

260 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC ĐỀ THI

1/ Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$.

Giải: Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 0$. (2) $\Leftrightarrow x = 3$

2/ Giải bất phương trình: $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \geq 0$

Giải: $0 < x \leq 1$

3/ Giải phương trình: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x)$.

Giải: (1) $\Leftrightarrow (x+3)|x-1| = 4x \Leftrightarrow x = 3; x = -3 + 2\sqrt{3}$

4/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$:

$$m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0 \quad (2)$$

Giải: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. (2) $\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ ($1 \leq t \leq 2$), do $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Khảo sát $g(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ với $1 \leq t \leq 2$. $g'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0$. Vậy g tăng trên $[1, 2]$

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ bpt $m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ có nghiệm $t \in [1, 2] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [1; 2]} g(t) = g(2) = \frac{2}{3}$

5/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Giải: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 - 2 + 4)(y - 3 + 3) + x^2 - 2 - 20 = 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x^2 - 2 = u \\ y - 3 = v \end{cases}$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u.v + 4(u + v) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}$

6/ 1) Giải phương trình: $5 \cdot 3^{2x-1} - 7 \cdot 3^{x-1} + \sqrt{1 - 6 \cdot 3^x + 9^{x+1}} = 0$ (1)

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (a) \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) - m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5 & (b) \end{cases}$$

Giải: 1) Đặt $t = 3^x > 0$. (1) $\Leftrightarrow 5t^2 - 7t + 3|3t - 1| = 0 \Rightarrow x = \log_3 \frac{3}{5}; x = -\log_3 5$

$$2) \begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (a) \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) - m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5 & (b) \end{cases}$$

• Giải (a) $\Leftrightarrow 1 < x < 3$.

• Xét (b): Đặt $t = \log_2(x^2 - 2x + 5)$. Từ $x \in (1; 3) \Rightarrow t \in (2; 3)$.

$$(b) \Leftrightarrow t^2 - 5t = m. \text{ Xét hàm } f(t) = t^2 - 5t, \text{ từ BBT } \Rightarrow m \in \left(-\frac{25}{4}; -6\right)$$

7/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Giải: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = 18 \\ 2x \cdot \frac{3}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 3 \end{cases}$. Đặt $a = 2x; b = \frac{3}{y}$. (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm: $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$

8/ Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{5-2x}} \quad (1)$

Giải: • Với $-2 \leq x < \frac{1}{2}$: $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 0, \sqrt{5-2x} > 0$, nên (1) luôn đúng

• Với $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \geq \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow 2 \leq x < \frac{5}{2}$

Tập nghiệm của (1) là $S = \left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[2; \frac{5}{2}\right)$

9/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

Giải: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ \frac{x^2+1}{y}(y+x-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ y + x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

10/ Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3) \quad (1)$

Đặt $t = \log_2 x$. (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases}$$

11/ Giải phương trình: $\log^2(x^2 + 1) + (x^2 - 5)\log(x^2 + 1) - 5x^2 = 0$

Giải: Đặt $\log(x^2+1)=y$. PT $\Leftrightarrow y^2+(x^2-5)y-5x^2=0 \Leftrightarrow y=5 \vee y=-x^2$; Nghiệm: $x=\pm\sqrt{99999}$; $x=0$

12/ Giải phương trình: $8^x+1=2\sqrt[3]{2^{x+1}-1}$

Giải: Đặt $2^x=u>0; \sqrt[3]{2^{x+1}-1}=v$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ v^3+1=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v>0 \\ u^3-2u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\log_2 \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

13/ Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y-x^2+y=2 \\ m(x^2+y)-x^2y=4 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt

Giải: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x^4+2(m-3)x^2+2m-4=0 & (1) \\ y=\frac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases}$.

• Khi $m=1$: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+1=0 \\ y=\frac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases} \quad (\text{VN})$

• Khi $m \neq 1$. Đặt $t=x^2, t \geq 0$. Xét $f(t)=(m-1)t^2+2(m-3)t+2m-4=0 \quad (2)$

Hệ PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm x phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có một nghiệm } t=0 \text{ và 1 nghiệm } t>0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ S=\frac{2(m-3)}{1-m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m=2.$$

14/ Tìm m để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases}$.

Giải: Đặt $u=\sqrt{x}, v=\sqrt{y} (u \geq 0, v \geq 0)$. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=m \end{cases}$. ĐS: $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

15/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x(x-1)+4(x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}=m$

Giải: Đặt $t=(x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$. PT có nghiệm khi $t^2+4t-m=0$ có nghiệm, suy ra $m \geq -4$.

16/ Giải phương trình: $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$

Giải: Nhận xét; $x = \pm 1$ là các nghiệm của PT. PT $\Leftrightarrow 3^x = \frac{2x+1}{2x-1}$.

Dựa vào tính đơn điệu $\Rightarrow$ PT chỉ có các nghiệm $x = \pm 1$.

17/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 & (a) \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 & (b) \end{cases}$

Giải (b) $\Leftrightarrow x^2+y^2+2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}=14 \Leftrightarrow xy+2\sqrt{(xy)^2+xy+4}=11 \quad (c)$

Đặt $xy=p$. (c) $\Leftrightarrow 2\sqrt{p^2+p+4}=11-p \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 11 \\ 3p^2+26p-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ p=\frac{-35}{3} \end{cases}$

$$(a) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 3xy + 3 \bullet p = xy = -\frac{35}{3} \text{ (loại)} \quad \bullet p = xy = 3 \Rightarrow x+y = \pm 2\sqrt{3}$$

$$1/ \text{ Với } \begin{cases} xy = 3 \\ x+y = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=y=\sqrt{3} \quad 2/ \text{ Với } \begin{cases} xy = 3 \\ x+y = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=y=-\sqrt{3}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là: $(\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

$$18/ \text{ Giải bất phương trình: } \log_2(4x^2 - 4x + 1) - 2x > 2 - (x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

$$\text{Giải: BPT} \Leftrightarrow x[\log_2(1-2x)+1] < 0 \left(x < \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \text{ hoặc } x < 0$$

$$19/ \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + 1 + y(x+y) = 4y \\ (x^2 + 1)(x+y-2) = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

$$\text{Giải: } y = 0 \text{ không phải là nghiệm. Hệ PT} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y - 2 = 2 \\ \frac{x^2+1}{y}(x+y-2) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x^2+1}{y}, v = x+y-2. \text{ Ta có hệ } \begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-2=1 \end{cases}$$

Nghiệm của hpt đã cho là $(1; 2), (-2; 5)$.

$$20/ \text{ Tìm } m \text{ sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất: } \ln(mx) = 2\ln(x+1)$$

Giải: 1) ĐKXĐ: $x > -1, mx > 0$. Như vậy trước hết phải có $m \neq 0$.

$$\text{Khi đó, PT} \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + 1 = 0 \quad (1)$$

Phương trình này có: $\Delta = m^2 - 4m$.

• Với $m \in (0; 4) \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

• Với $m = 0$, (1) có nghiệm duy nhất $x = -1 < 0 \Rightarrow$ loại.

• Với $m = 4$, (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$ thỏa ĐKXĐ nên PT đã cho có nghiệm duy nhất.

• Với $m < 0$, ĐKXĐ trở thành $-1 < x < 0$. Khi đó $\Delta > 0$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Mặt khác, $f(-1) = m < 0, f(0) = 1 > 0$ nên $x_1 < -1 < x_2 < 0$, tức là chỉ có x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Như vậy, các giá trị $m < 0$ thỏa điều kiện bài toán.

• Với $m > 4$. Khi đó, điều kiện xác định trở thành $x > 0$ và (1) cũng có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Áp dụng định lý Viet, ta thấy cả hai nghiệm này đều dương nên các giá trị $m > 4$ cũng bị loại.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $m \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

$$21/ \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y-2} + y^2 & (1) \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x \geq 2$ và $y \geq 2$: Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được:

$$\sqrt{x^2 + 91} - \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{y-2} - \sqrt{x-2} + y^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} = \frac{y - x}{\sqrt{y-2} + \sqrt{x-2}} + (y - x)(y + x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} + \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}} + x + y \right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ (trong ngoặc luôn dương và x và y đều lớn hơn 2)

Vậy từ hệ trên ta có: $\sqrt{x^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+91} - 10 = \sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10} = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(x+3) \Leftrightarrow (x-3) \left((x+3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy nghiệm của hệ $x = y = 3$

22/ Giải bất phương trình: $\log_2(\sqrt{3x+1}+6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x})$

Giải: Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 10$

$$\begin{aligned} \text{BPT} &\Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{3x+1}+6}{2} \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+1}+6}{2} \geq 7 - \sqrt{10-x} \\ &\Rightarrow \sqrt{3x+1}+6 \geq 2(7 - \sqrt{10-x}) \Rightarrow \sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x} \geq 8 \Rightarrow 49x^2 - 418x + 369 \leq 0 \\ &\Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{369}{49} \text{ (thỏa)} \end{aligned}$$

23/ Giải phương trình: $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

Giải:

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2+2}, u > 0 \\ v = \sqrt{x^2+2x+3}, v > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2+2 \\ v^2 = x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 = 2x+1 \\ x^2 = \frac{v^2 - u^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$(v-u) \left[(v-u) \left(1 + \frac{v+u}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v-u=0 \\ (v+u) \left(1 + \frac{v+u}{2} \right) + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (b) \\ (c) \end{matrix}$$

PT $\Leftrightarrow$

Vì $u > 0, v > 0$, nên (c) vô nghiệm.

$$\text{Do đó: PT} \Leftrightarrow v-u=0 \Leftrightarrow v=u \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

24/ Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{2x^2-3x+1} \geq x-1$

Giải: Tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$ • $x = 1$ là nghiệm

• $x \geq 2$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x-2} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$ vô nghiệm

• $x \leq \frac{1}{2}$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1-2x}$ có nghiệm $x \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{BPT có tập nghiệm } S = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right] \cup \{1\}$$

25/ Giải phương trình: $x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} - 8x - 5.$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}.$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left[(x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} + (\sqrt{3x+1})^2 \right] + \left[(\sqrt{x+2})^2 - 2\sqrt{2x^2+5x+2} + (\sqrt{2x+1})^2 \right] = 0$$

26/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 & (1) \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 & (2) \end{cases} \quad \text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow (x-y)^2(x-4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=4y \end{cases}$$

• Với $x = y$: $(2) \Rightarrow x = y = 2$

• Với $x = 4y$: $(2) \Rightarrow x = 32 - 8\sqrt{15}; y = 8 - 2\sqrt{15}$

27/ Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\tan \frac{\pi}{6} \sqrt{x^2 + x^2 + 1}$

Giải:

PT $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \quad (1)$

Chú ý: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$

Do đó: $(1) \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$

Chia 2 vế cho $x^2 + x + 1 = \left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2$ và đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}, t > 0$

Ta được: $(1) \Leftrightarrow 2t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-3}{2\sqrt{3}} < 0 \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 1.$

28/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 5x + y = 9 \\ 3x^3 + x^2y + 2xy + 6x^2 = 18 \end{cases}$$

Giải: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - x^2 - 5x \\ x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 18x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 3 \\ x = -3; y = 15 \\ x = -1 - \sqrt{7}; y = 6 + 3\sqrt{7} \\ x = -1 + \sqrt{7}; y = 6 - 3\sqrt{7} \end{cases}$

$\begin{cases} y = 9 - x^2 - 5x \\ x = 1 \\ x = -3 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$

29/ Giải bất phương trình: $\sqrt{x-3} \leq \sqrt{x+12} - \sqrt{2x+1}$

Giải: BPT $\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4.$

30/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}$$

Giải: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{4y-1} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

31/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 7y^3 & (1) \\ 4x^2y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Từ (1) $\Rightarrow y \neq 0$. Khi đó Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 7y^3 \\ 4x^2y^2 + 6xy = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = xy \\ 8t^3 + 27 = 4t^2 + 6t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = xy \\ t = -\frac{3}{2}; t = \frac{1}{2}; t = \frac{9}{2} \end{cases}$$

• Với $t = -\frac{3}{2}$: Từ (1) $\Rightarrow y = 0$ (loại). • Với $t = \frac{1}{2}$: Từ (1) $\Rightarrow \left(x = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}; y = \sqrt[3]{4} \right)$

• Với $t = \frac{9}{2}$: Từ (1) $\Rightarrow \left(x = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}; y = 3\sqrt[3]{4} \right)$

32/ Giải phương trình: $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$

Giải

PT $\Leftrightarrow 3^x(2x-1) = 2x+1$ (1). Ta thấy $x = \frac{1}{2}$ không phải là nghiệm của (1).

Với $x \neq \frac{1}{2}$, ta có: (1) $\Leftrightarrow 3^x = \frac{2x+1}{2x-1} \Leftrightarrow 3^x - \frac{2x+1}{2x-1} = 0$

Đặt $f(x) = 3^x - \frac{2x+1}{2x-1} = 3^x - 2 - \frac{3}{2x-1}$. Ta có: $f'(x) = 3^x \ln 3 + \frac{6}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên từng khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta thấy $x=1, x=-1$ là các nghiệm của $f(x) = 0$. Vậy PT có 2 nghiệm $x=1, x=-1$.

33/ Giải phương trình: $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = 2$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Khi đó: $\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} > \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \geq \sqrt[4]{x+\sqrt{x^2-1}} \quad (\text{do } x \geq 1)$

$\Rightarrow \text{VT} > \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt[4]{x+\sqrt{x^2-1}} \stackrel{\text{Cô-Si}}{\geq} 2\sqrt[8]{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})} = 2 \Rightarrow \text{PT vô nghiệm.}$

34/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Giải:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases} \quad \text{Điều kiện: } x+y > 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 - 2xy \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2 + y^2 + x+y) = 0 \Leftrightarrow x+y-1=0$$

(vì $x+y > 0$ nên $x^2 + y^2 + x+y > 0$)

Thay $x=1-y$ vào (2) ta được: $1 = x^2 - (1-x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (y=0) \\ x=-2 & (y=3) \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (1; 0), (-2; 3).

35/ Giải hệ phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$

Giải: Điều kiện: $x \leq \frac{6}{5}$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases}$.

Ta có hệ PT: $\begin{cases} 2u+3v=8 \\ 5u^3+3v^2=8 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $\begin{cases} u=-2 \\ v=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2=-2 \\ 6-5x=16 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$.

Thử lại, ta thấy $x=-2$ là nghiệm của PT. Vậy PT có nghiệm $x=-2$.

36/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$$

Giải: Ta có: $2x^3 - y^3 = (2y^2 - x^2)(2y - x) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0$

Khi $y=0$ thì hệ VN.

Khi $y \neq 0$, chia 2 vế cho $y^3 \neq 0$ ta được: $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, ta có: $t^3 + 2t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1, x=y=-1$

37/ Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} 2y-x=m \\ y+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Giải:
$$\begin{cases} 2y-x=m & (1) \\ y+\sqrt{xy}=1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x=2y-m$, nên (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2y^2-my}=1-y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ m = y - \frac{1}{y} + 2 \end{cases} \quad (\text{vì } y \neq 0)$

Xét $f(y) = y - \frac{1}{y} + 2 \Rightarrow f'(y) = 1 + \frac{1}{y^2} > 0$

Dựa vào BTT ta kết luận được hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m > 2$.

38/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 4xy \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$$

Giải: Ta có: $x^2y^2 = 9 \Leftrightarrow xy = \pm 3$.

• Khi: $xy = 3$, ta có: $x^3 - y^3 = 4$ và $x^3 \cdot (-y^3) = -27$

Suy ra: $x^3; (-y^3)$ là các nghiệm của phương trình: $X^2 - 4X - 27 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{31}$

Vậy nghiệm của Hệ PT là:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{31}}, y = -\sqrt[3]{2 - \sqrt{31}} \text{ hoặc } x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{31}}, y = -\sqrt[3]{2 + \sqrt{31}}.$$

• Khi: $xy = -3$, ta có: $x^3 - y^3 = -4$ và $x^3 \cdot (-y^3) = 27$

Suy ra: $x^3; (-y^3)$ là nghiệm của phương trình: $X^2 + 4X + 27 = 0$ (PTVN)

39/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + 2\frac{y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + 4\frac{x}{y} = 22 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0$

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1; v = \frac{x}{y}$. Hệ PT trở thành:
$$\begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 \\ u + 1 + 4v = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{u} + \frac{2}{v} = 1 \\ u = 21 - 4v \end{cases} \quad (1)$$

Thay (2) vào (1) ta được:
$$\frac{3}{21 - 4v} + \frac{2}{v} = 1 \Leftrightarrow 2v^2 - 13v + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ v = \frac{7}{2} \end{cases}$$

• Nếu $v = 3$ thì $u = 9$, ta có Hệ PT:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 9 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

• Nếu $v = \frac{7}{2}$ thì $u = 7$, ta có Hệ PT:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 7 \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x = \frac{7}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4\sqrt{\frac{2}{53}} \\ x = 14\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -4\sqrt{\frac{2}{53}} \\ x = -14\sqrt{\frac{2}{53}} \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta được 4 nghiệm của Hệ PT.

40/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3}(x - y) = 2\sqrt{xy} \\ 2x - y^2 = 8 \end{cases}$$

Giải:
$$\begin{cases} \sqrt{3}(x - y) = 2\sqrt{xy} \\ 2x - y^2 = 8 \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad \text{Điều kiện: } x, y \geq 0; x \geq y$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 3(x - y)^2 = 4xy \Leftrightarrow (3x - y)(x - 3y) = 0 \Leftrightarrow x = 3y \text{ hay } x = \frac{y}{3}$

• Với $x = 3y$, thế vào (2) ta được: $y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2; y = 4$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$

• Với $x = \frac{y}{3}$, thế vào (2) ta được: $3y^2 - 2y + 24 = 0$ Vô nghiệm.

Kết luận: hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$

41/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$$

Giải: Từ hệ PT $\Rightarrow y \neq 0$. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}$, $v = x+y$ ta có hệ:
$$\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{cases}$$

• Với $v=3, u=1$ ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$$

• Với $v=-5, u=9$ ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$$
, hệ này vô nghiệm.

Kết luận: Hệ đã cho có hai nghiệm: $(1; 2), (-2; 5)$.

42/ Giải phương trình:
$$\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$$

Giải: Điều kiện $x \geq 0$.

PT $\Leftrightarrow 4x^2-1+\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow (2x+1)(2x-1)+\frac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

43 / Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện:
$$\begin{cases} -xy-2x+y+2 > 0, x^2-2x+1 > 0, y+5 > 0, x+4 > 0 \\ 0 < 1-x \neq 1, 0 < 2+y \neq 1 \end{cases} (*)$$

Hệ PT $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)]+2\log_{2+y}(1-x)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2)+\log_{2+y}(1-x)-2=0 & (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 & (2) \end{cases}$$

Đặt $\log_{2+y}(1-x)=t$ thì (1) trở thành: $t+\frac{1}{t}-2=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ ta có: $1-x=y+2 \Leftrightarrow y=-x-1$ (3). Thế vào (2) ta có:

$$\log_{1-x}(-x+4)-\log_{1-x}(x+4)=1 \Leftrightarrow \log_{1-x}\frac{-x+4}{x+4}=1 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x+4}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

• Với $x=0 \Rightarrow y=-1$ (không thỏa (*)).

• Với $x=-2 \Rightarrow y=1$ (thỏa (*)).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=-2, y=1$.

44/ Giải bất phương trình:
$$(4^x-2.2^x-3).\log_2 x-3 > 4^{\frac{x+1}{2}}-4^x$$

Giải: BPT $\Leftrightarrow (4^x - 2 \cdot 2^x - 3) \cdot \log_2 x - 3 > 2^{x+1} - 4^x \Leftrightarrow (4^x - 2 \cdot 2^x - 3) \cdot (\log_2 x + 1) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 > 0 \\ \log_2 x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 3 \\ \log_2 x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_2 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_2 3 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

45/ Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_5(25^x - \log_5 a) = x$$

Giải: PT $\Leftrightarrow 25^x - \log_5 a = 5^x \Leftrightarrow 5^{2x} - 5^x - \log_5 a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^x, t > 0 \\ t^2 - t - \log_5 a = 0 \end{cases} \quad (*)$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow t^2 - t - \log_5 a$ có đúng 1 nghiệm dương.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ với $t \in [0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$.

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình $f(t) = \log_5 a$ có đúng 1 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 a \geq 0 \\ \log_5 a = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{cases}$$

46/ Giải hệ phương trình: $2\log_3(x^2 - 4) + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \log_3(x+2)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ (x+2)^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq -3 \end{cases} \quad (**)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+2)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log_3(x+2)^2} + 4\right)\left(\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

Kiểm tra điều kiện $(**)$ chỉ có $x = -2 - \sqrt{3}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là: $x = -2 - \sqrt{3}$

47 / Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

Giải: $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x & (1) \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $y^2 - 5x^2 = 4$ (3).

$$\text{Thế vào (1) được: } x^3 + (y^2 - 5x^2) \cdot y = y^3 + 16x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2y - 16x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x^2 - 5xy - 16 = 0$$

• Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$.

• Với $x^2 - 5xy - 16 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 16}{5x}$ (4). Thế vào (3) được: $\left(\frac{x^2 - 16}{5x}\right)^2 - 5x^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^4 - 32x^2 + 256 - 125x^4 = 100x^2 \Leftrightarrow 124x^4 + 132x^2 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (y=-3) \\ x=-1 & (y=3) \end{cases}.$$

Vậy hệ có 4 nghiệm: $(x; y) = (0; 2); (0; -2); (1; -3); (-1; 3)$

48/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3 \log_8 (\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x+y > 0, x-y \geq 0$

$$\text{Hệ PT} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \text{ ta có hệ: } \begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 & (1) \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thế (1) vào (2) ta có: } \sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0.$$

$$\text{Kết hợp (1) ta có: } \begin{cases} uv = 0 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0 \text{ (với } u > v). \text{ Từ đó ta có: } x = 2; y = 2. \text{ (thỏa đk)}$$

Kết luận: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (2; 2)$.

