# PHẦN 1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## 1.1. Sự đồng biến – nghịch biến của hàm số

**Câu 1.** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+2mx^2+3x-1$. Tìm $m$ để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=(m^2-m)x^2+4mx+3$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: Xét $m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$

+ Với $m=0$, ta có $y'=3>0,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $m=0$ thỏa.

+ Với $m=1$, ta có $y'=4x+3>0\Leftrightarrow x>-\frac{3}{4}$, suy ra $m=1$ không thỏa.

Trường hợp 2: Xét $m^2-m\neq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\m\neq 1\end{array}\right.$, khi đó:

$$y'\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Delta'=m^2+3m\leq 0\\m^2-m>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-3\leq m\leq 0\\m<0\vee m>1\end{array}\right. \Leftrightarrow -3\leq m<0$$

Từ hai trường hợp trên, ta có giá trị $m$ cần tìm là $-3\leq m\leq 0$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-2m+3$. Tìm $m$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow y'\leq 0 \quad \forall x\in(1;2)$

Ta có $\Delta'=9m^2-9(m^2-1)=9>0,\forall m$

Suy ra $y'$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1=m-1;x_2=m+1 \quad (x_1<x_2)$

Do đó: $y'\leq 0 \quad \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow x_1\leq 1<2\leq x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1\leq 1\\x_2\geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m-1\leq 1\\m+1\geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow 1\leq m\leq 2$

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $1\leq m\leq 2$.

**Câu 3.** Xác định m để hàm số sau đồng biến trong khoảng (0; +∞):

$$y = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$$

+ TXĐ: D = R

+ y' = $\frac{-mx+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Hàm số ĐB trong (0; +∞) <=> y' ≥ 0 mọi x ∈ (0; +∞).

<=> -mx + 1 ≥ 0 mọi x ∈ (0; +∞). (1)

. m = 0 (1) đúng

. m > 0 : -mx + 1 ≥ 0 <=> x ≤ 1/m. Vậy (1) không thỏa mãn.

. m < 0: -mx + 1 ≥ 0 <=> x ≥ 1/m. Khi đó (1) <=> 1/m ≤ 0 t/m.

Giá trị cần tìm là: **m ≤ 0.**

**Câu 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. Tìm $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$ (có dấu bằng)

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq m,\ \forall x \in (0;+\infty) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x,\ \forall x \in (0;+\infty)$, ta có:

$$f'(x) = 6x - 6\ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| | $+\infty$ | | | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | 0 ↘ | | ↗ |
| | | $+\infty$ | | |
| | | | $-3$ | |

Từ BBT ta suy ra: $(*) \Leftrightarrow m \leq -3$

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $m \leq -3$.

**Câu 5.** Tìm m để hàm số luôn nghịch biến: $y=-x^3+(3-m)x^2-2mx+12$.

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Đạo hàm: $y'=-3x^2+2(3-m)x-2m$

+ Để hàm số luôn nghịch biến thì $y'\le 0\ \ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<0 \\ 9+m^2-6m-(-3)(-2m)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2-12m+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow 6-3\sqrt{3}\le m\le 6+3\sqrt{3}.$$

**Câu 6.** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+7m-8}{x-m}$. Tìm $m$ để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Đạo hàm: $y'=\dfrac{-m^2-7m+8}{(x-m)^2}$. Dấu của $y'$ là dấu của biểu thức $-m^2-7m+8$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow\ y'>0,\ \forall x\in D$ (không có dấu bằng)

$$\Leftrightarrow\ -m^2-7m+8>0$$

$$\Leftrightarrow\ -8<m<1$$

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $-8<m<1$.

**Câu 7.** Tìm m để hàm số luôn nghịch biến $\forall x$: $y=mx^3-3x^2-3x+1$.

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $y'=3mx^2-6x-3$

+ Để hàm số luôn nghịch biến $\forall x$ thì $y'\le 0\ \ \forall x$

$$\Leftrightarrow 3mx^2-6x-3\le 0\ \ \forall x\ \ (1)$$

+ $TH_1$: $m=0$

(1) $\Leftrightarrow -6x-3\le 0$

$$\Leftrightarrow 6x\ge -3$$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ ( không thỏa $\forall x$ )

+ $TH_2$ : $m \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m < 0 \\ 9 + 9m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 9m \leq -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$

+ Vậy $m \leq -1$ thì hàm số thỏa đề bài.

## 1.2. Cực trị của hàm số

**Câu 1.** Tìm cực trị của của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$.

**Cách 1.**

* Tập xác định:R.

Ta có: $y'=x^2-x-2; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

* Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | 0 | + | |
| y | | ↗ | $\frac{19}{6}$ | ↘ | $-\frac{4}{3}$ | ↗ | |

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = -1 và giá trị cực đại $y_{CĐ}=y(-1)=\frac{19}{6}$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và giá trị cực tiểu $y_{CT}=y(2)=\frac{-4}{3}$.

**Cách 2.**

* Tập xác định:.

Ta có: $y'=x^2-x-2; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

* $y''=2x-1, y''(-1)=-3<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm x = -1 và giá trị cực đại

$y_{CĐ}=y(-1)=\frac{19}{6}$

* $y''(2)=3>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và giá trị cực tiểu .

**Câu 2.** Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+6$

Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+6$

* Tập xác định: $\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x,\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu đạo hàm

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

Từ bảng xét dấu

đạo hàm ta có
Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và giá trị cực đại $y=6$; đạt cực tiểu tại $x=2$ và giá trị cực tiểu $y=2$.
Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(0;6)$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $N(2;2)$

**Câu 3.** Tìm các điểm cực trị của hàm số $y=2x^4-4x^2-1$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=8x^3-8x=8x(x^2-1)\ \forall x\in D$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y':

| x | $-\infty$ | -1 | | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

Kết luận: Hàm số đạt cực đại tại x = 0 và $y_{cd}=y(0)=-1.$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = ± 1 và $y_{ct}=y(\pm1)=-3.$

**Câu 4.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2-1\right)x+2,m$ là tham số.
Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=2$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+m^2-1;y''=6x-6m$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=2\Leftrightarrow\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-12m+11=0\\12-6m>0\end{cases}\Leftrightarrow m=1$

Vậy với m = 1 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 23.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=1>0,\forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1;2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1;-2-2m)$

Ta có $OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

**Câu 6.** Tìm m để hàm số $y=\frac{m}{4}(x-1)^4+(m-2)x$ đạt cực tiểu tại điểm x = 1.

Tìm m để hàm số $y=\frac{m}{4}(x-1)^4+(m-2)x$ đạt cực tiểu tại điểm x = 1

$y'=m(x-1)^3+m-2$

Điều kiện cần $y'(1)=0 \Leftrightarrow m=2$

Thử lại m = 2 : $y'=2(x-1)^3$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x = 1

Vậy nhận m = 2

**Câu 7.** Tìm m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+(m^2-m+2)x^2+(3m^2+1)x+m-5$ đạt cực tiểu tại x = −2.

$$y'(x)=x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1 \Rightarrow y''(x)=2x+2(m^2-m+2)$$

Để hàm số đạt cực tiểu tại x = −2 thì

$$\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3=0 \\ m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-3)=0 \\ m(m-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$$

**Câu 8.** Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$, với $m$ là tham số thực.

Xác định $m$ để hàm số đã cho đạt cực trị tại $x_1, x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$.

Xác định $m$ để hàm số đã cho đạt cực trị tại $x_1, x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$.

Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+9.$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại $x_1, x_2$ $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm pb là $x_1, x_2$ $\Leftrightarrow$ Pt $x^2-2(m+1)x+3=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1, x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right. (1)$$

Với ĐK (1), theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=2(m+1);\ x_1x_2=3.$

$$|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-12=4$$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$ TMYCBT.

**Câu 9.** Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực.Xác định $m$ để hàm số đã cho đạt cực trị tại $x_1, x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

– Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9.$

– Hàm số có cực đại, cực tiểu $x_1$, $x_2$. $\Leftrightarrow$ PT y' = 0 có hai nghiệm phân biệt là $x_1$, $x_2$.

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1$, $x_2$.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m > -1+\sqrt{3} \ \vee \ m < -1-\sqrt{3}$ (1)

Theo đề ta có: $|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4$ (*)

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$; $x_1x_2 = 3.$

$(*) \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là: $-3 \le m < -1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3} < m \le 1.$

**Câu 10.** m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đạt cực trị tại $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ $f'(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} m \ne 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m \ne 0 < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ (*)

Với điều kiện (*) thì $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và hàm số f (x) đạt cực trị tại $x_1$, $x_2$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m}; x_1x_2 = \frac{3(m-2)}{m}$

Ta có: $x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m}; x_1 = \frac{2(m-1)}{m} - \frac{2-m}{m} = \frac{3m-4}{m}$

$\Rightarrow \frac{2-m}{m} \cdot \frac{3m-4}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow (2-m)(3m-4) = 3m(m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Cả 2 giá trị này đều thỏa mãn điều kiện (*). Vậy $x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = \frac{2}{3}$

**Câu 11.** Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m^2+1)x^2 + 1$ (1)
Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

$y' = 4x^3 - 4(m^2+1)x$

y' = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2+1} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ hàm số (1) luôn có 3 điểm cực trị với mọi m

$x_{CT}=\pm\sqrt{m^2+1} \Rightarrow$ giá trị cực tiểu $y_{CT}=-(m^2+1)^2+1$

Vì $(m^2+1)^2\geq 1 \Rightarrow y_{CT}\leq 0$ $\max(y_{CT})=0 \Leftrightarrow m^2+1=1 \Leftrightarrow m=0$

**Câu 12.** Cho hàm số $y=-x^3+3mx+1$ (1). Tìm $m$ để đồ thị của hàm số (1) có 2 điểm cực trị $A, B$ sao cho tam giác $OAB$ vuông tại $O$ ( với $O$ là gốc tọa độ ).

$y'=-3x^2+3m=-3\left(x^2-m\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-m=0(*)$

Đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0(**)$

Khi đó 2 điểm cực trị $A\left(-\sqrt{m};1-2m\sqrt{m}\right)$ , $B\left(\sqrt{m};1+2m\sqrt{m}\right)$

Tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow 4m^3+m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ ( TM (**) )

Vậy $m=\frac{1}{2}$

**Câu 13.** Cho hàm số $f(x)=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$ ($C_m$)

Tìm m để ($C_m$) có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

Hàm số có CĐ, CT khi m < 2 . Toạ độ các điểm cực trị là:

$A(0;m^2-5m+5),\ B(\sqrt{2-m};1-m),\ C(-\sqrt{2-m};1-m)$

Tam giác ABC luôn cân tại A $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A khi m = 1.

**Câu 14.** Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ 1

Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y=2x+1$ với đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc $d$ và cùng với hai điểm cực trị của đồ thị (C) tạo thành một tam giác vuông tại M.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $d: y=2x+1$ và đồ thị (C) là:

$2x^3-3x^2+1=2x+1 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2-2x=0$ (*)

Giải phương trình (*) ta được ba nghiệm phân biệt $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-\frac{1}{2}$

Vậy d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;1), B(2;5), C\left(-\frac{1}{2};0\right)$

$M\in d: y=2x+1 \Rightarrow M(t;2t+1)$, tọa độ các điểm cực trị của (C) là $D(0;1), T(1;0)$

M cùng với hai điểm cực trị của đồ thị (C) tạo thành tam giác vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{TM}=0(**)$, mặt khác ta có $\overrightarrow{DM}=(t;2t), \overrightarrow{TM}=(t-1;2t+1)$

$\Rightarrow (**) \Leftrightarrow 5t^2+t=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=-\frac{1}{5}$

$t = 0 \Rightarrow M(0;1) \equiv D$ (loại); $t = -\frac{1}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$

**Câu 15.** Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1 \quad (C_m)$ (1). Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right. \Rightarrow m \neq 0$ (*)

Với điều kiện (*) thì hàm số (1) có ba điểm cực trị. Gọi ba điểm cực trị là: $A(0;1); B\left(-m;1-m^4\right); C\left(m;1-m^4\right)$. Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì đỉnh sẽ là A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-m;-m^4\right); \overrightarrow{AC} = \left(m;-m^4\right); \overrightarrow{BC} = (2m;0)$

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4m^2 = m^2 + m^8 + \left(m^2 + m^8\right)$

$\Leftrightarrow 2m^2\left(m^4 - 1\right) = 0; \Rightarrow m^4 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy với m = -1 và m = 1 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 16.** Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (1).Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 32 (đơn vị diện tích).

+) Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$ ; ĐK có 3 điểm cực trị: $m \neq 0$

+) Tọa độ ba điểm cực trị: A(0 ; 1), B(- m ; 1 – $m^4$), C(m ; 1 – $m^4$) ;

+) CM tam giác ABC cân đỉnh A. Tọa độ trung điểm I của BC là I(0 ; 1 – $m^4$).

+) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AI.BC = m^4|m| = |m|^5 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (tm)

**Câu 17.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ (1), với $m$ là tham số thực. Xác định $m$ để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và $y'$ đổi dấu khi $x$ đi qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$

- Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;m-1),\ B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),\ C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$

- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|y_B-y_A|.|x_C-x_B|=m^2\sqrt{m}$ ; $AB=AC=\sqrt{m^4+m},\ BC=2\sqrt{m}$

$$R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

**Câu 18.** Cho hàm số y = x³ – 3x²+2 (1)

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(1;1) và có hệ số góc bằng 3. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

+ d: y=3x-2

+ Xét biểu thức P=3x-y-2. Thay tọa độ điểm (0;2)=>P=-4<0, thay tọa độ điểm (2;-2)=>P=6>0. Vậy 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng d. Từ đây, để MA+MB nhỏ nhất => 3 điểm A, M, B thẳng hàng

+ Phương trình đường thẳng AB: y=-2x+2

+ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\left\{\begin{array}{l}y=3x-2\\ y=-2x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{4}{5}\\ y=\frac{2}{5}\end{array}\right.$

**Câu 19.** Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2$ (1).

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Đường thẳng đi qua 2 c ực trị A(1;2) và B(3;-2) là y=-2x+4

Ta có pt đt vuông góc với (AB) nên có hệ số góc k= ½

Vậy PT đ ư ờng thẳng cần tìm là $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

**Câu 20.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ (1), m là tham số.

Tìm $m$ để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho điểm I (1; 0) là trung điểm của đoạn AB.

Ta có $y'=3x^2-6mx.$

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2m.\end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số (1) có hai cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(0;4m^2-2),\ B(2m;-4m^3+4m^2-2)$.

Điểm I (1; 0) là trung điểm của đoạn AB khi và chỉ khi $\begin{cases} m=1 \\ -2m^3+4m^2-2=0 \end{cases}$

Giải hệ, ta được $m=1$. Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

**Câu 21.** Cho hàm số $y=-x^3+(2m+1)x^2-(m^2-3m+2)x-4$ (m là tham số) có đồ thị là ($C_m$). Xác định m để ($C_m$) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

$y'=-3x^2+2(2m+1)x-(m^2-3m+2)$.

($C_m$) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ PT $y'=0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3(m^2-3m+2)<0 \Leftrightarrow 1<m<2$

**Câu 22.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ (m là tham số) có đồ thị là ($C_m$). Xác định m để ($C_m$) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng y = x.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m \neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m; 2m^3)$

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng y = x là AB vuông góc với đường thẳng y = x và I thuộc đường thẳng y = x

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; m = 0

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 1.3. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

**Câu 1.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0;4]$ .

y'= 0 $\Leftrightarrow$ x=0, x=1 $\in [0;4]$ x= -1 loại
Ta có: f(0) =3 , f(1)=2 , f(4)=227
Vậy GTLN y = 227 , trên $[0;4]$ khi x=4
GTNN y= 2 trên trên $[0;4]$ khi x=1

**Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$. trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$.

+ Ta có $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

+ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \notin [-2;\frac{1}{2}]$

+ Có $f(-2) = -2; f(\frac{1}{2}) = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$

$\max\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} f(x) = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$; $\min\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} f(x) = -2$

**Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)^2 \left(x + \sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$; $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$;

$f'(x) = 4x^3 - 8x.$

Với $x \in \left[-\frac{1}{2};2\right]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \sqrt{2}$

Ta có $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{16}, f(0) = 4, f\left(\sqrt{2}\right) = 0, f(2) = 4$.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ lần lượt là 4 và 0.

**Câu 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x) \text{ trên đoạn } [-1;0].$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-1;0]$.

