^\circ$ nên chúng bằng nhau, suy ra $SE = SF$.

Hai tam giác vuông SHE và SHF có SH chung, $SE = SF$ nên chúng bằng nhau, suy ra $\widehat{HSE} = \widehat{HSF}$ do đó SH là phân giác của góc ASB.

Xét tam giác vuông CES, ta có :

$$SE = CS \cdot \cos 60^\circ = \frac{5}{2}.$$

Xét tam giác vuông SHE, ta có :

$$SH = SE \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SHC

$$CH^2 = CS^2 - SH^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow CH = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

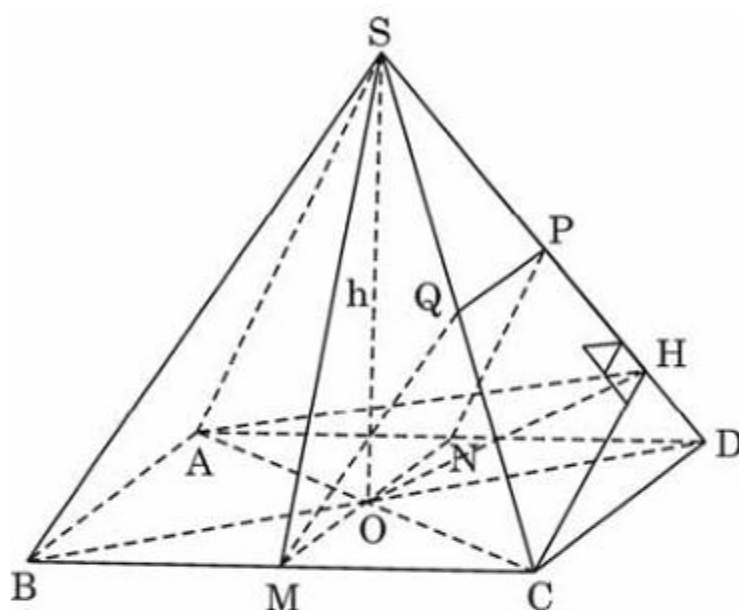
Thể tích khối chóp S.ABC là :

$$V = \frac{1}{3} S_{SAB} \cdot CH = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Bài 38. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO = h$. Góc giữa hai mặt bên kề nhau bằng 120° . Mặt phẳng (P) qua O , song song với SA và SB .

- Xác định thiết diện giữa $mp(P)$ và hình chóp. Thiết diện là hình gì ?
- Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp theo h .

Giải



- $(P) \parallel SA, SB \Rightarrow (P) \parallel (SAB) \Rightarrow (P) \parallel AB$
 $\Rightarrow (P) \cap (ABCD) = MN \parallel AB$, MN qua O .

Tương tự :

$$(P) \cap (SBC) = MQ \parallel SB$$

$$(P) \cap (SAD) = NP \parallel SA$$

$$(P) \cap (SCD) = PQ \parallel CD.$$

Tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của (P) với hình chóp.

$$\text{Ta có : } MN \parallel PQ \quad (1)$$

$$\widehat{QMN} = \widehat{SBA} = \widehat{SAB} = \widehat{PNM} \quad (2)$$

(1) và (2) $\Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

b) Giả sử $CD = x$.

Vẽ $CH \perp SD$, vì $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow AH \perp SD$

$$\Rightarrow \widehat{AHC} = \left(\widehat{(SAD), (SCD)} \right) = 120^\circ$$

$$\Rightarrow OH = OC \tan \widehat{OCH} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{6}}{6}.$$

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{h^2 + \frac{2x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4h^2 + 2x^2}}{2}$$

$$\text{mà } OH.SD = SO.OD \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{4h^2 + 2x^2}}{2} = h \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4h^2 + 2x^2} = 2\sqrt{3}h$$

$$\Leftrightarrow 4h^2 + 2x^2 = 12h^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4h^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2h.$$

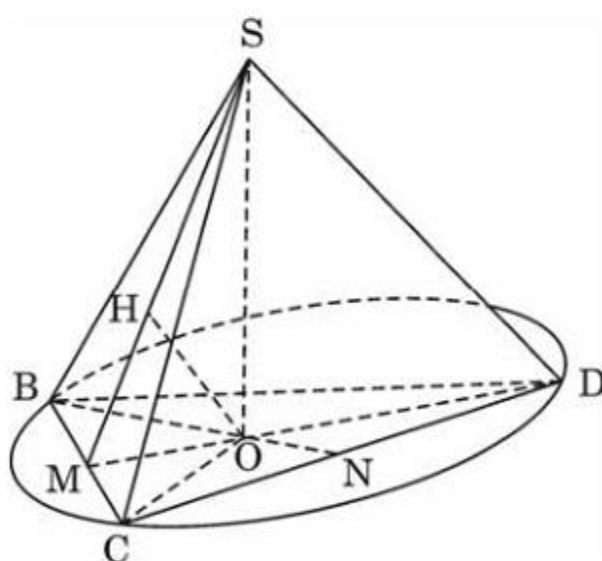
$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3} (2h)^2 h = \frac{4h^3}{3}.$$

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = h\sqrt{2} \Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} BC.SM = h^2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = 4h^2\sqrt{2}.$$

Bài 39. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh một hình nón đỉnh S, cắt đường tròn đáy của hình nón theo một dây cung BC có số đo cung BC là α . Biết (P) hợp với mặt đáy một góc β và khoảng cách từ tâm O của đáy đến (P) bằng a. Tính thể tích hình nón theo a, α và β .

Giải



Ta có mp(P) cắt đường tròn đáy theo dây cung BC có số $\widehat{BC} = \alpha$.

Gọi M là trung điểm BC thì ta có $SM \perp BC$ và $OM \perp BC$

$$\Rightarrow \widehat{SMO} = \left((P), \text{đáy} \right) = \beta.$$

Vẽ $OH \perp SM$ tại H thì $OH \perp BC$ nên $OH \perp (P)$

$$\Rightarrow OH = d[O, (P)] = a.$$

$$\triangle OHM \text{ vuông tại } H \Rightarrow OM = \frac{OH}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \beta}.$$

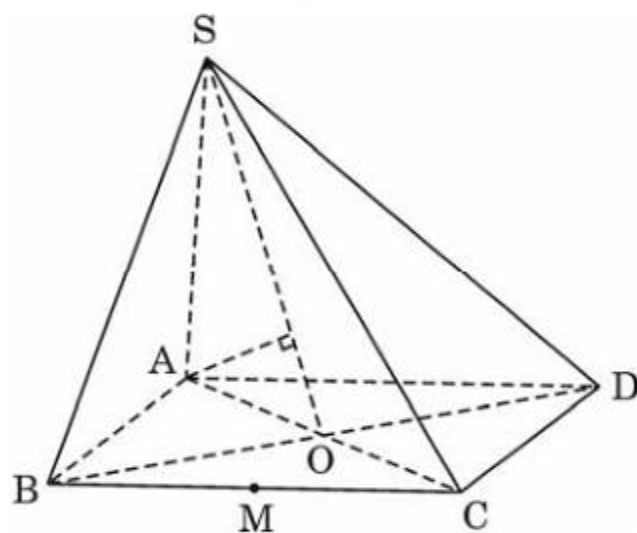
$$\triangle SOM \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = OM \tan M = \frac{a}{\sin \beta} \tan \beta = \frac{a}{\cos \beta}.$$

$$\triangle OMC \text{ vuông tại } M \Rightarrow R = OC = \frac{OM}{\cos \widehat{MOC}} = \frac{a}{\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Vậy } V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{\sin^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a}{\cos \beta} = \frac{a^3}{\sin^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \beta}.$$

Bài 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với $mp(ABCD)$, $SA = a$, góc giữa SC và $mp(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và tính khoảng cách từ A và từ trung điểm M của BC đến $mp(SBD)$.

Giải



* Tính thể tích khối chóp

Ta có $\triangle SAC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 60^\circ$

$$\Rightarrow AC = SA \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot a = \frac{a^3}{18}.$$

* Vẽ $AH \perp SO$ thì $AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A; (SBD)) = AH$.

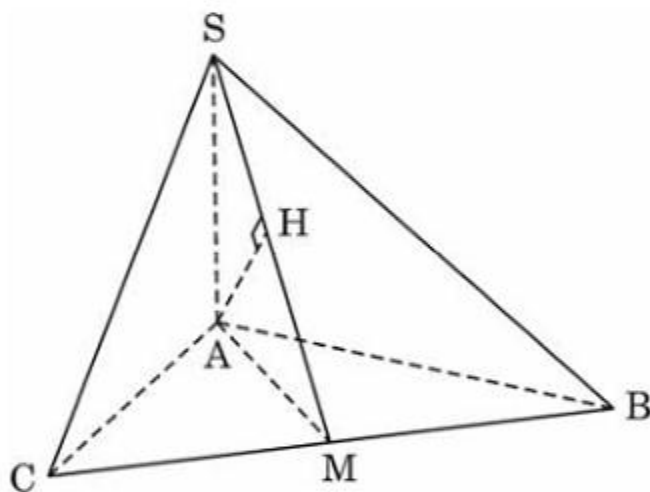
$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{36}{3a^2} = \frac{13}{a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{13}} \Rightarrow d(A; (SBD)) = \frac{a}{\sqrt{13}}.$$

$$* \text{ Ta có } d(M; (SBD)) = \frac{1}{2} d(C; (SBD)) = \frac{1}{2} d(A; (SBD)) = \frac{a}{2\sqrt{13}}.$$

Bài 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a , SA vuông góc với $mp(ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến $mp(SBC)$.

Giải



Gọi M là trung điểm BC . Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SM .

Vẽ $AH \perp SM$ thì $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

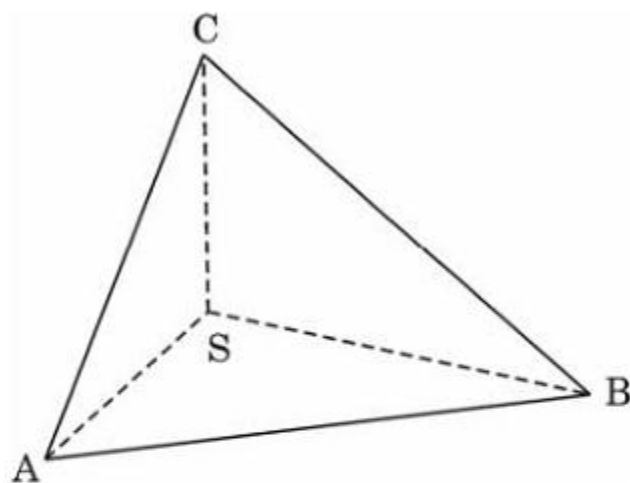
Trong ΔSAM vuông tại M , AH là đường cao ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 42. Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau. Gọi α , β , γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA). Chứng minh $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3}$.

Giải



Xét hệ trục tọa độ Oxyz sao cho :

$O \equiv S(0 ; 0 ; 0)$, $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$ và $C(0 ; 0 ; c)$ ($a, b, c > 0$).