49/ Giải phương trình: $25^x - 6.5^x + 5 = 0$

Giải: **Câu 2: 1)** $25^x - 6.5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 6.5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 1 \text{ hay } 5^x = 5$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1.$

50/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}$$

Giải:
$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 & (1) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 & (2) \end{cases} \quad \text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{x}{y} - \sqrt{\frac{x}{y}} - 2 = 0 \Rightarrow x = 4y$$

$$\text{Nghiệm của hệ (2; } \frac{1}{2} \text{)}$$

51/ Tìm m để bất phương trình: $5^{2x} - 5^{x+1} - 2m5^x + m^2 + 5m > 0$ thỏa với mọi số thực x.

Giải: Đặt $X = 5^x \Rightarrow X > 0$

Bất phương trình đã cho trở thành: $X^2 + (5 + 2m)X + m^2 + 5m > 0$ (*)

Bpt đã cho có nghiệm với mọi x khi và chỉ khi (*) có nghiệm với mọi $X > 0$

$\Leftrightarrow \Delta < 0$ hoặc (*) có hai nghiệm $X_1 \leq X_2 \leq 0$

Từ đó suy ra m

52/ Giải bất phương trình: $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} (x+3)$

Giải: Điều kiện: $x > 3$; Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_3(x^2 - 5x + 6) + \frac{1}{2} \log_{3^{-1}}(x-2) &> \frac{1}{2} \log_{3^{-1}}(x+3) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3(x^2 - 5x + 6) - \frac{1}{2} \log_3(x-2) > -\frac{1}{2} \log_3(x+3) \\ \Leftrightarrow \log_3[(x-2)(x-3)] &> \log_3(x-2) - \log_3(x+3) \Leftrightarrow \log_3[(x-2)(x-3)] > \log_3\left(\frac{x-2}{x+3}\right) \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-3) &> \frac{x-2}{x+3} \\ \Leftrightarrow x^2 - 9 > 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{10} \\ x > \sqrt{10} \end{cases} \text{ Giao với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là } x > \sqrt{10} \end{aligned}$$

53/ Cho phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$

Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất.

Giải: Phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$ (1)

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Nếu $x \in [0;1]$ thỏa mãn (1) thì $1-x$ cũng thỏa mãn (1) nên để (1) có nghiệm duy nhất thì cần có điều kiện

$$x = 1-x \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Thay } x = \frac{1}{2} \text{ vào (1) ta được: } 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + m - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = m^3 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

* Với $m = 0$; (1) trở thành: $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ Phương trình có nghiệm duy nhất.

* Với $m = -1$; (1) trở thành

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = -1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt{x(1-x)}) + (x+1-x-2\sqrt{x(1-x)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{1-x})^2 = 0$$

$$+ \text{ Với } \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad + \text{ Với } \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Trường hợp này, (1) cũng có nghiệm duy nhất.

* Với $m = 1$ thì (1) trở thành:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt{x(1-x)} = 1 - 2\sqrt{x(1-x)} \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{1-x})^2$$

Ta thấy phương trình (1) có 2 nghiệm $x = 0, x = \frac{1}{2}$ nên trong trường hợp này (1) không có nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 0$ và $m = -1$.

54/ Giải phương trình: $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$

Giải: $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$ (2)

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \log_2|x+1| + 2 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x) \Leftrightarrow \log_2|x+1| + 2 = \log_2(16-x^2) \\ &\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2(16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2 \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với } -1 < x < 4 \text{ ta có phương trình } x^2 + 4x - 12 = 0 \text{ (3); (3) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \text{ (loại)} \end{cases}$$

+ Với $-4 < x < -1$ ta có phương trình $x^2 - 4x - 20 = 0$ (4);

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{24} \\ x = 2 + \sqrt{24} \text{ (loại)} \end{cases}; \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là } x = 2 \text{ hoặc } x = 2(1 - \sqrt{6})$$

55/ 1). Giải phương trình: $2x + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$

2) Giải phương trình: $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$.

3) Giải bất phương trình: $9^{x^2+x-1} + 1 \geq 10.3^{x^2+x-2}$.

Giải

1) Giải phương trình: $2x + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$. (a)

* Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 2}, u > 0 \\ v = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, v > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 + 2 \\ v^2 = x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 = 2x + 1 \\ x^2 = \frac{v^2 - u^2 - 1}{2} \end{cases}$

◦ Ta có:

$$(a) \Leftrightarrow v^2 - u^2 + \left(\frac{v^2 - u^2 - 1}{2}\right) \cdot u + \left(\frac{v^2 - u^2 - 1}{2} + 1\right) \cdot v = 0 \Leftrightarrow v^2 - u^2 + \left(\frac{v^2 - u^2}{2}\right) \cdot u - \frac{u}{2} + \left(\frac{v^2 - u^2}{2}\right) \cdot v + \frac{v}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (v - u) \left[(v - u) \left(1 + \frac{v + u}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v - u = 0 & (b) \\ (v + u) \left(1 + \frac{v + u}{2} \right) + \frac{1}{2} = 0 & (c) \end{cases}$$

◦ Vì $u > 0, v > 0$, nên (c) vô nghiệm.

◦ Do đó:

$$(a) \Leftrightarrow v - u = 0 \Leftrightarrow v = u \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Kết luận, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -\frac{1}{2}$.

2) Giải phương trình $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$ (*)

Ta có: $(*) \Leftrightarrow (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) = 0 & (1) \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$.

Khi $\sin(2^x + y - 1) = 1$, thay vào (1), ta được: $2^x = 0$ (VN)

Khi $\sin(2^x + y - 1) = -1$, thay vào (1), ta được: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (1) $\Rightarrow \sin(y + 1) = -1 \Leftrightarrow y = -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm: $\left(1; -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.

3) Giải bất phương trình: $9^{x^2+x-1} + 1 \geq 10.3^{x^2+x-2}$. Đặt $t = 3^{x^2+x}$, $t > 0$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 10t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t \leq 1 \text{ hoặc } t \geq 9)$

Khi $t \leq 1 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$. (i)

Khi $t \geq 9 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \geq 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ (2i)

Kết hợp (i) và (2i) ta có tập nghiệm của bpt là: $S = (-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

56/ Giải phương trình, hệ phương trình:

$$1. \sqrt{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2}; \quad 2. \begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$$

Giải: 1) Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}=1 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}=0 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \log_3 x \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \\ x>2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} \log_3 x=0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x-\frac{1}{2}=1 \end{cases} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ Điều kiện: } |x| \geq |y|$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-y^2}; u \geq 0 \\ v=x+y \end{cases}$; $x=-y$ không thỏa hệ nên xét $x \neq -y$ ta có $y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right)$.

2) Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u+v=12 \\ \frac{u}{2}\left(v-\frac{u^2}{v}\right)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u=3 \\ v=9 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=4 \\ x+y=8 \end{cases} \text{ (I)}$$

$$+ \begin{cases} u=3 \\ v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=3 \\ x+y=9 \end{cases} \text{ (II) Giải hệ (I), (II). Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ}$$

phương trình ban đầu là $S = \{(5;3), (5;4)\}$ Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $S = \{(5;3), (5;4)\}$

$$57/ \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(x+y-2)=y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

Giải:

2) Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + (x+y-2) = 2 \\ \frac{x^2+1}{y} (x+y-2) = 1 \end{cases} \quad \text{Đặt } u = \frac{x^2+1}{y}, v = x+y-2$$

Ta có hệ $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=1$ Suy ra $\begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ x+y-2=1 \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được nghiệm của hệ phương trình đã cho là (1; 2), (-2; 5)

58 / Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0 \quad (1)$$

Giải: * Đk $x \in [-1; 1]$, đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$; $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [3; 9]$

Ta có: (1) viết lại $t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow (t-2)m = t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2}$, với $t \in [3; 9]$. Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên

t	3	9
f'(t)		
		+
f(t)		$\frac{48}{7}$
	4	

Căn cứ bảng biến thiên, (1) có nghiệm $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t \in [3; 9] \Leftrightarrow 4 \leq m \leq \frac{48}{7}$

59/ Giải phương trình: $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3$

Giải: bất phương trình:

$$\frac{1}{2} \log_2 (x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x+7} \right) \quad (1)$$

Đk: $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty) \\ x > -7 \end{cases} \Rightarrow x \in (-7; -5) \cup (1; +\infty)$

Từ (1) $\Rightarrow \log_2 (x^2 + 4x - 5) > -2 \log_2 \frac{1}{x+7}$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 4x - 5) > \log_2 (x+7)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 > x^2 + 14x + 49$$

$$\Leftrightarrow -10x > 54 \Leftrightarrow x < \frac{-27}{5}$$

Kết hợp điều kiện: Vậy BPT có nghiệm: $x \in (-7; \frac{-27}{5})$

60/ Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ 2x^3 + y^3 - x^2y - 2xy^2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0 \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

$y \neq 0$. Ta có:

Đặt : $\frac{x}{y} = t$ (4) có dạng : $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1, t = \frac{1}{2}$.

a) Nếu $t = 1$ ta có hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

b) Nếu $t = -1$ ta có hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

c) Nếu $t = \frac{1}{2}$ ta có hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}, y = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

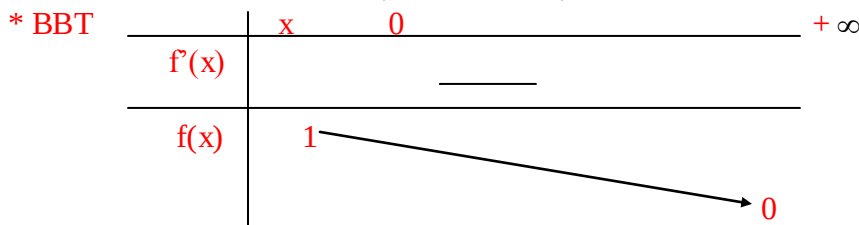
61/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực: $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$

Giải: $D = [0; +\infty)$

*Đặt $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2^4\sqrt{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}}{2^4\sqrt{(x^2 + 1)^3} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{(1 + \frac{1}{x^2})^3}}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{(1 + \frac{1}{x^2})^3} \cdot \sqrt{x}}$

Suy ra: $f'(x) = \frac{1 - \sqrt[4]{(1 + \frac{1}{x^2})^3}}{2^4\sqrt{(1 + \frac{1}{x^2})^3} \cdot \sqrt{x}} < 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 1 - x^2}{(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \right] = 0$



Vậy: $0 < m \leq 1$

62/ Giải bất phương trình:

$$\log_x 3 < \log_{\frac{x}{3}} 3$$

Giải: **ĐK** : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Bất phương trình trở thành :

$$\frac{1}{\log_3 x} < \frac{1}{\log_3 \frac{x}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} < \frac{1}{\log_3 x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \log_3 x (\log_3 x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log_3 x < 0 \vee \log_3 x > 1$$

* $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ **kết hợp ĐK** : $0 < x < 1$

* $\log_3 x > 1 \Leftrightarrow x > 3$

Vậy tập nghiệm của BPT: $x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$

63/ .Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: **ĐK**: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$,

2.BPT (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t - 3)(t + 1)} > \sqrt{5}(t - 3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t + 1)(t - 3) > 5(t - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $(0; \frac{1}{2}] \cup (8; 16)$

64/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y - 2} + y^2 & (1) \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x - 2} + x^2 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $x \geq 2$ và $y \geq 2$: **Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được:**

$$\sqrt{x^2 + 91} - \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{y - 2} - \sqrt{x - 2} + y^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} = \frac{y - x}{\sqrt{y - 2} + \sqrt{x - 2}} + (y - x)(y + x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 91} + \sqrt{y^2 + 91}} + \frac{1}{\sqrt{x - 2} + \sqrt{y - 2}} + x + y \right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ (trong ngoặc luôn dương và x vậy đều lớn hơn 2)

Vậy từ hệ trên ta có: $\sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{x - 2} + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 91} - 10 = \sqrt{x - 2} - 1 + x^2 - 9$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} = \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} + 1} + (x - 3)(x + 3) \Leftrightarrow (x - 3) \left((x + 3) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 91} + 10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Vậy nghiệm của hệ $x = y = 3$

65/ Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Giải: **Đặt** $u = \sqrt[3]{x+34}$, $v = \sqrt[3]{x-3}$. **Ta có:**

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u - v)(u^2 + v^2 + uv) = 37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u - v)^2 + 3uv = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = -4 \\ u = 4 \\ v = 3 \end{cases}$$

Với $u = -3$, $v = -4$ ta có: $x = -61$

Với $u = 4$, $v = 3$ ta có: $x = 30$ vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x = -61$ và $x = 30$

66/ Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: **§K:** $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$,

BPT (1)

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t - 3)(t + 1)} > \sqrt{5}(t - 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t + 1)(t - 3) > 5(t - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $(0; \frac{1}{2}] \cup (8; 16)$

67/ .

1. Giải phương trình: $3 \cdot 25^{x-2} + (3x - 10)5^{x-2} = x - 3$

$$\log_x (\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}} (\cos x + \cos 2x) = 0$$

2. Giải phương trình:

3) Giải bất phương trình: $(x^3 + 1) + (x^2 + 1) + 3x\sqrt{x+1} > 0$

Giải:

$$3 \cdot 25^{x-2} + (3x - 10)5^{x-2} = x - 3$$

1.

$$\Leftrightarrow 5^{x-2}(3 \cdot 5^{x-2} - 1) + x(3 \cdot 5^{x-2} - 1) - 3(3 \cdot 5^{x-2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 \cdot 5^{x-2} - 1)(5^{x-2} + x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5^{x-2} - 1 = 0 & (1) \\ 5^{x-2} + x - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 5^{x-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 + \log_5 \frac{1}{3} = 2 - \log_5 3 \quad (2) \Leftrightarrow 5^{x-2} = -x + 3$$

Vế trái là hàm đồng biến vế phải là hàm nghịch biến mà (2) có nghiệm $x = 2$ nên là nghiệm duy nhất.
 Vậy Pt có nghiệm là: $x = 2 - \log_5 3$ và $x = 2$

$$2/ \quad \log_x (\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}} (\cos x + \cos 2x) = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \cos x - \sin x > 0 \\ \cos x + \cos 2x > 0 \end{cases} \quad \text{Khi đó Pt}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được: } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad (\text{Với } k \in \mathbb{N}^* \text{ k } 3/3/)$$

$$3/. (x^3 + 1) + (x^2 + 1) + 3x\sqrt{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x^3 + x^2) + 3\sqrt{x^3 + x^2} + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 > 0 \quad \text{Đặt } t = x\sqrt{x+1} \geq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{2}{3} \\ t > -1 \\ t < -2 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x\sqrt{x+1} \geq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x \geq -1$$

68/ Giải phương trình: $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$

Giải: Ta thấy phương trình: $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$ (2) có hai nghiệm $x = \pm 1$.

Ta có $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên

$$(2) \Leftrightarrow 3^x = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Ta có hàm số $y = 3^x$ tăng trên $\mathbb{R}$

hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ luôn giảm trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

Vậy Phương trình (2) chỉ có hai nghiệm $x = \pm 1$

$$\text{69/ Giải phương trình: } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x)$$

$$\text{Giải: } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x).$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \Leftrightarrow 0 < x \neq 1. \text{Biến đổi theo logarit cơ số 2 thành phương trình} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\log_2 [(x+3)(x-1)] = \log_2 (4x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

70/ Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc đoạn :

$$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Giải: Đặt $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$, suy ra $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} \right).$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \text{ ta có } x > -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0.$$

Vậy:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	$-$
		$\parallel$	$\parallel$
		1	
		CD	
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$		-4

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc $\left[-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow -4 \leq m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m = 1$.

71/ 1. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$$

2. Cho phương trình: $2\log_4(2x^2-x+2m-4m^2) + \log_{1/2}(x^2+mx-2m^2) = 0$

Xác định tham số m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 > 1$

Giải: 1) Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

$$\text{Nhiều kiện: } \begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \\ x^2-4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ x^2-5x+4 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \geq 2\sqrt{(x-1)(x-4)} \quad (*)$$

Nếu $x = 1$ thì hiển nhiên (*) đúng. Suy ra $x=1$ là nghiệm của phương trình

Nếu $x < 1$ thì (*) trở thành: $\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$

Nhân xét: $\begin{cases} \sqrt{2-x} > \sqrt{4-x} \\ \sqrt{3-x} > \sqrt{4-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} < 2\sqrt{4-x}$ Suy ra Bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $x \geq 4$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$

Nhân xét: $\begin{cases} \sqrt{x-2} > \sqrt{x-4} \\ \sqrt{x-3} > \sqrt{x-4} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} > 2\sqrt{x-4}$ Suy ra Bất phương trình đúng $\forall x \geq 4$.

Tóm lại: Bất phương trình có nghiệm là: $x=1 \vee x \geq 4$.

$$2) 2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) - \log_2(x^2 + mx - 2m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x^2 - (1+m)x + 2m - 2m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x_1 = 2m, x_2 = 1-m \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 > 1 \\ x_1^2 + mx_1 - 2m^2 > 0 \\ x_2^2 + mx_2 - 2m^2 > 0 \end{cases} \text{ với } x_1 = 2m, x_2 = 1-m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 2m > 0 \\ 4m^2 > 0 \\ -2m^2 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \vee \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$$

72/ Giải hệ phương trình

Giải: ĐK: $y \neq 0$

$$\text{hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} - 2 = 0 \\ \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y} - x - 2 = 0 \end{cases} \text{ đưa hệ về dạng } \begin{cases} 2u^2 + u - v - 2 = 0 \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 1 - v \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 1 \\ u = v = -1 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} u = \frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ v = \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \end{cases}, \begin{cases} u = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ v = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ $(-1; -1), (1; 1), (\frac{3-\sqrt{7}}{2}; \frac{2}{\sqrt{7}-1}), (\frac{3+\sqrt{7}}{2}; \frac{2}{\sqrt{7}+1})$

$$\frac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$$

73/ Giải bất phương trình

Giải: Đk: $x > -1$; bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{2\log_3(x+1) - \frac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{x-6} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$

74/ Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$.

Giải: Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 0$. (2) $\Leftrightarrow x = 3$

75/ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x + 3y) \\ \log_4(xy + 1) - \log_4(4y^2 + 2y - 2x + 4) = \log_4\left(\frac{x}{y}\right) - 1 \end{cases}$$

Giải: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$ với $\alpha > 0$ tùy ý và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

76/ Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+10} \geq \sqrt{5x+10} - \sqrt{x-2}$ (1)

Giải: Điều kiện: $x \geq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+10} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{5x+10} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 6x - 20} \geq x + 1 \quad (2)$$

Khi $x \geq 2 \Rightarrow x+1 > 0$ bình phương 2 vế phương trình (2)

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 20 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 11 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$$

Kết hợp điều kiện vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \geq 3$

77/ Giải phương trình:

$$\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$$

Giải: . Điều kiện: $x > -2$ và $x \neq 5$ (*)

Với điều kiện đó, ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\log_2[(x+2)|x-5|] = \log_2 8 \Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8 \Leftrightarrow (x^2 - 3x - 18)(x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3; x = 6; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 6$ và $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

78/ Giải phương trình:

$$\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

Giải: Giải phương trình $3 - 4 \sin^2 2x = 2 \cos 2x (1 + 2 \sin x)$

Biến đổi phương trình về dạng $2 \sin 3x (2 \sin x + 1) - (2 \sin x + 1) = 0$

• Do đó nghiệm của phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$$

Giải phương trình $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$.

• Điều kiện: $x > 0; x \neq 2; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{16}$.

- Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của pt đã cho Với $x \neq 1$. Đặt $t = \log_x 2$ và biến đổi phương trình về dạng

$$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0, \text{ Giải ra ta được } t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Vậy pt có 3 nghiệm } x=1;$$

$$x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

79 / Giải phương trình

$$3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^x - \frac{1}{4}.9^{x+1}.$$

Giải: Giải phương trình $3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^x - \frac{1}{4}.9^{x+1}$ Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$3.2^{2x} + 27.3^{2x} = 6.2^{2x} - \frac{9}{4}.3^{2x} \text{ Từ đó ta thu được } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{39}}$$

80/ Cho hàm số $f(x) = e^x - \sin x + \frac{x^2}{2} - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ và chứng minh rằng $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm.

Giải: Ta có $f'(x) = e^x + x - \cos x$. Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -x + \cos x$. Hàm số $y = e^x$ là hàm đồng biến; hàm số $y = -x + \cos x$ là hàm nghịch biến vì $y' = -1 + \sin x \leq 0, \forall x$. Mặt khác $x = 0$ là nghiệm của phương trình $e^x = -x + \cos x$ nên nó là nghiệm duy nhất. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ (học sinh tự làm) ta đi đến kết luận phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm.

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 0$.