Ta có $f'(x)=2x+\frac{2}{1-2x}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Tính $f(-1)=1-\ln 3; f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2; f(0)=0$

Vậy $\min\limits_{[-1;0]} f(x)=\frac{1}{4}-\ln 2; \max\limits_{[-1;0]} f(x)=0$

**Câu 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x.\log x$ trên khoảng (0;10).

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x.\log x$ trên khoảng (0;10].

Hàm số đã cho liên tục trên (0;10]. Ta có $f'(x)=\log x+x.\frac{1}{x\ln 10}=\log x+\log e$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \log x=-\log e\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

BBT:

| $x$ | 0 | | 1/e | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{\log e}{e}$ | ↗ | |

Từ BBT ta suy ra $\min\limits_{(0;10]} f'(x)=-\frac{\log e}{e}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

**Câu 6.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-3+\frac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$.

- Ta có $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[2;5]$; $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}$

- Với $x\in[2;5]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$

- Ta có: $f(2)=3, f(3)=2, f(5)=3$

- Do đó: $Max\limits_{[2;5]} f(x)=3\Leftrightarrow x=2\vee x=5$, $min\limits_{[2;5]} f(x)=2\Leftrightarrow x=3$

**Câu 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $\left[2;4\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[2;4\right]$

Ta có $y' = \dfrac{1}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \in [2;4]$

Có $y(2) = \dfrac{1}{3}; y(4) = \dfrac{3}{7}$

Vậy $\boxed{\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{3}{7} \text{ khi } x = 4}$ và $\boxed{\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{1}{3} \text{ khi } x = 2}$

**Câu 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 10$ trên đoạn $[0;2]$

$f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$, ta có: $f'(x) = -8x^3 + 8x$

Với $x \in [0;2]$ thì: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Ta có: f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = -6

Vậy: $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 12; \quad \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = -6$

**Câu 9.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

$D = [-1;2]$

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin D \\ x = 1 \in D \end{array}\right.$$

Do $y(-1) = 15; y(2) = 6; y(1) = -5 \Rightarrow \min\limits_{x \in D} y = -5; \max\limits_{x \in D} y = 15$

Vậy $\min\limits_{x \in D} y = -5; \max\limits_{x \in D} y = 15$.

**Câu 10.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x (x^2 - x - 1)$ trên đoạn $[0;2]$.

$D = [0;2]$

Ta có: $y' = e^x (x^2 + x - 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin D \\ x = 1 \in D \end{array}\right.$$

Do $y(0) = -1; y(2) = e^2; y(1) = -e \Rightarrow \min\limits_{x \in D} y = -e; \max\limits_{x \in D} y = e^2$

Vậy $\min\limits_{x \in D} y = -e; \max\limits_{x \in D} y = e^2$.

**Câu 11.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$ .

$D = \left[-2;2\right]$

Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} + x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \in D$

Do $y\ -2\ = -2;\ y\ \ 2\ = 2;\ y\ -\sqrt{2}\ = -2\sqrt{2} \Rightarrow \min\limits_{x \in D} y = -2\sqrt{2};\ \max\limits_{x \in D} y = 2$

Vậy $\min\limits_{x \in D} y = -2\sqrt{2};\ \max\limits_{x \in D} y = 2$.

**Câu 12.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \cos x$ với $t \in \left[-1;1\right]$ , hàm số trở thành: $y = -2t^2 - t + 3$

Ta có: $y' = -4t - 1$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4} \in \left[-1;1\right]$

Do $y\ -1\ = 2;\ y\ \ 1\ = 0;\ y\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{25}{8} \Rightarrow \min\limits_{x \in D} y = 0;\ \max\limits_{x \in D} y = \dfrac{25}{8}$

Vậy $\min\limits_{x \in D} y = -2\sqrt{2};\ \max\limits_{x \in D} y = 2$.

## 1.4. Tiếp tuyến

### 1.4.1. Tiếp tuyến tại một điểm

**Câu 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm M(−1; −2)

$(C): y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$ tại điểm M(−1; −2) ta có: $y'(-1) = 9$

$\Rightarrow$ PTTT: $y = 9x + 7$

**Câu 2**: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Viết phương trình tiếp tuyến của (H) tại A(2; 3).

$y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Tại A(2; 3) $\Rightarrow k = y'(2) = -2 \Rightarrow PTTT: y = -2x - 1$

**Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M(1; 2).

$f(x) = x^3 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow$ PTTT: $y = 2$.

**Câu 4:** Cho hàm số $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm
A(2; −7).

$y = \dfrac{3x+1}{1-x} \Rightarrow y' = \dfrac{4}{(x-1)^2}$

$k = y'(2) = 4$

$\Rightarrow$ PTTT: $y = 4x - 15$

**Câu 5:** Cho hàm số $y = \dfrac{2 - x + x^2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

$y = \dfrac{2 - x + x^2}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \Rightarrow k = f'(2) = -1$

$x_0 = 2, y_0 = 4, k = -1 \Rightarrow PTTT: y = -x + 2$

**Câu 6:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm I(1; −2).

$y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = f'(1) = -3$

$x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ k = -3 \Rightarrow PTTT: y = -3x + 1$

**Câu 7.** Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3$

$y' = 4x^3 - 2x \Rightarrow k = y'(1) = 2$

Phương trình tiếp tuyến là y = 2x + 1

**Câu 8.** Cho hàm số: $y = 2x^3 - 7x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x = 2.

$y = 2x^3 - 7x + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 7$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3,\ y'(2) = 17 \Rightarrow PTTT: y = 17x - 31$

**Câu 9.** Cho (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

Cho (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

$y' = 3x^2 - 6x$. Giao của ( C) với trục Ox là A(1; 0), $B\left(1-\sqrt{3};0\right), C\left(1+\sqrt{3};0\right)$

Tiếp tuyến tại A(1; 0) có hệ số góc là k = −3 nên PTTT: $y = -3x + 3$

Tiếp tuyến tại $B\left(1-\sqrt{3};0\right)$ có hệ số góc là k = 6 nên PTTT : $y = 6x - 6 + 6\sqrt{3}$

Tiếp tuyến tại $C\left(1+\sqrt{3};0\right)$ có hệ số góc là k = 6 nên PTTT : $y = 6x - 6 - 6\sqrt{3}$

**Câu 10:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ tại giao điểm của nó với trục hoành .

$y = x - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{x^2}$

- Các giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $A\left(-1;0\right), B\left(1;0\right)$
- Tại A(−1; 0) tiếp tuyến có hệ số góc $k_1 = 2$ nên PTTT: y = 2x +2
- Tại B(1; 0) tiếp tuyến cũng có hệ số góc $k_2 = 2$ nên PTTT: y = 2x − 2

**Câu 11.** Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm trên $(C)$ có tung độ bằng 5.

Ta có: $y_0 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{2x_0+1}{x_0-1} = 5 \Leftrightarrow 2x_0+1 = 5x_0-5 \Leftrightarrow x_0 = 2$

- $f'(x_0) = \dfrac{-3}{(2-1)^2} = -3$

• Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y-5 = -3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x+11$

**Câu 12.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp điểm có tung độ bằng 3..

Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$, ta có $y_0 = 3 \Rightarrow \dfrac{2x_0-1}{x_0-1} = 3 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow M(2;3)$

Suy ra, hệ số góc k của tiếp tuyến là: $k = y'(2) = -1$

Do đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y = -1(x-2)+3$ hay $y = -x+5$

**Câu 13.** Cho hàm số $y = -x^3+3x^2$ $(1)$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm A(0;0) và B(3;0).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A(0;0) là: $y = 0$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại B(3;0) là: $y = y'(3)(x-3) = -9x+27$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = 0$ và $y = -9x+27$.

**Câu 14.** Cho hàm số $y = x^3-3x^2+2$ $(C)$. Gọi giao điểm của đồ thị $(C)$ và đường thẳng $y = -x-3$ là $M$, viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C)$ tại điểm M.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x^3-3x^2+2 \\ y = -x-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ x^3-3x^2+x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-2)$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y = f'(-1)(x+1)-2 \Leftrightarrow y = 9(x+1)-2 \Leftrightarrow y = 9x+7.$

**Câu 15.** Cho hàm số $y = -x^3+3x-2$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thi (C) tại các giao điểm của (C) với đường thẳng d: $y = -x-2$ biết tọa độ tiếp điểm có hoành độ dương.

Hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của phương trình: $-x^3+3x-2 = -x-2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2(t/m)$

Với x = 2 thì y(2) = -4; y'(2) = -9. PTTT là: y = -9x + 14

### 1.4.2. Tiếp tuyến đi qua một điểm

**Câu 1.** Cho hàm số : $y=\dfrac{-x+1}{2x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đó đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục Ox.

Giao điểm của tiệm cận đứng với trục Ox là $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Phương trình tiếp tuyến ($\Delta$) qua A có dạng $y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$

($\Delta$) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-x+1}{2x+1}=k\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\\ \left(\dfrac{-x+1}{2x+1}\right)'=k \quad \text{có nghiệm}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-x+1}{2x+1}=k\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \quad (1)\\ \dfrac{-3}{(2x+1)^2}=k \qquad (2)\end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có pt hoành độ tiếp điểm là

$$\frac{-x+1}{2x+1}=-\frac{3\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(2x+1)^2}$$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)=3(x+\frac{1}{2})$ và $x\neq-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x-1=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Do đó $k=-\frac{1}{12}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

**Câu 2.** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$ $(C)$. Cho hai điểm $A(1;\,0)$ và $B(-7;\,4)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm trung diểm $I$ của $AB$.

Gọi $\Delta$ qua $I(-3;\,2)$ có hệ số góc $k \Rightarrow \Delta: y=k(x+3)+2$

.Điều kiện $\Delta$ tiếp xúc (C) $\begin{cases}\dfrac{2x+4}{x+1}=k(x+3)+2\\ \dfrac{-2}{(x+1)^2}=k\end{cases}$

Giải hệ $\Rightarrow x=-2\Rightarrow k=-2$

Vậy phương trình tiếp tuyến : $\Delta: y=-2x-4$

**Câu 3.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là $C$. Viết phương trình tiếp tuyến của $C$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\ 2;-2$ .

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Gọi $M\ x_0; y_0 \in C$ với $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2$ là tiếp điểm và $\Delta$ là tiếp tuyến với $C$ tại $M_0$

Phương trình $\Delta$ : $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow\ y - (x_0^3 - 3x_0^2 + 2) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$$

$\Delta$ đi qua điểm $A\ 2;-2$ $\Leftrightarrow\ -2 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 2) = (3x_0^2 - 6x_0)(2 - x_0)$

$$\Leftrightarrow\ 2x_0^3 - 9x_0^2 + 12x_0 - 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ x_0 - 2\ \ 2x_0^2 - 5x_0 + 2\ = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 2 \ \Rightarrow\ \Delta : y = -2$

Với $x_0 = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ \Delta : y = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{2}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa đề bài là $y = -2$ và $y = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{2}$.

**Câu 4.** Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị là $C$ . Viết phương trình tiếp tuyến của $C$ , biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\ -6;5$ .

Ta có: $y' = \dfrac{-4}{x-2^{\ 2}}$

Gọi $M\ x_0; y_0 \in C$ với $y_0 = \dfrac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$ là tiếp điểm và $\Delta$ là tiếp tuyến với $C$ tại $M_0$

Phương trình $\Delta$ : $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow\ y - \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} = \frac{-4}{x_0 - 2^{\ 2}}(x - x_0)$$

$\Delta$ đi qua điểm $A\ -6;5$ $\Leftrightarrow\ 5 - \dfrac{x_0 + 2}{x_0 - 2} = \dfrac{-4}{x_0 - 2^{\ 2}}(-6 - x_0)$

$$\Leftrightarrow\ x_0^2 - 6x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 6 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow \Delta : y = -x - 1$

Với $x_0 = 6 \Rightarrow \Delta : y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa đề bài là $y = -x - 1$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

**Câu 5.** Cho đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 1$, viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-2; -1).

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$

Gọi $M\left(x_0; x_0^3 - 3x_0 + 1\right)$ là tiếp điểm. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y - \left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$

$\Delta$ qua A(-2;-1) nên ta có: $-1 - \left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) = (3x_0^2 - 3)(-2 - x_0) \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 + 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $\Delta: y = -1; \Delta: y = 9x + 17$

### 1.4.3. Viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc tiếp tuyến

**Câu 1.** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị là $C$ . Viết phương trình tiếp tuyến của $C$ , biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-5$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)

Ta có: $y'=\dfrac{-5}{x-2^{\,2}}$

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-5 \Leftrightarrow y'(x_0)=-5$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{x_0-2^{\,2}}=-5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0=1 \\ x_0=3 \end{bmatrix}$$

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=-3$ : $M_1(1;-3) \Rightarrow$ pttt: $\mathrm{y}=-5\mathrm{x}+2$

Với $x_0=3 \Rightarrow y_0=7$ : $M_2(3;7) \Rightarrow$ pttt: $\mathrm{y}=-5\mathrm{x}+22$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa đề bài là $\mathrm{y}=-5\mathrm{x}+2$ và $\mathrm{y}=-5\mathrm{x}+22$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến k = -3.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Theo giả thiết, hệ số góc của tiếp tuyến k = - 3 nên:

$3x_0^2-6x_0=-3 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=1$

Vì $x_0=1 \Rightarrow y_0=-2 \Rightarrow M(1;-2)$.

Phương tri`nh tiếp tuyến cần tìm là $y=-3(x-1)-2 \Leftrightarrow y=-3x+1$

**Câu 3 :** Cho hàm số: $y=2x^3-7x+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc k = –1.

$y=2x^3-7x+1 \Rightarrow y'=6x^2-7$

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có: $y'(x_0)=-1 \Leftrightarrow 6x_0^2-7=-1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0=-1 \\ x_0=1 \end{bmatrix}$

- Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=6 \Rightarrow PTTT: y=-x+7$
- Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=-4 \Rightarrow PTTT: y=-x-5$

### 1.4.4. Tiếp tuyến song song với đường thẳng d

**Câu 1**. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ .Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với d: $y=\frac{x-2}{2}$.

$$y=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y'=\frac{2}{(x+1)^2} \quad (x\neq -1)$$

d: $y=\frac{x-2}{2}$ có hệ số góc $k=\frac{1}{2} \Rightarrow$ TT có hệ số góc $k=\frac{1}{2}$.

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có $y'(x_0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-3 \end{array}\right.$

+ Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow$ PTTT: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

+ Với $x_0=-3 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow$ PTTT: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng d: $y=-5x-2$.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$$

Tiếp tuyến song song với d: $y=-5x-2$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k=-5$.

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có: $f'(x_0)=-5 \Leftrightarrow \frac{x_0^2+2x_0-5}{(x_0+1)^2}=-5 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$

- Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow$ PTTT: $y=-5x+2$
- Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=-12 \Rightarrow$ PTTT: $y=-5x-22$

**Câu 3**: Cho hàm số f(x) = $-x^3+3x+1$ (có đồ thị (C)). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: y = -9x -15.

Tiếp tuyến // d: y = -9x -15 nên phương trình tiếp tuyến có dạng
y = -9x + m, m ≠ -15.

Điều kiện tiếp xúc: hệ $\begin{cases} -x^3+3x+1=-9x+m & (1) \\ -3x^2+3=-9 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

$(2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow m=-15 \\ x=2 \Rightarrow m=17 \end{array}\right. \Rightarrow m=17$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: y = -9x +17.

**Câu 4.** Cho hàm số $y=x^2(x+1)$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y=5x$.

Vì tiếp tuyến song song với d: $y=5x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc là k = 5

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm.

$$y'(x_0)=5 \Leftrightarrow 3x_0^2+2x_0=5 \Leftrightarrow 3x_0^2+2x_0-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow$ PTTT: $y=5x-3$

Với $x_0=-\dfrac{5}{3} \Rightarrow y_0=-\dfrac{50}{27} \Rightarrow$ PTTT: $y=5x+\dfrac{175}{27}$

**Câu 5**: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{8}x+5$.

$y=\dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{8}x+5$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\dfrac{1}{8}$

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow$

$$y'(x_0)=k \Leftrightarrow -\frac{2}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{8} \Leftrightarrow (x_0-1)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-3 \\ x_0=5 \end{array}\right.$$

- Với $x_0=-3 \Rightarrow y_0=\dfrac{1}{2} \Rightarrow PTTT: y=-\dfrac{1}{8}(x+3)+\dfrac{1}{2}$
- Với $x_0=5 \Rightarrow y_0=\dfrac{3}{2} \Rightarrow PTTT: y=-\dfrac{1}{8}(x-5)+\dfrac{3}{2}$

**Câu 6**: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-4x+3$.

$y=\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-4x+3$ nên tiếp tuyến có hệ số góc k = −4

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp $\Rightarrow y'(x_0)=-4 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_0^2}=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{1}{2} \\ x_0=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $x_0=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow PTTT: y=-4x+4$
- Với $x_0=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0=-2 \Rightarrow PTTT: y=-4x-4$

**Câu 7.** Cho hàm số: $y=x^3-3x^2+2x+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng d: $x+y+50=0$.

$y=x^3-3x^2+2x+2 \Rightarrow y'=3x^2-6x+2$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $x+y+50=0$ nên tiếp tuyến có hệ số góc k = −1.