Ta có phương trình mp(ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = (bc ; ca ; ab)$

mp(SAB) có pháp vector là $\vec{n}_{(SAB)} = \vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$

mp(SBC) có pháp vector là $\vec{n}_{(SBC)} = \vec{i} = (1 ; 0 ; 0)$

mp(SCA) có pháp vector là $\vec{n}_{(SCA)} = \vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$

$$\text{Do đó : } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

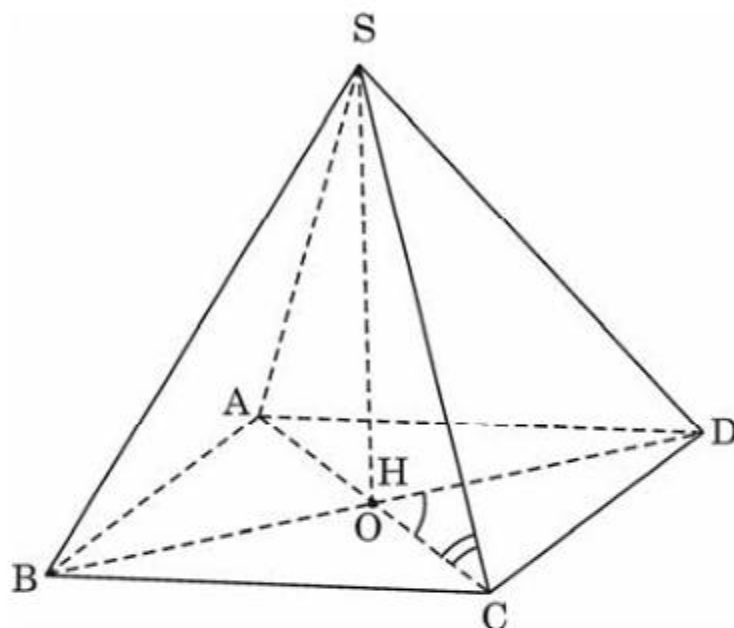
$$\cos \gamma = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{j}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$$\text{nên } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = \sqrt{3}.$$

Bài 43. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có diện tích bằng $\sqrt{3}$, góc nhỏ giữa hai đường chéo của đáy là 60° . Các cạnh bên nghiêng đều với đáy một góc 45° . Tính thể tích hình chóp.

Giải



Gọi H là hình chiếu của S trên (ABCD), O là giao điểm của AC và BD. Ta có :

$$\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \widehat{SDH} = 45^\circ$$

mà $\triangle SAH$, $\triangle SBH$, $\triangle SCH$ và $\triangle SDH$ vuông tại H có SH chung

$$\text{nên } \triangle SAH = \triangle SBH = \triangle SCH = \triangle SDH$$

$$\Rightarrow HA = HB = HC = HD$$

$\Rightarrow$ H trùng với O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

$$\text{Ta có } \triangle OCD \text{ đều} \Rightarrow BC = CD \tan 60^\circ = CD \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = BC \cdot CD = CD^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow CD = 1 \Rightarrow OC = 1.$$

Mặt khác, tam giác SOC vuông cân tại O $\Rightarrow SO = OC = 1$.

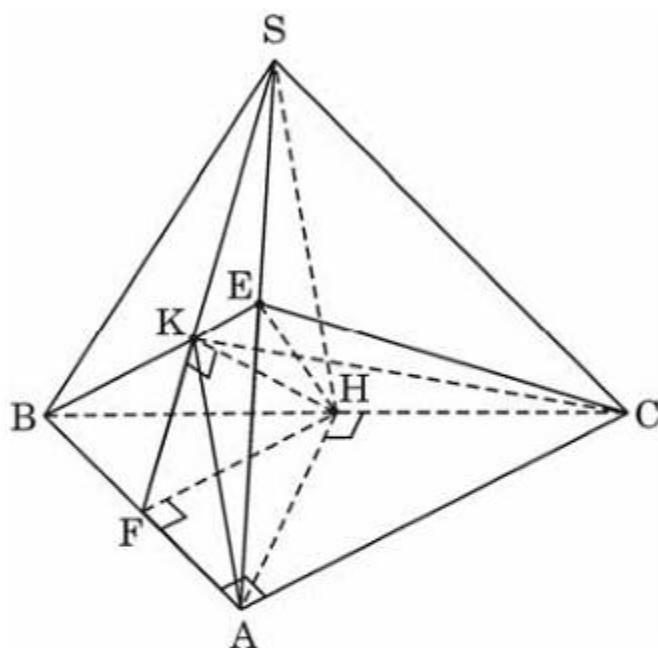
$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) và K là hình chiếu vuông góc của H trên (SAB) .

a) Hãy xác định vị trí của điểm H và nói cách dựng đoạn HK . Tính độ dài đoạn HK , tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) và góc giữa đường thẳng AC với $mp(SAB)$.

b) Chứng minh $SA \perp (KBC)$ và thiết diện do $mp(KCB)$ cắt hình chóp là một tam giác cân. Tính diện tích thiết diện nói trên theo a .

Giải



a) Ta có $SA = SB = SC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

mà $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên H chính là trung điểm của BC .

* Gọi F là trung điểm AB .

Dựng $HK \perp SF$ tại K , HK là đoạn cần dựng. Thật vậy :

$$FH \parallel AC \text{ và } AC \perp AB \Rightarrow AB \perp FH \quad (1)$$

$$SH \perp (ABC) \Rightarrow AB \perp SH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp (SHF)$, $HK \subset (SHF)$

$\Rightarrow HK \perp AB$ mà $HK \perp SF$

$\Rightarrow HK \perp (SAB)$.

$$* \text{ Ta có } FH = \frac{a}{2}, SH^2 = SC^2 - HC^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{3a^2} = \frac{14}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{42}}{14}.$$

$$* CH \text{ cắt } (SAB) \text{ tại } B \Rightarrow d(C; (SAB)) = 2d(H; (SAB)) = 2HK = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

$$* AC // HF \Rightarrow \widehat{(AC, (SAB))} = \widehat{(HF, (SAB))} = \widehat{HFS}.$$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{HFS} = \frac{SH}{HF} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{(AC, (SAB))} = \alpha \text{ với } \tan \alpha = \sqrt{6}.$$

$$\text{b) Ta có } BC \perp SH \text{ và } AH \Rightarrow BC \perp (SHA) \Rightarrow SA \perp BC \quad (3)$$

$$HK \perp (SAB) \Rightarrow SA \perp HK \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow SA \perp (KBC).$$

* Gọi E là giao điểm của BK và SA. Ta có thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (KBC) là tam giác EBC. Vì EH là đường cao và là trung tuyến của tam giác EBC nên tam giác EBC là tam giác cân tại E.

$$* S_{EBC} = \frac{1}{2} BC \cdot HE = HC \cdot HE,$$

$$\text{mà } HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, HE = \frac{SH \cdot AH}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

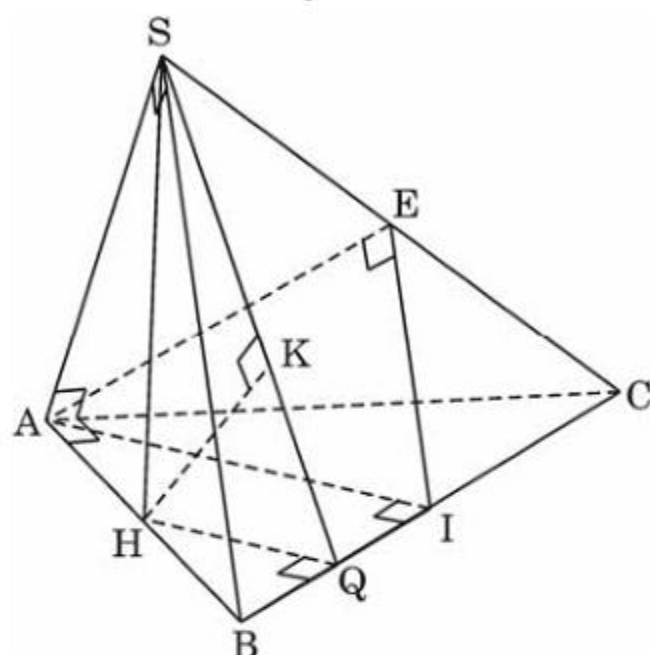
$$\Rightarrow S_{EBC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 45. Cho hình chóp S.ABC có tam giác SAB vuông cân tại S, $SA = SB = a$, hai tam giác SAC và ABC cùng vuông góc tại A với $AC = a\sqrt{2}$. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh : $SB \perp (SAC)$ và $SH \perp (ABC)$.

b) Tính góc tạo bởi AI và (SAC). Tính khoảng cách từ H đến (SBC).

Giải



a) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp AC \quad (1)$$

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } S \Rightarrow SB \perp SA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SB \perp (SAC)$.

Tam giác ABS vuông cân tại S, SH là trung tuyến

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} SH \perp AB \\ SH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

b) Gọi E là trung điểm SC

$$\Rightarrow EI // SB \text{ mà } SB \perp (SAC) \Rightarrow EI \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow \widehat{(AI, (SAC))} = \widehat{IAE}$$

$$\text{Ta có } AB = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AI = a \text{ và } EI = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAE} = 30^\circ. \text{ Vậy } \widehat{(AI, (SAC))} = 30^\circ.$$

* Gọi Q là trung điểm BI $\Rightarrow HQ // AI$ mà $AI \perp BC$

$$\Rightarrow HQ \perp BC, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SHQ).$$

Vẽ $HK \perp SQ$ tại K thì $HK \perp BC$.

$$\text{Vậy } HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H; (SBC)).$$

Ta có : $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $HQ = \frac{a}{2}$, ΔSHQ vuông tại H

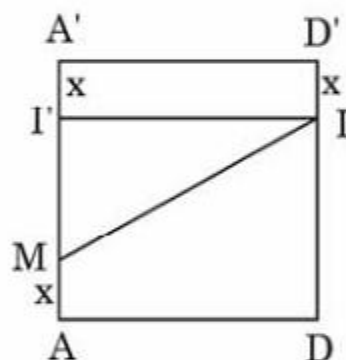
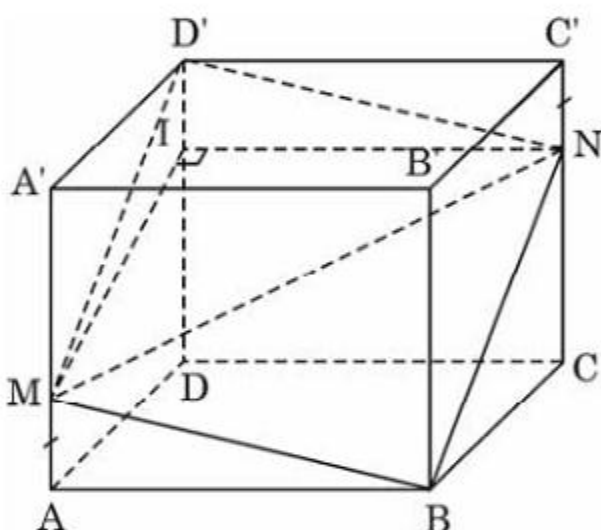
$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HQ^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{6}{a^2}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Bài 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tìm điểm M trên cạnh AA' sao cho mặt phẳng (MBD') cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tính số đo nhị diện $[(BMD'), (A'B'D')]$.

Giải



* Gọi N là điểm ở trên CC' sao cho $AM = NC' = x$.