81/ 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

$$2) \text{ Giải bất phương trình: } \log_{\frac{1}{3}} \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2+1} - x)$$

Giải:

1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases} \quad (dk \ x+y > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy - (x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)((x+y)^2 - 1) - 2xy(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (3) \\ x^2+y^2+x+y=0 & (4) \end{cases} \text{ Dễ thấy (4) vô nghiệm}$$

vì $x+y > 0$

Thế (3) vào (2) ta được $x^2 - y = 1$ Giải hệ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0 \\ x = -2; y = 3 \end{cases} \dots\dots$

$$2) \log_{\frac{1}{3}} \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (1)$$

Đk: $x > 0$,

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2 + 1} - x) + \log_3 \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) \right) < 0 \Leftrightarrow \log_5^2 (\sqrt{x^2 + 1} + x) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) < 1$$

$$*) 0 < \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) \Leftrightarrow x > 0$$

$$*) \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} < 5 - x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$$

Vậy BPT có nghiệm $x \in \left(0; \frac{12}{5} \right)$

Đề 87.

1. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - x - 2} + 3\sqrt{x} \leq \sqrt{5x^2 - 4x - 6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

$$\text{Giải: Điều kiện } \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x^2 - 4x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2; \text{ Bình phương hai vế ta được } 6\sqrt{x(x+1)(x-2)} \leq 4x^2 - 12x - 4$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x(x+1)(x-2)} \leq 2x(x-2) - 2(x+1) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}} \leq 2\frac{x(x-2)}{x+1} - 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}} \geq 0 \text{ ta được bpt } 2t^2 - 3t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{-1}{2} \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 2 \text{ (do } t \geq 0)$$

$$\text{Với } t \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 - \sqrt{13} \\ x \geq 3 + \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3 + \sqrt{13}$$

(do $x \geq 2$) Vậy bpt có nghiệm $x \geq 3 + \sqrt{13}$

82/ Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} (y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} y-x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Hệ phương trình} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(y-x) + \log_4 \frac{1}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \frac{y-x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x}{y} = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 9y^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y^2 = \frac{25}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x;y) = \left(\frac{15}{\sqrt{10}}; \frac{5}{\sqrt{10}}\right) \\ (x;y) = \left(-\frac{15}{\sqrt{10}}; -\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \end{cases} \quad (\text{loại}) \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

83/ Giải hpt :

$$\begin{cases} 4xy + 4((x+y)^2 - 2xy) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4xy + 4((x+y)^2 - 2xy) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+y)^2 - 4xy + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + ((x+y)^2 - 4xy) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x^2 + y^2 - 2xy) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} + (x-y)^2 = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right] + (x-y)^2 = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + (x-y) = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

84/ 1. Giải bất phương trình : $2\log(x^3+8) \leq 2\log(x+58) + \log(x^2+4x+4)$.

2. Giải pt : $\sqrt{3^x-5} + \sqrt{10-3^x} - \sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} = 1$

Giải: 1. Đk : $\begin{cases} x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) > 0 \\ x + 58 > 0 \\ x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$

Bpt đã cho $\Leftrightarrow \log(x^3+8) \leq \log((x+58)(x+2)) \Leftrightarrow (x+2)[x^2-3x-54] \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -6; -2 \leq x \leq 9$ (0.25). So dk, ta có : $-2 < x \leq 9$ (0.25)

2. Giải pt : $\sqrt{3^x-5} + \sqrt{10-3^x} - \sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} = 1$

Đặt : $t = \sqrt{3^x-5} + \sqrt{10-3^x}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x}$

Ta có pt : $t^2 - 2t - 3 = 0$ (0.25) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3(\text{nhan}) \\ t = -1(\text{loai}) \end{cases}$

$$t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} = 3. \quad \text{Dat : } y = 3^x (y > 0).$$

$$\text{Ta co pt : } 9 = 5 + 2\sqrt{15.y - 50 - y^2} \Leftrightarrow \sqrt{15.y - 50 - y^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 15y + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_3 6 \end{cases}$$

$$85/ \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Giải: Hệ phương trình } \begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ĐK } \begin{cases} -4 < x < 1, x \neq 0 \\ y > -2; y \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Đưa phương trình thứ nhất của hệ về dạng } \log_{1-x}(2 + y) + \log_{2+y}(1 - x) = 2$$

Đặt $t = \log_{1-x}(2 + y)$, Tìm được $T=1$, kết hợp với phương trình thứ hai của hệ, đối chiếu với điều kiện trên, tìm được nghiệm $(x; y) = (-2; 1)$.

$$86/ \text{ Giải 3 phương trình: } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x + 3) + \frac{1}{4} \log_4(x - 1)^8 = \log_2 4x.$$

$$87/ \text{ 1/.Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 & (1) \\ 4x^2y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải: hệ phương trình: } \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 & (1) \\ 4x^2y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow y \neq 0$$

$$\text{Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ \frac{4x^2}{y} + \frac{6x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = 18 \\ 2x \cdot \frac{3}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = 2x; b = \frac{3}{y}. \text{ Ta có hệ: } \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ ab(a + b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Hệ đã cho có 2 nghiệm } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$$

88/ Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$$(m - 3)\sqrt{x} + (2 - m)x + 3 - m = 0. \quad (1)$$

Giải: Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$$(m - 3)\sqrt{x} + (2 - m)x + 3 - m = 0. \quad (1)$$

$$\text{Đk } x \geq 0. \text{ đặt } t = \sqrt{x}; t \geq 0$$

$$(1) \text{ trở thành } (m-3)t + (2-m)t^2 + 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2t^2 - 3t + 3}{t^2 - t + 1} \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2t^2 - 3t + 3}{t^2 - t + 1} \quad (t \geq 0)$$

Lập bảng biến thiên

$$(1) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq m \leq 3$$

89/ Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1).$

Giải: Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1).$

ĐK : $x > \frac{1}{3}.$ (*)

Với điều kiện trên phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2+1=3\log_5(2x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5 (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện trên ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

90/ : Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}.$$

Giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x^2-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x^2+2)y + x^2 - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x^2-2+4)(y-3+3) + x^2 - 2 - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2 = u \\ y - 3 = v \end{cases} \quad * \text{ Thay vào hệ phương trình ta có } \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u.v + 4(u+v) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$$

Thế vào cách đặt ta được các nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases};$

91/ Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35} < 5x-4 + \sqrt{x^2+24}$

Giải: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35} < 5x-4 + \sqrt{x^2+24}$
BPT tương đương

$$\sqrt{x^2+35} - \sqrt{x^2+24} < 5x-4 \Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x^2+35} + \sqrt{x^2+24}} < 5x-4$$

$$\Leftrightarrow 11 < (5x-4)(\sqrt{x^2+35} + \sqrt{x^2+24})$$

Xét:

a) Nếu $x \leq \frac{4}{5}$ không thỏa mãn BPT

b) Nếu $x > \frac{4}{5}$: Hàm số $y = (5x-4)(\sqrt{x^2+35} + \sqrt{x^2+24})$ với $x > \frac{4}{5}$

$$y' = 5(\sqrt{x^2 + 35} + \sqrt{x^2 + 24}) + (5x - 4)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 35}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 24}}\right) > 0 \text{ mọi } x > 4/5$$

Vậy HSĐB. + Nếu $4/5 < x \leq 1$ thì $y(x) \leq 11$

+ Nếu $x > 1$ thì $y(x) > 11$ Vậy nghiệm BPT $x > 1$

92/ Tìm m để hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \end{cases}$$
 có nghiệm thực

Giải: Điều kiện:
$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow t \in [0; 2]$; ta có $(1) \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2$.

Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên đoạn $[0; 2]$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} + m = 0$$

Đặt $v = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow v \in [0; 1] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ đạt $\min_{[0;1]} g(v) = -1$; $\max_{[0;1]} g(v) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 2$

93/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases}$$

Giải:

hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases}$$

ĐK $y \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = 4 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a = x + \frac{1}{y} \\ b = \frac{x}{y} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} a^2 + a - 2b = 4 \\ a^3 - 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 4 = 2b \\ a^3 - a(a^2 + a - 4) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 4 = 2b \\ a^2 - 4a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} x = y \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ KL

94/ Giải phương trình

$$\log_3(x^2 + 5x + 6) + \log_3(x^2 + 9x + 20) = 1 + \log_3 8$$

Giải: $\log_3(x^2 + 5x + 6) + \log_3(x^2 + 9x + 20) = 1 + \log_3 8$ (*)

+ Điều kiện : $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0 \\ x^2 + 9x + 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \vee x > -2 \\ x < -5 \vee x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ -4 < x < -3 \\ x > -2 \end{cases}$, và có : $1 + \log_3 8 = \log_3 24$

+ PT (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3[(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 9x + 20)] = \log_3 24 \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 9x + 20) = 24 \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 24 \text{ (*)} \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \text{ (**)} \end{cases}$

+ Đặt $t = (x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12 \Rightarrow (x+2)(x+5) = t - 2$, PT (*) trở thành :

$t(t-2) = 24 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -4$

- $t = 6 : x^2 + 7x + 12 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases}$ (thỏa điều kiện (**))

- $t = -4 : x^2 + 7x + 12 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 16 = 0 : \text{ vô nghiệm}$

+ Kết luận : PT có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -6$

95/ Cho khai triển $\left(2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)} \right)^8$. Hãy tìm các giá trị của x biết rằng số hạng thứ 6 trong khai triển này là 224

Giải: Ta có : $(a+b)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k a^{8-k} b^k$ với $a = 2^{\log_2 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}} = (9^{x-1} + 7)^{\frac{1}{3}}$; $b = 2^{-\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)} = (3^{x-1} + 1)^{-\frac{1}{5}}$

+ Theo thứ tự trong khai triển trên , số hạng thứ sáu tính theo chiều từ trái sang phải của khai triển là

$$T_6 = C_8^5 \left((9^{x-1} + 7)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \cdot \left((3^{x-1} + 1)^{-\frac{1}{5}} \right)^5 = 56(9^{x-1} + 7) \cdot (3^{x-1} + 1)^{-1}$$

+ Theo giả thiết ta có : $56(9^{x-1} + 7) \cdot (3^{x-1} + 1)^{-1} = 224 \Leftrightarrow \frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1} = 4 \Leftrightarrow 9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$

$$\Leftrightarrow (3^{x-1})^2 - 4(3^{x-1}) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-1} = 1 \\ 3^{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

96/ Giải phương trình $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

Giải: 1.ĐK: $x > 0$.

Ta có phương trình $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1$. Đặt $\log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Phương trình trở thành $3^t = 4^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} \right)^t + \left(\frac{1}{4} \right)^t = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

97/ .1.Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2 y + xy^2 = m + 1 \end{cases}$$

1) Giải phương trình với $m=3$

2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

Giải: 1. Nhận thấy rằng đây là hệ phương trình đối xứng loại 1, khi đó

đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$, ĐK $S^2 - 4P \geq 0$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng
$$\begin{cases} (x+y) + xy = m+2 \\ (x+y)xy = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P = m+2 \\ SP = m+1 \end{cases} \quad (I)$$

Khi đó S, P là nghiệm của phương trình bậc 2

$$t^2 - (m+2)t + m+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ xy=m+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=m+1 \\ xy=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = u^2 - u + m+1(1) \\ g(u) = u^2 - (m+1)u + 1(2) \end{cases}$$

Với m=-3, ta có

$$(1) \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; y=2 \\ x=2; y=-1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow u^2 + u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Leftrightarrow x = y = -1$$

Vậy với m=3, hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-1; 2), (2; -1), (-1; -1)$.

2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

ĐK: $x+y \neq 0$

Ta có hệ
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x+y + \frac{1}{x+y} + x-y = 3 \end{cases}$$

Đặt $u = x+y + \frac{1}{x+y}$ ($|u| \geq 2$); $v = x-y$ ta được hệ:
$$\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u+v = 3 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = 2, v = 1$ do ($|u| \geq 2$)

Từ đó giải hệ
$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x+y}=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

98/ 1. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2+1} > \log_{\frac{1}{3}} (ax+a)$

2. Giải phương trình: $(\sqrt{3}+1)^{\log_2 x} + x(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x} = 1+x^2$

Giải: 1. ĐK: $ax+a > 0$; Bpt tương đương $\sqrt{x^2+1} < a(x+1)$

Nếu $a > 0$ thì $x+1 > 0$, ta có $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} < a$

Nếu $a < 0$ thì $x+1 < 0$, ta có $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} > a$

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ với $x \neq -1$

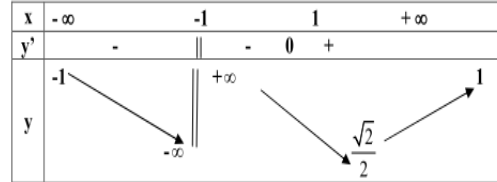
$$y' = \frac{x-1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+1}} = 0 \text{ khi } x=1 \Rightarrow a > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } a < -1$$

2. Điều kiện: $x > 0$

Đặt $(\sqrt{3}+1)^{\log_2 x} = u$, $(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x} = v$ ta có phương trình $u + uv^2 = 1 + u^2 v^2$

$$\Leftrightarrow (uv^2-1)(u-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ uv^2=1 \end{cases} \dots x=1$$



99/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Giải: hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 & (1) \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+xy^2-x^2y-y^3=13 & (1') \\ y^3-xy^2+x^2y-x^3=25 & (2') \end{cases}$$

Lấy (2') - (1') ta được: $x^2y - xy^2 = 6 \Leftrightarrow (x-y)xy = 6 \quad (3)$

Kiểm tra với (1) ta có:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x-y)xy=6 \end{cases} \quad (I). \text{ Nếu } y = -z \text{ ta có:}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)(x^2+z^2)=13 \\ -(x+z)xz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)[(x+z)^2-2xz]=13 \\ (x+z)xz=-6 \end{cases}$$

Đặt $S = x+z$ và $P = xz$ ta có:

$$\begin{cases} S(S^2 - 2P) = 13 \\ SP = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 2SP = 13 \\ SP = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} x+z=1 \\ x.z=-6 \end{cases}$. hệ này có nghiệm $\begin{cases} x=3 \\ z=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ z=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: (3 ; 2) và (-2 ; -3)

Đề 106. a) Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x - 4)) \leq 1$

Giải: a) Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x - 4)) \leq 1$

$$\log_x(\log_4(2^x - 4)) \leq 1. \text{ Đk: } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \log_4(2^x - 4) > 0 \Leftrightarrow x > \log_2 5 \\ 2^x - 4 > 0 \end{cases}$$

Do $x > 1 \Rightarrow \text{PT} \Leftrightarrow \log_4(2^x - 4) \leq x \Leftrightarrow 2^x - 4 \leq 4^x \Leftrightarrow 4^x - 2^x + 4 \geq 0$ đúng với mọi x . Do vậy BPT có nghiệm: $x > \log_2 5$

Đề 107. Tìm m để phương trình sau có một nghiệm thực:

$$\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} - x + 3 = 0$$

Giải: $\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} = x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ m = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 5} \end{cases}$$

Xét hàm số, lập BBT với $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 - 5x)}{(2x - 5)^2}$

Khi đó ta có:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	5/2	3	5	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 5}$ được vẽ trên bảng biến thiên. Các điểm đặc biệt trên đồ thị là $(3, 8)$ và $(5, 24/5)$.

Phương trình có 1 nghiệm $m \in \left\{ \frac{24}{5} \right\} \cup (8; +\infty)$

100/ Tìm m để phương trình: $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$ (2) có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Giải: Tìm m để phương trình: $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$ (2) có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow t^2 - 2 = x^2 - 2x$ Bpt (2) $\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ ($1 \leq t \leq 2$), do $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Khảo sát $g(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ với $1 \leq t \leq 2$; $g'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} > 0$. Vậy g tăng trên $[1, 2]$

$$\text{Do đó, ycbt} \Leftrightarrow \text{bpt } m \leq \frac{t^2-2}{t+1} \text{ có nghiệm } t \in [1,2] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [1;2]} g(t) = g(2) = \frac{2}{3} \quad \text{Vậy } m \leq \frac{2}{3}$$

101/ . 1) Giải phương trình: $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$

2) Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$

Giải:

1. (1) $\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2 + x + 1}{x} = x(2 - x) \Leftrightarrow 3^{x(2-x)} = x + 1 + \frac{1}{x}$

Đặt: $f(x) = 3^{x(2-x)}$; $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

Dùng pp kshs $\Rightarrow \max f(x) = 3$; $\min g(x) = 3 \Rightarrow \text{PT } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \max f(x) = \min g(x) = 3 \text{ tại } x = 1$
 $\Rightarrow \text{PT có nghiệm } x = 1$

2. Điều kiện $x > 0, x \neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_8 x} + 2 \log_4 x \right) \frac{1}{2} \log_2 2x \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{3} \log_2 x} + \log_2 x \right) (\log_2 x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2 x + 3) \left(\frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \leq -1 \text{ hay } \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ hay } x > 1$$

102/ Giải phương trình: $3^{x^2} 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

Giải: Giải phương trình: $3^{x^2} 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

Lấy logarit theo cơ số 3 cho hai vế ta được: $x^2 + \frac{x}{2x-1} \log_3 2 = 1 + \log_3 2$

Đưa phương trình về dạng: $(x-1)(2x^2 + x - 1 - \log_3^2 2) = 0$.

Từ đó suy ra nghiệm $x = 1$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 8 \log_3 2}}{4}$

103/ . Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3) \quad (1)$

đặt $t = \log_2 x$,

BPT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases} \text{ Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là: } (0; \frac{1}{2}] \cup (8; 16)$$

104/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Giải: hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)(x-1+y-1) = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ u^2 + v^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^2 - 2uv - 5 = 0 \end{cases}$ với $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} S = u+v \\ P = u.v \end{cases}$ được $\begin{cases} P.S = 6 \\ S^2 - 2P - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$

u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \\ y-1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-1 = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ: (3 ; 2), (2 ; 3)

105/ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $4^x - 4m(2^x - 1) = 0$

2. Tìm m để phương trình: $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm trong khoảng (0 ; 1).

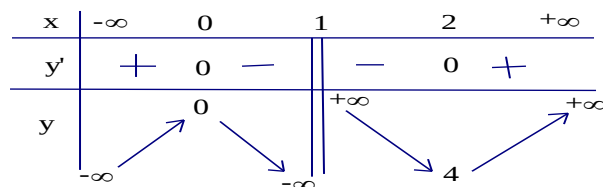
Giải:

1. Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) ta có phương trình: $t^2 - 4mt + 4m = 0$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \frac{t^2}{t-1} = 4m$ ($t > 0 \wedge t \neq 1$)

Xét $y = \frac{t^2}{t-1}$ có $y' = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$



Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0 \vee m \geq 1$

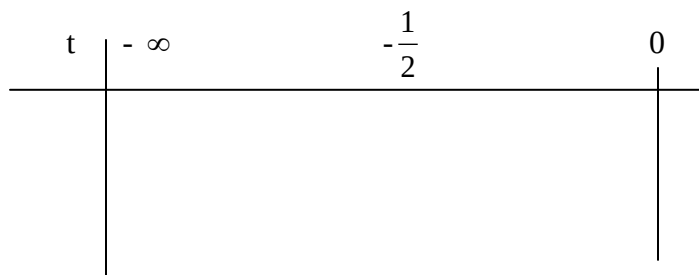
2. Pt đã cho $\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2} \log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0 \quad \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ (*)

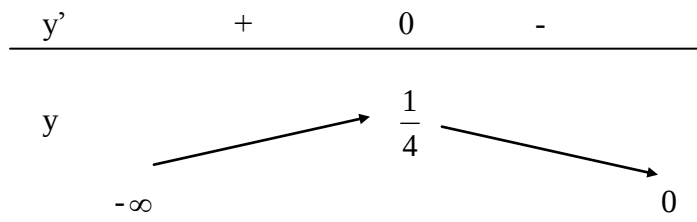
Đặt $t = \log_2 x$, $x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (-\infty; 0)$

(*) $\Leftrightarrow t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t \quad \forall t \in (-\infty; 0)$

Xét hàm số $y = -t^2 - t$ có $y' = -2t - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$





$$\text{ĐS : } m \leq \frac{1}{4}$$

106/ Giải bất phương trình $(4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \geq 8x-6$

Giải:

$$\text{bất phương trình: } (4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \geq 8x-6 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (4x-3)(\sqrt{x^2-3x+4}-2) \geq 0$$

Ta có: $4x-3=0 \Leftrightarrow x=3/4$

$$\sqrt{x^2-3x+4}-2=0 \Leftrightarrow x=0; x=3$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$3/4$	2	$+\infty$
$4x-3$		-	- 0 +		+
$\sqrt{x^2-3x+4}-2$		+ 0 -		- 0 +	
Vế trái		- 0 +	0 -	- 0 +	

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \cup [3; +\infty)$

107 / Giải phương trình: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x)$.

Giải: phương trình: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x)$.

$$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = 3 \log_8(4x).$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1$. Biến đổi theo logarit cơ số 2 thành phương trình

$$\log_2[(x+3)(x-1)] = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

108/ Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$:

$$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Giải: Đặt $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$, suy ra $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} \right).$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \text{ ta có } x > -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0.$$

Vậy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f'(x)$	$ $	$+$	$-$
		0	$ $
		1	
		CD	
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$		-4

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: Phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc

$$\left[-\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow -4 \leq m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2} \text{ hoặc } m = 1.$$

109/ 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$

Giải: 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$$

điều kiện $x > 0, y > 0$. Khi đó hệ tương đương

$$\begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình ta được: $(x-y)(3xy+x+y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ thay lại phương trình Giải tìm được nghiệm của hệ là: $(1;1)$.

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}} > 0; \forall x \neq -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập $M = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Ta thấy $f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm của (1). Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3; f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$ $	$ $	$ $	
$F(x)$					
	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = -1$.

Cách 2: Hs có thể đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2x+1} \\ v = \sqrt[3]{2x+3} \end{cases}$ khi đó ta được hệ $\begin{cases} u+v+\frac{u^3+v^3}{2}=0 \\ v^3-u^3=2 \end{cases}$ giải hệ này và tìm được nghiệm.