Gọi $(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có: $3x_0^2-6x_0+2=-1 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=1$

Khi đó $y_0=2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=-(x-1)+2 \Leftrightarrow y=-x+3$.

**Câu 8.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là $C$. Viết phương trình tiếp tuyến của $C$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): y=9x+2$.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=9$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)

Hệ số góc của tiếp tuyến $k=9 \Leftrightarrow y'(x_0)=9$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0-9=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-2$ : $M_1(-1;-2) \Rightarrow$ pttt: $y=9x+7$

Với $x_0=3 \Rightarrow y_0=2$ : $M_2(3;2) \Rightarrow$ pttt: $y=9x-25$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa đề Câu là $y=9x+7$ và $y=9x-25$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị là $C$ . Viết phương trình tiếp tuyến của $C$ , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): y=-x+2$.

Ta có: $y'=\frac{4}{x+2^{\ 2}}$

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=1$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)

Hệ số góc của tiếp tuyến $k=1 \Leftrightarrow y'(x_0)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x_0+2^{\ 2}}=1$$

$$\Leftrightarrow x_0+2^{\ 2}=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0+2=2 \\ x_0+2=-2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0=0 \\ x_0=-4 \end{bmatrix}$$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=-1 : M_1(0;-1) \Rightarrow$ pttt: $y=x+1$

Với $x_0=-4 \Rightarrow y_0=3 : M_2(-4;3) \Rightarrow$ pttt: $y=x+7$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa đề Câu là $y=x+1$ và $y=x+7$.

**Câu 10.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$(C). Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = 9x + 6.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Theo giả thiết, tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = 9x + +6 $\Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc k = 9 $\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0=-1 \Rightarrow M(-1;-3) \\ x_0=3 \Rightarrow M(3;1) \end{bmatrix}$

Phương tri`nh tiếp tuyến của (C) tại M(-1;-3) là: $y=9(x+1)-3 \Leftrightarrow y=9x+6$ **(loại)**

Phương tri`nh tiếp tuyến của (C) tại M(3;1) là: $y=9(x-3)+1 \Leftrightarrow y=9x-26$

**Câu 11.** Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y=\frac{-1}{9}x$.

Ta có $y'=3x^2-3$. Do tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y=\frac{-1}{9}x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến k = 9.

Do đó $y' = k \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

+) Với x = 2 $\Rightarrow y = 4$. Pttt tại điểm có hoành độ x = 2 là:

$$y = 9(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$$

+) Với $x = -2 \Rightarrow y = 0$. Pttt tại điểm có hoành độ x = - 2 là:

$$y = 9(x+2) + 0 \Leftrightarrow y = 9x + 18.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x$ là:

y =9x - 14 và y = 9x + 18.

### 1.4.5. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d

**Câu 1.** Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d: $x + 2y - 3 = 0$.

d: $x + 2y - 3 = 0$ có hệ số góc $k_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm. Ta có: $y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$ $(y_0 = 3)$

$\Rightarrow$ PTTT: $y = 2(x-1) + 3 \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

**Câu 2.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng d: $y = -\frac{1}{9}x + 2$.

$(C): y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

Tiếp tuyến vuông góc với d: $y = -\frac{1}{9}x + 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ PTTT: $y = 9x + 7$
- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ PTTT: $y = 9x - 25$

**Câu 3.** Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

$y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$ nên tiếp tuyến có hệ số góc là k = 3.

Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 - \sqrt{2} \\ x_0 = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

- Với $x_0 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2} \Rightarrow$ PTTT: $y = 3\left(x - 1 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3x + 4\sqrt{2} - 3$
- Với $x_0 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow$ PTTT: $y = 3\left(x - 1 - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3x - 4\sqrt{2} - 3$

**Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

TXĐ: $R\setminus\{-1\}$

Có $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(x_0;f(x_0))$ là:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Đường thẳng $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ có hệ số góc k= $-\dfrac{4}{3}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{-4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ nên $f'(x_0).\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-1$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x_0^2+8x_0=3x_0^2+6x_0+3\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=-3\end{array}\right.$$

Với $x_0=1$ ta có $f(1)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ tiếp tuyến $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$

Với $x_0=-3$ ta có $f(-3)=\dfrac{-7}{2}\Rightarrow$ tiếp tuyến $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề Câu: $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$ và $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$

**Câu 5.** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$**.** Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị (C) và vuông góc với tiếp tuyến của đồ thị (C) tại gốc tọa độ.

+ Điểm Cực đại của ( C ) là M(1;4/3)

+T.T của ( C ) tại gốc toạ độ có hệ số góc k= y'(0)=3

+Đường thẳng cần tìm đi qua điểm M và có hệ số góc k'= -1/3 nên có pt:

y= - 1/3(x-1)+4/3=-1/3x+5/3

### 1.4.6. Phương trình tiếp tuyến dạng đặc biệt

**Câu 1.** Cho hàm số : $y=-x^3-6x^2-9x$. Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó kẽ được các tiếp tuyến với (C), sao cho trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau .

$M(a;0)$ là điểm cần tìm.Tiếp tuyến của (C) kẽ từ M là đường thẳng

$(t): y=k(x-a)$.... k thỏa:

$$\begin{cases}-x^3-6x^2-9x=k(x-a)\\-3x^2-12x-9=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^3-6x^2-9x=(-3x^2-12x-9)(x-a)\ (1)\\-3x^2-12x-9=k\qquad\qquad(2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow(x+3)(2x^2-3ax-3a)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x-3=0\\2x^2-3ax-3a=0\quad(*)\end{bmatrix}$$

Lập luận đi đến (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2: k_{(x_1)}k_{(x_2)}=-1$

$$...\Leftrightarrow\begin{cases}9a^2+24a>0\\27a+81=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{82}{27}$$ Vậy $M\left(-\frac{82}{27};0\right)$

**Câu 2.** Cho hàm số $y=\frac{mx-1}{x+m}$, $(C_m)$. Gọi $I$ là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị $(C_m)$. Tiếp tuyến tại điểm bất kì của $(C_m)$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại $A$ và $B$. Tìm $m$ để diện tích tam giác $IAB$ bằng $12$.

Với mọi $m$, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-m$, tiệm cận ngang $y=m$, $I(-m;m)$.

Giả sử $M\left(x_0;m-\frac{m^2+1}{x+m}\right)\in(C_m)$, phương trình tiếp tuyến tại $M$ của $(C_m)$:

$$y=\frac{m^2+1}{(x_0+m)^2}(x-x_0)+m-\frac{m^2+1}{x_0+m},(x_0\neq-m).$$

Tìm được $A\left(-m;m-\frac{2m^2+2}{x_0+m}\right)$, $B(2x_0+m;m)$, từ đó suy ra $IA=2\left|\frac{m^2+1}{x_0+m}\right|$, $IB=2|x_0+m|$.

$S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=2|m^2+1|=12\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1;2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

*Tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;f(x_0))\in(C)$ có phương trình

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Hay $x+(x_0-1)^2y-2x_0^2+2x_0-1=0$ (*)

*Khoảng cách từ điểm I(1;2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}} = \sqrt{2}$

giải được nghiệm $x_0 = 0$ và $x_0 = 2$

*Các tiếp tuyến cần tìm : $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$

**Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) Cho điểm A(0;a). Tìm a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành.

Đk: $x \neq 1, y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$

PT đường thẳng d qua A và có hsg k có dạng: $y = kx + a$

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ pt sau $\begin{cases} kx + a = \frac{x+2}{x-1} \ (1) \\ k = -\frac{3}{(x-1)^2} \ (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1) ta được: $-\frac{3}{(x-1)^2} \ x + a = \frac{x+2}{x-1}$

$\Rightarrow (1-a)x^2 + 2(a+2)x - (a+2) = 0$

Đặt $VT = f(x)$

Để qua A kẻ được 2 tiếp tuyến$\Rightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \Delta'_f = (a+2)^2 + (1-a)(a+2) > 0 \\ f(1) = (1-a)^2 + 2(a+2) - (a+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \Leftrightarrow -2 < a \neq 1 \ (1) \\ 3 \neq 0 \end{cases}$

Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(a+2)}{a-1} \\ x_1.x_2 = \frac{a+2}{a-1} \end{cases} (*)$ và $\begin{cases} y_1 = \frac{x_1+2}{x_1-1} = 1 + \frac{3}{x_1-1} \\ y_2 = \frac{x_2+2}{x_2-1} = 1 + \frac{3}{x_2-1} \end{cases}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía của trục hoành $\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0$

$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{3}{x_1-1}\right)\left(1 + \frac{3}{x_2-1}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0$

Từ (*) $\Rightarrow 3a + 2 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}$

Kết hợp với điều kiện (1) ta được: Với $-\frac{2}{3} < a \neq 1$ thỏa mãn bài toán

**Câu 5.** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ (1) có đồ thị (C). Chứng minh rằng trên (C) không thể tồn tại hai điểm có hoành lớn hơn 3 sao cho hai tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó vuông góc với nhau

Giả sử trên (C) có hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với $x_1, x_2 > 3$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm này vuông góc với nhau

Khi đó, ta có: $y'(x_1).y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 - 12x_1 + 9)(3x_2^2 - 12x_2 + 9) = -1$

$\Leftrightarrow 9(x_1-1)(x_1-3)(x_2-1)(x_2-3) = -1 \ (*)$

Do $x_1 > 3$ và $x_2 > 3$ nên VT(*) > 0. Do đó (*) vô lí

Vậy: Trên (C) không thể có hai điểm sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm này vuông góc với nhau

**Câu 6.** Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho tam giác OAB vuông cân tại O, ở đây O là góc tọa độ.

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là: $k = \pm 1$

Khi đó gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) ta có $y'(x_0) = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x$ (trường hợp này loại vì tiếp tuyến đi qua góc tọa độ, nên không tạo thành tam giác OAB)

Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = -4$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x - 2$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -x - 2$

**Câu 7.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thỏa mãn OA = 4OB.

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do $\Delta OAB$ vuông tại O nên $\tan A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.

Hệ số góc của d là $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \ \ (y_0 = \dfrac{3}{2}) \\ x_0 = 3 \quad (y_0 = \dfrac{5}{2}) \end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

## 1.5. Khoảng cách – Diện tích

**Câu 1.** Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị (C) bằng 4.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-3}\right)$, ($x_0 \neq 3$) là điểm cần tìm, ta có:

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang: y =1 là $d = \dfrac{4}{|x_0-3|}$.

$$\frac{4}{|x_0-3|} = 4 \Leftrightarrow |x_0-3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 4 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 2$; ta có $M(2;-3)$. Với $x_0 = 4$; ta có $M(4;5)$

Vậy điểm M cần tìm là $M(2;-3)$ và $M(4;5)$.

**Câu 2.** Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị kí hiệu là $(C)$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị $(C)$ của hàm số đã cho.

b) Tìm m để đường thẳng $y = -x+m$ cắt đồ thị $(C)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Tìm m để đường thẳng $y = -x+m$ cắt đồ thị $(C)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: y=-x+m là:

$$\frac{x+2}{x-1} = -x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x+2 = -x^2+mx+x-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2-mx+m+2 = 0 \ (1) \end{cases}$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m+m+2 \neq 0 \\ m^2-4(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-4m-8 > 0 (*)$$

Khi đó d cắt (C) tại $A(x_1;-x_1+m), B(x_2;-x_2+m)$, với $x_1, x_2$ là nghiệm phương trình (1).

Theo Viet, ta có $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_1-x_2)^2} = \sqrt{2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1.x_2\right]} = \sqrt{2\left(m^2-4m-8\right)}$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\sqrt{2\left(m^2-4m-8\right)} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2-4m-12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 6 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn (*)).}$$

Vậy $m = -2$ hoặc $m = 6$.

**Câu 3.** Tìm $m$ để đường thẳng $(d): y = x - m$ cắt đồ thị $(C)$ của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm $A, B$ sao cho $AB = 3\sqrt{2}$

Pt hoành độ giao điểm $\dfrac{x+1}{x-1} = x - m \Leftrightarrow x+1 = (x-m)(x-1)$ (vì $x=1$ không là nghiệm của pt) $\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$ (1)

Pt (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

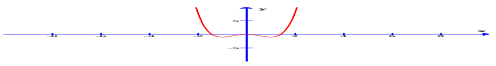
Khi đó $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$. Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$

$AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 18 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 9 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(m-1) = 9 \Leftrightarrow m = \pm 1$

**Câu 4.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Tìm điểm M trên (C) để khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng khoảng cách từ M đến trục Ox.

Gọi $M(x_0; y_0)$, $(x_0 \neq 1)$, $y_0 = \dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$, Ta có 

$\Leftrightarrow |x_0 - 1| = \left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = |2x_0+1|$

Với $x_0 \geq \dfrac{-1}{2}$, ta có : $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 2x_0 + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{array}\right.$ Suy ra $M(0;-1), M(4;3)$

Với $x_0 < \dfrac{-1}{2}$, ta có pt $x_0^2 - 2x_0 + 1 = -2x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $M(0;-1), M(4;3)$

**Câu 5.** Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Tìm m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, với I là giao điểm của hai tiệm cận.

Gọi $d: y = x + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là: $\dfrac{x}{x-1} = x + m$

$\Leftrightarrow x = (x-1)(x+m)$ (Vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow x^2+(m-2)x-m=0$ (1)

Ta có $\Delta=m^2+4>0,\forall m$ nên đường thẳng d luôn cắt đồ thị ( C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi $m$.

Khi đó, $A(x_1;x_1+m), B(x_2;x_2+m)$, với $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Ta có: $I(1;1)\Rightarrow d(I,AB)=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$.

và $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2}=\sqrt{2(m^2+4)}$.

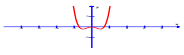
Ta có: $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}AB.d(I,AB)=\dfrac{|m|\sqrt{m^2+4}}{2}$. Theo giả thiết, ta có:

$$S_{IAB}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|m|\sqrt{m^2+4}}{2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}.$$

**Câu 6.** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1)

2) Tìm trên đồ thị hàm số (1) các điểm M có hoành độ âm sao cho M cùng với hai điểm $A(1;0), B(3;1)$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{5}{2}$

$\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $AB=\sqrt{5}$, phương trình đường thẳng AB: 

$M\left(x;\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ là điểm cần tìm, ta có $S_{MAB}=\dfrac{1}{2}AB.d(M;(AB))$

$$\Leftrightarrow S_{MAB}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{\left|x-2\dfrac{x+1}{x-1}-1\right|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 5=\left|\frac{x^2-4x-1}{x-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-9x+4=0\\x^2+x-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-3\ (\text{vì } x<0)$$

ĐS: $M\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$

**Câu 7.** Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$.

a). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C ) của hàm số.

b).Tìm tham số m đề đồ thị hàm số $y=mx^2-3$ cắt đồ thị ( C) tại 3 điểm phân biệt và tạo thành hình phẳng có diện tích bằng $\dfrac{128}{15}$.