Ta có : $MD' \parallel BN$ và $MD' = BN$.

Vậy $BMD'N$ là thiết diện của (MBD') với hình lập phương.

Ta có :

$$BM = \sqrt{a^2 + x^2}; BN = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}.$$

* Tính MN

$$\text{Ta có : } MN^2 = MI^2 + IN^2.$$

$$\text{Mà } MI^2 = II'^2 + I'M^2, \text{ trong đó } II' = a, MI' = a - 2x.$$

$$\text{Vậy } MI^2 = 2a^2 - 4ax + 4x^2$$

$$\Rightarrow MN^2 = MI^2 + IN^2 = 2a^2 - 4ax + 4x^2 + a^2 = 3a^2 - 4ax + 4x^2$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{3a^2 - 4ax + 4x^2}.$$

$$\begin{aligned}\cos \widehat{MBN} &= \frac{BM^2 + BN^2 - MN^2}{2BM \cdot BN} \\ &= \frac{(a^2 + x^2) + (2a^2 - 2ax + x^2) - (3a^2 - 4ax + 4x^2)}{2\sqrt{(a^2 + x^2)(2a^2 - 2ax + x^2)}} \\ &= \frac{ax - x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)(2a^2 - 2ax + x^2)}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{MBN} = \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)(2a^2 - 2ax + x^2)} - (ax - x^2)}{\sqrt{(a^2 + x^2)(2a^2 - 2ax + x^2)}}.$$

$$\text{Vậy } S_{BMD'N} = BM \cdot BN \cdot \sin \widehat{MBN} = \sqrt{(a^2 + x^2)(2a^2 - 2ax + x^2)} - (ax - x^2)$$

$$\Rightarrow S^2 = 2a^4 + 2a^2x^2 - 2a^3x - 2ax^3 + a^2x^2 + x^4 - a^2x^2 + 2ax^3 - x^4$$

$$= 2a^4 + 2a^2x^2 - 2a^3x = 2a^2[a^2 - ax + x^2]$$

$$= 2a^2 \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right] \geq \frac{6a^4}{4}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm AA' .

Vậy khi M là trung điểm AA' thì $S_{BMD'N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

* Gọi β là số đo của nhị diện $[(BMD'), (A'B'D')]$ thì ta có $\beta < 90^\circ$ và

$$\cos \beta = \frac{S_{ABCD}}{S_{BMD'N}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

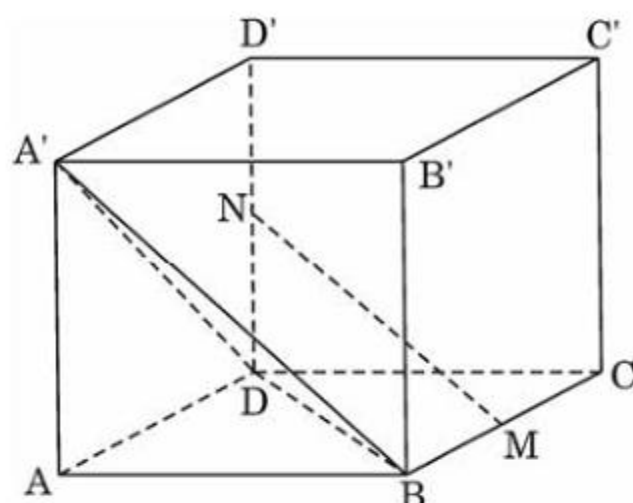
$$\Rightarrow \beta \text{ là góc nhọn có } \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DD' .

a) Chứng minh $MN \parallel (A'BD)$.

b) Tính khoảng cách giữa BD và MN theo a .

Giải



a) Xét hệ trục tọa độ Oxyz sao cho A trùng O, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; a)$.

Khi đó $C(a; a; 0)$ và $D'(0; a; a) \Rightarrow M(a; \frac{a}{2}; 0)$ và $N(0; a; \frac{a}{2})$.

Ta có : Phương trình mp($A'BD$) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$

$\Rightarrow (A'BD) : x + y + z - a = 0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2})$ và $\vec{n}_{(A'BD)} = (1; 1; 1)$.

Ta có: $x_M + y_M + z_M - a = -a \neq 0 \Rightarrow M \notin (A'BD)$

$\vec{n}_{(A'BD)} \cdot \overrightarrow{MN} = -a \cdot 1 + \frac{a}{2} \cdot 1 + \frac{a}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(A'BD)}$ và $\overrightarrow{MN}$ vuông góc nhau.

Vậy $MN \parallel (A'BD)$.

b) Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$

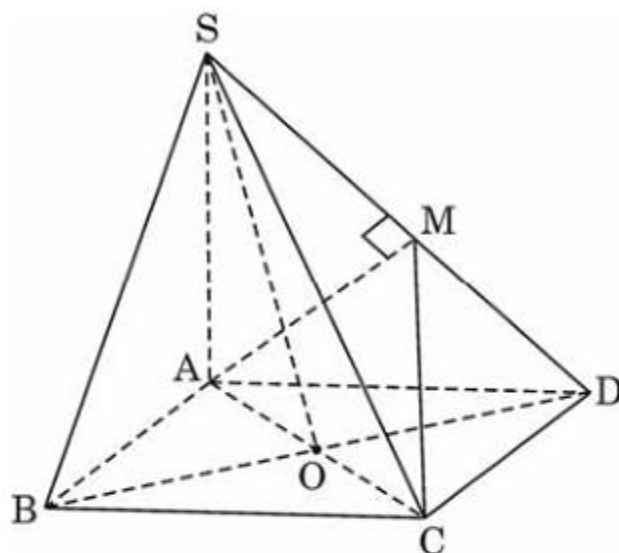
$$\overrightarrow{MN} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

$\Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}] = \left(\frac{a^2}{2}; \frac{a^2}{2}; \frac{a^2}{2}\right)$ và $\overrightarrow{BM} = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$

$$\Rightarrow d(BD; MN) = \frac{|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}] \cdot \overrightarrow{BM}|}{|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}]|} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\sqrt{3 \cdot \frac{a^4}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Bài 48. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mp (ABCD) và $SA = a$. Lấy điểm M thuộc cạnh SD sao cho mp(MAC) vuông góc với mp(SCD). Tính diện tích tam giác MAC theo a.

Giải



Ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$
 $\Rightarrow (ASD) \perp (SCD)$

mà $(MAC) \perp (SCD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$

$(ASD) \perp (SCD)$ và $(ASD) \cap (SCD) = SD$

$\Rightarrow AM \perp SD$ và $AM \perp MC$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác AMC vuông tại M nên $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

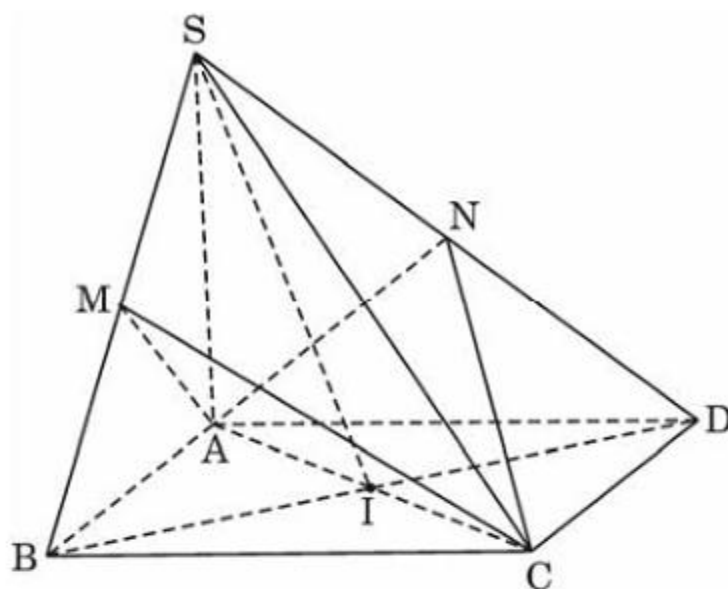
Vậy $S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{12}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Bài 49. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mp(ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Biết $(ACM) \perp (CAN)$, tính SA.

Giải

Đặt $SA = x$ ($x > 0$). Xét hệ trục Oxyz sao cho

$O \equiv A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $C(a; a; 0)$ và $S(0; 0; x)$.



Ta có : $M(\frac{a}{2} ; 0 ; \frac{x}{2})$, $N(0 ; \frac{a}{2} ; \frac{x}{2})$

$$\overrightarrow{AC} = (a ; a ; 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = (\frac{a}{2} ; 0 ; \frac{x}{2})$$

$$\overrightarrow{AN} = (0 ; \frac{a}{2} ; \frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(MAC)} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = \left(\frac{ax}{2} ; -\frac{ax}{2} ; -\frac{a^2}{2} \right)$$

$$\vec{n}_{(NAC)} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}] = \left(\frac{ax}{2} ; -\frac{ax}{2} ; \frac{a^2}{2} \right)$$

$$(MAC) \perp (NAC) \Leftrightarrow \vec{n}_{(MAC)} \cdot \vec{n}_{(NAC)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{4} + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{a^4}{4} = 0$$

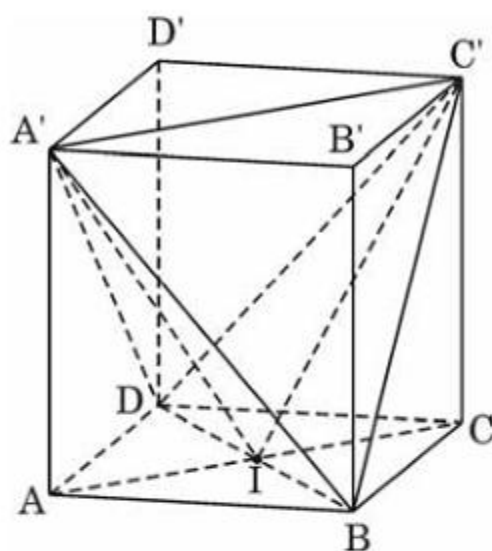
$$\Leftrightarrow 2a^2x^2 - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 50. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy a , thể tích hình lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo nhị diện $[A', BD, C']$.

Giải



Gọi I là giao điểm của AC và BD , ta có :

$$BD \perp IA' \text{ và } BD \perp IC' \Rightarrow BD \perp (IA'C')$$

$\Rightarrow \widehat{A'IC'}$ là góc phẳng của nhị diện $[A', BD, C']$.