110/ Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$, điều kiện: $6-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow t^3 = 3x-2 \Leftrightarrow x = \frac{t^3+2}{3} \text{ vào } 6-5x = \frac{8-5t^3}{3}$$

$$\text{Phương trình trở thành: } 2t + 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} = 8-2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2. \text{ Vậy } x = -2$$

111/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải: Điều kiện $x, y > 0$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2 + \log_2(xy) = \log_2(2xy) \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

112/ Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} 2y - x = m \\ y + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Giải Ta có: $x = 2y - m$, nên: $\sqrt{2y^2 - my} = 1 - y$. PT $\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ m = y - \frac{1}{y} + 2 \end{cases}$ (vì $y = 0$ PTVN). Xét

$$f(y) = y - \frac{1}{y} + 2 \Rightarrow f'(y) = 1 + \frac{1}{y^2} > 0. \text{ Lập BTT. KL: Hệ có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow m > 2.$$

113/ 1. Giải phương trình $2x^{\log_4 x} = 8^{\log_2 \sqrt{x}}$.

2. Giải bất phương trình $2(1 + \log_2 x) \log_4 x + \log_8 x < 0$.

Giải 1. ĐK: $x > 0$. Ta có: $1 + \log_2 x \log_4 x = 3 \log_2 \sqrt{x}$. Đặt $t = \log_2 x$. Ta có:

$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 2$. Khi: $t = 1$ thì $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (th). Khi: $t = 2$ thì $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (th). KL: Nghiệm PT $x = 2, x = 4$.

2. ĐK: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, ta có: $(1+t)t + \frac{t}{3} < 0$, BPT $\Leftrightarrow 3t^2 + 4t < 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < t < 0$. KL:

$$-\frac{4}{3} < \log_2 x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} < x < 1.$$

114/ Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{(x-1)(4-x)}}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} > \frac{2x}{\sqrt{x+2}}$

Giải

$$\text{ĐK: ? bpt} \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 3x + 4} > x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in (0; 7) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1; \frac{7}{2}\right]$$

115/ Giải phương trình: $8^x + 1 = 2 \sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$

Giải: $8^x + 1 = 2 \sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$ Đặt $2^x = u > 0; \sqrt[3]{2^{x+1} - 1} = v$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; x = \log_2 \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

116/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases}$$

Giải: ĐK $y \neq 0$
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y} \left(\frac{1}{y} + x\right) = 4 \end{cases}$$
 Đặt $\begin{cases} a = x + \frac{1}{y} \\ b = \frac{x}{y} \end{cases}$

Ta có
$$\begin{cases} a^2 + a - 2b = 4 \\ a^3 - 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 4 = 2b \\ a^3 - a(a^2 + a - 4) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 4 = 2b \\ a^2 - 4a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Khi đó
$$\begin{cases} x = y \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

117/ Giải hệ phương trình:
$$\sqrt[3]{9^x - 5 \cdot 3^x - 14} \cdot \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \geq 0$$

Giải:

KL: 2. +) Đ/K: $x > 2$ or $x < -1$

$$\sqrt[3]{9^x - 5 \cdot 3^x - 14} \cdot \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(3^x - 7)(3^x + 2)} \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 7) \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \geq 0$$

Xét $x > 2$ ta có $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x > 2$

Xét $x < -1$ ta có $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x < 2$. KL: ?

118/ Giải phương trình : $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Giải: Đặt $2^x = t$, đưa về pt bậc 2 ẩn t , giải tiếp. Hoặc đưa pt về dạng tổng các bình phương

119/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực : $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{-x^2 + 2mx + 2m}$

Giải Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực : $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{-x^2 + 2mx + 2m}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ -x^2 + 3x - 2 = -x^2 + 2mx + 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2m(x+1) = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{3x-2}{x+1} = 2m \end{cases}$$

$f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$ và có $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$

Bài toán yêu cầu $\Leftrightarrow f(1) \leq 2m \leq f(2) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{2}{3}}$

120/ Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y - x)(x^2 - xy + y^2) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện : $x > 0 ; y > 0$. Ta có : $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 \quad \forall x, y > 0$; Xét $x > y$

$\Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x < \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} VT(*) > 0 \\ VP(*) < 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Xét $x < y \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x > \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} VT(*) < 0 \\ VP(*) > 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Khi $x = y$ hệ cho ta $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x^2 = 2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$ (do $x, y > 0$). Vậy hệ có ngd nh $(x; y) = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Vậy hệ có ngd

121/ Giải phương trình: $(x + 24)^{\frac{1}{3}} + (12 - x)^{\frac{1}{2}} = 6$.

Giải; Nhận xét: Theo định nghĩa của lũy thừa số mũ hữu tỉ, cơ số phải dương nên điều kiện có nghĩa của biểu thức là: $\begin{cases} x + 24 > 0 \\ 12 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -24 < x < 12$.

Đặt: $u = (x + 24)^{\frac{1}{3}} ; v = (12 - x)^{\frac{1}{2}}$ với $u, v > 0$.

Ta có: $\begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + (6 - u)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + u^2 - 12u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u(u^2 + u - 12) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=3 \end{cases} \text{ (do } u, v > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+24)^{\frac{1}{3}}=3 \\ (12-x)^{\frac{1}{2}}=3 \\ -24 < x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+24=27 \\ 12-x=9 \\ -24 < x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa)}$$

122/ Giải phương trình $\log_3(x^2+5x+6)+\log_3(x^2+9x+20)=1+\log_3 8$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases} x^2+5x+6 > 0 \\ x^2+9x+20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \vee x > -2 \\ x < -5 \vee x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ -4 < x < -3 \\ x > -2 \end{cases}$, và có : $1+\log_3 8 = \log_3 24$

+ PT (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 [(x^2+5x+6)(x^2+9x+20)] = \log_3 24 \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+5x+6)(x^2+9x+20) = 24 \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 24 \text{ (*)} \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \text{ (**)} \end{cases}$

+ Đặt $t = (x+3)(x+4) = x^2+7x+12 \Rightarrow (x+2)(x+5) = t-2$, PT (*) trở thành :

$t(t-2) = 24 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -4$

- $t = 6$: $x^2+7x+12=6 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-6 \end{cases}$ (thỏa điều kiện (**))

- $t = -4$: $x^2+7x+12=-4 \Leftrightarrow x^2+7x+16=0$: vô nghiệm

+ Kết luận : PT có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -6$

123/ Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{x+y} \\ 2x - y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Giải: Đặt : $t = x + y$; ĐK : $t \geq 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-2t}{\sqrt{t+1}+\sqrt{3t}} = (2t-1)(2t+1) \Leftrightarrow (1-2t) \left[\frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{3t}} + 2t+1 \right] = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$; Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ 2x-y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có một nghiệm $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$

Đề 132 : Giải phương trình:

$$(9^x - 2 \cdot 3^x - 3) \log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 27 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{x+1}{2}} - 9^x$$

Giải: ĐK: $x > 1$; Với ĐK trên phương trình đã cho tương đương

$$(9^x - 2 \cdot 3^x - 3) \log_3(x-1) - 3 = 2 \cdot 3^x - 9^x$$

$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1)[\log_3(x-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1) \log_3(x-1) - 3 - 2 \cdot 3^x + 9^x = 0$

$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1) \log_3(x-1) + (3^x + 1)(3^x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1)[\log_3(x-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 3 = 0 \\ \log_3(x-1) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm : $x = \frac{4}{3}$

124/ Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} \leq x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$

Giải : * Đk: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$. Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}$ ($t > 0$)

BPT trở thành: $t^2 - t - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2(L) \\ t \geq 3 \end{cases}$

* Với $t \geq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 16} \geq 9 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 9 - 2x \leq 0 \end{cases} \quad (a)$

$\begin{cases} x \geq 4 \\ 9 - 2x > 0 \\ 4(x^2 - 16) \geq (9 - 2x)^2 \end{cases} \quad (b)$

* (a) $\Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$. * (b) $\Leftrightarrow \frac{145}{36} \leq x < \frac{9}{2}$. * Tập nghiệm của BPT là: $T = \left[\frac{145}{36}; +\infty \right)$

125/ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \end{cases}$

2. Giải phương trình: $9^x + (x - 12)3^x + 11 - x = 0$

Giải 1) Giải hệ: $\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \Rightarrow 12 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{3} \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \Rightarrow |x||y| \geq 2\sqrt{3}|y| \Rightarrow |x| \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow |x| = 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = 18$

$\Rightarrow x \in \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$, tương ứng $y \in \{-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\}$

Thử lại, thỏa mãn hệ đã cho

Vậy, $(x; y) \in \{(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}), (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})\}$

2) Giải phương trình: $(3^x)^2 + (x-12)3^x + 11 - x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 11 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 3^x + x - 11 = 0(*) \end{cases} \quad (a + b + c = 0)$

$\left. \begin{matrix} f'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0, \forall x \\ f(2) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (*) \text{ có nghiệm duy nhất } x = 2$

Vậy, tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; 2\}$

126/ Giải phương trình: $(x^2 + 1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2 + 4}; \quad x \in R$

Giải: $(x^2 + 1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2 + 4}; \quad x \in R$

Đặt $t = x\sqrt{2x^2 + 4} \Rightarrow t^2 = 2(x^4 + 2x^2)$ ta được phương trình $\frac{t^2}{2} + 1 = 5 - t \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$$

+ Với $t = -4$ Ta có $x\sqrt{2x^2 + 4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2(x^4 + 2x^2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$

+ Với $t = 2$ ta có

$$x\sqrt{2x^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2(x^4 + 2x^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + 2x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

ĐS: phương trình có 2 nghiệm $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$

127/ Giải bất phương trình:
$$\frac{\left(\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+1}\right)^2 - \frac{3}{2} \log_2(x+1) - 6}{2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)} \geq \log_2(x+1)$$

Giải: Đặt $\log_2(x+1) = t$ rồi giải tiếp

128/ Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5} = 3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ x\sqrt{x+5} = -2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \sqrt{x+5} = -2 \cdot \frac{x+2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ (x+1)(x^2-16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; \text{ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm } x = -1.$$

129/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} y-x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$; Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(y-x) + \log_4 \frac{1}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \frac{y-x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x}{y} = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 9y^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y^2=\frac{25}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x;y)=\left(\frac{15}{\sqrt{10}};\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \\ (x;y)=\left(-\frac{15}{\sqrt{10}};-\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \end{cases} \text{ (không thỏa mãn đk)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

130/ Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ có nghiệm thực.

Giải: Đặt $t = e^{\frac{x}{2}}$ ĐK: $t > 0$. PT trở thành: $m = \sqrt[4]{t^4 + 1} - t$. Xét $f(t) = \sqrt[4]{t^4 + 1} - t$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^4 + 1}} - 1 < 0 \rightarrow \text{hàm số NB trên } (0; +\infty). \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{t^4 + 1} + t\right)\left(\sqrt{t^4 + 1} + t^2\right)} = 0;$$

$$f(0) = 1. \quad \text{KL: } 0 < m < 1.$$

131/ Giải phương trình: $\log_3(4 \cdot 16^x + 12^x) = 2x + 1$.

Giải: PT $\Leftrightarrow 4 \cdot 16^x + 12^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 4 \cdot 4^{2x} + 4^x \cdot 3^x = 3 \cdot 3^{2x}$. Chia 2 vế cho $3^{2x} > 0$, ta

$$\text{có: } 4\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 = 0; \text{ Đặt } t = \left(\frac{4}{3}\right)^x. \text{ ĐK: } t > 0; 4t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1(\text{kh}) ; t = \frac{3}{4}(\text{th}).$$

$$\text{Khi } t = \frac{3}{4}, \text{ ta có: } \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

132/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $|x| \geq |y|$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x^2 - y^2}; u \geq 0 \\ v = x + y \end{cases}; x = -y \text{ không thỏa hệ nên xét } x \neq -y \text{ ta có } y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right).$$

$$\text{Hệ phương trình đã cho có dạng: } \begin{cases} u + v = 12 \\ \frac{u}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 3 \\ v = 9 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \\ x + y = 8 \end{cases} \text{ (I) ; } + \begin{cases} u = 3 \\ v = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \\ x + y = 9 \end{cases} \text{ (II)}$$

Giải hệ (I), (II). Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $S = \{(5; 3), (5; 4)\}$

133/ Giải phương trình: $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$

Giải: phương trình $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$

- Điều kiện: $x > 0; x \neq 2; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{16}$. Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của pt đã cho; Với $x \neq 1$. Đặt

$t = \log_x 2$ và biến đổi phương trình về dạng $\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0$; Giải ra ta được

$t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy pt có 3 nghiệm $x = 1; x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

134/ Giải phương trình $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^x - \frac{1}{4} \cdot 9^{x+1}$.

Giải: Biến đổi phương trình đã cho về dạng $3 \cdot 2^{2x} + 27 \cdot 3^{2x} = 6 \cdot 2^{2x} - \frac{9}{4} \cdot 3^{2x}$ Từ đó ta thu được

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{39}}$$

135/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Hệ: } \begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \Rightarrow 12 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{3} \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \Rightarrow |x||y| \geq 2\sqrt{3}|y| \Rightarrow |x| \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow |x| = 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = 18; \Rightarrow x \in \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\},$$

tương ứng $y \in \{-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\}$; Thử lại, thỏa mãn hệ đã cho

Vậy, $(x; y) \in \{(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}), (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})\}$

136/ Giải phương trình: $\log_3(4 \cdot 16^x + 12^x) = 2x + 1$.

Giải; PT $\Leftrightarrow 4 \cdot 16^x + 12^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 4 \cdot 4^{2x} + 4^x \cdot 3^x = 3 \cdot 3^{2x}$. Chia 2 vế cho $3^{2x} > 0$, ta có $4\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. ĐK: $t > 0$; $4t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (ktm); $t = \frac{3}{4}$ (tm). Khi $t = \frac{3}{4}$, ta có:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

137/ :1. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt: $10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.

2. Giải phương trình: $2^{\log_3 x + 1} + 2^{\log_3 x - 2} = x$.

Giải: Nhận xét: $10x^2 + 8x + 4 = 2(2x+1)^2 + 2(x^2 + 1)$

Phương trình tương đương với : $2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 - m\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2 = 0$. Đặt $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = t$ ĐK: $-2 < t \leq \sqrt{5}$.

Rút m ta có: $m = \frac{2t^2 + 2}{t}$ Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(-2, \sqrt{5}]$ ta có kết quả của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $4 < m \leq \frac{12}{\sqrt{5}}$ hoặc $-5 < m < -4$.

2.ĐK: $x > 0$. Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$. Ta có: $2.2^t + \frac{1}{4}2^t = 3^t \Leftrightarrow \frac{9}{4}.2^t = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Khi $t = 2$ thì $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$ (th) KL: nghiệm PT là $x = 9$.

138/ Giải bất phương trình : $x+1 \geq \sqrt{2(x^2-1)}$ (2).

Giải:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-1) \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2(x^2-1) \leq (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình : $x = -1 \vee 1 \leq x \leq 3$.

139 / Giải hệ phương trình , khi $a > 1$:

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} + \sqrt{y+a} + \sqrt{z+a} = 3\sqrt{\frac{a^2+1}{a}} \\ \sqrt{a-x} + \sqrt{a-y} + \sqrt{a-z} = 3\sqrt{\frac{a^2-1}{a}} \end{cases}$$

Giải: Xét các véc tơ : $\vec{u} = (\sqrt{x+a}; \sqrt{y+a}; \sqrt{z+a})$, $\vec{v} = (1; 1; 1)$

$$\Rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+a} + \sqrt{y+a} + \sqrt{z+a})^2 \leq 3(3a+x+y+z) \quad (1)$$

Tương tự $(\sqrt{a-x} + \sqrt{a-y} + \sqrt{a-z})^2 \leq 3(3a-x-y-z) \quad (2)$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+a} + \sqrt{y+a} + \sqrt{z+a})^2 + (\sqrt{a-x} + \sqrt{a-y} + \sqrt{a-z})^2 \leq 18a$$

Mà cộng hai phương trình của hệ ta có :

$$(\sqrt{x+a} + \sqrt{y+a} + \sqrt{z+a})^2 + (\sqrt{a-x} + \sqrt{a-y} + \sqrt{a-z})^2 = 18a$$

Tức là dấu đẳng thức phải xảy ra trong các bất đẳng thức (1) và (2), hay :

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} = \sqrt{y+a} = \sqrt{z+a} = \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} \\ \sqrt{a-x} = \sqrt{a-y} = \sqrt{a-z} = \sqrt{\frac{a^2-1}{a}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{a}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là : $x = y = z = \frac{1}{a}$.

140/ Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$$

Giải: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + x + y = 0 \\ xy = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \text{ hay } x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \text{ hay } x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

141/ Giải hệ pt :
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ (2x+y+1) + (x+y) = 5 \end{cases}$

Chọn $u = \sqrt{2x+y+1} \geq 0, v = \sqrt{x+y} \geq 0$; (I) thành $\begin{cases} u-v=1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=2 \Rightarrow v_1=1 \\ u_2=-1 \Rightarrow v_2=-2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

142/ Giải pt $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4} \quad (1)$

Giải:

1/ Giải pt $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4} \quad (1)$

Nếu kiện $\begin{cases} 3x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-3} = \sqrt{5-x} + \sqrt{2x-4} \quad \forall x \in [2, 5]$

$\Leftrightarrow 3x-3 = 5-x+2x-4+2\sqrt{(5-x)(2x-4)} \quad \forall x \in [2, 5]$

$\Leftrightarrow x-2 = \sqrt{(5-x)(2x-4)} \quad \forall x \in [2, 5]$

$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ hay } [\sqrt{x-2} = \sqrt{(5-x)2} \quad \forall x \in (2, 5)]$

$\Leftrightarrow x=2 \text{ hay } [x-2=2(5-x) \text{ và } 2 < x \leq 5]$

$\Leftrightarrow x=2 \text{ hay } x=4$

143/ Giải bất phương trình $\sqrt{8x^2-6x+1} - 4x + 1 \leq 0 \quad (1)$

Giải: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{8x^2-6x+1} \leq 4x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ 4x - 1 \geq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \leq (4x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{4} \\ 8x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \text{ hay } x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ hay } x \geq \frac{1}{2}$$

144/ Giải bài toán bất phương trình $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2}$ (1)

Giải: bất phương trình $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2}$ (1)

Nhiều điều kiện $\begin{cases} 2x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 5$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+7} \geq \sqrt{3x-2} + \sqrt{5-x} \text{ và } \frac{2}{3} \leq x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2x+7 \geq 3x-2+5-x+2\sqrt{(3x-2)(5-x)} \text{ và } \frac{2}{3} \leq x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{(3x-2)(5-x)} \text{ và } \frac{2}{3} \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 17x + 14 \geq 0 \text{ và } \frac{2}{3} \leq x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ hay } \frac{14}{3} \leq x) \text{ và } \frac{2}{3} \leq x \leq 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ hay } \frac{14}{3} \leq x \leq 5$$

145/ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2005x \leq 2005 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: Nhiều điều kiện là $x \geq -1$. Ta có $7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x} - 7^2) \leq 2005(1-x)$: đúng $\forall x \in [-1; 1]$ và sai khi $x > 1$. Do đó (1) $\Leftrightarrow$

$-1 \leq x \leq 1$. Vậy, hệ bất phương trình $\Leftrightarrow f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0$ có nghiệm $\in [-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in [-1; 1]} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \max \{f(-1), f(1)\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \max \{3m+6, m+2\} \geq 0 \Leftrightarrow 3m+6 \geq 0 \text{ hay } m+2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$$

146/ Giải bài toán bất phương trình $9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3$ (1)

Giải: Ta có (1) $\Leftrightarrow 9^{x^2-2x} - 2 \cdot 3^{x^2-2x} \leq 3$. Đặt $t = 3^{x^2-2x} > 0$, (1) tương đương

$$t^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3. \text{ Do đó, (1) } \Leftrightarrow -1 \leq 3^{x^2-2x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 < 3^{x^2-2x} \leq 3^1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

147/ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} (2x+1)[\ln(x+1) - \ln x] = (2y+1)[\ln(y+1) - \ln y] & (1) \\ \sqrt{y-1} - 2\sqrt{(y+1)(x-1)} + m\sqrt{x+1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: Đặt $f(x) = (2x+1)[\ln(x+1) - \ln x] = (2x+1)\ln \frac{x+1}{x}$ TXĐ: $D = [0; +\infty)$

Gọi $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$ với $x_1 > x_2$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 1 > 2x_2 + 1 > 0 \\ \ln \frac{x_1+1}{x_1} > \ln \frac{x_2+1}{x_2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2): f(x) \text{ là hàm số tăng}$$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow x = y$

$$(2) \Rightarrow \sqrt{x-1} - 2\sqrt[4]{(x-1)(x+1)} + m\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + m = 0$$

$$\text{Đặt } X = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow 0 \leq X < 1$$

Vậy hệ có nghiệm khi phương trình: $X^2 - 2X + m = 0$ có nghiệm $0 \leq X < 1$

$$\text{Đặt } f(X) = X^2 - 2X \Rightarrow f'(X) = 2X - 2 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm} \Leftrightarrow -1 < m \leq 0$$

149/ 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 1}{x + y + 2} = 2 \\ (xy - x - y + 1)(x + y - 2) = 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

2) Tìm m thực để phương trình sau có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$:

$$(m-1) \cdot \log_{1/2}^2(x-2) + 4(m-5) \log_{1/2} \frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$$

Giải: 1. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-1)(y-1)[(x-1) + (y-1)] = 6 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$, thu được hệ $\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases}$

Giải ra được: $\begin{cases} u+v=3 \\ u \cdot v=2 \end{cases}$; * Giải ra được: $\begin{cases} u = x-1=1 \\ v = y-1=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = x-1=2 \\ v = y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

$$2 / \text{ PT } \Leftrightarrow (m-1) \cdot \log_{1/2}^2(x-2) - (m-5) \log_{1/2}(x-2) + m - 1 = 0$$

*Đặt $t = \log_{1/2}(x-2), x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$;

Thu được pt: $m = f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}; f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ Lập BBT của $f(t)$ trên đoạn

$[-1; 1]$, thấy $f(t)$ liên tục và NB trên đoạn $[-1; 1]$, nên $m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right]$ thỏa mãn đề bài.