Ta co´ $f_1(x)=f_2(x)$ <=>$x^4-(2+m)x^2=0$

Điều kiện để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt là 2+m>0 =>m>-2

Lúc đó ta có các nghiệm x=0 ;x=$\pm\sqrt{2+m}$

diện tích S= $\int_{-\sqrt{2+m}}^{0}\left|x^4-(2+m)x^2\right|dx+\int_{0}^{\sqrt{2+m}}\left|x^4-(2+m)x^2\right|dx=2\left|\int_{0}^{\sqrt{2+m}}(x^4-(2+m)x^2)dx\right|$

$=2\left|(\frac{x^5}{5}-\frac{(2+m)x^3}{3})\right|_0^{\sqrt{2+m}}\Big|=2\left|-2\frac{\sqrt{2+m}^5}{15}\right|=4\frac{(\sqrt{2+m})^5}{15}$

Suy ra $4\frac{(\sqrt{2+m})^5}{15}=\frac{128}{15}\Rightarrow(\sqrt{2+m})^5=32\Rightarrow 2+m=4\Rightarrow m=2(tm)$

**Câu 8.** Cho hàm số: $y=\frac{2x+1}{x-1}(C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)

b) Định m để đường thẳng (d): y = mx + 3 cắt đồ thị (C) tại 2 điểm A, B sao cho tam giác OMN vuông tại O

Định m để đường thẳng d: y = mx + 3 cắt đồ thị (C) tại 2 điểm M, N sao cho $\Delta$ OMN vuông tại O.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{2x+1}{x-1}=mx+3$

$\Leftrightarrow 2x+1=(mx+3)(x-1)$ $\Leftrightarrow mx^2+(1-m)x-4=0$ (*)

(C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m^2+14m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$m<-7-4\sqrt{3}\ \vee\ \begin{cases}m\neq 0\\ m>-7+4\sqrt{3}\end{cases}$

Gọi $x_1$, $x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\frac{m-1}{m}\\ x_1x_2=\frac{-4}{m}\end{cases}$

Khi đó $\overrightarrow{OM}=(x_1;mx_1+3)$, $\overrightarrow{ON}=(x_2;mx_2+3)$

$\Delta OMN$ vuông tại O nên $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0\Leftrightarrow(1+m^2)x_1x_2+3m(x_1+x_2)+9=0$

$\Leftrightarrow\frac{-4(1+m^2)}{m}+\frac{3m(m-1)}{m}+9=0$ $\Leftrightarrow m^2-6m+4=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3+\sqrt{5}\ (n)\\ m=3-\sqrt{5}\ (n)\end{array}\right.$

**Câu 9.** Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ có đồ thị là $C$. Tìm điểm $M$ thuộc đồ thị $C$ sao cho khoảng cách từ $M$ đến tiệm cận đứng bằng hai lần khoảng cách từ $M$ đến tiệm cận ngang.

Đồ thị $C$ có tiệm cận đứng $\Delta_1: x-3=0$ và tiệm cận ngang $\Delta_2: y-3=0$

Gọi $M\ x_0, y_0 \in C$ với $y_0 = \dfrac{3x_0 - 1}{x_0 - 3}$ $x_0 \neq 3$ , ta có:

$$d\ M, \Delta_1 = 2.d\ M, \Delta_2 \Leftrightarrow |x_0 - 3| = 2.|y_0 - 3|$$

$$\Leftrightarrow |x_0 - 3| = 2.\left|\frac{3x_0 - 1}{x_0 - 3} - 3\right|$$

$$\Leftrightarrow |x_0 - 3| = \frac{16}{|x_0 - 3|}$$

$$\Leftrightarrow x_0 - 3\ ^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = -1 \\ x_0 = 7 \end{bmatrix}$$

Vậy có hai điểm thỏa đề bài là $M_1\ -1;1$ và $M_2\ 7;5$ .

**Câu 10.** Cho hàm số $y = \dfrac{-x - 1}{x - 1}$ có đồ thị là $C$ . Tìm điểm $M \in C$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $\Delta : y = 2x - 1$ bằng $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Gọi $M\left(x_0; \dfrac{-x_0 - 1}{x_0 - 1}\right) \in (C)$. Khi đó ta có:

$$d(M, \Delta) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|2x_0 - \dfrac{-x_0 - 1}{x_0 - 1} - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left|2x_0 - 1 + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|2x_0^2 - 2x_0 + 2\right| = 3|x_0 - 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_0^2 - 2x_0 + 2 = 3(x_0 - 1) \\ 2x_0^2 - 2x_0 + 2 = -3(x_0 - 1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_0^2 - 5x_0 + 5 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = -1 \\ x_0 = \dfrac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$, ta có $M_1(-1; 0)$

Với $x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0 = 3$, ta có $M_2\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$

Vậy có hai điểm thỏa đề bài là $M_1(-1; 0)$ và $M_2\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$.

**Câu 11.** Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$, biết rằng khoảng cách từ điểm I(-1; 2) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Gọi $\Delta$ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M\left(a;\frac{2a-2}{a+1}\right),(M\in(C))$.

Ta có: $y'=\frac{4}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(a)=\frac{4}{(a+1)^2},(a\neq -1)$

Vậy $\Delta: y-\frac{2a-2}{a+1}=\frac{4}{(a+1)^2}(x-a)\Leftrightarrow 4x-(a+1)^2y+2a^2-4a-2=0$ (*)

$d(I;\Delta)=\frac{\left|4(-1)-(a+1)^2.2+2a^2-4a-2\right|}{\sqrt{4+(a+1)^4}}=\frac{8|a+1|}{\sqrt{4+(a+1)^4}}$.

Ta có: $4+(a+1)^4=2^2+\left[(a+1)^2\right]^2\geq 2.2(a+1)^2\Rightarrow\sqrt{4+(a+1)^4}\geq\sqrt{2.2(a+1)^2}=2|a+1|$

$\Rightarrow d(I;\Delta)\leq\frac{8|a+1|}{2|a+1|}=4$. Vậy $d(I;\Delta)$ lớn nhất khi $d(I;\Delta)=4$

$\Leftrightarrow 2^2=(a+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+1=2\\a+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-3\end{array}\right.$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn $a\neq 1$

+ Với a = 1 thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến là: $4x-4y-4=0\Leftrightarrow x-y-1=0$

+ Với a = -3 thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến là: $4x-4y+28=0\Leftrightarrow x-y+7=0$

Tóm lại: Có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $x-y-1=0$; $x-y-7=0$

**Câu 12.** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

Nếu $M\left(x_0;2-\frac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình

$y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$ hay $3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$d=\frac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$.

Theo bất đẳng thức Côsi $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vây $d\leq\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$\frac{9}{(x_0+1)^2} = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$

**Câu 13.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 + m$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1; 2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1; -2-2m)$

Ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3+2\sqrt{2} \\ m = -3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

**Câu 14.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1).

Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{3}{2}$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = m-2 \Rightarrow$ M(1 ; m – 2)

- Tiếp tuyến tại M là d: $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + m - 2$

$\Rightarrow$ d: y = -3x + m + 2.

- d cắt trục Ox tại A: $0 = -3x_A + m + 2 \Leftrightarrow x_A = \frac{m+2}{3} \Rightarrow \quad A\left(\frac{m+2}{3}; 0\right)$

- d cắt trục Oy tại B: $y_B = m+2 \Rightarrow \quad B(0; m+2)$

- $S_{OAB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |OA||OB| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{m+2}{3}\right||m+2| = 3 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2 = 3 \\ m+2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5 \end{array}\right.$$

Vậy m = 1 và m = - 5

**Câu 15.** Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

a) Tự làm

b) Giả sử $M\left(a;\frac{a+2}{a-1}\right) \in (C)$.

PTTT (d) của (C) tại M: $y = y'(a).(x-a)+\frac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow y = \frac{-3}{(a-1)^2}x+\frac{a^2+4a-2}{(a-1)^2}$

Các giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A\left(1;\frac{a+5}{a-1}\right)$, $B(2a-1;1)$.

$\vec{IA}=\left(0;\frac{6}{a-1}\right) \Rightarrow IA=\frac{6}{|a-1|}$ ; $\vec{IB}=(2a-2;0) \Rightarrow IB=2|a-1|$

Diện tích $\Delta IAB$: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=6$ (đvdt) $\Rightarrow$ĐPCM.

**Câu 16.** Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Giả sử $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0 \neq 2$, $y'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến ($\Delta$) với (C) tại M: $y=\frac{-1}{x_0-2^{\,2}}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Tọa độ giao điểm A, B của ($\Delta$) với hai tiệm cận là: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B(2x_0-2;2)$

Ta thấy $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+2x_0-2}{2}=x_0=x_M$, $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2x_0-3}{x_0-2}=y_M$ suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I(2; 2) và $\Delta$IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$

Do đó điểm M cần tìm là M(1; 1) hoặc M(3; 3)

**Câu 17.** Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ $(C)$ tìm điểm M $\in (C)$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$

Gọi $M(x_0,y_0) \in (C) \rightarrow y_0=\dfrac{2x_0}{x_0+1}$ , $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

Tiếp tuyến tại M có dạng:

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y=\frac{2}{(x_0+1)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (d)$$

Gọi $A=(d)\cap ox \Rightarrow$ tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-x_0^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-x_0^2,0)$$

Gọi $B=(d)\cap oy \Rightarrow$ tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \end{cases} \Rightarrow B(0,\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2})$$

Tam giác OAB vuông tại O ; OA = $\left|-x_0^2\right|=x_0^2$ ; OB = $\left|\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right|=\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$

Diện tích tam giác OAB:

$$S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{2x_0^4}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^4=(x_0+1)^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_0^2=x_0+1 \\ 2x_0^2=-x_0-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_0^2-x_0-1=0 \\ 2x_0^2+1x_0+1\,(vn) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y_0=-2 \\ x_0=1\Rightarrow y_0=1 \end{bmatrix}$$

Vậy tìm được hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1(-\frac{1}{2};-2)$ ; $M_2(1,1)$

**Câu 18.** Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (1).Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 32 (đơn vị diện tích).

+) Ta có y' = $4x^3 - 4m^2x$ ; y' = 0 $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x^2=m^2 \end{bmatrix}$ ; ĐK có 3 điểm cực trị: m $\neq$ 0

+) Tọa độ ba điểm cực trị: A(0 ; 1), B(- m ; $1 - m^4$), C(m ; $1 - m^4$) ;

+) CM tam giác ABC cân đỉnh A. Tọa độ trung điểm I của BC là I(0 ; $1 - m^4$).

+) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AI.BC = m^4 |m| = |m|^5 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (tm)

**Câu 19.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad (C)$.Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(- 1; 0) với hệ số góc là k ( k thuộc R). Tìm k để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt và hai giao điểm B, C (B, C khác A ) cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Đường thẳng d đi qua A(-1; 0) với hệ số góc là k, có phương trình là:

y = k(x+1) = kx+ k.

Nếu d cắt (C) tại ba điểm phân biệt thì phương trình: $x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + 4 - k = 0 \Leftrightarrow (x + 1)( x^2 - 4x + 4 - k ) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ g(x) = x^2 - 4x + 4 - k = 0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ g(x) = $x^2 - 4x + 4 - k = 0$ có

hai nghiệm phân biệt khác - 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k \neq 9$ (*)

Với điều kiện: (*) thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C.Với A(-1;0), do đó B,C có hoành độ là hai nghiệm của phương trình g(x) = 0.

Gọi $B(x_1; y_1); C(x_2; y_2)$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 4 - k = 0$. Còn $y_1 = kx_1 + k; y_2 = kx_2 + k$ .

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (1 + k^2)} = |x_2 - x_1| \sqrt{(1 + k^2)}$

Khoảng cách từ O đến đường thẳng d: $h = \frac{|k|}{\sqrt{1 + k^2}}$

Vậy theo giả thiết:

$S = \frac{1}{2} h.BC = \frac{1}{2} \frac{|k|}{\sqrt{1 + k^2}} . |2\sqrt{k}| \sqrt{1 + k^2} = 2\sqrt{k^3} = 1 \Rightarrow \sqrt{k^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

**Câu 20.** Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1} (C)$Tìm tham số m để đường thẳng d: y = - 2x + m cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{3}$.

Xét phương tri ` nh hoành độ giao điểm của d và (C):

$\frac{2x + 1}{x + 1} = -2x + m \ (x \neq -1) \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - (m - 4)x + 1 - m = 0$ (1)

D cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -

1. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 - 8(1 - m) > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ g(-1) = -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8 > 0 \Rightarrow m \in R.$

Chứng tỏ với mọi m d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

Gọi $A(x_1; -2x_1 + m); B(x_2; -2x_2 + m)$. Với: $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1)

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1;2\left(x_1-x_2\right)\right)\Rightarrow AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+4\left(x_2-x_1\right)^2}=\left|x_2-x_1\right|\sqrt{5}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, thì khoảng cách từ O đến d là h:

$$\Rightarrow h=\frac{|m|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|m|}{\sqrt{5}}$$

Theo giả thiết: $S=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}\frac{\left|x_2-x_1\right|}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{1}{4}.\sqrt{m^2+8}=\sqrt{3}$

Vậy: $\sqrt{m^2+8}=\sqrt{4^2.3}\Leftrightarrow m^2+8=4^2.3\Rightarrow m^2=40\Leftrightarrow|m|=2\sqrt{10}$ (*)

Với m thỏa mãn điều kiện (*) thì d cắt (C) tại A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 21.** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4(1)$. Tìm m để đường thẳng d: y = x + 4 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4. (Điểm B, C có hoành độ khác không ; M(1;3) ).

Đồ thị (1) cắt d tại ba điểm A, B, C có hoành độ là nghiệm của phương trình:

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4=x+4;\Leftrightarrow x\left[x^2+2mx+m+2\right]=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+m+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\Delta'=m^2-m-2>0\Leftrightarrow m<-1\vee m>2\quad(*)$$

Với m thỏa mãn (*) thì d cắt (1) tại ba điểm A(0; 4), còn hai điểm B,C có hoành độ là hai nghiệm của phương trình:

$$\Leftrightarrow x^2+2mx+m+2=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\m+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<-1\vee m>2;m\neq-2$$

- Ta có $B\left(x_1;x_1+4\right);C\left(x_2;x_2+4\right)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\left(x_2-x_1;x_2-x_1\right)$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(x_2-x_1\right)^2}=\left|x_2-x_1\right|\sqrt{2}$$

-Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d. h là khoảng cách từ M đến d thì:

$$\Rightarrow h=\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}BC.h=\frac{1}{2}\left|x_2-x_1\right|\sqrt{2}.\sqrt{2}=\left|x_2-x_1\right|$$

- Theo giả thiết: S = 4 $\Leftrightarrow\left|x_2-x_1\right|=4;\Leftrightarrow2\sqrt{\Delta'}=4;\Rightarrow m^2-m-2=4\Rightarrow m^2-m-6=0$

Kết luận: với m thỏa mãn: $m=-2\vee m=3\Rightarrow m=3$ (chọn).

## 1.6. Tương giao đồ thị

**Câu 1.** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - m = 0$ có một nghiệm duy nhất:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 12x + 9$ . $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng(-∞;1) và (3;+ ∞), đồng biến trên khoảng (1;3)

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

BBT

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Đồ thị : đi qua các điểm (3;-1), (1;3), (2;1), (0;-1)

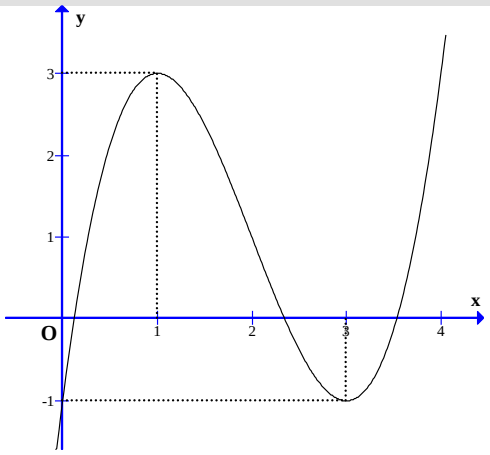
Pt : $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 2m - 1$ (*)

Pt (*) là pt hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d $y = 2m - 1$ (d cùng phương trục Ox) . Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của (C) và d. Dựa vào đồ thị (C), để pt có một nghiệm duy nhất thì : $\left[\begin{array}{l} 2m-1 < -1 \\ 2m-1 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right.$

**Câu 2.** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Tìm m để phương trình $x(x-3)^2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.



b) Ta có: $x(x-3)^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = m - 1$.

Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng y = m – 1 cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < m - 1 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

**Câu 3.** Cho hàm số $y = x^4 - x^2$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(C)$ của hàm số đã cho.

b) Dựa vào đồ thị $(C)$ hãy tìm tất cả các giá trị của tham số $k$ để phương trình sau có bốn nghiệm thực phân biệt $4x^2\left(1-x^2\right)=1-k$.

+ Đưa về được PT hoành độ giao điểm: $x^4 - x^2 = \frac{k-1}{4}$

+ Lập luận được: Số nghiệm PT đã cho chính là số giao điểm của (C) và đường thẳng (d): $y = \frac{k-1}{4}$.