Đặt $AA' = x$.

$$\text{Ta có : } V = a^2 \cdot x = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A'I^2 = C'I^2 = x^2 + AI^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = a^2$$

$$\cos \widehat{A'IC'} = \frac{A'I^2 + C'I^2 - A'C'^2}{2A'I \cdot C'I} = \frac{2a^2 - 2a^2}{2 \cdot a^2} = 0$$

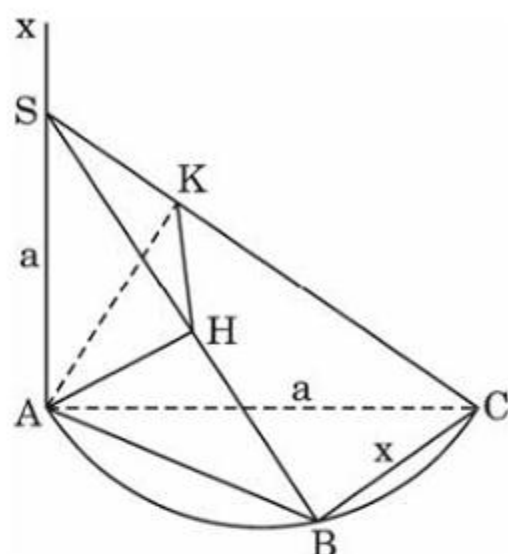
$$\Rightarrow \text{sđ}[A', BD, C'] = 90^\circ.$$

Bài 51. Trong mp(P) cho nửa đường tròn (C), đường kính AC. B là điểm bất kì trên nửa đường tròn (C) sao cho $BC = x$. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $SA = AC = a$. Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A đến SB, SC.

a) Chứng minh: tam giác SBC và tam giác AHK vuông.

b) Tính HK theo a và x.

Giải



$$a) \left[\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right] \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC \text{ vuông tại } B.$$

$$BC \perp (SAB) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK$$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại H.

b) Tính HK theo a và x

$$\text{Ta có } AK = \frac{1}{2} SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$AB^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{2a^2 - x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

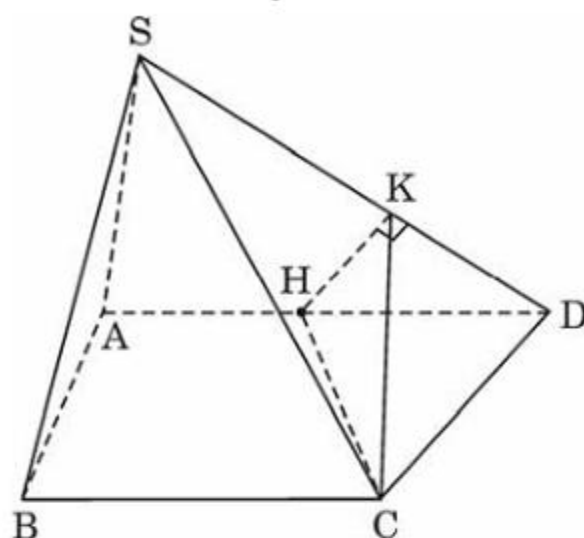
$$\Rightarrow AH^2 = \frac{a^2(a^2 - x^2)}{2a^2 - x^2}.$$

$$HK^2 = AK^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2(a^2 - x^2)}{2a^2 - x^2} = \frac{a^2 x^2}{2(2a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{ax}{\sqrt{2(2a^2 - x^2)}}.$$

Bài 52. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Cho biết nhị diện $[A, SD, C]$ có số đo là 60° . Tính thể tích hình chóp.

Giải



$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{(AD + BC).AB}{2} = \frac{(2a + a)a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Gọi H là trung điểm AD và K là hình chiếu của H trên SD. Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} CH \perp (SAD) \Rightarrow CH \perp SD \\ SD \perp HK \end{array} \right\} \Rightarrow SD \perp (CHK)$$

$\Rightarrow \widehat{CKH}$ là góc phẳng của nhị diện $[A, SD, C]$

$$\Rightarrow \widehat{CKH} = 60^\circ \Rightarrow HK = CH \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \triangle SAD \sim \triangle HKC \Rightarrow \frac{SA}{HK} = \frac{SD}{HC} = \frac{SD}{HD}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{SD}{HD} \cdot HK = \frac{a\sqrt{5}}{a} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{3} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}.$$

Bài 53. Trong mp(P), cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại B và C, lần lượt lấy hai điểm D và E cùng phía đối với (P) sao cho

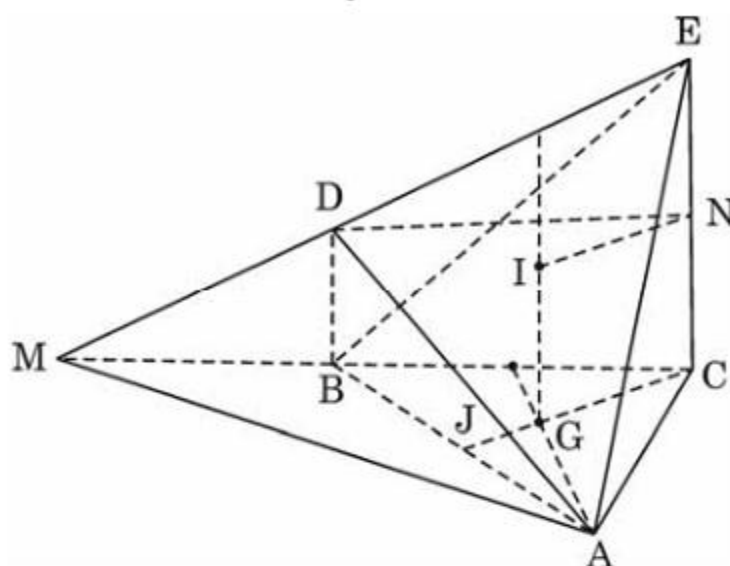
$$BD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } CE = a\sqrt{3}.$$

a) Tính AD, AE, DE theo a.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE.

c) Gọi M là giao điểm của DE và BC. Chứng minh $AM \perp (ACE)$ và tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (ABC).

Giải



a) Tính AD, AE, DE theo a

* $\triangle ABD$ vuông tại B

$$\Rightarrow AD^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

* $\triangle ACE$ vuông tại C

$$\Rightarrow AE^2 = AC^2 + CE^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AE = 2a.$$

* Gọi N là trung điểm CE. Ta có $\triangle DNE$ vuông tại N

$$\Rightarrow ED^2 = ND^2 + NE^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Rightarrow ED = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

b) Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Dựng đường thẳng $d \perp (ABC)$ và qua G, ta có d là trục của $\triangle ABC$.

Trong mặt phẳng $mp(d, CE)$ dựng đường trung trực của CE, cắt d tại I.

Ta có : $I \in d \Rightarrow IA = IB = IC$.

$I \in$ trung trực của CE $\Rightarrow IC = IE$.

Do đó $IA = IB = IC = IE \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện ABCE.

$$\text{Ta có : } R = IC = \sqrt{GC^2 + NC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

c) Ta có BD là đường trung bình của $\Delta MCE \Rightarrow B$ là trung điểm MC

$\Rightarrow BM = BA = BC \Rightarrow \Delta MAC$ vuông tại A

$\Rightarrow AM \perp AC$ (1)

mà $CE \perp (ABC) \Rightarrow AM \perp CE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM \perp (ACE)$.

Vì $AM = (ADE) \cap (ABC)$ mà $(ACE) \perp AM \Rightarrow \widehat{(ADE), (ABC)} = \widehat{EAC}$.

Ta có : $\tan \widehat{EAC} = \frac{CE}{CA} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{(ADE), (ABC)} = 60^\circ$.

Bài 54. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, biết $AB = 4a$; $AD = 5a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $AM = 2a$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD) trùng với trung điểm H của BM và góc giữa SA với (ABCD) bằng 60° .

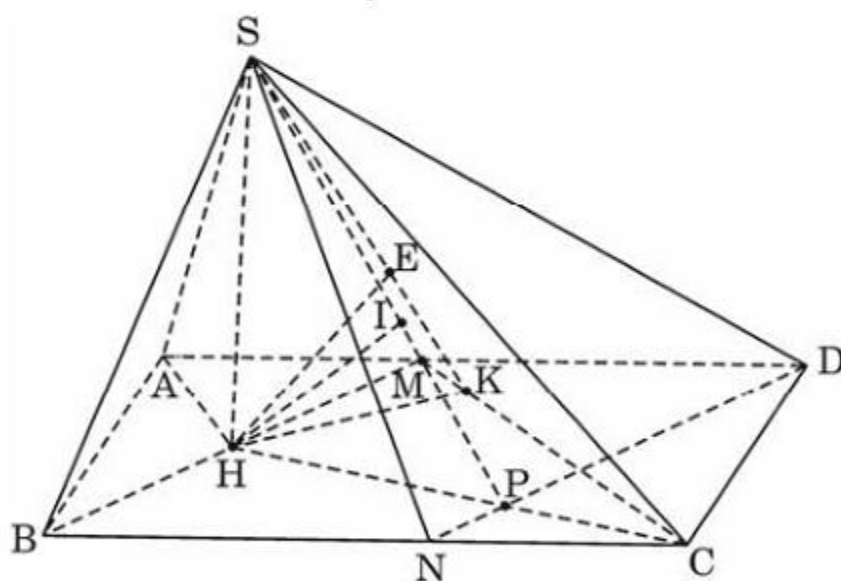
a) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

b) Tính thể tích của khối chóp S.MHCD.

c) Tính khoảng cách từ H đến (SMC).

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD.

Giải



a) Tính $V_{S.ABCD}$.

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{SAH} = 60^\circ$

$AH = \frac{1}{2}BM = a\sqrt{5} \Rightarrow SH = AH \tan 60^\circ = a\sqrt{15}$.

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 20a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{20a^3\sqrt{15}}{3}.$$

b) Tính $V_{S.MHCD}$.

$$CM^2 = CD^2 + DM^2 = 25a^2 \Rightarrow CM = 5a = CB$$

$$\Rightarrow \Delta CMB \text{ cân tại } C \Rightarrow CH \perp MB$$

$$\Rightarrow CH^2 = CB^2 - BH^2 = 20a^2 \Rightarrow CH = 2a\sqrt{5}.$$

$$S_{MHCD} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{BHC} = 20a^2 - 4a^2 - 5a^2 = 11a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{S.MHCD} = \frac{1}{3} \cdot 11a^2 \cdot a\sqrt{15} = \frac{11a^3\sqrt{15}}{3}.$$

c) Tính $d(H; (SMC))$.

Dựng $HK \perp CM$ tại K và $HE \perp SK$ tại E .

Ta có $HE \perp (SCM) \Rightarrow d(H; SCM) = HE$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{HE^2} &= \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HC^2} \\ &= \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{5a^2} + \frac{1}{20a^2} = \frac{19}{60a^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{19}}.$$

d) Tính $d(BM; SD)$.

Gọi N là điểm trên BC sao cho $BN = 3a \Rightarrow BM \parallel DN \Rightarrow BM \parallel (SND)$

$$\Rightarrow d(BM; SD) = d(BM; (SDM)) = d(H; (SDM)).$$

Gọi $P = ND \cap HC$. Dựng $HI \perp SP$. Chứng minh được $HI \perp (SMD)$

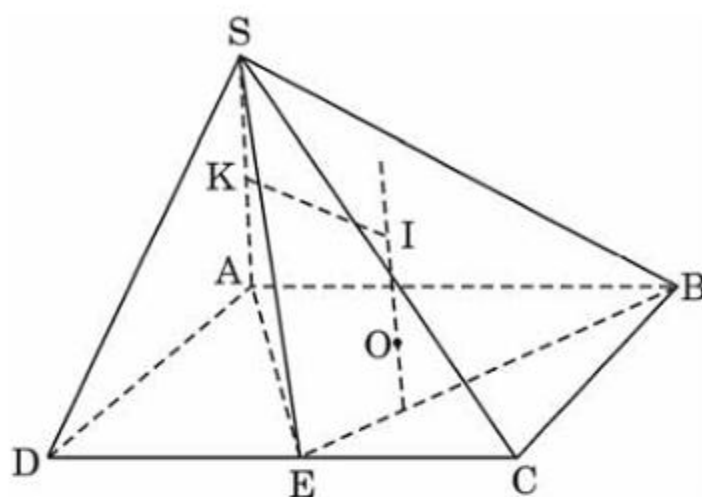
$$\Rightarrow d(H; (SMD)) = HI.$$

Bài 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, biết $AB = 2a$; $AD = a\sqrt{3}$. SA vuông góc với $(ABCD)$, ΔSBC vuông tại B và góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Gọi E là trung điểm của CD . Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABE$.