150/ Tìm m để hệ phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

$$10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}.$$

Giải: $10x^2 + 8x + 4 = 2(2x+1)^2 + 2(x^2 + 1)$

Phương trình tương đương với: $2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 - m\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2 = 0.$

Đặt $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = t$ ĐK: $-2 < t \leq \sqrt{5}$. Rút m ta có: $m = \frac{2t^2+2}{t}$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $[-2, \sqrt{5}]$, ta có kết quả của m để hệ phương có 2 nghiệm phân biệt là $4 < m \leq \frac{12}{\sqrt{5}}$ hoặc $-5 < m < -4$

151/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_{xy} 16 = 4 - \frac{1}{\log_y 2} \\ 4x^4 + 8x^2 + xy = 16x^2 \sqrt{4x+y} \end{cases}$$

Giải: NK: $x > 0, y > 0, xy \neq 1, y \neq 1$

+) Tở PT (1) ta còu: $xy = 4$; +) Theá vào (2) ta còu: $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

+) KL: Heà còu càu nghiệã laø : $\left(2 + \sqrt{3}; \frac{4}{2 + \sqrt{3}}\right); \left(2 - \sqrt{3}; \frac{4}{2 - \sqrt{3}}\right)$

152/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x+1+6\sqrt{x-8}} + \sqrt{x+1-6\sqrt{x-8}} = \frac{x+m}{6}$

Giải: +) NK: $x \geq 8$

+) PT $\Leftrightarrow |\sqrt{x-8}+3| + |\sqrt{x-8}-3| = \frac{x+m}{6}$; +) Neáu $x \geq 17$, ta còu PT trôu thaønh :

$12\sqrt{x-8} - x = m$. PT còu nghiệã $x \geq 17 \Leftrightarrow 77 \leq m \leq 100$

+) Neáu $8 \leq x < 17$, ta còu PT trôu thaønh : $36 - x = m$. PT còu nghiệã $\Leftrightarrow 19 < m \leq 28$

KL: $77 \leq m \leq 100$ hoặc $19 < m \leq 28$

153/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Giải: $y \neq 0$, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases}$$
. Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}, v = x+y$ ta có hệ:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, u = 1 \\ v = -5, u = 9 \end{cases}$$

Với $v = 3, u = 1$ ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = -2, y = 5 \end{cases}$$

Với $v = -5, u = 9$ ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ y = -5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 46 = 0 \\ y = -5 - x \end{cases}$$
, hệ này vô nghiệm.

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = \{(1; 2), (-2; 5)\}$.

154/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}, (x, y \in \mathbf{R}).$$

Giải: + Điều kiện:

$$\begin{cases} -xy - 2x + y + 2 > 0, x^2 - 2x + 1 > 0, y + 5 > 0, x + 4 > 0 \\ 0 < 1 - x \neq 1, 0 < 2 + y \neq 1 \end{cases} \quad (I).$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)] + 2\log_{2+y}(1-x) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2) + \log_{2+y}(1-x) - 2 = 0 \quad (1) \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \quad (2). \end{cases}$$

Đặt $\log_{2+y}(1-x) = t$ thì (1) trở thành: $t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có: $1 - x = y + 2 \Leftrightarrow y = -x - 1 \quad (3)$. Thế vào (2) ta có:

$$\log_{1-x}(-x+4) - \log_{1-x}(x+4) = 1 \Leftrightarrow \log_{1-x} \frac{-x+4}{x+4} = 1 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x+4} = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra: } \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Kiểm tra thấy chỉ có } x = -2, y = 1 \text{ thỏa mãn điều kiện trên.}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = -2, y = 1$.

155/ .Giải phương trình: $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$

$$\text{Giải: Giải phương trình: } 8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0, \Leftrightarrow 8 - x.2^x - \frac{8}{2^x} - x = 0 \Leftrightarrow 8(1 + \frac{1}{2^x}) - x(2^x + 1) = 0$$

$$\frac{8}{2^x}(2^x + 1) - x(2^x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x + 1)(\frac{8}{2^x} - x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{2^x} = x$$

Về trái nghịch biến, về phải đồng biến $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

156/ 1) Giải phương trình $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16} = 14$.

2) Tìm m để pt trình sau đây có đúng 2 nghiệm: $\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3} - 4\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2x^2 - 4x + m$.

Giải: 1. TXĐ: $x \geq 5$; $x = 5$ không là nghiệm

$$\text{Đặt } y = \sqrt{x-5} + \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16} - 14 \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x-5}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{2\sqrt{x+16}} > 0$$

Hàm số đồng biến $\Rightarrow$ phương trình $y=0$ có 1 nghiệm duy nhất. Ta có $y(9) = 14 \Leftrightarrow x = 9$

$$2. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 4 = m \\ t \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -2/3; \quad t_2 = 2$$

BBT

t	-2/3	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	0	-	0	+
$f(t)$		1/2	-4	$+\infty$

$$\text{Từ bảng biến thiên } \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m = -4 \end{cases}$$

157/ Giải bất phương trình: $\log_2(\sqrt{3x+1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x})$

Giải: Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 10$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{3x+1} + 6}{2} \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+1} + 6}{2} \geq 7 - \sqrt{10-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x+1}+6 \geq 2(7-\sqrt{10-x}) \Rightarrow \sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x} \geq 8 \Rightarrow 49x^2-418x+369 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{369}{49} \text{ (thỏa)}$$

158/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \\ 2^x + 2^y = 3 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$ và $y > 0$ và $y \neq 1$

Ta có $\log_y \sqrt{xy} = \log_x y \Rightarrow \log_y^2 x + \log_y x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$

• Với $x = y \Rightarrow x = y = \log_2 3 - 1$

• Với $x = \frac{1}{y^2}$ ta có: $2^{\frac{1}{y^2}} + 2^y = 3$ theo bất đẳng thức Cô-si suy ra PT vô nghiệm

159/ Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+10} \geq \sqrt{5x+10} - \sqrt{x-2}$

Giải: * Điều kiện: $x \geq 2$; $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+10} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{5x+10} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+6x-20} \geq x+1(2)$

Khi $x \geq 2 \Rightarrow x+1 > 0$ bình phương 2 vế phương trình (2)

$(2) \Leftrightarrow 2x^2+6x-20 \geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+4x-11 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$

Kết hợp điều kiện vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \geq 3$

160/ 1) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2} = x+2$ có 2 nghiệm phân biệt.

2) Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0$.

Giải: Ta có: $x^2-2x+2 \geq 1$ nên $m\sqrt{x^2-2x+2} = x+2 \Leftrightarrow m = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Xét $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, ta có:

$f'(x) = \frac{4-3x}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}; f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{10}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y		$\sqrt{10}$	
	-1		1

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1 < m < \sqrt{10}$

161/ $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0$

Giải:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x+1) + \log_2 (3-x) - \log_2 (x-1) = 0 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3-x) = x-1 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 = 0 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

162/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y - 15 = 0 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải: Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(y-2) + 4(x^2-1) + 4(y-2) = 5 \\ (x^2-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$

Ta có hpt $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = -10 \\ uv = 45 \end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc

$$\begin{cases} u+v=2 \\ uv=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u=-1 \\ v=3 \end{cases} \text{ Tìm được 2 nghiệm } (x; y) = (2; 1) \text{ và}$$

$$(x; y) = (-2; 1) \text{ và } \begin{cases} u=-1 \\ v=3 \end{cases} \text{ Tìm được nghiệm } (x; y) = (0; 5)$$

Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: (2;1), (-2;1), (0;5)

163/ : 1. Giải phương trình: $\log(10.5^x + 15.20^x) = x + \log 25$.

2. Giải bất phương trình $1 + \log_2 x + \log_2 (x+2) > \log_{\sqrt{2}} (6-x)$

Giải: 1. PT $\Leftrightarrow \log(10.5^x + 15.20^x) = \log(25.10^x) \Leftrightarrow 10.5^x + 15.20^x = 25.10^x$

$$\Leftrightarrow 15.4^x - 25.2^x + 10 = 0 \text{ (chia hai vế của phương trình cho } 5^x) \text{ Đặt } t = 2^x (t > 0), \text{ Ta có pt :}$$

$$15t^2 - 25t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(tm) \\ t = \frac{2}{3}(tm) \end{cases} \text{ Với } t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{2}{3} \right)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_2 \left(\frac{2}{3} \right)$.

2. Đk: $0 < x < 6$. BPT $\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 4x) > \log_2 (6-x)^2$ BPT

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x > (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 36 > 0 \Leftrightarrow x < -18 \text{ hoặc } x > 2. \text{ Kết hợp đk ta có tập nghiệm BPT là } S = (2; 6)$$

164/ Giải bất phương trình :
$$\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3} > \frac{2\sqrt{9-x}}{x}$$

Giải:
$$\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3} > \frac{2\sqrt{9-x}}{x}.$$

ĐK: $-1 \leq x \leq 9$ và $x \neq 0$

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}+1)} > \frac{2\sqrt{9-x}}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2 > \frac{2\sqrt{9-x}}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x+1}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 0; \text{Bpt} \Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1} > 2\sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow (x-8) + (9-3\sqrt{x-1}) + (2-2\sqrt{9-x}) > 0 \Leftrightarrow (x-8)\left(1-\frac{9}{9+3\sqrt{x+1}}+\frac{8}{2+2\sqrt{9-x}}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 8$$

Kết hợp đk : $8 < x \leq 9$

$$\text{TH2: } \sqrt{x+1}-1 < 0 \Leftrightarrow x < 0; \text{Bpt} \Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1} < 2\sqrt{9-x} \Leftrightarrow x < 8; \text{Kết hợp đk: } -1 \leq x < 0$$

Vậy tập nghiệm của bpt $S = [-1; 0) \cup (8; 9]$

165/ Giải phương trình $\log_9(x+1)^2 + \log_{\sqrt{3}} 2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4-x} + \log_{27}(x+4)^3$

Giải: $\log_9(x+1)^2 + \log_{\sqrt{3}} 2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4-x} + \log_{27}(x+4)^3$ (1)

§ K: $\begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \log_3(x+1) + \log_3 4 = \log_3(4-x) + \log_3(x+4)$

$\Leftrightarrow \log_3 4|x+1| = \log_3(16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$;

Giải phương trình tìm được $X=2$, hoặc $X=-2$

166/ 1) Giải phương trình: $x^3 - \sqrt[3]{x+2\ln x} - \frac{2}{3}\ln(x+2\ln x) = 0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3x+y)(x+3y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)(x^2+14xy+y^2) = 36 \end{cases}$

Giải: 1. Đặt $y = \sqrt[3]{x+2\ln x} > 0$ Đưa về hệ PT đối xứng. PT có nghiệm duy nhất $x=1$.

2. Đưa về PT đẳng cấp (bậc 3) bằng cách đặt ẩn phụ $u = x+y$; $v = \sqrt{xy} \geq 0$.

167/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Giải: Điều kiện $x+y > 0$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 1 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 0 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)(x+y+1-\frac{2xy}{x+y}) = 0 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y-1)(x+y+1) = 0 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

168/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ x^2 + 2y + 2 + \sqrt{x+y} = \sqrt{4x+3y} + \sqrt{4x+5y} \end{cases}$

$$\text{Giải: } \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1(1) \\ x^2 + 2y + 2 + \sqrt{x+y} = \sqrt{4x+3y} + \sqrt{4x+5y}(2). \end{cases}$$

Điều kiện: $x+y>0, 4x+3y \geq 0, 4x+5y \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 + \frac{2xy}{x+y} - 2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y-1) \left(x+y+1 - \frac{2xy}{x+y} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1) \left(\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y} \right) = 0 \Leftrightarrow x+y-1=0 \quad (\text{do } \frac{x^2+y^2+x+y}{x+y} > 0).$$

Với $y+x=1 \Leftrightarrow y=1-x$ thay vào (2) ta được $4+(x-1)^2 = \sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}$ (*)

Ta thấy vế trái (*) $4+(x-1)^2 \geq 4$ dấu “=” khi $x=1$.

Ta thấy vế phải (*) $\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{(1+1)[(3+x)+(5-x)]} = 4$ (Bunhiacopski) dấu “=” khi $x=1$. (*)

$\Leftrightarrow x=1 \rightarrow y=0$. Ta thấy $(x;y) = (1;0)$ thỏa mãn đk.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;0)$

169/ 1. Giải phương trình: $3^{x^2+2} \cdot \log_2(x^2 - x + 2) - 3^{2|x-2|+x} = 3^{2|x-2|+x} \cdot \log_2|x-2|$.

2. Giải phương trình: $\log_3(3^x + 2) + \log_3(3^{x-1} + 1) = \log_3(2 \cdot 9^x + 3^x + 9) - 1$.

Giải: 1. Điều kiện $x \neq 2$

Phương trình tương đương với $3^{x^2-x+2} \cdot \log(x^2 - x + 2) = 3^{2|x-2|} + 3^{2|x-2|} \cdot \log|x-2|$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-x+2} \cdot \log_2(x^2 - x + 2) = 3^{2|x-2|} \cdot \log_2(2|x-2|) \quad (*)$$

Vì $x^2 - x + 2 > 1$ nên vế trái dương vậy vế phải dương $\rightarrow |x-2| > 1$

Xét hàm số $f(t) = 3^t \cdot \log_2 t$ với $t > 1$, $f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 \cdot \log_2 t + \frac{3^t}{t \cdot \ln 2} > 0 \forall t > 1$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Từ (*) ta có $f(x^2 - x + 2) = f(2|x-2|) \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2|x-2|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = 2x - 4 \\ x^2 - x + 2 = -2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 6 = 0(1) \\ x^2 + x - 2 = 0(2) \end{cases}$$

pt(1) vô nghiệm, pt(2) có nghiệm $x=1$ và $x=-2$ tm điều kiện

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

2. Phương trình tương đương với $\log_3[(3^x + 2)(3^x + 3)] = \log_3(2 \cdot 9^x + 3^x + 9)$

$$\Leftrightarrow (3^x + 2)(3^x + 3) = (2 \cdot 9^x + 3^x + 9) \Leftrightarrow 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 (*). \text{ Đặt } t = 3^x, t > 0. (*)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đk } t > 0); \text{ Với } t=1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x=0.$$

Với $t=3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=0$ hoặc $x=1$.

170/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$

Giải: Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy = 2 \Rightarrow xy = -2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S = x + y; P = xy (S^2 \geq 4P) \Rightarrow S^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = S^2 - 2P$$

$$\text{Vậy (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P + S = 4 \\ S^2 - P + S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -2 \\ S = 0 \\ S = -1 \end{cases}$$

$$\text{TH}_1: \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -2 \end{cases} \text{ vậy } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 + 0X - 2 = 0$$

$$\text{Vậy hệ có 2 nghiệm } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{TH}_2: \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases} \text{ vậy } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 + X - 2 = 0$$

$$\Rightarrow X = 1 \text{ hay } X = -2. \text{ Vậy hệ có 2 nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Tổng lại hệ Pt (I) có 4 nghiệm } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

171/ 1. Giải phương trình

$$2(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+1}) = x - 4$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{y-1} + y^2 \\ 2\sqrt{y^2+5} = 2\sqrt{x-1} + x^2 \end{cases}$$

$$\text{Giải: 1. } 2(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+1}) = x - 4 \quad (1) - \text{Điều kiện: } x \geq \frac{3}{2}.$$

- Nhận thấy $x = 4$ không là nghiệm của PT. Với $x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x+1} \neq 0$.

$$\text{PT} \Rightarrow 2(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+1})(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+1}) = (x-4)(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow 2(x-4) = (\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+1})(x-4)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x+1} = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} = \frac{x}{4} \\ \sqrt{x+1} = \frac{x-8}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ x^2 - 32x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ x = 16 \pm \sqrt{208} \end{cases} \Leftrightarrow x = 16 + \sqrt{208} \text{ (t / m)}$$

Vậy PT có 1 nghiệm $x = 16 + \sqrt{208}$.

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{y-1} + y^2 \end{cases} \quad (1)$$

2. Giải hệ

$$\begin{cases} 2\sqrt{y^2+5} = 2\sqrt{x-1} + x^2 \end{cases} \quad (2)$$

- Điều kiện: $x, y \geq 1$. Nhận thấy $x = y = 1$ không là nghiệm của hệ $\Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \neq 0$.

$$\text{Hệ} \Rightarrow 2(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{y^2+5}) = 2(\sqrt{y-1} - \sqrt{x-1}) + (y^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2+5}} = \frac{2(y-x)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} + (y^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{y^2+5}} + \frac{2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} + x + y \right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

- Thế vào (1) được: $2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{x-1} + x^2$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2+5} - 3) - 2(\sqrt{x-1} - 1) - (x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-4)}{\sqrt{x^2+5}+3} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} - (x^2-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} - (x+2) - \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} \right) = 0 \quad (3)$$

- Vì $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+5}+3 > 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+5}+3} < 1 \Rightarrow \frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} < (x+2)$

$$\Rightarrow \frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} - (x+2) - \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} < 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy hệ có 1 nghiệm (2; 2).

172/ Giải phương trình: $\log_2^2 8x^3 - 9\log_2 4x^2 - 36\log_4 2x = 0$

Giải: Giải phương trình: $\log_2^2 8x^3 - 9\log_2 4x^2 - 36\log_4 2x = 0$ (1) Điều kiện $x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow (3+3\log_2 x)^2 - 9(2+2\log_2 x) - 18(1+\log_2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\log_2^2 x - 18\log_2 x - 27 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \text{ hoặc } \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 1/2 \text{ hoặc } x = 8$$

173 / Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases}$$

$$\text{Giải: Giải hệ} \begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 + 9 \\ 3x^2 - 3x = -6y^2 - 12y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3 \Rightarrow x = y + 3$$

$$\text{Vậy hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 + 9 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

174/ 1) Giải phương trình: $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$

2) Giải bất phương trình: $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4$

Giải: 1/ Giải phương trình: $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$. Đặt $2^x = u > 0; \sqrt[3]{2^{x+1} - 1} = v$.

PT $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ v = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ \sqrt[3]{2^{x+1}} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \sqrt[3]{2^{x+1}} - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \forall n \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm là: $x = 0$

2. Giải bất pt: $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4$

Điều kiện D/k $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$

Nhân hai vế của bpt với $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$, ta được

$$\begin{aligned} \text{BPT} &\Leftrightarrow 4(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \geq 4(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} \\ x^2 + 2x - 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} &\geq 2x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \geq 2$ là nghiệm của bất pt

175/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$

Giải: Giải hệ pt: $\begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 - 2 + 4)(y - 3 + 3) + x^2 - 2 - 20 = 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x^2 - 2 = u \\ y - 3 = v \end{cases}$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u.v + 4(u + v) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ y - 3 = 2 \end{cases}$

Kết luận: Hệ pt có 4 nghiệm là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}$

176/ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{3-2x}$$

Giải:

2) Ta có $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{3-2x} \leq 2\sqrt[4]{\frac{x+2-x}{2}} + 3\sqrt[4]{\frac{x+x+3-2x}{3}} = 5 \Rightarrow y_{\max} = 5$

khi $x = 1$.

Ta có $y = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \sqrt[4]{\frac{2-x}{2}}\right)\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}\left(\sqrt[4]{\frac{x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{3-2x}{3}}\right) \Rightarrow y \geq \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} = y_{\min}$.

177/ Giải phương trình $4\log_4^2 2x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x^5 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải: Giải phương trình $4\log_4^2 2x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x^5 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ (1)

ĐK: $x > 0$ (1) $\Leftrightarrow \log_2^2 2x = 5\log_2 x - 1 \Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 = 5\log_2 x - 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ (1) Đặt $t = \log_2 x$ (1)

trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

$t = 1$ ta có $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$; $t = 2$ ta có $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

kết hợp với ĐKXD $\Rightarrow$ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 2$ và $x = 4$

179/ 1. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x+5} = \sqrt{9x+4} - \sqrt{2x-2}$
2. Giải phương trình $2\log_2(2x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(9x-1) = 1$

Giải: Điều kiện: $x \geq \frac{5}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với $10x \geq 1 \quad 2x \geq 2 \quad 9x \geq 4 \quad 3x \geq 5 \quad (1).$

Vì $x \geq \frac{5}{3}$ nên cả hai vế của (1) đều dương. Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow 12x \geq 1 \geq 2 \quad (10x \geq 1)(2x \geq 2) \Leftrightarrow 12x \geq 1 \geq 2 \quad (9x \geq 4)(3x \geq 5) \\ \Leftrightarrow 7x^2 \geq 15x \geq 18 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ hay } x \geq \frac{6}{7}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 3$.