+ Lập luận được: YCBT $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \frac{k-1}{4} < 0$

+ Giải ra đúng $0 < k < 1$

**Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Tìm k để đường thẳng (d) : y=kx+2k+1 cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Xét pt $\frac{2x+1}{x+1}$=kx+k+1

<=>kx²+(3k-1)x+2k=0(x≠ -1)

<=>kx²+(3k-1)x+2k=0 ( vì x=-1 không phải là nghiệm của pt với mọi k)

Do đó d cắt ( C ) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} k < 3 - 2\sqrt{2}\ (*) \\ k > 3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy với k thõa (*) thì thõa yêu cầu bài toán

**Câu 5.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ (C)

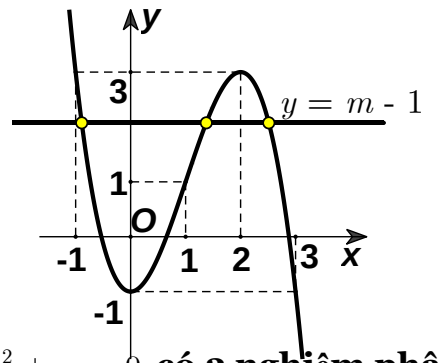
a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đồ thị :

Cho x = -1 ⇒ y = 3 , ( -1 ; 3 )

Tâm đối xứng I (1;1)




**Tìm m để phương trình** $x^3 - 3x^2 + m = 0$ **có 3 nghiệm phân biệt.**

Ta có $x^3 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = -m$ **(*)**

$\Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = m \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 1 = m - 1$

Số nghiệm của phương trình **(*)** bằng số giao điểm của (C) và d: y = m – 1

Dựa vào đồ thị **(*)** có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < m - 1 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

**Câu 6.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ (C)

1*. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đthị (C).

2*. Tìm m để đường thẳng d: y = 2x + m cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 + mx + m + 2 = 0$ , $(x \neq -1)$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 16 > 0$

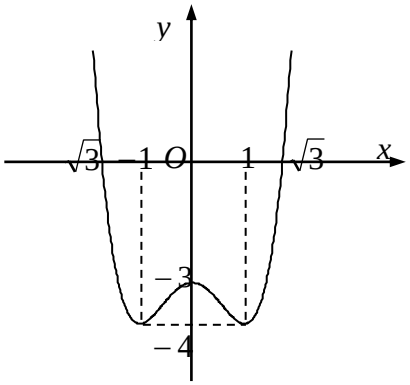
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 + 4\sqrt{2} \\ m < 4 - 4\sqrt{2} \end{array}\right.$

**Câu 7.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

a*) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b*) Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 = m + 3$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đồ thị (C) của hàm số nhận Oy làm trục đối xứng, giao với Ox tại 2 điểm $(\pm\sqrt{3}\,;\,0)$.




b) Ta có $x^4 - 2x^2 = m + 3 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 = m$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$

Theo đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

$-4 < m < -3$.

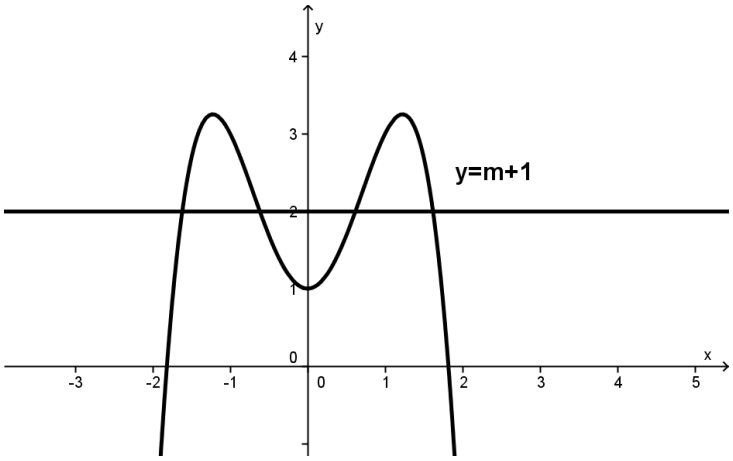
Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in (-4;-3)$.

**Câu 8.** Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Dựa vào đồ thị (C) tìm m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- Đồ thị: Điểm đặc biệt: (0; 1), (-1; 3), (1; 3)




$x^4 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 3x^2 + 1 = m + 1$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y=m+1.

Dựa vào đồ thị, phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m+1 < \frac{13}{4} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$

**Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$

Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng (D) : y = x – 1

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D) là :

$\frac{2x-1}{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow$ x = 0 hay x = 2 suy ra y = -1 hay y = 1

**Câu 10.** Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $y = x + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{2x-1} = x + 2$ (1)

Điều kiện: $x \neq \frac{1}{2}$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2)$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-3=0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Với $x=-\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

Với $x=1\Rightarrow y=3$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ và $1;3$ .

**Câu 11.** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm m để đường thẳng (d): $y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1}=-x+m$ (1)

Điều kiện: $x\neq 1$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 2x-1=(-x+m)(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2-(m-1)x+m-1=0$ (2)

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=\left[-(m-1)\right]^2-4(m-1)>0 \\ 1-(m-1).1+m-1\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2-6m+5>0$

$\Leftrightarrow m<1\vee m>5$

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $m<1\vee m>5$.

**Câu 12.** Cho hàm số $y=mx^3-x^2-2x+8m$ có đồ thị là $C_m$ . Tìm m đồ thị $C_m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm: $mx^3-x^2-2x+8m=0$ (1)

$\Leftrightarrow (x+2)\left[mx^2-(2m+1)x+4m\right]=0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2 \\ mx^2-(2m+1)x+4m=0 \end{bmatrix}$ (2)

$C_m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = -12m^2 + 4m + 1 > 0 \\ 12m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $\begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$.

**Câu 13.** Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là $C_m$ . Tìm m đồ thị $C_m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \quad t \geq 0$ , phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0 \quad (2)$$

$C_m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ P = m^2 > 0 \\ S = 3m + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \vee m > -\frac{4}{5} \\ m \neq 0 \\ m > -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $\begin{cases} m > -\frac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

**Câu 14.** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+2}$ có đồ thị là $C_m$ . Tìm m để đường thẳng (d): $y=2x-1$ cắt đồ thị $C_m$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ sao cho $AB=\sqrt{10}$ .

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{mx-1}{x+2}=2x-1$ (1)

Điều kiện: $x\neq -2$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow$ $mx-1=(2x-1)(x+2)$

$\Leftrightarrow$ $2x^2-(m-3)x-1=0$ (2)

(d) cắt $C_m$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-2$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta=\left[-\ m-3\ \right]^2+8>0\\ 8+2m-6-1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $m\neq -\dfrac{1}{2}$ (*)

Đặt $A\ x_1;2x_1-1\ ;B\ x_2;2x_2-1$ với $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m-3}{2}\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Khi đó: $AB=\sqrt{x_1-x_2\ ^2+4\ x_1-x_2\ ^2}=\sqrt{10}$ $\Leftrightarrow$ $5\left[\ x_1+x_2\ ^2-4x_1x_2\right]=10$

$\Leftrightarrow$ $\left(\dfrac{m-3}{2}\right)^2+2=2$

$\Leftrightarrow$ $m=3$ [thỏa mãn (*)]

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $m=3$.

**Câu 15.** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-1)x+1$ có đồ thị là $C_m$ . Tìm m để đồ thị $C_m$ cắt đường thẳng $(d):y=x+1$ tại ba điểm $A\ 0;1\ ,B,C$ sao cho $BC=\sqrt{10}$ .

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+(m-1)x+1=x+1$ (1)

$\Leftrightarrow$ $x\ x^2-3x+m-2\ =0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=0\\ x^2-3x+m-2=0\end{cases}$ (2)

$C_m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9-4(m-2) > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $B\ x_1; x_1+1$ ; $C\ x_2; x_2+1$ với $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$

Khi đó: $BC = \sqrt{x_1 - x_2\ ^2 + x_1 - x_2\ ^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 2\left[ x_1 + x_2\ ^2 - 4x_1 x_2 \right] = 10$

$\Leftrightarrow 9 - 4\ m-2\ = 5$

$\Leftrightarrow m = 3$ [thỏa mãn (*)]

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $m = 3$.

**Câu 16.** Cho hàm số $y = x^4 - (3m+4)x^2 + m^2$ có đồ thị là $C_m$ . Tìm m để đồ thị $C_m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \quad t \geq 0$ , phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - (3m+4)t + m^2 = 0 \quad (2)$$

(C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 5m^2 + 24m + 16 > 0 \\ P = m^2 > 0 \\ S = 3m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \vee m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \\ m > -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2$. Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

là $x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$

$$\Leftrightarrow\ -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\ \Leftrightarrow t_2=9t_1 \quad (3)$$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} t_1+t_2=3m+4 & (4) \\ t_1t_2=m^2 & (5) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta suy ra được $\begin{cases} t_1=\dfrac{3m+4}{10} \\ t_2=\dfrac{9(3m+4)}{10} \end{cases}$ (6).

Thay (6) vào (5) ta được:

$$\frac{9}{100}\ 3m+4\ ^2=m^2\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3\ 3m+4\ =10m \\ 3\ 3m+4\ =-10m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=12 \\ m=-\dfrac{12}{19} \end{bmatrix}$$ [thỏa mãn (*)]

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $\begin{bmatrix} m=12 \\ m=-\dfrac{12}{19} \end{bmatrix}$.

# PHẦN 2. LƯỢNG GIÁC

## 2.1. Giá trị lượng giác

**Câu 1.** Biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ và $0^0<\alpha<90^0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$.

+ Biến đổi được $A=\frac{1}{2\cos^2\alpha-1}$

+ Thay $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, ta được $A=\frac{25}{7}$

Lưu ý. HS có thể tính $\sin\alpha$, suy ra $\tan\alpha,\cot\alpha$, thay vào A.

**Câu 2.** Cho $\alpha$ là góc mà $\tan\alpha=2$. Tính $P=\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$

$$P=\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\tan\alpha}{\tan^3\alpha+3}$$
$$=\frac{(1+\tan^2\alpha)\tan\alpha}{\tan^3\alpha+3}=\frac{(1+2^2)2}{2^3+3}=\frac{10}{11}$$

**Câu 3.** Cho góc $\alpha$ thõa mãn : $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ và $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ . Tính $P=\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$

Ta có

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

Vì $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha$ <o

Do đó $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy $P=\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3-3.\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{18\sqrt{2}}{16\sqrt{2}-3}$

**Câu 4.** Cho $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\right)$ .

Tính giá trị biểu thức $A=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ $=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\Leftrightarrow\sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$

Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ . $A=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin 2\alpha+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(2\sin\alpha\cos\alpha-1\right)=-\frac{49}{50}$

**Câu 5.** Cho góc $\alpha$ thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\frac{12}{13}$. Tính $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{5}{13}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{13}(do\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$

Thay $\sin\alpha=\frac{12}{13},\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ vào A ta được $A=\frac{7\sqrt{2}}{26}$

**Câu 6.** Cho góc $\alpha$ thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Tính $A=\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha}$

Ta có $A=\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-2\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{3}{5}(do\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$

Thay $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ vào A ta được $A=-\frac{7}{40}$

**Câu 7.** Cho $\tan\alpha=2$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$.

Ta có $\text{Cos}^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Do $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha<0$ nên $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\alpha=\cos\alpha.\tan\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{5}.2=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

Vậy

$$\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\alpha.\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha.\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$=\frac{-2\sqrt{5}}{5}.\frac{-1}{2}-\frac{-\sqrt{5}}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{10}$$

**Câu 8.** Cho $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$. Tính giá trị $P=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2}{(\sin\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\beta+\cos\alpha)^2}$

$$P=\frac{2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{2-2(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)}=\frac{2+2\cos(\alpha-\beta)}{2-2\sin(\alpha-\beta)}$$

$$P=\frac{2+2\cos\frac{\pi}{6}}{2-2\sin\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$$

**Câu 9.** Cho $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ và $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Tính giá trị: $P=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{4}{5}$. Suy ra

$$P=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha.\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$P=\frac{3}{5}.\frac{1}{2}-\frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}.\frac{1}{2}=\frac{3}{5}.$$

**Câu 10.** Cho góc $\alpha$ thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin(\alpha+\pi)=-\frac{1}{3}$. Tính $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$.

Ta có: $\sin(\alpha+\pi)=-\frac{1}{3}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{3}$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

Vì $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\cot\alpha<0$. Do đó $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\cot\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}=-2\sqrt{2}$

Vậy $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-2\sqrt{2}$.

**Câu 11.** Cho $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\sqrt{2}(1+\cot\alpha).\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.

$$P=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$

thay $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ vào ta tính được P =1

**Câu 12.** Cho $\cot a = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\sin^2 a - \cos^2 a}$.

$P = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\sin^2 a - \cos^2 a} = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\left(\sin^2 a - \cos^2 a\right)\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)} = \dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\sin^4 a - \cos^4 a}$.

Chia tử và mẫu cho $\sin^4 a$, ta được $P = \dfrac{1 + \cot^4 a}{1 - \cot^4 a} = \dfrac{1 + 2^4}{1 - 2^4} = -\dfrac{17}{15}$

**Câu 13.** Cho $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = 2\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$.

$P = 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2$

$P = 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2 = \left(2\cos\alpha + \sin\alpha\right)^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1$

**Câu 14.** Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos 2\alpha$

Ta có: $P = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2} - \left(2\cos^2\alpha - 1\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{5}\right) - \left(2.\dfrac{9}{25} - 1\right) = \dfrac{27}{25}$

**Câu 15.** Cho góc lượng giác $\alpha$, biết $\tan\alpha = 2$.

Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2\alpha}$.

$P = \dfrac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha - 4}{1 - \cos^2\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \dfrac{1}{5}$. Suy ra $\boxed{P = -\dfrac{9}{2}}$

**Câu 16.** Cho góc $\alpha$ thỏa mãn: $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ và $\tan\alpha = 2$.

Tính giá trị $A = \sin 2\alpha + \cos(\alpha + \dfrac{\pi}{2})$.

Vì $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\begin{cases}\sin\alpha < 0\\ \cos\alpha < 0\end{cases}$. Do đó: $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Ta có: $A = 2\sin\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha = \dfrac{4 + 2\sqrt{5}}{5}$

**Câu 17.** Cho $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{5}\cos\alpha - 5\sin 2\alpha.$

Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0.$

Ta có: $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Do đó: $A = \sqrt{5}\cos\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 10\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 2+4 = 6.$

**Câu 18**. Cho $\tan\alpha = \frac{1}{2}\ (\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}))$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2} + 3\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vì $\tan\alpha = \frac{1}{2}\ (\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}))$ nên $\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} + 4\tan\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$

Suy ra $\tan\frac{\alpha}{2} = -2+\sqrt{5}$ hoặc $\tan\frac{\alpha}{2} = -2-\sqrt{5}\,(l)$. Do $\tan\frac{\alpha}{2} > 0$.

Thay vào ta có $P = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}+3}{\tan\frac{\alpha}{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$

**Câu 19.** Cho góc $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ mà $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ (1)

Từ hệ thức: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

Suy ra: $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{5}}$

**Câu 20.** Cho góc $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ mà $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$

Từ $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 1+\sin\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin\alpha=-\frac{3}{4}$

Do $\begin{cases}\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}\\ \alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)\end{cases}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Vậy $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{7}}{8}$

**Câu 21.** Cho góc $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ mà $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$. Tính $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

Do $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9^2}{41^2}}=-\frac{40}{41}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{40}{9}$

Do đó $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{\frac{40}{9}-1}{1+\frac{40}{9}}=\frac{31}{49}$.