Giải



a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$BC \perp SB ; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB$$

$\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2\sqrt{3}.$$

$$CD \perp AD \text{ và } CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow SD \perp CD \text{ mà } AD \perp CD$$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA} = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó } SA = AD.\tan 60^\circ = 3a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.2a^2\sqrt{3}.3a = 2a^3\sqrt{3}.$$

b) Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABE .

Ta có $AE = BE = 2a$ nên $\triangle ABE$ là tam giác đều.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$.

Dựng d là đường thẳng qua O và song song với SA $\Rightarrow d \perp (ABE)$ tại O

$\Rightarrow$ d là trục $\triangle ABE$.

Trong mp(SA, d) dựng trung trực của SA, cắt d tại I và SA tại K là trung điểm SA.

Khi đó : $I \in d \Rightarrow IA = IB = IE$.

$$I \in \text{trung trực của SA} \Rightarrow IS = IA.$$

Suy ra $IS = IA = IB = IE \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABE.

$$* \text{ Ta có } OA = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

$$IO = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Do đó : } R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{4a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{43}}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu là } S = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{43a^2}{12} = \frac{43\pi a^2}{9}.$$

Bài 56. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60° .

a) Tính thể tích của hình chóp S.ABCD.

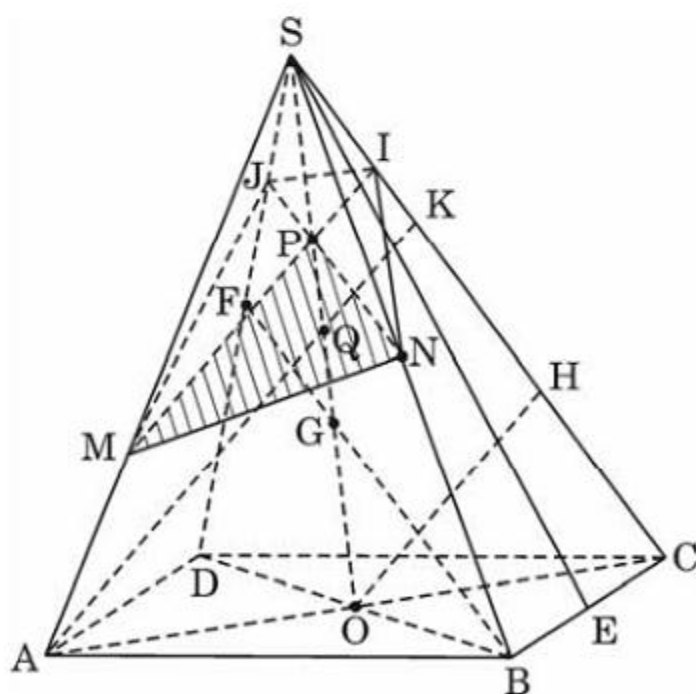
b) Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC).

c) Trên các cạnh SA, SB và SO lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho

$$\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}; \frac{SP}{SO} = \frac{1}{3}; \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2}.$$

Mặt phẳng (MNP) chia hình chóp S.ABCD thành hai khối đa diện. Tìm một tỉ số giữa thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải



a) Vì S.ABCD là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow$ SA có hình chiếu trên mp(ABCD) là OA.

Do đó $\widehat{(\overline{SA}, (\overline{ABCD}))} = \widehat{SAO} = 60^\circ$.

ΔSOA vuông tại $O \Rightarrow SO = AO \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

b) Ta có $SA = AC = a\sqrt{2}$.

Gọi E là trung điểm BC thì

$$SE = \sqrt{SB^2 - BE^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SE = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot d(A; (SBC))$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{6}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

c) Gọi $I = MP \cap SC$ và $J = NP \cap SD$. Khi đó (MNP) chia hình chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện là $SMNIJ$ và $ABCD.MNIJ$.

Gọi G là trọng tâm ΔSBD , F là trung điểm SD .

Ta có : P là trung điểm SG nên $BF \parallel NJ \Rightarrow \frac{SJ}{SF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SJ}{SD} = \frac{1}{4}$.

Qua A kẻ đường thẳng song song với MI , cắt SO và SC lần lượt tại Q và K .
Qua O kẻ đường thẳng song song MI , cắt SC tại H .

Ta có : H là trung điểm của CK .

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{3}{2} \Rightarrow SQ = \frac{3}{2} SP = \frac{3}{2} \cdot \frac{SO}{3} = \frac{SO}{2}$$

$\Rightarrow Q$ là trung điểm của $SO \Rightarrow K$ là trung điểm SH

$$\Rightarrow SK = \frac{1}{3} SC \Rightarrow \frac{SI}{SC} = \frac{SI}{SK} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích của hai khối đa diện trên.

Ta có : $V_1 = V_{SMNI} + V_{SMJI}$.

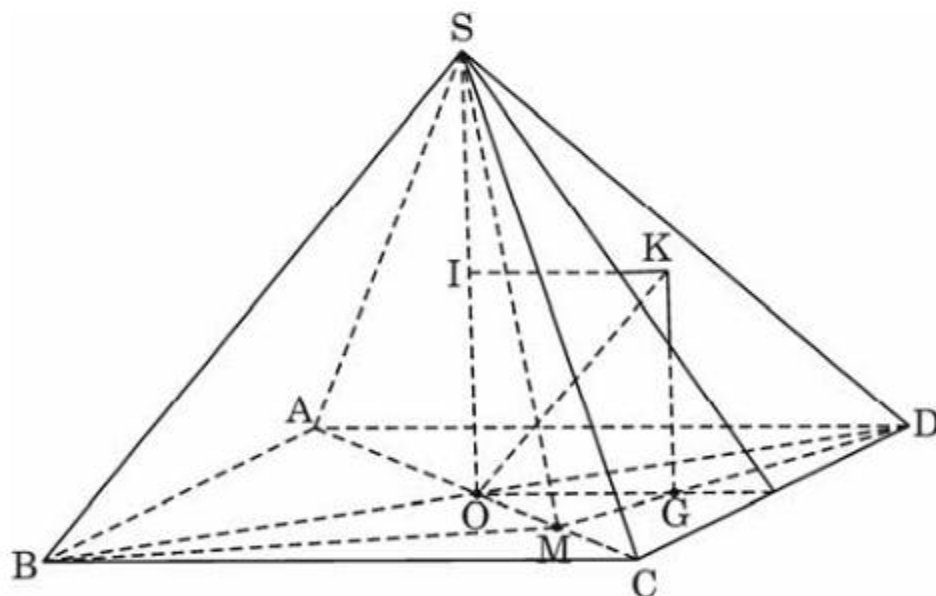
$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V_{SABCD}} &= \frac{V_{SMNI}}{V_{SABCD}} + \frac{V_{SMJI}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{SMNI}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SMJI}}{V_{SADC}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SI}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SJ}{SD} \cdot \frac{SI}{SC} \right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_{SABCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{27} + \frac{1}{27} \right) = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{17}.$$

Bài 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $AB = 2a$, $AD = 2a\sqrt{3}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng $3a$, gọi M là trung điểm của OC . Tính thể tích khối chóp $S.ABMD$ và diện tích của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SOCD$.

Giải



* Ta có $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

$\triangle SOA = \triangle SOD$ nên $OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = 4a^2\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{4a^3 \sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABMD} = \frac{3}{4} V_{S.ABCD} = a^3 \sqrt{15}.$$

* Gọi G là trọng tâm tam giác OCD, vì $\triangle OCD$ đều nên G cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OCD$.

Dựng đường thẳng d qua G và song song với SO thì $d \perp (ABCD)$ nên d là trục của $\triangle OCD$.

Trong mp(SOG) dựng đường trung trực của SO, cắt d tại K cắt SO tại I.

Ta có: IK là trung trực của SO $\Rightarrow KO = KS$ mà $KO = KC = KD$ nên K là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOCD.

$$\text{Ta có : } GO = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$R = KO = \sqrt{OI^2 + OG^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} + \frac{4a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{31}}{\sqrt{12}}.$$

$$\text{Do đó } S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{31a^2}{12} = \frac{31\pi a^2}{3}.$$

Bài 58. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có một đáy là tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu của A' trên mặt (ABC) là trung điểm H của AC. Góc giữa $A'B$ với mp(ABC) bằng 60° .

- Tính thể tích của khối tứ diện $A'ABC$ và thể tích của khối chóp $A'.BB'C'C$.
- Tính diện tích xung quanh của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- Tính khoảng cách giữa AA' và mp($BB'C'C$).
- Mặt phẳng (α) qua C và vuông góc với AA' chia tứ diện $A'ABC$ thành hai khối đa diện. Hãy tìm tỉ số giữa thể tích của hai khối đa diện đó.

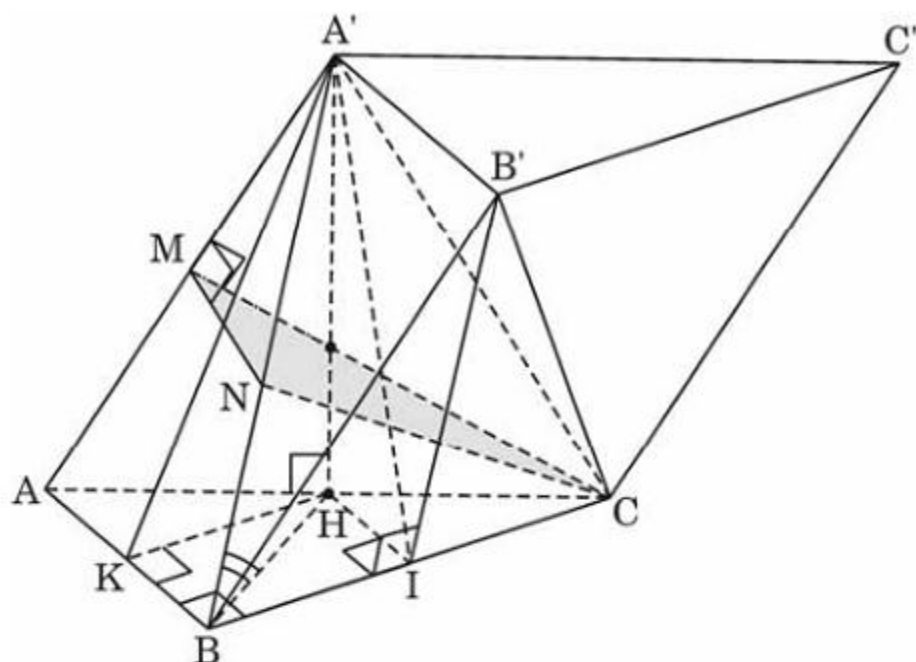
Giải

a) * Ta có : $A'H$ vuông góc mp(ABC)