2/ Điều kiện: $x \geq \frac{1}{9}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\log_2(2x \geq 2)^2 \geq \log(9x \geq 1) \geq 1 \\ \Leftrightarrow \log(2x \geq 2)^2 \geq \log(9x \geq 1) \geq \log 2 \geq \log(2x \geq 2)^2 \geq \log(18x \geq 2) \\ \Leftrightarrow (2x \geq 2)^2 \geq (18x \geq 2) \geq 2x^2 \geq 5x \geq 3 \geq 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x \geq \frac{3}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 1$ hay $x \geq \frac{3}{2}$.

186/: Giải phương trình $\frac{1}{\log_{x-2} 4} + \frac{1}{\log_{2x-1} 4} - \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{x+1}$

Giải: Giải phương trình $\frac{1}{\log_{x-2} 4} + \frac{1}{\log_{2x-1} 4} - \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{x+1}$

Điều kiện $x > 2, x \neq 3$; (1) $\Leftrightarrow \log_4(x-2) + \log_4(2x-1) - \log_4 2 = \log_4(x+1)$

$$(x-2)(2x-1) = 2(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}; \text{ Đối chiếu điều kiện ta có } x = \frac{7}{2}$$

187/: 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y - 15 = 0 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

2. Giải phương trình: $\log(10.5^x + 15.20^x) = x + \log 25.$

3. Giải bất phương trình $1 + \log_2 x + \log_2(x+2) > \log_{\sqrt{2}}(6-x)$

Giải:

1/ Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(y-2) + 4(x^2-1) + 4(y-2) = 5 \\ (x^2-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$

Ta có hpt $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = -10 \\ uv = 45 \end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc $\begin{cases} u+v = 2 \\ uv = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$

+) $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$ Tìm được 2 nghiệm $(x; y) = (2; 1)$ và $(x; y) = (-2; 1)$

+) $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x; y) = (0; 5)$

Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: $(2; 1)$, $(-2; 1)$, $(0; 5)$

2/. PT $\Leftrightarrow \log(10.5^x + 15.20^x) = \log(25.10^x) \Leftrightarrow 10.5^x + 15.20^x = 25.10^x$
 $\Leftrightarrow 15.4^x - 25.2^x + 10 = 0$ (chia hai vế của phương trình cho 5^x)

Đặt $t = 2^x (t > 0)$, Ta có pt : $15t^2 - 25t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(tm) \\ t = \frac{2}{3}(tm) \end{cases}$

Với $t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

3/ Đk: $0 < x < 6$. BPT $\Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 4x) > \log_2(6-x)^2$

BPT $\Leftrightarrow 2x^2 + 4x > (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 36 > 0 \Leftrightarrow x < -18$ hoặc $x > 2$

Kết hợp đk ta có tập nghiệm BPT là $S = (2; 6)$

188/: Giải bất phương trình: $\log_3^2 x - \log_2(8x) \cdot \log_3 x + \log_2 x^3 < 0$ (1)

Giải:

Điều kiện $x > 0$; Biến đổi phương trình tương đương về dạng:

$$\log_3^2 x - (3 + \log_2 x) \log_3 x + 3 \log_2 x < 0$$

Đặt $t = \log_3 x$ khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - (3 + \log_2 x)t + 3 \log_2 x < 0 \quad (2)$$

Ta có: $\Delta = (3 + \log_2 x)^2 - 12 \log_2 x = (3 - \log_2 x)^2$.

Do đó $f(t) = 0$ có nghiệm: $\begin{cases} t = 3 \\ t = \log_2 x \end{cases}$

Do đó (2) tương đương với: $(t-3)(t-\log_2 x) < 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 3)(\log_3 x - \log_2 x) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 3 > 0 \\ \log_3 x - \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 3 \\ \log_3 x < \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 3 < 0 \\ \log_3 x - \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 3 \\ \log_3 x > \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là tập $(0;1) \cup (27; +\infty)$

189/: 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$

3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-2x+8) = 6 \\ 8^x + 2^x \cdot 3^y = 2 \cdot 3^{x+y} \end{cases}$$

Giải:

1/
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 + 2)y + x^2 - 22 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 - 2 + 4)(y - 3 + 3) + x^2 - 2 - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ (x^2 - 2 + 4)(y - 3 + 3) + x^2 - 2 - 20 = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x^2 - 2 = u \\ y - 3 = v \end{cases}$ * Thay vào ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u \cdot v + 4(u + v) = 8 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $\begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$

Thay vào phương trình ta có $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}$

2. $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ (2) Điều kiện:
$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (16-x^2)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$

+ Với $-1 < x < 4$ ta có phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0$ (3);

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $-4 < x < -1$ ta có phương trình $x^2 - 4x - 20 = 0$ (4); (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{24} \\ x = 2 + \sqrt{24} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 2(1-\sqrt{6})$

$$3. \text{ Pt đầu } \Leftrightarrow y - 2x + 8 = (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow y = 2x$$

thế vào pt thứ hai ta được:

$$8^x + 2^x \cdot 3^{2x} = 2 \cdot 3^{3x} \Leftrightarrow 8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x \Leftrightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{18}{27}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$$

$$\text{Đặt: } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, (\text{đk } t > 0), \text{ ta có pt: } t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

190/: 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y - 15 = 0 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $\log(10 \cdot 5^x + 15 \cdot 20^x) = x + \log 25.$

3. Giải bất phương trình $1 + \log_2 x + \log_2(x+2) > \log_{\sqrt{2}}(6-x)$

Giải:

1/ Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(y-2) + 4(x^2-1) + 4(y-2) = 5 \\ (x^2-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$

Ta có hpt $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = -10 \\ uv = 45 \end{cases} \text{ (vô nghiệm) hoặc } \begin{cases} u+v = 2 \\ uv = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$$

+) $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$ Tìm được 2 nghiệm $(x; y) = (2; 1)$ và $(x; y) = (-2; 1)$

+) $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x; y) = (0; 5)$

Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: $(2; 1), (-2; 1), (0; 5)$

2/ PT $\Leftrightarrow \log(10 \cdot 5^x + 15 \cdot 20^x) = \log(25 \cdot 10^x) \Leftrightarrow 10 \cdot 5^x + 15 \cdot 20^x = 25 \cdot 10^x$
 $\Leftrightarrow 15 \cdot 4^x - 25 \cdot 2^x + 10 = 0$ (chia hai vế của phương trình cho 5^x)

Đặt $t = 2^x (t > 0)$, Ta có pt: $15t^2 - 25t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 (tm) \\ t = \frac{2}{3} (tm) \end{cases}$

Với $t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

3 / Đk: $0 < x < 6$. BPT $\Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 4x) > \log_2(6-x)^2$

BPT $\Leftrightarrow 2x^2 + 4x > (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 36 > 0 \Leftrightarrow x < -18$ hoặc $x > 2$

Kết hợp đk ta có tập nghiệm BPT là $S = (2; 6)$

191/ 1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x - y - xy^2 = 2xy(1 - x) \\ (x^2 + 2y^2)(1 + \frac{1}{xy})^2 = 9 \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $(6x+1)\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + (x-1)\log_{\sqrt{2}}(x+1)^3 - 7 = 0$

3. Giải phương trình: $2^{\sqrt[3]{2-x}-1} - 4^{x-1} = 4x^3 - 6x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

Giải:

1/ Điều kiện Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - xy^2 + 2x^2y = 2xy \\ (x^2 + 2y^2)(1 + \frac{1}{xy})^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)(1 + xy) = 2xy \\ (x^2 + 2y^2)(\frac{1 + xy}{xy})^2 = 12 \end{cases} \quad x, y \neq 0.$

Do $1 + xy \neq 0$, nên hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = \frac{2xy}{(1 + xy)} \\ (x^2 + 2y^2) = 12(\frac{xy}{1 + xy})^2 \end{cases} \Rightarrow 12(2x - y)^2 = 4(x^2 + 2y^2) \Leftrightarrow 11x^2 - 12xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 11x \end{cases}$$

+Với $y = x$ thay vào hệ ta được $x = y = 1$

+Với $y = 11x$ thay vào ta được hệ vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm $(1; 1)$

2/ Giải phương trình: $(6x+1)\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + (x-1)\log_{\sqrt{2}}(x+1)^3 - 7 = 0$

HD: Điều kiện: $x > -1$: Phương trình $\Leftrightarrow (6x+1)\log_2(x+1) + (6x-6)\log_2(x+1) - 7 = 0$

Đặt $t = \log_2(x+1)$, Phương trình trở thành: $(6x+1)t^2 + (6x-6)t - 7 = 0 (*)$

+Nếu $6x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$; Pt : $-7 \cdot \log_2 \frac{5}{6} - 7 = 0$: Vô lý

+Nếu $6x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{6}$: Pt (*) có $a-b+c=0$ nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{7}{6x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ \log_2(x+1) = \frac{7}{6x+1} \end{cases} (1)$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) - \frac{7}{6x+1} = 0$; Đặt $f(x) = \log_2(x+1) - \frac{7}{6x+1}$, $\forall x \in (-1; \frac{-1}{6}) \cup (\frac{-1}{6}; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 2} + \frac{42}{(6x+1)^2} > 0, \forall x \in (-1; \frac{-1}{6}) \cup (\frac{-1}{6}; +\infty)$$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; \frac{-1}{6})$ và $(\frac{-1}{6}; +\infty)$.

+Hàm số đồng biến trên $(-1; \frac{-1}{6})$ nên phương trình có nhiều nhất một nghiệm trên $(-1; \frac{-1}{6})$

Thử với $x = \frac{-3}{4}$: (1) $\Leftrightarrow \log_2(\frac{1}{4}) + 2 = 0$ Đúng.

+Hàm số đồng biến trên $(\frac{-1}{6}; +\infty)$ nên phương trình có nhiều nhất một nghiệm trên $(\frac{-1}{6}; +\infty)$

Thử với $x=1$ ta được: (1) $\Leftrightarrow \log_2 2 - 1 = 0$ Đúng.

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm: $x = \frac{-3}{4}$; $x = \frac{-1}{2}$; $x=1$

3/ Giải phương trình: $2^{\sqrt[3]{2-x}-1} - 4^{x-1} = 4x^3 - 6x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$

$$\text{Hd: Phương trình} \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{2-x}-1} - 4^{x-1} = 4x^3 - 6x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{2-x}} - 2^{2x-1} = 8x^3 - 12x^2 + 7x - 3$$

$$2^{\sqrt[3]{2-x}} + 2 - x = 2^{2x-1} + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{2-x}} + 2 - x = 2^{2x-1} + (2x-1)^3$$

Xét hàm số: $f(t) = 2^t + t^3$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Phương trình:} \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{2-x}) = f(2x-1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x} = 2x-1$$

$$\text{Vậy phương trình} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ có nghiệm } x=1.$$

192/:

1. Giải phương trình: $\sqrt{36x^2 - 63x + 27} = 15 - 27x + 2\sqrt{9x^2 - 9x + 3}$.

2. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+15} = \frac{x+y}{2}$ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x + y$.

3. Tìm m để phương trình $12\sqrt{4+x-3x^2} = 3x - 24 + m(3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-3x})$ có nghiệm.

4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\log_2 x}{1 + (\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 y}{1 + (\log_2 y)^2} = \frac{9}{10} \\ (1 + \log_x 2 \cdot \log_y 2) \log_2 xy = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Giải:

1) Từ dấu hiệu $\sqrt{36x^2 - 63x + 27}$; $2\sqrt{9x^2 - 9x + 3} = \sqrt{36x^2 - 36x + 12}$

Nhân liên hợp và biện luận ta được nghiệm duy nhất $x = \frac{15}{27}$

2.HD.(nhiều cách) Đặt $\sqrt{x+1} = u \geq 0$; $\sqrt{y+15} = v \geq 0$ ta đưa được về hệ PT đối xứng. Từ đk PT có nghiệm không âm ta tìm được $2(1 + \sqrt{17}) \leq P \leq 16$

3.HD. ĐK. Đặt $t = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-3x} \rightarrow t \in [\sqrt{21}; 7]$ ta chỉ việc tìm GTLN, NN trên đoạn này của hàm

số $f(t) = t - \frac{1}{t}$

4. ĐK, đặt $\log_2 x = u$; $\log_2 y = v$ và $u + \frac{1}{u} = m$; $v + \frac{1}{v} = n$ ($|m, n| \geq 2$)

Ta được 4 nghiệm $(4, 2)$, $(2; \sqrt{2})$ và giao hoán của bộ số.

193. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Giải:

Đặt $u = \sqrt[3]{x+34}$, $v = \sqrt[3]{x-3}$. Ta có :

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2) = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u - v)^2 + 3uv = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = -4 \\ u = 4 \\ v = 3 \end{cases}$$

Với $u = -3$, $v = -4$ ta có: $x = -61$;

Với $u = 4$, $v = 3$ ta có: $x = 30$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm : $x = -61$ và $x = 30$

194/
$$\begin{cases} (3x + y)(x + 3y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x + y)(x^2 + y^2 + 14xy) = 36 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} (3x + y)(x + 3y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x + y)(x^2 + y^2 + 14xy) = 36 \end{cases}$$

Đk: $xy \geq 0$ Hệ ban đầu tương đương
$$\begin{cases} [3(x + y)^2 + 4xy]\sqrt{xy} = 14 \\ (x + y)[(x + y)^2 + 12xy] = 36 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = \sqrt{xy} \geq 0 \end{cases}$ thay vào hệ trên được
$$\begin{cases} (3a^2 + 4b^2)b = 14 \\ a(a^2 + 12b^2) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2b + 4b^3 = 14 \\ a^3 + 12ab^2 = 36 \end{cases}$$

Nhận thấy $a=0$ không là nghiệm của hệ trên. Đặt $b=ka$ thay vào hệ trên được
$$\begin{cases} a^3(3k + 4k^3) = 14 \\ a^3(1 + 12k^2) = 36(1) \end{cases}$$
. Ta suy

ra phương trình $72k^3 - 84k^2 + 54k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{6}a \Rightarrow a = 6b$ thay vào (1) được $a=3$, từ đó $b=1/2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ \sqrt{xy} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

195/. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x-1} + x^2 - x - 2 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

Giải: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x-1} + x^2 - x - 2 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

ĐK: $\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$; Đặt $u = \sqrt{x^2-3}$, $u \geq 0$, $v = \sqrt{x-1}$, $v \geq 0$

$$\text{Suy ra: } u^2 - v^2 = x^2 - x - 2$$

$$\text{Ta được phương trình: } u - v + u^2 - v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u - v + (u + v)(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)(1 + u + v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + v = -1 \end{cases}$$

Vì $u \geq 0; v \geq 0$ nên loại $u + v = -1$

$$\text{Khi } u = v \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vì $x \geq \sqrt{3}$, nên $x = -1$ loại. Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = 2$.

196/. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3 \log_8 (\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $x+y > 0, x-y > 0$

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3 \log_8 (2 + \sqrt{x-y}) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ta có hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 & (1) \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 & (2) \end{cases} \text{ . Thế (1) vào (2) ta có:}$$

$$\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0. \text{ Kết hợp (1) ta có:}$$

$$\begin{cases} uv = 0 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0 \text{ (vỡ } u > v). \text{ Từ đó ta có: } x = 2; y = 2. (T/m)$$

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (2; 2)$.

197/. 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases}$$

2. Giải bất phương trình
$$\frac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$$

Giải:

1/ ĐK:
$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ x-2y = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ (2y-x)[(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y-x = 0 \end{cases}$$

(do $(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \quad (1) \\ 2y = x \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{cases}$$

Với $x = 0$ thay vào (2) ta được $y = 0$

Với $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$ thay vào (2) ta được $y = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \log_{\frac{3}{2}} 4, y = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4$

198/ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2x = 5y \\ (x^2 + 2x)(x + y - 3) = -3y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) - \log_2 x = 1 \\ \sqrt{2y + 3} - \sqrt{2x - 1} = 2 \end{cases}$

Giải:

1/ Nếu $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ có nghiệm $(0; 0); (-2; 0)$

Nếu $y \neq 0$, hpt $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{y} + x + y = 5 \\ \frac{x^2 + 2x}{y} \cdot (x + y - 3) = -3 \end{cases}$; đặt $\begin{cases} u = \frac{x^2 + 2x}{y} \\ v = x + y - 3 \end{cases}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{y} = 3 \\ x + y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{y} = -1 \\ x + y - 3 = 3 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 0); (-2; 0); (1; 1)$ và $(-6; 8)$

2/ Đk: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y > x \end{cases}$; Pt hai $\Leftrightarrow \sqrt{2y + 3} = 2 + \sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow y - x = 2\sqrt{2x - 1}$

Thế vào pt còn lại ta được:

$$2 \log_2 2\sqrt{2x - 1} - \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{4(2x - 1)}{x} = 1 \Leftrightarrow 4(2x - 1) = 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}, (\text{tmđk})$$

KL: hệ có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

199/ 1) Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2.$$

2/ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2009y^2 - x^2 = \frac{x^2 + 2010}{y^2 + 2010} \\ 3\log_3(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 \end{cases}$$

Giải: 1/+) ĐK: $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$

+) Đặt $y = \sqrt{2-x^2}, y > 0$ Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 2xy \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

+) Giải hệ đx ta được $x = y = 1$ và $\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

+) Kết hợp điều kiện ta được: $x = 1$ và $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

2/ $\begin{cases} 2009y^2 - x^2 = \frac{x^2 + 2010}{y^2 + 2010} \quad (1) \\ 3\log_3(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 \quad (2) \end{cases}$

+) ĐK: $x + 2y + 6 > 0$ và $x + y + 2 > 0$

+) Lấy loga cơ số 2009 và đưa về pt: $x^2 + \log_{2009}(x^2 + 2010) = y^2 + \log_{2009}(y^2 + 2010)$

+) Xét và CM HS $f(t) = t + \log_{2009}(t + 2010), t \geq 0$ đồng biến,

từ đó suy ra $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y, x = -y$

+) Với $x = y$ thế vào (2) và đưa về pt: $3\log_3(x + 2) = 2\log_2(x + 1) = 6t$

Đưa pt về dạng $\left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t = 1$, cm pt này có nghiệm duy nhất $t = 1$

$\Rightarrow x = y = 7$

+) Với $x = -y$ thế vào (2) được pt: $\log_3(y + 6) = 1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = 3$

200. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{y}\right) \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = -\frac{4(x-y)}{xy} \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -2 \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + \frac{1}{x} = \frac{3}{x} \\ y = -\frac{2}{x} \\ 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \\ x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \end{cases}$$

201. Giải phương trình : $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

Giải:

PT $\Leftrightarrow 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 10x^2 + 3x - 6$

$2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 4(2x^2-1) + 2x^2 + 3x - 2$. Đặt $t = \sqrt{2x^2-1} (t \geq 0)$

Pt trở thành $4t^2 - 2(3x+1)t + 2x^2 + 3x - 2 = 0$

Ta có: $\Delta' = (3x+1)^2 - 4(2x^2 + 3x - 2) = (x-3)^2$ Từ đó ta có phương trình có nghiệm : $t = \frac{2x-1}{2}; t = \frac{x+2}{2}$

Thay vào cách đặt giải ra ta được phương trình có các nghiệm: $x \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{60}}{7} \right\}$

202. Giải bất phương trình : $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} > 24$. (2)

Giải: Giải bất phương trình : $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} > 24$. (2)

(2) $\Leftrightarrow 5(5^{x^2})^2 - 24(5^{x^2}) - 5 > 0 \Leftrightarrow 5^{x^2} > 5 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)] + 2\log_{2+y}(1-x) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

Giải: 1) $y \neq 0$, ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases}$

Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}$, $v = x+y$ ta có hệ: $\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{cases}$

+) Với $v=3, u=1$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$

+) Với $v = -5, u = 9$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ y = -5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 46 = 0 \\ y = -5 - x \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = \{(1; 2), (-2; 5)\}$.

2) + Điều kiện: $\begin{cases} -xy - 2x + y + 2 > 0, x^2 - 2x + 1 > 0, y + 5 > 0, x + 4 > 0 \\ 0 < 1 - x \neq 1, 0 < 2 + y \neq 1 \end{cases} \quad (I).$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)] + 2\log_{2+y}(1-x) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2) + \log_{2+y}(1-x) - 2 = 0 \quad (1) \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \quad (2). \end{cases}$$

Đặt $\log_{2+y}(1-x) = t$ thì (1) trở thành: $t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có: $1 - x = y + 2 \Leftrightarrow y = -x - 1 \quad (3)$. Thế vào (2) ta có:

$$\log_{1-x}(-x+4) - \log_{1-x}(x+4) = 1 \Leftrightarrow \log_{1-x} \frac{-x+4}{x+4} = 1 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x+4} = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra: } \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

+ Kiểm tra thấy chỉ có $x = -2, y = 1$ thỏa mãn điều kiện trên.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = -2, y = 1$.