**Câu 22.** Cho $\alpha$ là góc mà $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Tính $\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha\ \cos\alpha$

Ta có: $\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha\ \cos\alpha=\ \cos 2\alpha+1\ .2\sin 2\alpha.\cos\alpha$

$=2\cos^2\alpha.4\sin\alpha.\cos^2\alpha$

$=8\ 1-\sin^2\alpha\ ^2.\sin\alpha=8\left(1-\frac{1}{16}\right)^2.\frac{1}{4}=\frac{225}{128}$

## 2.2. Phương trình lượng giác bậc nhất

**Câu 1.** Giải phương trình: $\cos 2x + (1+2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$\cos 2x + (1+2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x - \cos x = 0\\ \sin x - \cos x = 1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0\\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ x = \pi + k2\pi\end{array}\right.$

**Câu 2.** Giải phương trình: $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$.

$\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad (\sin 2x - 6\sin x) + (1 - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 3) + 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 3 + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x + \cos x = 3 (Vn)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = k\pi$. Vậy nghiệm của PT là $x = k\pi, k \in Z$

**Câu 3.** Giải phương trình: $\sin 4x + 2\cos 2x + 4(\sin x + \cos x) = 1 + \cos 4x$.

$\sin 4x + 2\cos 2x + 4(\sin x + \cos x) = 1 + \cos 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + 2\cos 2x - 2\cos^2 2x + 4(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x + 1 - \cos 2x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x\cos x + 2\sin^2 x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x\sin x + 1) = 0$

Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Với $\cos 2x\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(-2\sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in Z$

**Câu 4.** Giải phương trình: $\cos 2x + 2\sin x - 1 - 2\sin x\cos 2x = 0$.

$+PT \Leftrightarrow \cos 2x(1 - 2\sin x) - (1 - 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(1 - 2\sin x) = 0$

+ Khi cos2x=1<=> $x = k\pi$ , $k \in Z$

Khi $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in Z$

**Câu 5.** Giải phương trình: : $\sin 2x - \cos x + \sin x = 1$ $(x \in R)$

$\sin 2x - \cos x + \sin x = 1$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 + \sin x - \cos x = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{bmatrix} \quad (k \in Z)$$

**Câu 6.** Giải phương trình: $\sin x + \cos x = \cos 2x$

Ta có: $\sin x + \cos x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[1 - (\cos x - \sin x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{bmatrix}$$

**Câu 7.** Giải phương trình: lượng giác: $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sin x + \cos x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$.

PT (1) $\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 3\sin x + \cos x + 2$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 3\sin x + 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0.$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 3)\sin x + (\cos x + 1)(2\cos x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x + 1)(2\cos x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos x = \frac{3}{2}(VN) \\ \sin x + \cos x = -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{bmatrix} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình có các nghiệm: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**Câu 8.** Giải phương trình: : $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x.\cos 2x - \sin x = 0$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

**Câu 9.** Giải phương trình: $1 + \sin 2x = \cos 2x$

$$1 + \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = -2\sin^2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

**Câu 10.** Giải phương trình: $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$

$$\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 11.** Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$.

Biến đổi phương trình về dạng: $2\sin x(\cos x - 1) + 2\sin^2 x = 0$

$$\sin x(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Với cos2x = 1 $\Leftrightarrow$ $\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$, k $\in$ Z

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm. $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , k $\in$ Z

**Câu 12.** Giải phương trình: $\cos 2x(\cos x+\sin x-1)=0$

$\cos 2x(\cos x+\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

+) Với $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$

+) Với $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

**Câu 13**. Giải phương trình: $2(\cos x+\sin 2x)=1+4\sin x(1+\cos 2x)$

Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos x+2\sin 2x=1+4\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow (1-2\cos x)(2\sin 2x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right. (k\in Z)$

Vậy pt có nghiệm là: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ ; $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ ; $x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ $(k\in Z)$

**Câu 14.** Giải phương trình : $\sin 2x-(\sin x+\cos x-1)(2\sin x-\cos x-3)=0$

PT $\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^2-1=(\sin x+\cos x-1)(2\sin x-\cos x-3)$

$\Leftrightarrow [(\sin x+\cos x)-1][(\sin x+\cos x)+1]=(\sin x+\cos x-1)(2\sin x-\cos x-3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=1\\ \sin x-2\cos x=4(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

**Câu 15.** Giải phương trình: $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x-\sin 2x=0$

$\sin x-\cos x+1+2\sin x+2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow$ (1+2sinx)(sinx - cosx +1) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-\cos x=-1 \\ \sin x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x-\dfrac{\Pi}{4})=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right. \qquad k\in\mathbb{Z}$$

**Câu 16.** Giải phương trình: $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$

$$(\cos x-\sin x)^2-4(\cos x-\sin x)-5=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \vee \ x=\pi+k2\pi$$

**Câu 17.** Giải phương trình: : $\sqrt{3}\left(\cos 2x-\sin x\right)+\cos x\left(2\sin x+1\right)=0$ .

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}\sin x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}=\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(x-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{3}=x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-(x-\dfrac{\pi}{6})+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

**Câu 18.** Giải phương trình: $\sin 2x + 4 = 8\cos x + \sin x$

Biến đổi phương trình về dạng: $(\sin x\text{-}4)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 4 \ \ (vn) \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Kl: phương trình có 2 họ nghiệm: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,$

**Câu 19.** Giải phương trình: $2\sin x - 1 = \cos x - \sin 2x.$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = \cos x - 2\sin x.\cos x.$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = \cos x(1 - 2\sin x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

-Với $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

-Với $\sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 20.** Giải phương trình: $\cos x + \sin 4x - \cos 3x = 0.$

$\cos x + \sin 4x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x.\sin x + 2\sin 2x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(-2\sin^2 x + \sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

**Câu 21.** Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$

$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x + \cos 2x = 1 - \sin x + \sin 3x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 - \sin x$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1-\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

**Câu 22.** Giải phương trình sau: $1+3\cos x+\cos 2x-2\cos 3x=4\sin x.\sin 2x$

Giải phương trình: $1+3\cos x+\cos 2x-2\cos 3x=4\sin x.\sin 2x\,(1)$

$(1)\Leftrightarrow 1+3\cos x+\cos 2x-2\cos\left(2x+x\right)=4\sin x.\sin 2x$

$\Leftrightarrow 1+3\cos x+\cos 2x-2\left(\cos x.\cos 2x-\sin x.\sin 2x\right)=4\sin x.\sin 2x$

$\Leftrightarrow 1+3\cos x+\cos 2x-2\left(\cos x.\cos 2x+\sin x.\sin 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow 1+3\cos x+\cos 2x-2\cos x=0 \Leftrightarrow 1+\cos x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$

**Câu 23**. Giải phương trình: $\sin 2x-\sqrt{2}\sin x=0.$

$Pt\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

**Câu 24.** Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1.$

$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+1-\cos 2x-4\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x-4\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{3}\cos x+\sin x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

**Câu 25.** Giải phương trình: $\cos 2x(4\sin x+1)=\sqrt{3}\sin 2x+1$

$pt \Leftrightarrow 4\cos 2x.\sin x+\cos 2x-1-2\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 4\cos 2x.\sin x-2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x.\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x.\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos(x-\dfrac{\pi}{6})=\cos 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})\\ x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

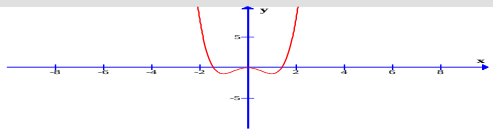
**Câu 26.** Giải phương trình: $\cos 2x-3\sin x-2=0$.

- Ta có phương trình $\cos 2x-3\sin x-2=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

- KL: Phương trình có ba họ nghiệm...

**Câu 27.** Giải phương trình: $\sin 3x+\sin x=2\sqrt{3}\cos x.\cos 2x$.



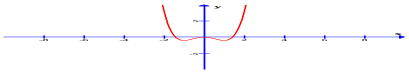
$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Pt có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

**Câu 28.** Giải phương trình: $2\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}$.

$2\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sqrt{3} = 0$



* $\cos x - \sqrt{3} = 0$ : Vô nghiệm.

* $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;$ , $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 29.** Giải phương trình: $\sin 2x + 1 = 4\cos x - \cos 2x.$

PT $\Leftrightarrow \sin 2x + 1 + \cos 2x - 4\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 4\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 2 \text{ (VN do } 1^2 + 1^2 < 2^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

**Câu 30.** $2\sin x\cos x + 6\sin x - \cos x - 3 = 0$;

TXĐ D = $\mathbb{R}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -3 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + l2\pi \end{array}\right.$ , với k, l là số nguyên. Kết luận.

**Câu 31.** Giải phương trình: $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x \quad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5} \quad k\in\mathbb{Z}$

**Câu 32.** Giải phương trình: $4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\ 8\sin x-1\ \cos x=5 \quad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow 2\ \cos 4x+\cos x\ +8\sin 2x-2\cos x=5$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x+8\sin 2x-5=0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x-8\sin 2x+3=0$

- $\sin 2x=\frac{3}{2}$: phương trình vô nghiệm
- $\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ .

**Câu 33.** Giải phương trình: $2\cos 5x.\cos 3x+\sin x=\cos 8x \quad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow \cos 8x+\cos 2x+\sin x=\cos 8x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

- $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 34.** Giải phương trình: $\sqrt{2}\ \sin x - 2\cos x\ = 2 - \sin 2x \quad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x + 2\sin x\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\ 2\cos x + \sqrt{2}\ - \sqrt{2}\ 2\cos x + \sqrt{2}\ = 0$

$\Leftrightarrow \ \sin x - \sqrt{2}\ \ 2\cos x + \sqrt{2}\ = 0$

- $\sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2}$ : phương trình vô nghiệm
- $2\cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 35.** Giải phương trình: $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x \quad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow \sin x + 4\cos x - 2\sin x\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \ \sin x - 2\ \ 2\cos x - 1\ = 0$

- $\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 2$ : phương trình vô nghiệm
- $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 36.** Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0 \quad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x + \cos 2x = 0 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\ \ 2\sin x + 1\ = 0$ •

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

- $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 37.** Giải phương trình: $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x \qquad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow 2\cos 2x + \sin x - \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x - 2\cos 2x \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x \ \sin x - 1 \ = 0$

- $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 38.** Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0 \qquad (1)$

$(1) \Leftrightarrow (\sin 6x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 2x) + (\sin 4x + \sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left[\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) + \cos\frac{3x}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow 4\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}\left(2\cos x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{7x}{2} = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in Z$

**Câu 39.** Giải phương trình lượng giác: $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 4\sin x.\sin 3x - 1 = 0$

Giải phương trình : $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 4\sin x \sin 3x - 1 = 0 \ (1)$

$\Leftrightarrow 2(\cos 2x\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}) + 4\sin x \sin 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin x \sin 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\sin x \sin 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin 3x - \sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x \end{array}\right.$

$*\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in z)$

$*\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 3x$

$\leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi - x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in z)$

vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi$ ; $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in z)$

**Câu 40.** Giải phương trình $\sin(2x + \frac{17\pi}{2}) + 16 = 2\sqrt{3}.\sin x \cos x + 20\sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$

*Biến đổi phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 10\cos(x + \frac{\pi}{6}) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 5\cos(x + \frac{\pi}{6}) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(x + \frac{\pi}{6}) + 5\cos(x + \frac{\pi}{6}) + 2 = 0$$

Giải được $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ và $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -2$ (loại)

*Giải $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ được nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 41.** Giải phương trình sau: $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pt đã cho $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x - \sin 2x - \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos x) + \cos x(1 - 2\cos x) = 0.$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - 2\cos x) = 0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ 1 - 2\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

**Câu 42.** Giải phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0 \qquad (1)$

Ta có: $1 \Leftrightarrow \sin x+2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\ 1+2\cos x\ =0$

- $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$
- $1+2\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \quad k\in\mathbb{Z}$.

**Câu 43.** Giải phương trình $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (1)$

**Điều kiện:** $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Ta có: $1 \Leftrightarrow 1+\frac{\sin x}{\cos x}=2\ \sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x\ \ 2\cos x-1\ =0$

- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$
- $2\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

Đối chiếu điều kiện: các nghiệm tìm được đều thỏa điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \quad k\in\mathbb{Z}$.

## 2.3. Phương trình bậc hai đối với sin, cos

**Câu 1.** Giải phương trình: $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x$.

Ta có: $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x \Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=1+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in Z).$$

**Câu 2.** Giải phương trình: $2\cos^2 2x+3\cos 3x+4\cos 2x+3\cos x=0$

Khi đó , phương trình tương đương với :

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x+3\cos x+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x+3\cos x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2\cos^2 x+3\cos x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \cos x=-1\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$

**Câu 3.** Giải phương trình $\sqrt{3}(2\cos^2 x+\cos x-2)+\sin x(3-2\cos x)=0.$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-2\sin x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-2\sin x\right)\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

**Câu 4.** Giải phương trình: $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x$.

Phương trình đã cho tương đương $2\sin^2 x-3\sin x-2+2\sin x\cos x+\cos x=0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin x+\cos x-2)=0$$

- $\sin x+\cos x-2=0$: Phương trình vô nghiệm
- $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}).$

**Câu 5.** Giải phương trình: $2\sin^2x + 3\cos x - 2 = 0$

$2\sin^2x + 3\cos x - 2 = 0$ (1)

- Pt (1) $\Leftrightarrow 2(1-\cos^2x) + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2x - 3\cos x = 0$ (*)
- đặt $t = \cos x$ ($|t| \le 1$)
- Pt (*) trở thành : $2t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ .So sánh điều kiện t = 0 thỏa mãn
- Với $t = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$ ($k \in Z$)

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = k2\pi$ ($k \in Z$)

**Câu 6.** Giải phương trình lượng giác: $\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+3\sin x-3\sin^2 x=0$

$$\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+3\sin x-3\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin x \\ \cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{3}\sin x+\cos x=0 & (1) \\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{3} & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ hay $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

**Câu 7.** Giải phương trình $2\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x.\cos x=3+\sqrt{3}$

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{3}(1+\cos 2x)+3\sin 2x=3+\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+3\sin 2x=3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$

**Câu 8.** Giải phương trình: $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$.

$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

**Câu 9.** Giải phương tri`nh: $2\cos^2 x-\sin x+1=0$.

Ta có: $2\cos^2 x-\sin x+1=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-3=0\Leftrightarrow (\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$\Leftrightarrow \sin x=1$ (do $2\sin x+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

**Câu 10.** Giải phương trình trình sau trên tập số thực:

$\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0$ với $x\in(0;\frac{3\pi}{2})$

$\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0 <=> \cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \tan x=\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Trên $(0,3\pi/2)$ ta có tập nghiệm là: $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right\}$.

**Câu 11.** Giải phương trình $\sin 5x+2\cos^2 x=1$ (1)

Ta có: $1 \Leftrightarrow -\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+\frac{\pi}{2}=2x+k2\pi \\ 5x+\frac{\pi}{2}=-2x+k2\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=-\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3},\ x=-\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \quad k\in\mathbb{Z}$

**Câu 12.** Giải phương trình $1+2\sin x\ ^2\cos x=1+\sin x+\cos x$ (1)

Ta có: $1 \Leftrightarrow 2\ 1+\sin x\ \sin 2x-\ 1+\sin x\ =0$

$\Leftrightarrow\ 1+\sin x\ \ 2\sin 2x-1\ =0$

$\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$2\sin 2\,x-1=0\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ .

**Câu 13.** Giải phương trình : $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$ (1)

$(1)\Leftrightarrow 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1\Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=2\left(2\cos^2 x-1\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=\cos 2x\Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ \vee x=\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

## 2.4. Phương trình chứa mẫu

**Câu 1.** Giải phương trình: $\frac{1-\cos x(2\cos x+1)-\sqrt{2}\sin x}{1-\cos x}=1$

Điều kiện: $\cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương:

$1-\cos x(2\cos x+1)-\sqrt{2}\sin x=1-\cos x\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-2=0$

$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}; x=\frac{5\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (thỏa điều kiện)

**Câu 2.** Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}(2.\cos^2 x+\cos x-2)+(3-2\cos x).\sin x}{2\cos x+1}=0$

ĐK: $x\neq\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Pt đã cho tương đương với pt:

$$(2sinx-\sqrt{3})(\sqrt{3}sinx+cosx)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} sinx=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}sinx+cosx=0 \end{array}\right.$$

$$*)\ sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\ (t/m) \\ x=\frac{2\pi}{3}+2k_2\pi\ (L) \end{array}\right.$$

$$*)\ \sqrt{3}sinx+cosx=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k_3\pi\ (t/m)$$

Vậy pt có 2 họ nghiệm $x=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{6}+k_3\pi\ \ (k_1;k_3\in Z)$

**Câu 3.** Giải phương trình: $\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x-\cos x}+\tan 2x+\cos^2 x=0$

ĐK : cos2x $\neq$ 0.