$\Rightarrow BH$ là hình chiếu của BA' trên (ABC)

$$\Rightarrow \widehat{(BA', (ABC))} = \widehat{(BA', BH)} = \widehat{HBA'} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A'H = BH \tan 60^\circ = HC \tan 60^\circ \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}.$$



Thể tích khối tứ diện là $V_{A'ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot A'H$
 $= \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = \frac{a^3}{2}.$

* $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot A'H = \frac{3a^3}{2}.$

Do đó : $V_{A'.BB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'ABC} = a^3.$

b) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$\Delta A'AC$ là tam giác đều cạnh $2a$

$$\Rightarrow S_{A'AC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{AA'C'C} = 2a^2 \sqrt{3}.$$

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có :

$HI \parallel AB$ mà $AB \perp BC$

$$\Rightarrow BC \perp HI \text{ mà } BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (A'HI) \Rightarrow BC \perp B'I$$

$$\Rightarrow B'I^2 = B'B^2 - BI^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow B'I = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do đó : } S_{BB'C'C} = BC \cdot B'I = a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{39}}{2}.$$

Gọi K là trung điểm AB $\Rightarrow A'K \perp AB.$

$$\text{Ta có } A'K = \sqrt{A'B^2 - BK^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABB'A'} = A'K \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{\text{xp lăng trụ}} = 2a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{39}}{2} + \frac{a^2\sqrt{15}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}(4 + \sqrt{13} + \sqrt{5})}{2}.$$

c) Tính khoảng cách giữa AA' và $mp(BB'C'C)$.

Ta có: $AA' \parallel (BB'C'C)$ nên

$$\begin{aligned} d(AA', (BB'C'C)) &= d(A'; (BB'C'C)) \\ &= \frac{3V_{A'BB'C'C}}{S_{BB'C'C}} = \frac{3a^3 \cdot 2}{a^2\sqrt{39}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

d) Gọi M là trung điểm AA' . Ta có :

$\triangle A'AC$ đều nên $CM \perp AA' \Rightarrow (\alpha)$ qua CM .

Gọi $N = A'B \cap (\alpha)$ thì $MN \perp A'A$ tại M .

$mp(\alpha)$ chia khối tứ diện $A'ABC$ thành hai khối đa diện : $A'CMN$ và $CMNBA$.

$$\triangle A'AB \text{ có } \cos \widehat{AA'B} = \frac{A'A^2 + A'B^2 - AB^2}{2A'A \cdot A'B} = \frac{2.4a^2 - a^2}{2.2a \cdot 2a} = \frac{7}{8}$$

$$\text{mà } \cos \widehat{AA'B} = \frac{A'M}{A'N} \Rightarrow A'N = \frac{8A'M}{7} = \frac{8a}{7}.$$

$$\text{Ta có : } \frac{V_{A'CMN}}{V_{A'CAB}} = \frac{A'M}{A'A} \cdot \frac{A'N}{A'B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8a}{7} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{A'CMN}}{V_{C.MNBA}} = \frac{2}{5}.$$

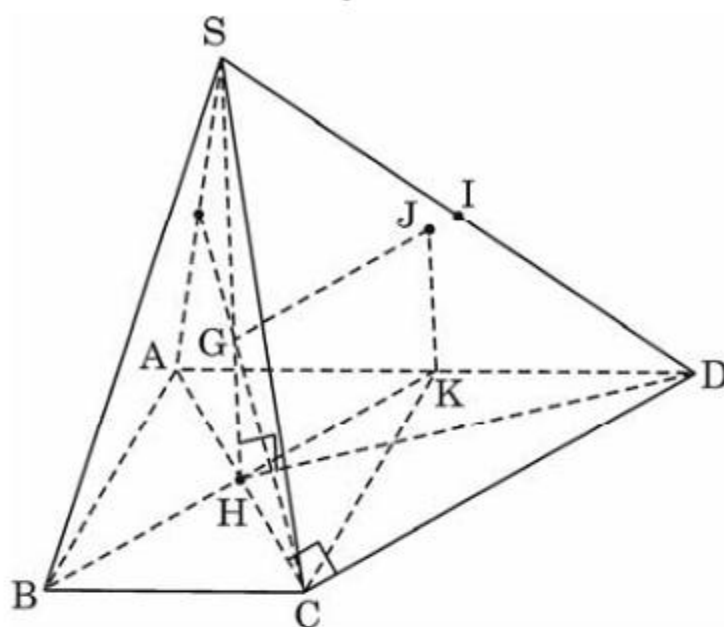
Bài 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với cạnh đáy lớn là AD , tam giác ABC đều cạnh $3a$ và tam giác ACD vuông tại C . Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AC .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

b) Xác định tâm và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SHCD$.

c) Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$.

Giải



a) ΔSAC đều có H là trung điểm $AC \Rightarrow SH \perp AC$.

$$\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAC) \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có $SH = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

ΔACD vuông tại C và $\widehat{CAD} = 60^\circ \Rightarrow AD = 2AC = 6a$.

Độ dài đường cao hình thang là $d(A; BC) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot d(A; BC) = \frac{9a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{27a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{81a^3}{8}.$$

b) $CD \perp HC$ và $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHC)$

$\Rightarrow SC \perp CD \Rightarrow \widehat{SCD} = 90^\circ$.

Lại có $SH \perp HD \Rightarrow \widehat{SHD} = 90^\circ$.

Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp $SHCD$ chính là trung điểm I của SD .

Ta có : $CD = AC \tan 60^\circ = 3a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow HD^2 = HC^2 + DC^2 = \frac{9a^2}{4} + 27a^2 = \frac{117a^2}{4}.$$

$$SD^2 = SH^2 + HD^2 = \frac{27a^2}{4} + \frac{117a^2}{4} = 36a^2$$

$$\Rightarrow SD = 6a \Rightarrow R_{(SHCD)} = 3a.$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SHCD có diện tích là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi.(3a)^2 = 36\pi a^2.$$

c) Gọi K là trung điểm AD thì K là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔACD .
Dựng $d \parallel SH$ và qua K thì d là trục của ΔACD .

Vì $AK \parallel BC$ và $AK = BC = AB \Rightarrow AKCB$ là hình thoi $\Rightarrow BK \perp AC$ nên $BK \parallel CD$.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAC .

Dựng Δ qua G và song song với $BK \Rightarrow \Delta \perp (SAC)$ tại G

$\Rightarrow \Delta$ là trục ΔSAC .

Ta có Δ cắt d tại J. Khi đó J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ACD.

$$R_{(SACD)} = \sqrt{CK^2 + KJ^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{2}.$$

$$\Rightarrow V_{\text{cầu}} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{39}}{2}\right)^3 = \frac{13\pi a^3 \sqrt{39}}{2}.$$

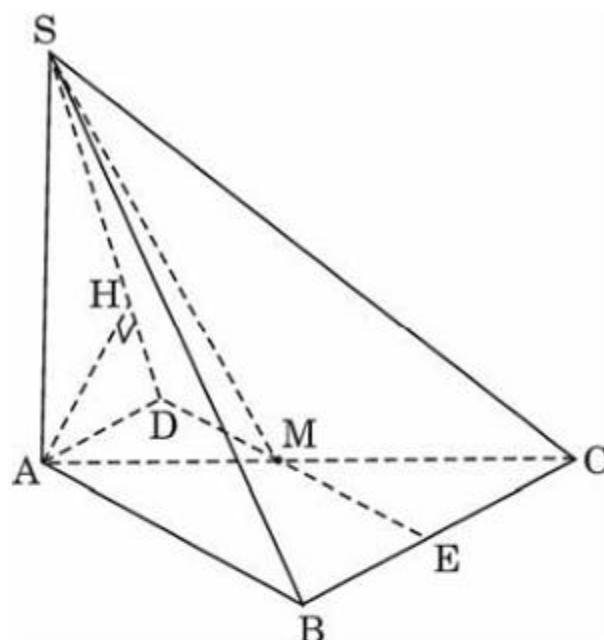
Bài 60. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc hợp bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng 60° ; M là trung điểm của AC. Biết khoảng cách giữa SM và AB bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Giải

Ta có (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) suy ra SA vuông góc với (ABC).

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\widehat{BSC} = 60^\circ$$



Gọi E là trung điểm của BC. Vẽ hình chữ nhật ADEB. Ta có :

$$\begin{cases} DE \perp AD \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAD).$$

Vẽ đường cao AH của tam giác vuông SAD, ta có :

$$\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp DE \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SDE).$$

Do $AB \parallel (SDE)$ nên : $d(AB ; SM) = d(A ; (SME)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Đặt $BC = x$, ta có $AD = BE = \frac{x}{2}$, $SB = BC \cdot \cot 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

$$SA^2 = SB^2 - AB^2 = \frac{x^2}{3} - a^2 (x^2 > 3a^2).$$

Trong tam giác vuông SAD ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{2}{3a^2} = \frac{3}{x^2 - 3a^2} + \frac{4}{x^2} \\ &\Leftrightarrow 2x^4 - 27a^2x^2 + 36a^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12a^2 \\ x^2 = \frac{3a^2}{2} < 3a^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 2a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $SA = a\sqrt{3}$.

Vậy, thể tích khối chóp S.ABC là :

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} a \cdot 2a \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = a^3.$$

Bài 61. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$. Cạnh SA vuông góc với (ABC). Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° .

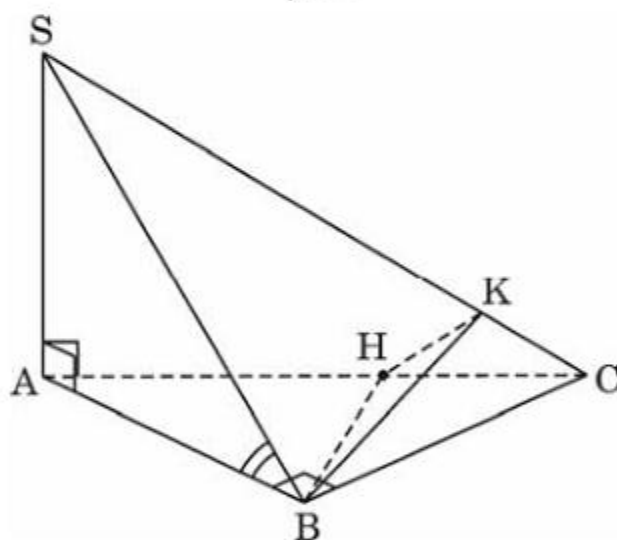
a) Tính thể tích của hình chóp S.ABC.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp và thể tích khối cầu ngoại tiếp của hình chóp S.ABC.

c) Gọi (T) là hình trụ có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC và có một đường sinh là SA. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ (T).

d) Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với SC chia hình chóp SABC thành hai khối đa diện. Hãy tính tỉ số giữa thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải



a) Ta có : $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow SB \perp BC$, mà $AB \perp BC \Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{(SBC), (ABC)} = 60^\circ$.

Trong $\triangle SAB$ vuông tại A, ta có : $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$.

$$\text{Do đó : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

b) Ta có : $\widehat{SBC} = 90^\circ$; $\widehat{SAC} = 90^\circ$.