204. Giải phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x) \quad (2)$

Giải:

Điều kiện: $0 < x \neq 1$; $(2) \Leftrightarrow (x+3)|x-1| = 4x$

Trường hợp 1: $x > 1 \quad (2) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Trường hợp 2: $0 < x < 1 \quad (2) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} - 3$

Vậy tập nghiệm của (2) là $T = \{2; 2\sqrt{3} - 3\}$

205. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{3-y} = \sqrt{3} \\ \sqrt{y} + \sqrt{3-x} = \sqrt{3} \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{3-y} = \sqrt{3} \\ \sqrt{y} + \sqrt{3-x} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2\sqrt{x(3-y)} = 0 \\ y - x + 2\sqrt{y(3-x)} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{x(3-y)} + \sqrt{y(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ Kiểm tra ta thấy } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ thỏa mãn.}$$

Kết luận : Hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

206. Giải bất phương trình : $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} > 24. \quad (2)$

Giải:

Giải bất phương trình : $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} > 24$. (2)

$$(2) \Leftrightarrow 5(5^{x^2})^2 - 24(5^{x^2}) - 5 > 0 \Leftrightarrow 5^{x^2} > 5 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

207. 1/ Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$2/ \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải :

1/ Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5} = 3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ x\sqrt{x+5} = -2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \sqrt{x+5} = -2 \cdot \frac{x+2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ (x+1)(x^2-16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \text{ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm } x = -1.$$

$$2/ \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Điều kiện: $\begin{cases} y-x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(y-x) + \log_4 \frac{1}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \frac{y-x}{y} = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x}{y} = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 9y^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = \frac{25}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = \left(\frac{15}{\sqrt{10}}; \frac{5}{\sqrt{10}} \right) \\ (x; y) = \left(-\frac{15}{\sqrt{10}}; -\frac{5}{\sqrt{10}} \right) \end{cases} \quad (\text{không thỏa mãn đk})$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

208 1/ Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$

2/ Giải phương trình : $2^{\log_5(x+3)} = x$

Giải:

$$1/ \quad x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5} \quad (1)$$

$$\text{TX§ : } D = [-5; +\infty) \quad (1) \Leftrightarrow (x-2)^2 - 7 = \sqrt{x+5}$$

$$\textcircled{R} \text{Et } y - 2 = \sqrt{x+5}, \quad y \geq 2 \Rightarrow (y-2)^2 = x+5$$

$$\text{Ta c\aa h\ddot{O} : } \quad \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (y-2)^2 = x+5 \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (x-y)(x+y+3) = 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ x+y+3=0 \end{cases} \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2/ \text{ ĐK : } x > 0 \quad \text{PT đã cho tương đương với : } \log_5(x+3) = \log_2 x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x, \text{ suy ra } x = 2^t$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_5(2^t + 3) = t \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1 \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số : } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{5}\right)^t; \quad f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \ln 0,4 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^t \ln 0,2 < 0, \forall t \in \mathbf{R}$$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbf{R}$

Lại có : $f(1) = 1$ nên PT (2) có nghiệm duy nhất $t = 1$ hay $\log_2 x = 1$ hay $x = 2$

Vậy nghiệm của PT đã cho là : $x = 2$

$$\textcolor{red}{208.} \quad \text{Giải bất phương trình: } (4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \geq 8x-6 \quad (1)$$

$$\text{Giải: Giải bất phương trình: } (4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \geq 8x-6 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (4x-3)(\sqrt{x^2-3x+4}-2) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } 4x-3=0 \Leftrightarrow x=3/4$$

$$\sqrt{x^2-3x+4}-2=0 \Leftrightarrow x=0; x=3$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$3/4$	2	$+\infty$
4x-3		-	0	+	+
$\sqrt{x^2-3x+4}-2$	+	0	-	0	+
Vế trái	-	0	+	0	+

$$\text{Vậy bất phương trình có nghiệm: } x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \cup [3; +\infty)$$

$$\textcolor{red}{209.} \quad 1/ \text{ Giải hệ phương trình : } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = \frac{7}{xy} \end{cases}$$

$$2/ \text{ Giải bất phương trình : } \log_{\frac{1}{2}} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) > \log_2 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)$$

$$3/ \text{ Giải bất phương trình : } 3^{\sqrt{x+1}} + 3^{1-\sqrt{x+1}} - 4 \geq 0$$

Giải:

$$1/ \text{ Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + x + y - 2xy = 8 \\ (x+y)^2 - xy = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-2 \\ x+y-xy=1 \end{cases} :$$

Vậy nghiệm của hệ là : $(x;y) = (1;2), (2;1), (1;-3), (-3;1)$

2/

$$\text{Đk } x > 0: \text{ Bpt } \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) + \log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} \right) \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2 \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x < 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x > 0 \\ x^2+1 < (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$$

Kết hợp đk ta có $0 < x < \frac{12}{5}$

3/ Đk : $x \geq -1$

$$\text{Pt } \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x+1}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x+1}} \geq 3 \\ 3^{\sqrt{x+1}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 1 \\ \sqrt{x+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Nghiệm bất pt là : $T = \{-1\} \cup [0; +\infty)$

210. 1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$$

2) Giải phương trình: $\log_{x(24x+1)^2} x + \log_{x^2(24x+1)} x^2 = \log_{(24x+1)} x$

3) Giải bất phương trình: $\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$

Giải:

1/*Biến đổi hệ tương đương với
$$\begin{cases} (x^2 - xy)^2 = 1 - x^3y \\ x^3y - (x^2 - xy) = -1 \end{cases}$$

*Đặt ẩn phụ $\begin{cases} x^2 - xy = u \\ x^3y = v \end{cases}$, ta được hệ $\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v - u = -1 \end{cases}$

*Giải hệ trên được nghiệm $(u;v)$ là $(1;0)$ và $(-2;-3)$

*Từ đó giải được nghiệm $(x;y)$ là $(1;0)$ và $(-1;0)$

2/ *Điều kiện : $x > 0$

*TH1 : xét $x=1$ là nghiệm

*TH2 : xét $x \neq 1$, biến đổi phương trình tương đương với

$$\frac{1}{1+2\log_x(24x+1)} + \frac{2}{2+\log_x(24x+1)} = \frac{1}{\log_x(24x+1)}$$

Đặt $\log_x(x+1)=t$, ta được phương trình

$$\frac{1}{1+2t} + \frac{2}{2+t} = \frac{1}{t} \text{ giải được } t=1 \text{ và } t=-2/3$$

*Với $t=1 \Rightarrow \log_x(x+1)=1$ phương trình này vô nghiệm

$$* \text{Với } t=-2/3 \Rightarrow \log_x(x+1)=-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (24x+1)^3 = 1 \quad (*)$$

Nhận thấy $x = \frac{1}{8}$ là nghiệm của (*)

Nếu $x > \frac{1}{8}$ thì VT(*) > 1

Nếu $x < \frac{1}{8}$ thì VT(*) < 1, vậy (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$

*Kết luận: Các nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$ và $x = \frac{1}{8}$

$$3/ \text{ *Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \\ 9^x - 72 > 0 \end{cases} \text{ giải được } x > \log_9 73$$

Vì $x > \log_9 73 > 1$ nên bpt đã cho tương đương với

$$\log_3(9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 9^x - 72 \leq 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq -8 \\ 3^x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2$$

*Kết luận tập nghiệm: $T = (\log_9 72; 2]$

211. 1. Giải bất phương trình $\log_2(4x^2 - 4x + 1) - 2x > 2 - (x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x\right)$

$$2/ \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Giải:

$$1/ \text{ ĐK: } \begin{cases} \frac{1}{2} - x > 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) bất phương trình tương đương với: $2\log_2(1-2x) - 2x > 2 + (x+2)[\log_2(1-2x) - 1]$

$$\Leftrightarrow x[\log_2(1-2x) + 1] < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2(1-2x) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 2(1-2x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2(1-2x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \log_2(1-2x) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \log_2 2(1-2x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2(1-2x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có: $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ hoặc $x < 0$.

$$2/ \quad \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x^2 + 1 + xy = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x+y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0 \\ 3x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1-3x \end{cases} \end{cases}$$

$$* \text{ Với } x=0 \text{ thay vào (1) } 2+2^{y-2} = 3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y = 12.2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2 \frac{8}{11}$$

$$* \text{ Với } \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1-3x \end{cases} \text{ thay } y = 1-3x \text{ vào (1) ta được: } 2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3.2$$

$$\text{Đặt } t = 2^{3x+1} \text{ Vì } x \geq -1 \text{ nên } t \geq \frac{1}{4}$$

$$(3) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - \sqrt{8} \text{ (loại)} \\ t = 3 + \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1] \\ y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8}) \end{cases}$$

$$\text{212 1. Giải phương trình: } \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} = 1 + \sqrt{3+2x-x^2}$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y \end{cases} \cdot$$

$$\text{Giải: 1/ TXĐ: } x \in [-1; 3] \text{ Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}, t > 0 \Rightarrow \sqrt{3+2x-x^2} = \frac{t^2-4}{2}$$

$$\text{đc pt: } t^3 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t=2 \text{ Với } t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} (t/m)$$

$$2/ \text{ TXĐ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot y = 2^y \cdot x \\ 12^x \cdot x = 3^y \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3^x \cdot y = 2^y \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_{\frac{4}{3}} 2 \\ y = 2 \log_{\frac{4}{3}} 2 \end{cases} (t/m \text{ TXĐ})$$

$$\text{213. Giải bất phương trình: } \frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1.$$

Giải:

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < 0 \\ 51-2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in [-1-\sqrt{52}; -1+\sqrt{52}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 51-2x-x^2 \geq 0 \\ 51-2x-x^2 < (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty) \\ x \in [-1-\sqrt{52}; -1+\sqrt{52}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1-\sqrt{52}; -5) \cup (1; -1+\sqrt{52}]$$

214. a) Giải bất phương trình: $9^{2x-x^2+1} - 34.15^{2x-x^2} + 25^{2x-x^2+1} > 0$

b) Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$$

Giải: a) $9^{2x-x^2+1} - 34.15^{2x-x^2} + 25^{2x-x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 9.3^{2(2x-x^2)} - 34.3^{2x-x^2} . 5^{2x-x^2} + 25.5^{2(2x-x^2)} > 0$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{5}\right)^{2(2x-x^2)} - 34.\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} + 25 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} < 1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} > \frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2 > 0 \\ 2x-x^2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (0; 2) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$$

KL: Bpt có tập nghiệm là $T = (-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (0; 2) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$

b) đ/k $x \geq -1; y \geq 1$. **Bất pt** $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ (\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{y-1})^2 = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}[a^2 - (2a+1)] \end{cases}$; Vậy

$\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{y-1}$ là nghiệm của p/t: $T^2 - aT + \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) = 0^*$. Rõ ràng hệ trên có nghiệm khi p/t*

$$\text{có 2 nghiệm không âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2(a^2 - 2a - 1) \geq 0 \\ a \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{6}$$

215. 1/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

2/ Giải bất phương trình $2^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \leq 0$

Giải:

1/ ĐK: $x + y \geq 0, x - y \geq 0, y \geq 0$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ 5y^2 = 4xy \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Từ PT(4) $\Leftrightarrow y = 0 \vee 5y = 4x$

Với $y = 0$ thế vào PT(2) ta có $x = 9$ (Không thỏa mãn đk (3))

Với $5y = 4x$ thế vào PT(2) ta có $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

KL: HPT có 1 nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{4}{5}\right)$

2/ Điều kiện: $x > 0$; BPT $\Leftrightarrow 2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \leq 0$ Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $x = 2^t$.

BPT trở thành $4^{2t^2} + 2^{2t^2} - 20 \leq 0$. Đặt $y = 2^{2t^2}$; $y \geq 1$.

BPT trở thành $y^2 + y - 20 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 4$.

Đổi chiếu điều kiện ta có: $2^{2t^2} \leq 4 \Leftrightarrow 2t^2 \leq 2 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$.

Do đó $-1 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

216. 1/Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

2/ Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2+1} - x)$

Giải:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases} \quad (dk \ x+y > 0)$$

1/

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy - (x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)((x+y)^2 - 1) - 2xy(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)[(x+y)(x+y+1) - 2xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (3) \\ x^2+y^2+x+y=0 & (4) \end{cases}$$

Dễ thấy (4) vô nghiệm vì $x+y > 0$; Thế (3) vào (2) ta được $x^2 - y = 1$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1; y=0 \\ x=-2; y=3 \end{cases} \dots\dots$$

$$2/ \log_{\frac{1}{3}} \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2+1} - x) \quad (1)$$

Đk: $x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2+1} - x) + \log_3 \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2 (\sqrt{x^2+1} + x) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) < 1^*) \quad 0 < \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) \Leftrightarrow x > 0$$

$$*) \log_5 (\sqrt{x^2+1} + x) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < 5 - x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$$

Vậy BPT có nghiệm $x \in \left(0; \frac{12}{5}\right)$

217.

1. Giải phương trình: $(2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$

2. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} \geq \sqrt{x-3}$

3. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

Giải:

1. Phương trình: $(2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow (2 - \log_3 x) \frac{1}{\log_3 9x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{2 + \log_3 x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$$

đặt: $t = \log_3 x$ thành $\frac{2-t}{2+t} - \frac{4}{1-t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$ (vì $t = -2, t = 1$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ hay } t = 4; \quad \text{Do đó, } (1) \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \text{ hay } x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ hay } x = 81$$

2. §k: $x \geq 3$

Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 4 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 3x^2 - 12x + 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

3. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

§k: $\frac{1}{2} < x \neq 1$; pt $\Leftrightarrow 2\log_3|x-1| + 2\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_3|x-1| + \log_3(2x-1) = 1$

$$\Leftrightarrow \log_3|x-1|(2x-1) = \log_3 3 \Leftrightarrow |x-1|(2x-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ 2x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

219. 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

2. Giải bất phương trình $\frac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$

Giải

1. ĐK: $y \neq 0$

hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} - 2 = 0 \\ \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y} - x - 2 = 0 \end{cases}$ đưa hệ về dạng $\begin{cases} 2u^2 + u - v - 2 = 0 \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 1 - v \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 1 \\ u = v = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ v = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \\ v = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ : $(-1 ; -1), (1 ; 1), (\frac{3 - \sqrt{7}}{2}; \frac{2}{\sqrt{7} - 1}), (\frac{3 + \sqrt{7}}{2}; \frac{2}{\sqrt{7} + 1})$

2. Đk: $x > -1$

$$\text{bất phương trình } \Leftrightarrow \frac{2\log_3(x+1) - \frac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{x-6} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$$

220. Giải phương trình :

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(5-2x) + \log_2(5-2x) \cdot \log_{2x+1}(5-2x) = \log_2(2x-5)^2 + \log_2(2x+1) \cdot \log_{\sqrt{2}}(5-2x)$$

Giải: ĐK : $\begin{cases} \frac{-1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$ Với ĐK trên PT đã cho tương đương với

$$\log_2^2(5-2x) + \frac{\log_2^2(5-2x)}{\log_2(2x+1)} = 2\log_2(5-2x) + 2\log_2(5-2x)\log_2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x+1) = -1 \\ \log_2(5-2x) = 2\log_2(2x+1) \\ \log_2(5-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \vee x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐK trên PT đã cho có 3 nghiệm $x = -1/4$, $x = 1/2$ và $x = 2$

222. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8(\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x+y > 0$, $x-y > 0$

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8(2 + \sqrt{x-y}) \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 & (1) \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 & (2) \end{cases} \text{ . Thế (1) vào (2) ta có:}$$

$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0$. Kết hợp (1) ta có:

$$\begin{cases} uv=0 \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=4, v=0 \text{ (vỡ } u>v\text{)}. \text{ Từ đó ta có: } x=2; y=2. (T/m)$$

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y)=(2; 2)$.

Đề số 223 Giải phương trình: $|2006-x|^{2007} + |2007-x|^{2006} = 1$

Giải Nhận xét :

$$\begin{cases} -1 \leq x-2006 \leq 1 \\ -1 \leq x-2007 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$$

Ta có : $|2006-x|^{2007} + |2007-x|^{2006} \leq |2006-x| + |2007-x| = x-2006 + 2007-x = 1$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow |2006-x|^{2007} = |2006-x|$ và $|2007-x|^{2006} = |2007-x|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2006-x=0 \\ 2006-x=\pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2007-x=0 \\ 2007-x=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2006 \\ x=2005 \\ x=2007 \\ x=2007 \\ x=2006 \end{cases} \Leftrightarrow x=2006 \text{ hay } x=2007$$

224 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y}-\sqrt{x})(\sqrt{2y}+\sqrt{x})^2 \end{cases}$

4. Giải bất phương trình $\frac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$

Giải:

2. ĐK: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y-x)(\sqrt{2y}+\sqrt{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ x-2y = (2y-x)(\sqrt{2y}+\sqrt{x})(\sqrt{x-y}+\sqrt{y}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ (2y-x)[(\sqrt{2y}+\sqrt{x})(\sqrt{x-y}+\sqrt{y})+1] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y-x = 0 \end{cases}$$

(do $\sqrt{2y}+\sqrt{x})(\sqrt{x-y}+\sqrt{y})+1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \quad (1) \\ 2y = x \quad (2) \end{cases}$$

Giải (1): $3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{cases}$

Với $x=0$ thay vào (2) ta được $y=0$

Với $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$ thay vào (2) ta được $y = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \log_{\frac{3}{2}} 4, y = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4$

4. Đk: $x > -1$; bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{2 \log_3(x+1) - \frac{3 \log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{x-6} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$$

225 Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$

Giải $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5}$ (1)

TXĐ: $D = [-5; +\infty)$; (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2 - 7 = \sqrt{x+5}$

Đặt $y - 2 = \sqrt{x+5}$, $y \geq 2 \Rightarrow (y-2)^2 = x+5$

Ta có hệ $\begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (y-2)^2 = x+5 \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (x-y)(x+y+3) = 0 \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ x-y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ x+y+3 = 0 \\ y \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

Đề số 226.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 = 5(2x - y)\sqrt{xy} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

4. Giải phương trình: $2 \log_2^2(x-2) + (4x-7) \log_2(x-2) + 2(x-2) = 0$.

5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+y) + 1 = \log_2(7x+y) + \log_2 y \\ \log_2(3x-y-2) = 2x-2y+4 \end{cases}$

Giải:

2. ĐK $xy \geq 0$

$$4x^2 + y^2 = 5(2x - y)\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + 4xy = 5(2x - y)\sqrt{xy} \Leftrightarrow (2x - y - \sqrt{xy})(2x - y - 4\sqrt{xy}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - \sqrt{xy} = 0 \\ 2x - y - 4\sqrt{xy} = 0 \end{cases} \text{ Với}$$

$$2x - y - \sqrt{xy} = 0 \text{ ta có } \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2 = \sqrt{2x - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } 2x - y - 4\sqrt{xy} = 0 \text{ ta có } \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2 = 4\sqrt{2x - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22 + 8\sqrt{6}}{25} \\ y = \frac{22 - 8\sqrt{6}}{25} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm.

4/Điều kiện: $x > 2$, phương trình đã cho tương đương với:

$$(2\log_2(x-2)+1)(\log_2(x-2)+2x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2(x-2)+1=0 \\ \log_2(x-2)+2x-4=0 \end{cases}$$

Với $2\log_2(x-2)+1=0$ ta có $x=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$, thỏa mãn.

Với $\log_2(x-2)+2x-4=0$, ta có $y=\log_2(x-2)+2x-4$ là hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên $x=\frac{5}{2}$ là nghiệm duy nhất. Vậy phương trình có hai nghiệm $x=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $x=\frac{5}{2}$

5. Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ 7x+y>0 \\ y>0 \end{cases}$; Biến đổi phương trình đầu ta được $\log_2 2(x+y)^2 = \log_2 (7x+y)y$

$$2x^2-3xy+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=2x \end{cases}$$

Với $y=x$ thế vào phương trình thứ hai ta được $\log_2(2x-2)=4 \Leftrightarrow x=9$
suy ra $x=y=9$, thỏa mãn điều kiện.

Với $y=2x$ thế vào phương trình thứ hai ta được $\log_2(x-2)=4-2x \Leftrightarrow \log_2(x-2)+2x-4=0$
 $y=\log_2(x-2)+2x-4$ là hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên $x=\frac{5}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Suy ra $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=5 \end{cases}$, thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x=9 \\ y=9 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=5 \end{cases}$

Đề số 234. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{aligned} 2. \begin{cases} 2x+\frac{1}{y}=\frac{3}{x} \\ 2y+\frac{1}{x}=\frac{3}{y} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{y}\right) \\ 2x+\frac{1}{y}=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)=-\frac{4(x-y)}{xy} \\ 2x+\frac{1}{y}=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=-2 \\ 2x+\frac{1}{y}=\frac{3}{x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+\frac{1}{x}=\frac{3}{x} \\ y=-\frac{2}{x} \\ 2x-\frac{x}{2}=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=-1 \\ x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2}, y=\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Đề số 235 Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1).$

Giải:

$$\text{Điều kiện } x > \frac{1}{3}. (*)$$

$$\text{Với } k \text{ tự nhiên, pt } \Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2 + 1 = 3\log_5(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5(2x+1)^3 \Leftrightarrow 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Sử dụng điều kiện (*), ta chỉ nghiệm của pt là $x = 2$.

236. 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

4. Giải bất phương trình $2^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \leq 0$

Giải:

2. ĐK: $x + y \geq 0, x - y \geq 0, y \geq 0$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \geq 0 & (3) \\ 5y^2 = 4xy & (4) \end{cases}$$

Từ PT(4) $\Leftrightarrow y = 0 \vee 5y = 4x$

Với $y = 0$ thế vào PT(2) ta có $x = 9$ (Không thỏa mãn đk (3))

Với $5y = 4x$ thế vào PT(2) ta có $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

KL: HPT có 1 nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{4}{5}\right)$

1. Điều kiện: $x > 0$; BPT $\Leftrightarrow 2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \leq 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $x = 2^t$.

BPT trở thành $4^{2t^2} + 2^{2t^2} - 20 \leq 0$. Đặt $y = 2^{2t^2}$; $y \geq 1$. BPT trở thành $y^2 + y - 20 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 4$.

Đổi chiếu điều kiện ta có: $2^{2t^2} \leq 4 \Leftrightarrow 2t^2 \leq 2 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$.