Biến đổi phương trình $\Leftrightarrow-(\sin x+\cos x)^2+\sin x2x+\cos^2 x.\cos 2x=0$

$pt\Leftrightarrow\cos^2 x.\cos 2x-1=0$

$pt\Leftrightarrow\cos^2 2x+\cos 2x-2=0\ \Leftrightarrow\cos 2x=1$ (thỏa mãn ĐK), cos2x = -2 (vn)

Vậy cos2x = 1 $\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, k $\in$ Z

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ , k $\in$ Z

**Câu 4.** Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$ (1)

ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z$

$(1) \Leftrightarrow \cot x - \tan x = \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = l\pi \\ x = \dfrac{l\pi}{3} \end{array}\right., l \in Z$

Kiểm tra điều kiện ta được $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi, l \in Z$

**Câu 5.** Giải phương trình:

$$\frac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x(2\sin x - 1) - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x)}{2\sin^2 x - 1} = 0 \quad (1)$$

ĐK: $2\sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z$

$(1) \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\sin x + \cos x) - 2\cos x(\sin x + \cos x) - 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + m\pi \\ x = m2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \end{array}\right., m \in Z$

Kiểm tra điều kiện ta được nghiệm $x = \dfrac{m2\pi}{3}, m \in Z$

# PHẦN 3. SỐ PHỨC

## 3.1. Tính toán với số phức

**Câu 1.** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+2i)z+(2-3i)\bar{z}=-2-2i$. Tính mô đun của z.

Gọi z=x+yi$(x,y\in R)$. Phương trình đã cho trở thành:

$(1+2i)(x+yi)+(2-3i)(x-yi)=-2-2i$

$\Leftrightarrow (x-2y)+(2x+y)i+(2x-3y)+(-3x-2y)i=-2-2i$

$\Leftrightarrow (3x-5y)+(-x-y)i=-2-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-5y=-2\\-x-y=-2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Do đó $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

**Câu 2.** Tìm môđun của số phức z thoả mãn điều kiện $z+(2+i)\bar{z}=3+5i$

Giả sử ,z=x+yi(x,y$\in R$ ).Ta có

$z+(2+i)\bar{z}=3+5i$ ⇔x+yi +(2+i)(x-yi)=3+5i

⇔3x+y+(x-y)i=3+5i

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+y=3\\x-y=5\end{cases}<=>\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

Vậy z=2-3i

Do đó môđun của số phức z lần lượt bằng $\sqrt{13}$

**Câu 3.** Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa : $|z+1-5i|=|\bar{z}+3-i|$.

Giả sử : $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$

từ gt ,ta có : $|x+1+(y-5)i|=|x+3-(y+1)i|$;

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-5)^2=(x+3)^2+(y+1)^2\Leftrightarrow x+3y-4=0\Leftrightarrow x=4-3y$

Khi đó $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10y^2-24y+16}$

$|z|$nhỏ nhất bằng $\sqrt{\frac{8}{5}}$ khi và chỉ khi: $z=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$

**Câu 4.** Cho số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$. Tìm môđun của số phức z.

Gọi $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$; Khi đó $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$

$\Leftrightarrow a+bi-(2+3i)(a-bi)=1-9i\Leftrightarrow -a-3b-(3a-3b)=1-9i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-3b=1 \\ 3a-3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy môđun của số phức z là : $|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

**Câu 5.** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(2-i)(1+i)+\bar{z}=4-2i$. Tính môđun của $z$.

Đặt $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$, khi đó $\bar{z}=a-bi$. Theo bài ra ta có

$(2-i)(1+i)+a-bi=4-2i \Leftrightarrow a+3+(1-b)i=4-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3=4 \\ 1-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$. Do đó $z=1+3i$, suy ra $|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

**Câu 6.** Cho số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $z+(2-i)\bar{z}=5+i$. Tính mô đun của số phức $w=1+iz+z^2$.

Đặt $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} 3a-b=5 \\ -a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Do đó $z=1-2i$.

Suy ra $w=1+iz+z^2=1+i(1-2i)+(1-2i)^2=-3i$. Vậy $|w|=3$.

**Câu 7.** Tìm môđun của số phức z, biết $\bar{z}=\dfrac{z^2+2z+3}{z+1}$

Tìm môđun của số phức z, biết $\bar{z}=\dfrac{z^2+2z+3}{z+1}$

+ Điều kiện $z\neq -1$.

+ Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$,

ta có : $\bar{z}=\dfrac{z^2+2z+3}{z+1} \Leftrightarrow (a-bi)(a+bi+1)=(a+bi)^2+2(a+bi)+3$

$\Leftrightarrow (-2b^2+a+3)+(2ab+3b)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2+a+3=0 \\ 2ab+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Với $a=-3, b=0$, ta có $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=3$.

Với $a=-\dfrac{3}{2}, b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta có $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$.

Vậy môđun của số phức z là $3$ hay $\sqrt{3}$.

**Câu 8.** Tìm môđun của số phức z thỏa mãn số phức $\dfrac{z+6+2i}{z-2-4i}$ là số thuần ảo và đồng thời $|z-6-i|=5$

Đặt z=a+bi : Đk : $z \neq 2+4i$

Theo đề bài : $\begin{cases} a^2+b^2+4a-2b+12=0 \\ (a-6)^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} (L) V \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow z=2-2i \Rightarrow |z|=2\sqrt{2}$

**Câu 9.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(1+i)z = \bar{z} + 2\ i$. Tính môđun của số phức $z$.

Đặt $z = a + bi, (a,b \in \mathbb{R})$; khi đó $\bar{z} = a - bi$. Do đó

$(*) \Leftrightarrow (1+i)(a+bi) = (a-bi+2)i \Leftrightarrow (a-b)+(a+b)i = b+(a+2)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=b \\ a+b=a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

**Câu 10.** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $z\left(3-\frac{1}{2}i\right) = 3+\frac{1}{2}i$. Tính môđun của số phức w = 1 + I + z

$z\left(3-\frac{1}{2}i\right) = 3+\frac{1}{2}i \quad \Leftrightarrow z = \frac{3+\frac{1}{2}i}{3-\frac{1}{2}i} = \frac{35}{37}+\frac{12}{37}i$

$w = 1+i+z = \frac{72}{37}+\frac{49}{37}i \quad \Rightarrow |w| = \sqrt{\left(\frac{72}{37}\right)^2+\left(\frac{49}{37}\right)^2} = \frac{\sqrt{7585}}{37}$

**Câu 11.** Trong các số phức thỏa mãn $|z-2+3i| = \frac{3}{2}$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

*Gọi z=x+yi. $|z-2+3i| = \frac{3}{2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = \frac{9}{4}$.

* Vẽ hình $\Rightarrow |z|_{min} \Rightarrow z$. ĐS: $z = \frac{26-3\sqrt{13}}{13} + \frac{78-9\sqrt{13}}{26}i$.

**Câu 12.** Cho số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $\frac{z-11}{z-2} = z-1$. Hãy tính $\left|\frac{z-4i}{z+2i}\right|$.

$\frac{z-11}{z-2} = z-1 \Leftrightarrow z^2-4z+13=0, \ \Delta' = -9 = 9i^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+3i \\ z=2-3i \end{array}\right.$

● $z = 2+3i \Rightarrow \left|\frac{z-4i}{z+2i}\right| = \left|\frac{2-i}{2-i}\right| = 1$

● $z=2-3i \Rightarrow \left|\frac{z-4i}{\bar{z}+2i}\right|=\left|\frac{2-7i}{2+5i}\right|=\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}}$

**Câu 13.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $iz+2\bar{z}=1-i$. Tính mô đun số phức $w=i\bar{z}+4$

Gọi $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$

ta có: $iz+2\bar{z}=1-i \Leftrightarrow ai+bi^2+2a-2bi=1-i$

$\Leftrightarrow (2a-b)+(a-2b)i=1-i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=1\\a-2b=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

$\Rightarrow \bar{z}=1-i \Rightarrow w=5+i \Rightarrow |w|=\sqrt{26}$

**Câu 14.** Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm trên tập số phức của phương trình $x^2+2x+5=0$. Tính $|x_1|+|x_2|$

$\Delta'=-4=4i^2$,

$x_1=-1+2i$, $x_2=-1-2i$, $|x_1|+|x_2|=2\sqrt{5}$

**Câu 15.** Gọi $z_1, z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+29=0$. Tính $A=|z_1|^4+|z_2|^4$.

$\Delta'=-25<0$. Phương trình đã cho có hai nghiệm phức $z_1=2-5i, z_2=2+5i$.

Khi đó $|z_1|=|z_2|=\sqrt{29} \Rightarrow A=1682$.

**Câu 16.** Cho z là số phức. Tìm m để phương trình $mz^2-(m-1)z-i=0$ có hai nghiệm phân biệt $z_1$; $z_2$ sao cho $|z_1|+|z_2|\geq 2$

Để pt có 2 nghiệm $\Rightarrow m\neq 0$ (*)

Với $m\neq 0$ thì pt đã cho là pt bậc hai có $m-m+i-i=0$ nên pt có 2 nghiệm

$\left[\begin{array}{l}z_1=1\\z_2=\frac{-i}{m}\end{array}\right.$

Theo bài ra : $|z_1|+|z_2|\geq 2 \Rightarrow 1+\frac{1}{|m|}\geq 2 \Rightarrow -1\leq m\leq 1$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m\in[-1;1]\backslash\{0\}$ thỏa mãn bài toán

**Câu 17**. Gọi $z_1$; $z_2$ là 2 nghiệm phức của phương trình sau:

$z^2-z+1=0,(z\in C)$. Tính A= $|z_1|+|z_2|$

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8}}{2}i;\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8}}{2}i$

$|z_1| = |z_2| = \left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8}}{2}i\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 3$

**Câu 18.** Cho $z_1,\ z_2$ là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 11 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$.

Giải pt đã cho ta được các nghiệm: $z_1 = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i, z_2 = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{2};\ z_1 + z_2 = 2$

Đo đó $\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2} = ... = \frac{11}{4}$

**Câu 19.** Tính mô đun của số phức z biết rằng: $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2 - 2i$

Gọi z= a+ bi (a, b$\in R$)

Ta có

$(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2 - 2i$

$\Leftrightarrow [(2a-1) + 2bi](1+i) + [(a+1) - bi](1-i) = 2 - 2i$

$\Leftrightarrow (2a - 2b - 1) + (2a + 2b - 1)i + (a - b + 1) - (a + b + 1)i = 2 - 2i$

$\Leftrightarrow (3a - 3b) + (a + b - 2)i = 2 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Suy ra mô đun: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

## 3.2. Tìm số phức Z

**Câu 1.** Cho số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $(1+i)\bar{z}-1-3i=0$. Tìm phần ảo của số phức $w=1-zi+\bar{z}$

$(1+i)\bar{z}-1-3i=0 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1+3i}{1+i}=2+i$

=> w = 2 – i . Số phức w có phần ảo bằng - 1

**Câu 2.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=(z-4i)i$ biết z thỏa mãn điều kiện $(1+i)z+(2-i)\bar{z}=1-4i.$

Giả sử $z=x+yi,(x.y\in\mathbb{R})$, suy ra $\bar{z}=x-yi.$

Thế vào gt ta tìm được x= 3, y = 4.
Vậy z = 3 +4i. Do đó w = 3i
w có phần thực 0; phần ảo 3.

**Câu 3.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn điều kiện
$z+(2+i)\bar{z}=3+5i$

Giả sử ,z=x+yi(x,y$\in R$ ).Ta có

$z+(2+i)\bar{z}=3+5i$ ⇔x+yi +(2+i)(x-yi)=3+5i

⇔3x+y+(x-y)i=3+5i

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=3 \\ x-y=5 \end{cases} <=> \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy phần thực và phần ảo của số phức z lần lượt bằng 2,-3

**Câu 4.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức: $z=\frac{3-4i}{3+2i}-(3-5i)(6+i)$

Ta có

$$z=\frac{(3-4i)(3-2i)}{3^2+2^2}-18-3i+30i+5i^2$$

$$=\frac{9-6i-12i+8i^2}{3^2+2^2}-23+27i$$

$$=\frac{1-18i}{13}-23+27i=-\frac{298}{13}+\frac{333}{13}i$$

Vậy phần thực: $-\frac{298}{13}$ , phần ảo: $\frac{333}{13}$

**Câu 5.** Cho số phức $z=1+3i$. Tìm số nghịch đảo của số phức: $\omega=z^2+z.\bar{z}$

Với $z=1+3i$, ta có

- $\omega=z^2+z.\bar{z}=(1+3i)^2+(1+3i)(1-3i)=1+6i+9i^2+1^2-9i^2=2+6i$

- $\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2+6i}=\frac{2-6i}{(2+6i)(2-6i)}=\frac{2-6i}{2^2-36i^2}=\frac{2-6i}{40}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$

**Câu 6.** Cho số phức: $z=3-2i$ .Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z^2+z$ .

Cho số phức: $z=3-2i$ .Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z^2+z$ .

$z^2+z=(3-2i)^2+(3-2i)=8-14i$

Phần thực a=8; phần ảo b=-14

**Câu 7.** Tìm phần ảo của z biết: $z+3\bar{z}=(2+i)^3(2-i)$

$z+3\bar{z}=(2+i)^3(2-i)$ (1)

Giả sử z=a+bi

$(1)\Leftrightarrow a+bi+3a-3bi=(8+12i+6i^2+i^3)(2-i)=(2+11i).(2-i)$

$\Leftrightarrow 4a-2bi=4-2i+22i-11i^2=20i+15\Leftrightarrow a=\frac{15}{4};b=-10.$

Vậy phần ảo của z bằng -10

**Câu 8.** Tìm số phức liên hợp của

$$z=(1+i)(3-2i)+\frac{1}{3+i}$$

Ta có $z=5+i+\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}=5+i+\frac{3-i}{10}$.

Suy ra số phức liên hợp của z là: $\bar{z}=\frac{53}{10}-\frac{9}{10}i$

**Câu 9.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết: $\bar{z}+2z=3-2i$

Gọi $\mathbf{z=a+bi}$ $(\mathbf{a},\ \mathbf{b}\in\mathbf{R})$ => $\bar{\mathbf{z}}=\mathbf{a-bi}$

Ta có : 3a + bi = 3-2i

Suy ra : a=1 và b = -2

Vậy phần thực là 1 và phần ảo là -2

**Câu 10.** Cho số phức $z=3-2i$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=iz-\bar{z}$ .

$\bar{z}=3+2i$

$w=i(3-2i)-(3+2i)$

$=-1+i$

Phần thực là -1, phần ảo là 1.

**Câu 11.** Tìm phần thực, phần ảo của các số phức z, biết: $\begin{cases} z+\bar{z}=10. \\ |z|=13. \end{cases}$

Tìm phần thực, phần ảo của các số phức z, biết: $\begin{cases} z+\bar{z}=10. \\ |z|=13. \end{cases}$

Giả sử z = x + yi => $\bar{z}$ = x– yi. (x, y∈IR)

Theo đề bài ta có : $\begin{cases} 2x=10. \\ \sqrt{x^2+y^2}=13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=\pm 12 \end{cases}$.

**Câu 12.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $z=\frac{3-5i}{1+4i}+(5-2i)(-3-i)$

Tìm phần thực và phần ảo của số phúc sau:

$$z=\frac{3-5i}{1+4i}+(5-2i)(-3-i)$$
$$=\frac{(3-5i)(1-4i)}{1+16}+(-15-2-5i+6i)$$
$$=-1-i+(-17+i)$$
$$=-18$$

Kết luận phần thực bằng -18, phần ảo bằng 0

**Câu 13.** Cho số phức $z=1-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=z^2+2i\bar{z}$.

Ta có $\bar{z}=1+2i$, khi đó $w=(1-2i)^2+2i(1+2i)=1-4i+4i^2+2i+4i^2$

$$=-7-2i$$

Do đó, phần thực của số phức w là: -7 và phần ảo của số phức w là: -2

**Câu 14.** Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(3-i)\bar{z}=2-6i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w=2z+1$.

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\bar{z}=a-bi$, khi đó:

$(1+i)z+(3-i)\bar{z}=2-6i\Leftrightarrow(1+i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=2-6i\Leftrightarrow 4a-2b-2bi=2-6i$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 4a-2b=2 \\ -2b=-6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}\Rightarrow z=2+3i$

Do đó $w=2z+1=2(2+3i)+1=5+6i$

Vậy số phức w có phần thực là 5, phần ảo là 6.