Do đó hình chóp S.ABC nội tiếp mặt cầu đường kính là SC.

$$\text{Ta có : } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{13} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do đó : } S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{13}}{2} \right)^2 = 13\pi a^2.$$

$$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{13}}{2} \right)^3 = \frac{13\sqrt{13}\pi a^3}{6}.$$

c) Vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên bán kính đáy hình trụ là $R_{\text{trụ}} = \frac{AC}{2} = a$.

Đường sinh là $l = SA = 3a$.

$$S_{\text{xq trụ}} = \pi R l = \pi a \cdot 3a = 3\pi a^2.$$

$$V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3.$$

d) Vẽ $BH \perp AC$ tại H, $HK \perp SC$ tại K.

Ta có $(BHK) \perp SC \Rightarrow (P)$ chính là (BHK) .

$$\text{Vì } CH \cdot CA = CB^2 \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CB^2}{CA^2} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\triangle SBC \text{ vuông tại B} \Rightarrow \frac{CK}{CS} = \frac{CB^2}{CS^2} = \frac{a^2}{13a^2} = \frac{1}{13}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{V_{\text{CBHK}}}{V_{\text{CBAS}}} = \frac{CH}{CA} \cdot \frac{CK}{CS} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52} \Rightarrow \frac{V_{\text{CBHK}}}{V_{\text{ABHKS}}} = \frac{1}{51}.$$

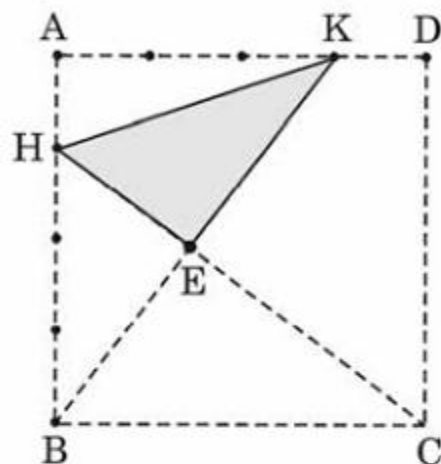
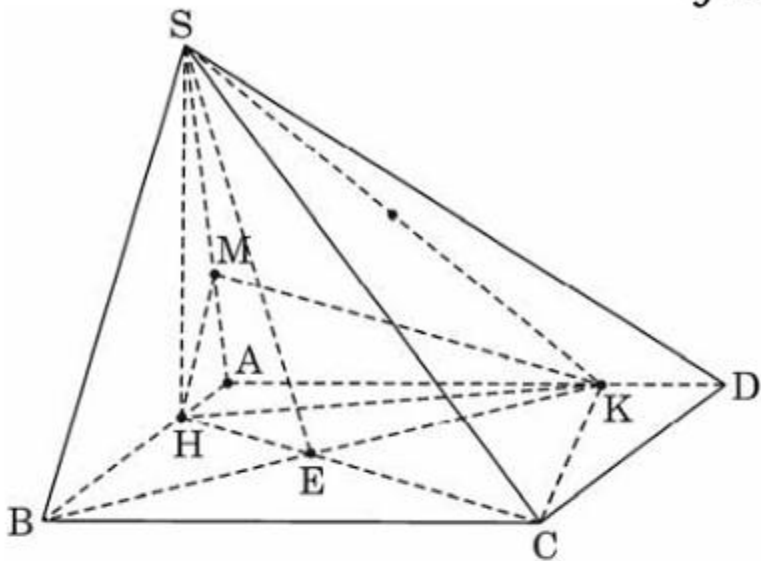
Bài 62. Cho hình vuông ABCD cạnh 4a. Trên cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm H và K sao cho $BH = 3HA$ và $AK = 3KD$. Trên đường thẳng d vuông góc với $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK.

a) Tính thể tích của hình chóp S.ABCD và thể tích hình chóp S.BHKC.

b) Chứng minh 5 điểm S, A, H, E và K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp của hình chóp S.AHEK.

c) Gọi M là hình chiếu của H trên cạnh SA. Tính thể tích của hình chóp M.AHEK.

Giải



a) Tính thể tích của hình chóp $S.ABCD$ và thể tích hình chóp $S.BHKC$.

ΔSHB vuông tại H có $\widehat{SBH} = 30^\circ$ nên $SH = BH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$.

$$S_{ABCD} = AB^2 = 16a^2.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{16a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Theo giả thiết ta có : $BH = 3a$; $HA = a$; $AK = 3a$ và $KD = a$.

$$S_{\text{BHKC}} = S_{\text{ABCD}} - S_{\text{AHK}} - S_{\text{CDK}}$$

$$= (4a)^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a - \frac{1}{2} a \cdot 4a = 16a^2 - \frac{3a^2}{2} - 2a^2 = \frac{25}{2} a^2.$$

$$\text{Ta có } V_{S.BHKC} = \frac{1}{3} S_{BHKC} . SH = \frac{1}{3} . a\sqrt{3} . \frac{25}{2} a^2 = \frac{25\sqrt{3}a^3}{6}.$$

b) Ta có : $AD \perp AB$ và $AD \perp SH$ nên $AD \perp SA \Rightarrow \widehat{SAK} = 90^\circ$.

$SH \perp HK$ nên $\widehat{SHK} = 90^\circ$.

$CH \perp BK$ và $BK \perp SH$ nên $BK \perp (SKE) \Rightarrow \widehat{SEK} = 90^\circ$.

Vây hình chóp S.AHEK nội tiếp mặt cầu có đường kính là SK.

Ta có $SK^2 = SH^2 + HK^2 = 3a^2 + 10a^2 = 13a^2 \Rightarrow SK = a\sqrt{13}$.

$$R_{\text{cầu}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{\text{cầu}} = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{13}}{2} \right)^3 = \frac{13\pi a^3 \sqrt{13}}{6}.$$

c) Gọi M là hình chiếu của H trên cạnh SA. Ta có :

$$\frac{d(M; (ABCD))}{d(S; (ABCD))} = \frac{AM}{AS} = \frac{AM \cdot AS}{AS^2} = \frac{AH^2}{AS^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(M; (ABCD))}{SH} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(M; (ABCD)) = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có : } \triangle BEH \sim \triangle BAK \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BK}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BK} = \frac{BH \cdot BA}{BK^2} = \frac{3a \cdot 4a}{25a^2} = \frac{12}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BEH}}{S_{BAK}} = \frac{BH}{BA} \cdot \frac{BE}{BK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{AHEK}}{S_{ABK}} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow S_{AHEK} = \frac{16}{25} \cdot S_{BAK} = \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a = \frac{96a^2}{25}.$$

$$\text{Do đó } V_{M.AHEK} = \frac{1}{3} S_{AHEK} \cdot d(M; ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{96a^2}{25} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{16a^3\sqrt{3}}{25}.$$

Bài 63. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành cạnh $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên $(ABB'A')$ vuông góc với $(ABCD)$, $\triangle A'AB$ đều và $\triangle A'CA$ cân tại C.

a) Tính thể tích của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Xác định tâm I và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABCD$.

Giải

a) Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật, Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Gọi H là trung điểm AB. Vì $\triangle A'AB$ đều nên $A'H \perp AB$.

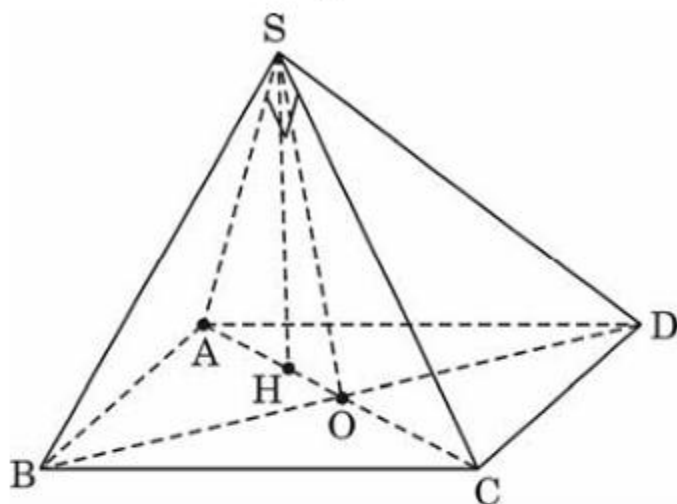
Ta có : $(A'AB) \perp (ABCD)$,

$$AB = (A'AB) \cap (ABCD) \text{ và}$$

$$A'H \perp AB \Rightarrow A'H \perp (ABCD).$$

Bài 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tam giác SAB và tam giác SAD đều, $SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Giải



Gọi $O = AC \cap BD$.

$DB \perp AC$ và $BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Dựng $SH \perp AC$ tại H thì $SH \perp (ABCD)$.

Ta có : $\triangle SBD = \triangle ABD \Rightarrow SO = OA = OC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S

$$\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = a\sqrt{3}.$$

$$SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

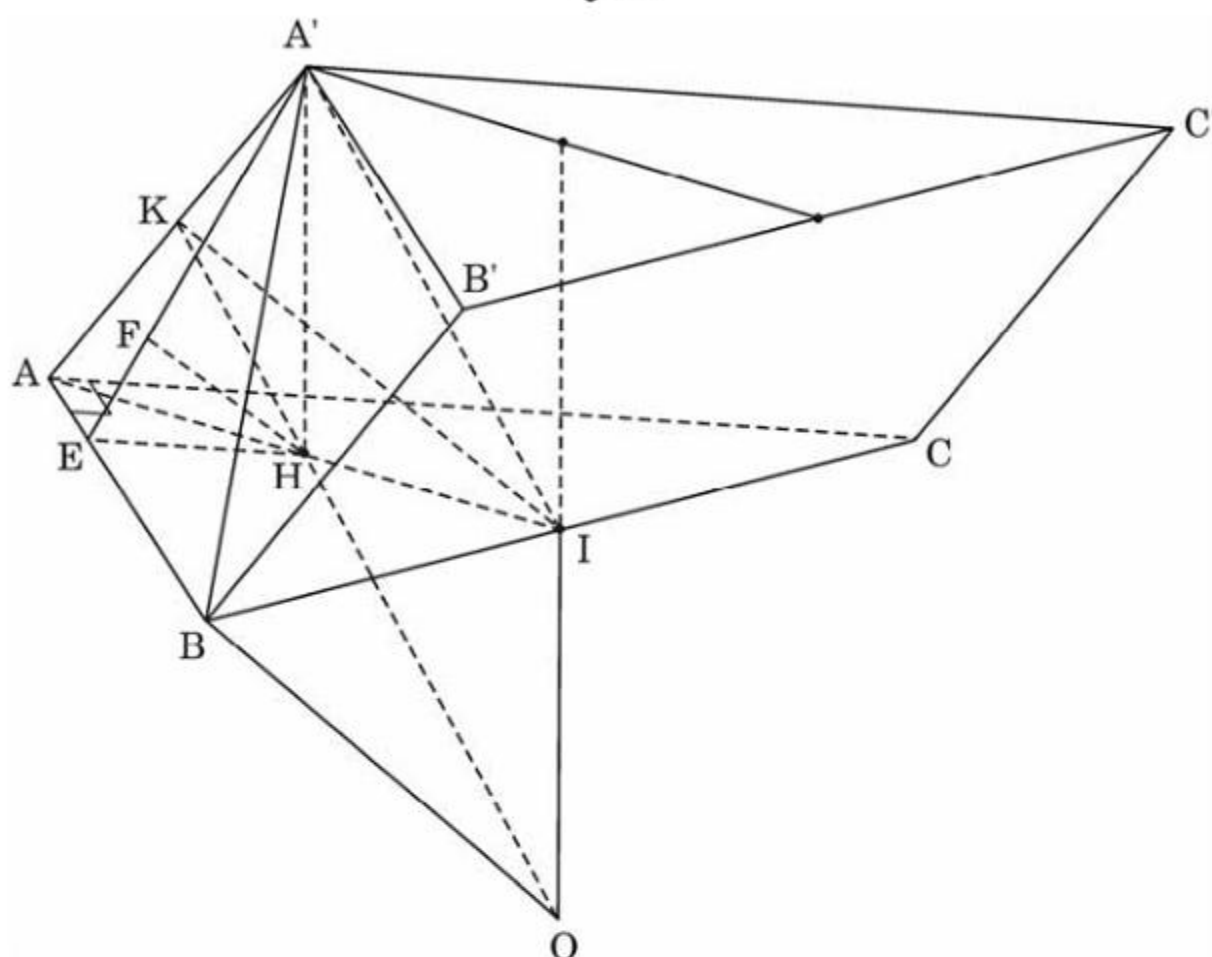
$$\Rightarrow BD = a \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Bài 65. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , cạnh $AB = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm BC . Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) trùng với trung điểm H của AI .