Do đó $-1 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

Đề số 237.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

4. Giải phương trình: $(3^x - 2)\log_3 \frac{x-1}{3} = 4 - \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{x+1}{2}}$

Giải:

$$2/ \quad x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 3(x-y) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=-4 \end{cases}$$

* Với $x - y = 1$, ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0$ và $x = -1; y = -2$

* Với $x - y = -4$ ta có $\begin{cases} x - y = -4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$ (Hệ PT vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) = (1; 0)$ và $(x; y) = (-1; -2)$

4. Điều kiện: $x > 1$ Thì Pt

$$\Leftrightarrow (3^x - 2) \log_3 \frac{x-1}{3} = 4 - \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{x+1}{2}} \Leftrightarrow (3^x - 2) [\log_3(x-1) - \log_3 3] = 4 - \frac{2}{3} 3^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 2) [\log_3(x-1) - 1] = 4 - 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow (3^x - 2) \log_3(x-1) + 3^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 2) [\log_3(x-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 2 = 0 \\ \log_3(x-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}; \text{ Vậy PT có nghiệm } x = \frac{4}{3}$$

Đề số 238.

1. Giải phương trình $2x^2 + x + \sqrt{x^2 + 3} + 2x\sqrt{x^2 + 3} = 9$.

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x + y) - \log_3(2x - y) = 1 \end{cases}$$

Giải:

1/ Đặt $u = \sqrt{x^2 + 3} > 0$ ta có $u^2 = x^2 + 3$. Kết hợp với pt đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} x(2x+1) + u(2x+1) = 9 \\ (u-x)(u+x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(u+x) = 9 \\ (u-x)(u+x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(u+x) + 1 - (u-x)](u+x) = 9 \\ (u-x)(u+x) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u+x=a \\ u-x=b \end{cases}, \text{ ta có hệ } \begin{cases} (a-b+1)a=9 \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=-4 \\ b=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+x=3 \\ \sqrt{x^2+3}-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3}=3-x \\ \sqrt{x^2+3}=1+x \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} a=-4 \\ b=-\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+x=-4 (*) \\ \sqrt{x^2+3}-x=-\frac{3}{4} \end{cases} \quad (I)$$

Ta có $\sqrt{x^2+3} > |x| \Rightarrow \sqrt{x^2+3} + x > |x| + x \geq 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ (I) vô nghiệm.

Vậy, pt đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

(Các cách khác:

+ **Đặt** $t = x + \sqrt{x^2 + 3}$

+ **Biến đổi pt thành** $(2x+1)\sqrt{x^2+3} = 9 - x - 2x^2$, đặt dk rồi bình phương hai vế.

+ **Biến đổi pt thành** $(2x+1)(\sqrt{x^2+3}+x) = 9$, nhân 2 vế với $\sqrt{x^2+3}-x \neq 0, \forall x$

$$4/ \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x+y) - \log_3(2x-y) = 1 \end{cases} \quad (I). \text{ Đk: } \begin{cases} 2x+y > 0 \\ 2x-y > 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(4x^2 - y^2) = \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(2x+y) + \log_2(2x-y) = 1 \quad (3)$$

$$(2) \text{ và } (3) \Rightarrow \log_2(2x-y) + \log_3(2x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x-y) + \log_2 3 \cdot \log_3(2x-y) = 0 \Leftrightarrow \log_2(2x-y) [1 + \log_2 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x-y) = 0 \Leftrightarrow 2x-y=1$$

Vậy, Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x^2 - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \text{ (tm)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy nghiệm hệ pt là $(x; y) = (\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$.

Đề số 239. 1. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} - 2 + 3x + 6x \cdot 5^{-x}}{3x \cdot 5^{-x} - 1} < 2$

2. Giải phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$ (2)

Giải:

2. Giải phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$ (2)

Điều kiện: $0 < x \neq 1$; (2) $\Leftrightarrow (x+3)|x-1| = 4x$

Trường hợp 1: $x > 1$ (2) $\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Trường hợp 1: $0 < x < 1$ (2) $\Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} - 3$

Vậy tập nghiệm của (2) là $T = \{2; 2\sqrt{3} - 3\}$

Đề số 240.

1/ Giải phương trình : $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(1 + \sqrt{1 + x + x^2}) = 0$

2/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{xy^2 - y^4} = 2^{y^6 - x^3} \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 \end{cases}$$

Giải:

1/ Phương trình $\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = -(2x + 1)(2 + \sqrt{4 + 4x + 4x^2})$
 $\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) = -(2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3})$

Xét hàm số $f(t) = t(2 + \sqrt{(t)^2 + 3})$ có $f'(t) = (2 + \sqrt{(t)^2 + 3}) + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0$ với $\forall t$

Vậy hàm số đồng biến nên: $f(3x) = f(-2x - 1) \Leftrightarrow 3x = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{5}$

2 Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(xy^2 - y^4)} = 2^{y^6 - x^3} \text{ (1)} \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 \text{ (2)} \end{cases}$

Từ (1) $\Leftrightarrow 2y^2(x - y^2) = (y^2 - x)(y^4 + xy^2 + x^4)$

$\Leftrightarrow (y^2 - x)(y^4 + xy^2 + x^4 + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y^2$ thay vào (2) ta có :

$\sqrt{4x + 5} + \sqrt{x + 8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Vậy hệ có nghiệm (1;1) và (1;-1)

Đề số 241.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

4/ Giải phương trình:
$$(3^x - 2) \log_3 \frac{x-1}{3} = 4 - \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{x+1}{2}}$$

Giải:

2/
$$x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 3(x-y) - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

* Với $x - y = 1$, ta có
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1; y = 0$ và $x = -1; y = -2$

* Với $x - y = -4$ ta có
$$\begin{cases} x - y = -4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases} \quad (\text{Hệ PT vô nghiệm})$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) = (1; 0)$ và $(x; y) = (-1; -2)$

4/ Điều kiện: $x > 1$

$$(3^x - 2) \log_3 \frac{x-1}{3} = 4 - \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{x+1}{2}} \Leftrightarrow (3^x - 2) [\log_3 (x-1) - \log_3 3] = 4 - \frac{2}{3} 3^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 2) [\log_3 (x-1) - 1] = 4 - 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow (3^x - 2) \log_3 (x-1) + 3^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 2) [\log_3 (x-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 2 = 0 \\ \log_3 (x-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 2 \text{ (loại)} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy PT có nghiệm $x = \frac{4}{3}$

Đề số 242. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x + 92} \geq x^2 + 2x + \sqrt{x-1} + 1$

Giải: Điều kiện: $x \geq 1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 92} - 10 \geq (x^2 + 2x - 8) + (\sqrt{x-1} - 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} \geq (x-2)(x+4) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1} + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{x+4}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} - (x+4) - \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[(x+4) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right] \geq 0$$

Ta có: $(x+4) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} < 0, \forall x \geq 1$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là: $1 \leq x \leq 2$

Đề số 243. Giải bất phương trình sau:
$$\frac{\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} - 2 + 3x + 6x \cdot 5^{-x}}{3x \cdot 5^{-x} - 1} < 2$$

4. Giải phương trình $4x^2 - 6^{\log_2 x} = 2 \cdot 3^{\log_2 4x^2}$

5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{\log_2 x}{1+\log_2^2 x} + \frac{\log_2 y}{1+\log_2^2 y} = \frac{9}{10} \\ (1+\log_x 2 \cdot \log_y 2) \cdot \log_2(xy) = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Giải:

2/ Điều kiện: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$. Bất phương trình tương đương với

$$\frac{5^x \sqrt{-2x^2 + 5x + 3} + (3x - 2)5^x + 6x}{3x - 5^x} < 2 \Leftrightarrow \frac{5^x \sqrt{(3-x)(2x+1)} + 3x \cdot 5^x}{3x - 5^x} < 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $g(x) = 3x - 5^x$, $g'(x) = 3 - 5^x \cdot \ln 5$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \left(\frac{\ln 5}{3} \right)$.

Lập bảng biến thiên, ta thấy $g(x) \leq g \left(\log_5 \left(\frac{\ln 5}{3} \right) \right) < 0$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(2x+1)} + 3x > 0 \text{ (vì } 5^x > 0) \Leftrightarrow x > \frac{5 - \sqrt{157}}{22}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $T = \left(\frac{5 - \sqrt{157}}{22}; 3 \right]$

4/ Điều kiện $x > 0$

$$4x^2 - 6^{\log_2 x} = 2 \cdot 3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 2^{\log_2 4x^2} - 6^{\log_2 x} = 2 \cdot 3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 2^{2\log_2 2x} - \frac{6^{1+\log_2 x}}{6} - 2 \cdot 3^{2\log_2 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 2^{2\log_2 2x} - 6^{1+\log_2 x} - 12 \cdot 3^{2\log_2 2x} = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2\log_2 2x} - \left(\frac{2}{3} \right)^{\log_2 2x} - 12 = 0 \left(\frac{2}{3} \right)^{\log_2 2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

5/ Điều kiện: $0 < x, y \neq 1$. Đặt $a = \log_2 x$; $b = \log_2 y$.

Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{9}{10} \quad (*) \\ \left(1 + \frac{1}{ab} \right) (a+b) = \frac{9}{2} \quad (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(a+b)(1+ab) = 9(1+a^2)(1+b^2) \quad (1) \\ 2(a+b)(1+ab) = 9ab \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy phương trình (1) chia vế theo vế (2) ta được: } 5ab = (1+a^2)(1+b^2) \Leftrightarrow \frac{5a}{1+a^2} = \frac{1+b^2}{b} \quad (3)$$

$$\text{Từ (*), ta suy ra } \frac{a}{1+a^2} = \frac{9}{10} - \frac{b}{1+b^2}.$$

$$\text{Thay vào (3), ta có: } 5 \left(\frac{9}{10} - \frac{b}{1+b^2} \right) = \frac{1+b^2}{b} \Leftrightarrow \frac{1+b^2}{b} + 5 \frac{b}{1+b^2} - \frac{9}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1+b^2}{b}. \text{ Phương trình (4) trở thành: } t + \frac{5}{t} - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2; t = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow (b^2 - 2b + 1) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow 2b^2 - 5b + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow y = 4, x = 2 \\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}, x = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 4); (2; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; 4); (4; 2)$.

Đề số 244. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 & (1) \\ 4x^2y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$$

Giải: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 & (1) \\ 4x^2y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow y \neq 0$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ \frac{4x^2}{y} + \frac{6x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = 18 \\ 2x \cdot \frac{3}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = 2x; b = \frac{3}{y}. \text{ Ta có hệ: } \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ ab(a + b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Hệ đã cho có 2 nghiệm } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$$

Đề số 245. Giải phương trình: $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

Giải Giải phương trình: $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

$$\text{Điều kiện } x > \frac{1}{3}. (*)$$

$$\text{Với } x \text{ thỏa mãn pt } (*) \Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2 + 1 = 3\log_5(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5 (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1) = 0$$

Để kiểm tra nghiệm (*), ta cần nghiệm của pt $8x-1=0$ là $x = \frac{1}{8}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Đề số 246 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Giải Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)(x-1+y-1) = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ u^2 + v^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^2 - 2uv - 5 = 0 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} S = u+v \\ P = u.v \end{cases} \text{ được } \begin{cases} P.S = 6 \\ S^2 - 2P - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$u, v \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ: (3 ; 2), (2 ; 3)

Đề số 247.

3. Giải phương trình: $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$

4. Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$

Giải

3. Giải phương trình: $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2 + x + 1}{x} = x(2 - x) \Leftrightarrow 3^{x(2-x)} = x + 1 + \frac{1}{x}$$

Đặt: $f(x) = 3^{x(2-x)}$ $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

Dùng pp kshs $\Rightarrow \max f(x) = 3$; $\min g(x) = 3 \Rightarrow$ PT $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \max f(x) = \min g(x) = 3$ tại $x = 1$
 $\Rightarrow$ PT có nghiệm $x = 1$

4/ Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$

Điều kiện $x > 0, x \neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_8 x} + 2 \log_4 x \right) \frac{1}{2} \log_2 2x \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{3} \log_2 x} + \log_2 x \right) (\log_2 x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2 x + 3) \left(\frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \leq -1 \text{ hay } \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ hay } x > 1$$

Đề số 248.

1/ Giải các phương trình

2. $\log_3(x^2 + 5x + 6) + \log_3(x^2 + 9x + 20) = 1 + \log_3 8$

Giải:

+ Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0 \\ x^2 + 9x + 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \vee x > -2 \\ x < -5 \vee x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ -4 < x < -3 \\ x > -2 \end{cases}$, và có: $1 + \log_3 8 = \log_3 24$

+ PT (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 [(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 9x + 20)] = \log_3 24 \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 9x + 20) = 24 \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 24 \text{ (*)} \\ (x < -5) \vee (-4 < x < -3) \vee (x > -2) \text{ (**)} \end{cases}$$

+ Đặt $t = (x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12 \Rightarrow (x+2)(x+5) = t - 2$, PT (*) trở thành:

$$t(t-2) = 24 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -4$$

- $t = 6 : x^2 + 7x + 12 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases}$ (thỏa điều kiện (**))

- $t = -4 : x^2 + 7x + 12 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 16 = 0$: vô nghiệm

+ Kết luận : PT có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -6$

Đề số 249. 1. Giải phương trình $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

2. . Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

Giải:

1. Giải phương trình $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

ĐK: $x > 0$.

Ta có phương trình $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1$. Đặt $\log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Phương trình trở thành $3^t = 4^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

ĐK: $x + y \neq 0$

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \frac{1}{x+y} + x - y = 3 \end{cases}$

Đặt $u = x + y + \frac{1}{x+y}$ ($|u| \geq 2$); $v = x - y$ ta được hệ:
$$\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = 2, v = 1$ do ($|u| \geq 2$)

Từ đó giải hệ $\begin{cases} x + y + \frac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Đề số 250.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

PT(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x^2 + 1 + xy = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x+y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0 \vee y = 1-3x \end{cases}$

Với $x = 0$ thay vào (1): $2 + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^y \Leftrightarrow 8 + 2^y = 12 \cdot 2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2 \frac{8}{11}$

Với $\begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1-3x \end{cases}$ thay $y = 1-3x$ vào (1) ta được: $2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3 \cdot 2(3)$

Đặt $t = 2^{3x+1}$, vì $x \geq -1$ nên $t \geq -\frac{1}{4}$

$$\text{PT (3)} : t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - 2\sqrt{2} \\ t = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện $t \geq -\frac{1}{4}$ ta chọn $t = 3 + 2\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó } 2^{3x+1} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} [\log_2(3 + 2\sqrt{2}) - 1]$$

$$y = 1 - 3x = 2 - \log_2(3 + 2\sqrt{2})$$

$$\text{Vậy HPT đã cho có 2 nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2 \frac{8}{11} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2(3 + 2\sqrt{2}) - 1] \\ y = 2 - \log_2(3 + 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Đề số 251. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Giải:

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 & (1) \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = 13 & (1') \\ y^3 - xy^2 + x^2y - x^3 = 25 & (2') \end{cases}$$

$$\text{Lấy (2') - (1') ta có: } x^2y - xy^2 = 6 \Leftrightarrow (x - y)xy = 6 \quad (3)$$

$$\text{Kết hợp với 1 ta có } \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x - y)xy = 6 \end{cases} \quad (\text{I}). \text{ Đặt } y = -z \text{ ta có :}$$

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + z)(x^2 + z^2) = 13 \\ -(x + z)xz = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + z)[(x + z)^2 - 2xz] = 13 \\ (x + z)xz = -6 \end{cases}$$

Đặt $S = x + z$ và $P = xz$ ta có :

$$\begin{cases} S(S^2 - 2P) = 13 \\ SP = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 2SP = 13 \\ SP = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases}$$

$$\text{Ta cần : } \begin{cases} x + z = 1 \\ x.z = -6 \end{cases}. \text{ Hệ này có nghiệm } \begin{cases} x = 3 \\ z = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là: $(3; 2)$ và $(-2; -3)$

Đề số 252 . Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x - 4)) \leq 1$

Giải:

$$\text{Giải bất phương trình: } \log_x(\log_4(2^x - 4)) \leq 1$$

$$\log_x(\log_4(2^x - 4)) \leq 1. \text{ Đk: } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \log_4(2^x - 4) > 0 \Leftrightarrow x > \log_2 5 \\ 2^x - 4 > 0 \end{cases}$$

Do $x > 1 \Rightarrow \text{PT} \Leftrightarrow \log_4(2^x - 4) \leq x \Leftrightarrow 2^x - 4 \leq 4^x \Leftrightarrow 4^x - 2^x + 4 \geq 0$ đúng với mọi x . Do vậy BPT có nghiệm: $x > \log_2 5$

Đề số 253.

2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 35} < 5x - 4 + \sqrt{x^2 + 24}$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_{2010} \frac{2(x-1)}{y} = y + x \\ \sqrt{y^2 - x^2 + 2} = \sqrt{x - 3y} \end{cases}$

Giải:

2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 35} < 5x - 4 + \sqrt{x^2 + 24}$

BPT tương đương

$$\sqrt{x^2 + 35} - \sqrt{x^2 + 24} < 5x - 4 \Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x^2 + 35} + \sqrt{x^2 + 24}} < 5x - 4$$

$$\Leftrightarrow 11 < (5x - 4)(\sqrt{x^2 + 35} + \sqrt{x^2 + 24})$$

Xét:

a) Nếu $x \leq \frac{4}{5}$ không thỏa mãn BPT

b) Nếu $x > \frac{4}{5}$: Hàm số $y = (5x - 4)(\sqrt{x^2 + 35} + \sqrt{x^2 + 24})$ với $x > \frac{4}{5}$

$$y' = 5(\sqrt{x^2 + 35} + \sqrt{x^2 + 24}) + (5x - 4)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 35}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 24}}\right) > 0 \text{ mọi } x > \frac{4}{5}$$

Vậy HSĐB. + Nếu $\frac{4}{5} < x \leq 1$ thì $y(x) \leq 11$
+ Nếu $x > 1$ thì $y(x) > 11$ Vậy nghiệm BPT $x > 1$

Đề số 254. Giải phương trình: $3^{x^2} 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

Giải: Giải phương trình: $3^{x^2} 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

Lấy logarit theo cơ số 3 cho hai vế ta được: $x^2 + \frac{x}{2x-1} \log_3 2 = 1 + \log_3 2$

Đưa phương trình về dạng: $(x-1)(2x^2 + x - 1 - \log_3^2 2) = 0$.

Từ đó suy ra nghiệm $x = 1$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 8 \log_3^2 2}}{4}$

Đề số 255. .Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3) \quad (1)$

đặt $t = \log_2 x$, BPT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5(t-3)} \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5(t-3)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases}$$

Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là: $(0; \frac{1}{2}] \cup (8; 16)$

Đề số 256

2, Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1 \end{cases}$$

4, Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2 4x.$

Giải 2, Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1 \end{cases}$$

§K
$$\begin{cases} -4 < x < 1, x \neq 0 \\ y > -2; y \neq -1 \end{cases}$$

Đưa phương trình thứ nhất của hệ về dạng: $\log_{1-x}(2+y) + \log_{2+y}(1-x) = 2$

Đặt $t = \log_{1-x}(2+y)$, tìm được $T=1$ kết hợp với phương trình thứ 2 của hệ, đối chiếu với điều kiện trên, tìm được nghiệm: $(x; y) = (-2; 1)$

4 Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2 4x.$

ĐK $x > 0$ và $x \neq 1$. Đưa phương trình về dạng: $\log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x).$

Xét hai khả năng $0 < x < 1$ và $x > 1$, đối chiếu với điều kiện ta tìm được nghiệm của phương trình là $x = -3 + 2\sqrt{3}$ và $x = 3$.

Đề số 257. Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x).$

Giải Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x).$

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x).$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1.$$

Biến đổi theo logarit cơ số 2 thành phương trình

$$\log_2[(x+3)(x-1)] = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Đề số 258.

1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$

Giải:

1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

điều kiện $x > 0, y > 0$. Khi đó hệ tương đương
$$\begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình ta được: $(x-y)(3xy+x+y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ thay lại phương trình Giải tìm được nghiệm của hệ là: $(1;1)$.

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}} > 0; \forall x \neq -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập $M = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Ta thấy $f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm của (1). Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3; f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$					
$F(x)$					
	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = -1$.

Cách 2: Học sinh có thể đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2x+1} \\ v = \sqrt[3]{2x+3} \end{cases}$ khi đó ta được hệ
$$\begin{cases} u + v + \frac{u^3 + v^3}{2} = 0 \\ v^3 - u^3 = 2 \end{cases}$$

giải hệ này và tìm được nghiệm.

Đề số 259.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases}$$

Giải

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases}$$

§k $y \neq 0$
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y} \left(\frac{1}{y} + x\right) = 4 \end{cases} \quad \text{®Æt} \quad \begin{cases} a = x + \frac{1}{y} \\ b = \frac{x}{y} \end{cases}$$

Ta ®-ic
$$\begin{cases} a^2 + a - 2b = 4 \\ a^3 - 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 4 = 2b \\ a^3 - a(a^2 + a - 4) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 4 = 2b \\ a^2 - 4a + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Đề số 260.

2. Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

4. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

2. Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

$2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$, ñieàu kieän : $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$

Ñaët $t = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow t^3 = 3x-2 \Leftrightarrow x = \frac{t^3+2}{3}$ vaø $6 - 5x = \frac{8-5t^3}{3}$

Phöông trình trôu thaønh : $2t + 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} = 8 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2. \text{ Vaäy } x = -2$$

4. Gæai heä phöông trình :
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Ñieàu kieän $x, y > 0$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2 + \log_2(xy) = \log_2(2xy) \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$