- Tính thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối chóp $A'.BCC'B'$.
- Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' .

Giải



a) Tính $V_{ABC.A'B'C'}$ và $V_{A'.BCC'B'}$.

$$* AC = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}; BC = 4a$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}.$$

* AI là trung tuyến của ΔABC vuông tại A $\Rightarrow AI = 2a \Rightarrow AH = a$.

$$\text{Do đó } A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = 2a^3\sqrt{3}.$$

$$V_{A'.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

b) Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$.

* Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Dựng đường thẳng d qua I và song song $A'H$ thì d vuông góc với mp(ABC) tại I $\Rightarrow d$ là trục của tam giác ABC.

Ta có $HA' = HA \Rightarrow \Delta HAA'$ cân tại H. Gọi K là trung điểm $AA' \Rightarrow HK$ là trung trực của AA' .

Trong (AA'H), HK cắt d tại O.

Ta có $O \in HK \Rightarrow OA' = OA$; $O \in d \Rightarrow OA = OB = OC$.

Do đó $OA' = OA = OB = OC \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A'ABC.

* Ta có A'HOI là hình bình hành $\Rightarrow IO = A'H = a$.

Trong tam giác IBO vuông tại I, ta có :

$$OB^2 = IO^2 + BI^2 = 5a^2 \Rightarrow R = OB = a\sqrt{5}.$$

Vậy $S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2 = 20\pi a^2$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và CC'.

$$CC' // AA' \Rightarrow CC' // (A'AB)$$

$$\Rightarrow d(CC'; A'B) = d(CC'; (A'AB)) = d(C; (A'AB)).$$

CI cắt (A'AB) tại B và I là trung điểm BC

$$\Rightarrow d(C; (A'AB)) = 2d(I; (A'AB)).$$

HI cắt (A'AB) tại A và H là trung điểm IA

$$\Rightarrow d(I; (A'AB)) = 2d(H; (A'AB)).$$

Trong (ABC) dựng $HE \perp AB$ tại E, $HF \perp A'E$ tại F. Ta có :

$AB \perp A'H$ và $AB \perp HE \Rightarrow AB \perp (A'HE) \Rightarrow AB \perp HF$ mà $A'E \perp HF$

$$\Rightarrow HF \perp (A'AB) \Rightarrow d(H; (A'AB)) = HF.$$

$$HE = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

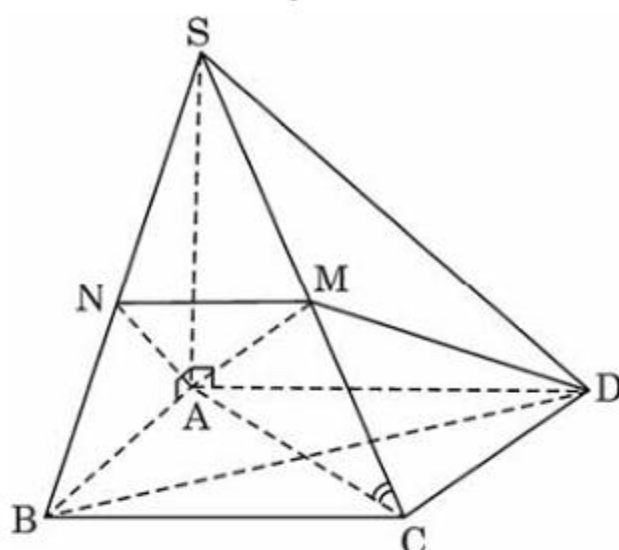
$$\text{Vậy } d(CC'; A'B) = 4d(H; (A'AB)) = \frac{4a\sqrt{21}}{7}.$$

Bài 66. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt đáy (ABCD). SC tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Tìm điểm M thuộc đoạn SC sao cho mặt phẳng (MAD) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải



$$a) \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

$$SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{15}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{15} \cdot 2a^2 = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$$

b) Lấy điểm N trên SB sao cho $MN \parallel BC$. Đặt $\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SB} = x$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_{SANM}}{V_{SABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = x^2$$

$$\frac{V_{SAMD}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC} = x$$

$$\Rightarrow V_{SANMD} = V_{SANM} + V_{SAMD} = \frac{1}{2}(x + x^2)V_{S.ABCD}$$

Mặt phẳng (MAD) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau

$$\Leftrightarrow V_{SANMD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + x^2)V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

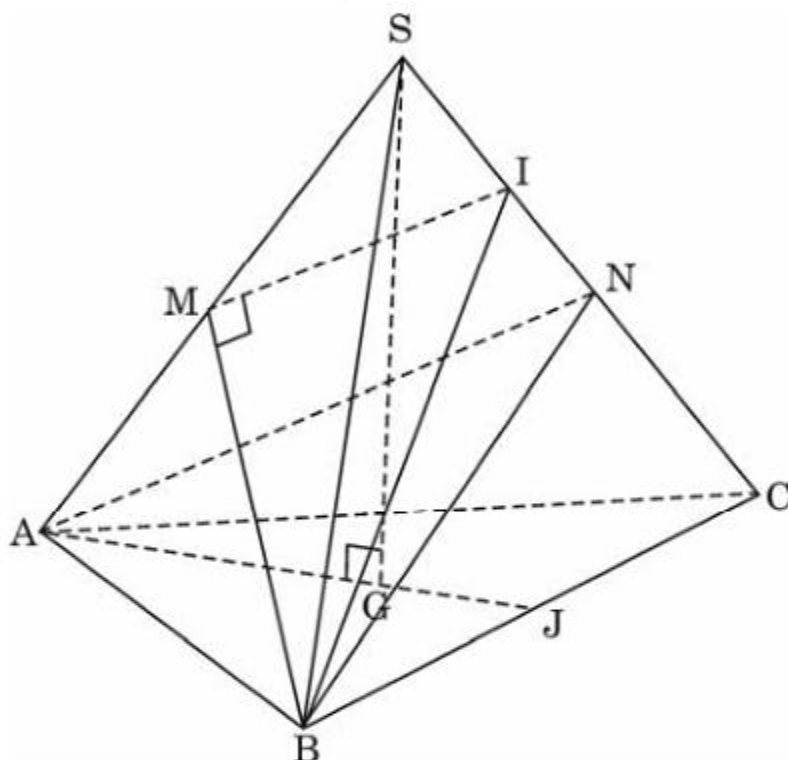
$$\Leftrightarrow x + x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Vậy để điểm M thuộc đoạn SC chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau, ta phải có $\frac{SM}{SC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài 67. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Tính thể tích khối chóp S.ABC, biết BM vuông góc với AN.

Giải



Đặt $x = SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của đoạn SN, ta có $MI \parallel AN$. Dùng công thức tính độ dài trung tuyến tính BM, MN, BI theo a và x.

Ta có : $BM \perp AN \Leftrightarrow BM \perp MI$

$$\Leftrightarrow BM^2 + MI^2 = BI^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}.$$

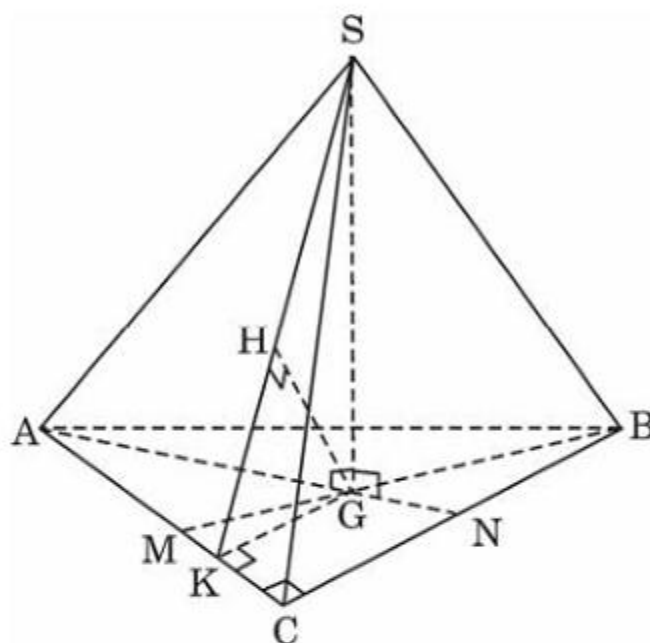
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SG = \frac{a^3 \sqrt{14}}{24}.$$

Bài 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh huyền $AB = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy là trọng tâm G của tam giác ABC , cạnh bên $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAB) .

Giải



a) $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SG = \frac{3a^3}{4}$.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của G xuống AC . Trong tam giác vuông SGK vẽ đường cao GH . Ta có :

$$d(B ; (SAC)) = 3d(G ; (SAC)) = 3GH = a\sqrt{3}.$$

Mục lục

	Trang
Lời nói đầu	3
PHẦN MỘT. LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	5
Chương 1. HÌNH LĂNG TRỤ	5
Chương 2. HÌNH HỘP	15
Chương 3. HÌNH CHÓP	21
Chương 4. HÌNH CẦU	34
Chương 5. HÌNH TRỤ	41
Chương 6. HÌNH NÓN	47
Chương 7. CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH	56
Chương 8. CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC	69
 PHẦN HAI. ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC	 77

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN KHÁNH
Phó Giám đốc phụ trách Công ty CP Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định
TRẦN THỊ KIM NHUNG

Biên tập nội dung : HOÀNG NGỌC PHƯƠNG

Biên tập kĩ – mỹ thuật : BÙI NGỌC LAN

Trình bày bìa : HÀ TUỆ HƯƠNG

Sửa bản in : HOÀNG NGỌC PHƯƠNG

Chế bản tại : CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Công ty CP Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm.

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên đề :

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