## 3.3. Giải phương trình nghiệm phức

**Câu 1.** Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $2z^2 - 2z + 5 = 0$

$2z^2 - 2z + 5 = 0$ **(*)**

• Ta có, $\Delta = (-2)^2 - 4.2.5 = -36 = (6i)^2$

• Vậy, phương trình **(*)** có 2 nghiệm phức phân biệt:

$z_1 = \frac{2+6i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ; $z_2 = \frac{2-6i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

**Câu 2.** Giải phương trình $3z^2 - 6z + 15 = 0$ trên tập hợp số thức.

+ Tính đúng $\Delta' = -36 < 0$

+ Nêu được hai nghiệm $z_1 = \frac{3+6i}{3} = 1+2i$, $z_2 = \frac{3-6i}{3} = 1-2i$

**Câu 3.** Giải phương trình sau trên tập số phức $z^2 - z + 1 = 0$

Ta có: $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ căn bậc hai của $\Delta$ là $\pm i\sqrt{3}$

Phương trình có nghiệm: $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

**Câu 4.** Giải phương trình nghiệm phức: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1, (z \in C)$

Đk: $z \neq i$. khi đó, pt đã cho tương đương $(z+i)^4 = (z-i)^4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(z+i)^2 = (z-i)^2 \ (1)\\ (z+i)^2 = i^2(z-i)^2 \ (2)\end{array}\right.$

(1)$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z+i = z-i\\ z+i = i-z\end{array}\right. \Leftrightarrow z = 0$ (t/m)

(2)$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z+i = 1+iz\\ z+i = -1-iz\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z = 1\\ z = -1\end{array}\right.$(t/m)

Vậy pt có tập nghiệm z={-1;0;1}

**Câu 5.** Giải phương trình nghiệm phức: $z^2 - i = 0, (z \in C)$

$i = \frac{1}{2}.(2i) = \frac{1}{2}(1+i)^2$ $z^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\\ z = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{array}\right.$

**Câu 6.** Giải các phương trình sau trên tập số phức $x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 = 16i^2$

Căn bậc hai của $\Delta$ là $\pm 4i$.

Phương trình có nghiệm: $x_1 = -1 - 2i$, $x_2 = -1 + 2i$

**Câu 7.** Giải các phương trình sau trên tập số phức $z^4+2z^2-3=0$

Đặt $t = z^2$.

Phương trình trở thành:

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=1 \\ z^2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm 1 \\ z=\pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: -1, 1, $-i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$

**Câu 8.** Giải phương trình sau đây trên tập số phức: $-z^2+2z-5=0$.

- Ta có, $\Delta = 2^2-4.(-1).(-5) = -16 = (4i)^2$

• Vậy, pt (*) có 2 nghiệm phức phân biệt $z_1 = \dfrac{-2-4i}{-2} = 1+2i$ và $z_2 = \dfrac{-2+4i}{-2} = 1-2i$

**Câu 9.** Giải phương trình trong tập số phức: $z^2-3z+7=0$

$\Delta = -19 = \left(\sqrt{19}\mathrm{i}\right)^2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phức:

$$z_1 = \frac{3-\sqrt{19}\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{i}\,; \qquad z_2 = \frac{3+\sqrt{19}\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{i}$$

**Câu 10.** Giải phương trình sau trên tập số phức: $3x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

$3x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

Ta có: $\Delta = (-2\sqrt{3})^2-4.3.2 = 12-24 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

Phương trình có 2 nghiệm phức

$x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i; x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

**Câu 11.** Giải phương trình sau trên tập số phức: $x^2 - 6x + 29 = 0$

$\Delta = -20$

Phương trình có 2 nghiệm phức: $x = 3 \pm 2i\sqrt{5}$

**Câu 12.** Giải phương trình sau trên tập số phức: $x^2-4x+11=0.$

$\Delta' = 4-11 = -7 = (\sqrt{7}i)^2$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}i.$

# PHẦN 4. TÍCH PHÂN

## 4.1. Tích phân hàm phân thức

**Câu 1.** Tính tích phân: $\mathrm{I}=\int\limits_0^1 \frac{6\mathrm{x}+7}{3\mathrm{x}+2}\mathrm{dx}$.

$$\mathrm{I}=\int\limits_0^1 \frac{6\mathrm{x}+7}{3\mathrm{x}+2}\mathrm{dx}=\int\limits_0^1 \frac{(6\mathrm{x}+4)+3}{3\mathrm{x}+2}\mathrm{dx}=\int\limits_0^1 (2+\frac{3}{3\mathrm{x}+2})\mathrm{dx}$$

$$=2\int\limits_0^1 \mathrm{dx}+\int\limits_0^1 \frac{3}{3\mathrm{x}+2}\mathrm{dx}=2\int\limits_0^1 \mathrm{dx}+\int\limits_0^1 \frac{1}{3\mathrm{x}+2}\mathrm{d}(3\mathrm{x}+2)$$

$$=2\mathrm{x}\Big|_0^1+\ln\Big|3\mathrm{x}+2\Big\|_0^1$$

$$=2+\ln\frac{5}{2}.$$

**Câu 2.** Tìm họ nguyên hàm $\int\frac{2x+3}{2x^2-x-1}dx$

Ta có: $\int\frac{2x+3}{2x^2-x-1}dx=\int\frac{2x+3}{(2x+1)(x-1)}dx=\int\left[-\frac{4}{3}.\frac{1}{2x+1}+\frac{5}{3}.\frac{1}{x-1}\right]dx$

$$=-\frac{4}{3}\int\frac{1}{2x+1}dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}+\frac{5}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}$$

$$=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$$

**Câu 3.** Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx$.

Biến đổi hàm số thành dạng $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}=1+\frac{2x+1}{x^2+x}$

Khi đó: $I=\int\limits_1^2\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx=\int\limits_1^2 dx+\int\limits_1^2\frac{2x+1}{x^2+x}dx$

- $\int\limits_1^2 dx=x\Big|_1^2=1$

- $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \ln\left|x^2+x\right|\Big|_1^2 = \ln 3$

Vậy $I = 1+\ln 3$.

**Câu 4.** Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}^2 dx$.

Biến đổi hàm số thành dạng $\frac{x+1}{x^2+1}^2 = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1+\frac{2x}{x^2+1}$

Khi đó: $I = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}^2 dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$

- $\int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$
- $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1 = \ln 2$

Vậy $I = 1+\ln 2$.

**Câu 5.** Tính tích phân sau: $I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1-x^2}{x+x^3}\right)dx$

$I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1-x^2}{x+x^3}\right)dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^2}dx$

Tính $I_1 = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$

$I_2 = \int_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^3}dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}+x}dx = -\int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{x}+x\right)}{\frac{1}{x}+x} = -\ln\left|\frac{1}{x}+x\right|\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{5}$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{7}{3}+\ln\frac{4}{5}$

## 4.2. Tích phân hàm chứa căn thức

**Câu 1.** Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$.

$I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}=\int_1^2 \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{x^3+1}}$.

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow x^3=t^2-1\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}t.dt$.

$x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$ ; $x=2\Rightarrow t=3$

$I=\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2}{3}\frac{t.dt}{(t^2-1)t}=\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$I=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^3=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

**Câu 2.** Tính tích phân $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow u^2=x^2+1\Rightarrow udu=xdx$, $\Rightarrow x^2=u^2-1$

$I=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{u}{(u^2-1)u}du=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2\frac{u+1-(u-1)}{(u-1)(u+1)}du$

$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^2=-\frac{1}{2}\ln 3\left(3-2\sqrt{2}\right)$

**Câu 3.** Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

• Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow dx=-dt$ và $x=1-t$

• Đổi cận:

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| t | 1 | 0 |

• Vậy, $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=\int_1^0(1-t)\sqrt{t}(-dt)=\int_0^1(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})dt=\left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{15}$

**Câu 4.** Tính tích phân sau $I=\int_0^1\frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

Đặt $\sqrt{3x+1}=t$ ta được $x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$

Khi đó $I=\frac{2}{9}\int_1^2\frac{2t^3+t}{1+t}dt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(2t^2-2t+3-\frac{3}{t+1}\right)dt=\frac{28}{27}-\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$

**Câu 5.** Tính tích phân sau: $\int_0^3\frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx$

Đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow u^2-1=x\Rightarrow 2udu=dx$; đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow u=1\\x=3\Rightarrow u=2\end{cases}$

Ta có: $\int_0^3\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx=\int_1^2\frac{2u^3-8u}{u^2+3u+2}du=\int_1^2(2u-6)du+6\int_1^2\frac{1}{u+1}du$

$=\left(u^2-6u\right)\Big|_1^2+6\ln|u+1|\Big|_1^2=-3+6\ln\frac{3}{2}$

**Câu 6.** Tính tích phân: $\int_4^9\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

Đặt $t=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ t^2=x\ \Rightarrow 2tdt=dx$

Đổi cận: $x=4\Rightarrow t=2$

$x=9\Rightarrow t=3$

$$I=2\int_2^3\frac{t^3dt}{t-1}=2\int_2^3\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)\Big|_2^3=\frac{59}{3}+2\ln 2$$

**Câu 7.** Tính tích phân: $I=\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}$

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{1}{(x+1)\sqrt{(x+1)(-x+3)}}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{-x+3}{x+1}}}dx$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{-x+3}{x+1}}\Rightarrow t^2=\frac{-x+3}{x+1}\Rightarrow 2tdt=\frac{-4}{(x+1)^2}dx$

$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{3}}dt=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

**Câu 8.** Tính tích phân $\int_0^3\ x^2+\sqrt{x+1}\ \ xdx$.

Ta có $I=\int\limits_0^3 \left(x^2+\sqrt{x+1}\right)xdx=\int\limits_0^3 x^3dx+\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

Đặt $J=\int\limits_0^3 x^3dx$ và $K=\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$; ta có $J=\int\limits_0^3 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^3=\frac{81}{4}$

$K=\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$ và $x=t^2-1$

Ta có $x=0\Rightarrow t=1;\ x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó $K=2\int\limits_1^2 t^2(t^2-1)dt=2\int\limits_1^2 (t^4-t^2)dt=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)_1^2=\frac{116}{15}$

Vậy $I=J+K=\frac{1679}{60}$

**Câu 9.** Tính tích phân: $I=\int\limits_0^1 x^2\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$I=\int\limits_0^1 x^2\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

$I_1=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

$I_2=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x^2=1-t^2\Rightarrow xdx=-tdt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=0$

$\Rightarrow I_2=-\int\limits_1^0 \left(1-t^2\right)t^2dt=\int\limits_0^1 \left(t^2-t^4\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{15}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{7}{15}$

**Câu 10.** Tính nguyên hàm sau: $I=\int x\sqrt{x^2+3}dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow t^2=x^2+3\Rightarrow 2tdt=2xdx\Rightarrow xdx=tdt$.

Suy ra $I=\int t.tdt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\sqrt{x^2+3})^3}{3}+C$

**Câu 11.** Tính nguyên hàm: $\mathrm{I}=\int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2\mathrm{x}-1}+4}\cdot$

Đặt $\mathrm{t}=\sqrt{2\mathrm{x}-1}\Rightarrow \mathrm{t}^2=2\mathrm{x}-1\Rightarrow \mathrm{tdt}=\mathrm{dx}$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\int\frac{\mathrm{tdt}}{\mathrm{t}+4}=\int\left(1-\frac{4}{\mathrm{t}+4}\right)\mathrm{dt}=\mathrm{t}-4\ln\left|\mathrm{t}+4\right|+\mathrm{C}$$

$$=\sqrt{2\mathrm{x}-1}-4\ln\left(\sqrt{2\mathrm{x}-1}+4\right)+\mathrm{C}$$

**Câu 12.** Tính $\mathrm{I}=\int_0^1 x^3\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)dx$

$$\mathrm{I}=\int_0^1 x^3\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int_0^1 x^4dx-\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-J=\frac{1}{5}-J$$

$$J=\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx=\ldots=\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt$$

$$J=\ldots=\frac{2+2\sqrt{2}}{15}$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{5}-J=\frac{1-2\sqrt{2}}{15}$$

**Câu 13.** Tính tích phân sau: $I=\int_1^6 x\sqrt{x+3}\mathrm{dx}$

- Đặt $\sqrt{x+3}=t$ ta được $x+3=t^2\Rightarrow dx=2tdt$
- Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2; x=6\Rightarrow t=3$

Khi đó $I=\int_2^3\left(2t^4-6t^2\right)dt=\left(\frac{2}{5}t^5-2t^3\right)\Big|_2^3=\frac{232}{5}$

**Câu 14.** Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx$.

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow t^2=2-x^2\Rightarrow 2tdt=-2xdx\Rightarrow tdt=-xdx$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\t=\sqrt{2}\end{cases}$

Suy ra: $I=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

Vậy $I=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

## 4.3. Tích phân hàm số mũ, hàm số logarith

**Câu 1.** Tính tích phân $I=\int_0^1(1-x)\left(2+e^{2x}\right)dx$

Đặt $\begin{cases}u=1-x\\dv=(2+e^{2x})dx\end{cases}$ => $\begin{cases}du=-dx\\v=2x+\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

$I=(1-x)(2x+\frac{1}{2}e^{2x})\Big|_0^1+\int_1^2(2+\frac{1}{2}e^{2x})dx$

$=(1-x)(2x+\frac{1}{2}e^{2x})\Big|_0^1+(x^2+\frac{1}{4}e^{2x})\Big|_0^1=\frac{e^2+1}{4}$

**Câu 2.** Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx$.

$I=\int_1^2 xdx-2\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{3}{2}-2\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$

Tính $J=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$

Đặt $u=\ln x, dv=\frac{1}{x^2}dx$. Khi đó $du=\frac{1}{x}dx, v=-\frac{1}{x}$

Do đó $J=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

$J=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}$

Vậy $I=\frac{1}{2}+\ln 2$

**Câu 3.** Tính tích phân $I=\int_0^1(1+x)e^x dx$

$I=\int_0^1(1+x)e^x dx$

• Đặt $\begin{cases}u=1+x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$. Thay vào công thức tích phân từng phần ta được:

$$I=(1+x)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=(1+1)e^1-(1+0)e^0-e^x\Big|_0^1=2e-1-(e^1-e^0)=e$$

• Vậy, $I = \int_0^1 (1+x)e^x dx = e$

**Câu 4.** Tính tích phân: $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Đặt $t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow t^2 = e^x+1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}, x = \ln 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (t^2-1)dt$

$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

**Câu 5.** Tính: $I = \int_0^1 (x+2)e^x dx.$

$I = \int_0^1 (x+2)e^x dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} => \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Khi đó I= $(x+2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= (x+2)e^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 2e-1$

**Câu 6.** Tính: $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x} dx.$

$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x} dx.$

Đặt u= $\sqrt{1+3\ln x}$ =>$u^2$= 1+3lnx => 2udu= $\frac{3}{x}dx$

Đổi cận: x=e => u=2

x=1 => u=1

Khi đó I= $\int_1^2 u.\frac{u^2-1}{3}.\frac{2}{3}udu$

$= \frac{2}{9}\int_1^2 u^2(u^2-1)du = \frac{2}{9}(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3})\Big|_1^2 = \frac{116}{135}$

**Câu 7.** Tính tích phân $I = \int_0^1 x(x + e^x)dx$

• Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = (x + e^x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} + e^x \end{cases}$

Ta có $I = \int_0^1 x(x + e^x)dx = x(\frac{x^2}{2} + e^x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (\frac{x^2}{2} + e^x)dx = \frac{1}{2} + e - (\frac{x^3}{6} + e^x)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2} + e - (\frac{1}{6} + e) + (0 + 1) = \frac{4}{3}$

**Câu 8.** Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\left(x^2 + 1\right)\ln x + x + 1}{x\ln x + 1} dx.$

$I = \int_1^e \frac{x\left(x\ln x + 1\right) + \left(\ln x + 1\right)}{x\ln x + 1} dx = \int_1^e xdx + \int_1^e \frac{d\left(x\ln x + 1\right)}{x\ln x + 1}.$

$I = \frac{x^2}{2}\Big|_1^e + \ln\left|x\ln x + 1\right|\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \ln\left(e + 1\right)$

**Câu 9.** Tính tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx.$

Ta có: $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx.$

• Tính $\int_1^e x\ln x dx$. Đặt $u = \ln x$ và $dv = xdx$. Suy ra $du = \frac{1}{x}dx$ và $v = \frac{x^2}{2}$

Do đó, $\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

• Tính $\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx.$ Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$. Khi $x = 1$ thì $t = 0$, khi $x = e$ thì $t = 1$.

Ta có: $\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

Vậy, $I = \frac{e^2 + 3}{4}.$

**Câu 10.** Tính tích phân: I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x.\ln(\cos x)}{\cos x} dx$

*Đặt t=cosx

Tính dt=-sinxdx , đổi cận x=0 thì t=1 , $x=\frac{\pi}{4}$ thì $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Từ đó $I=-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\ln t}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\ln t}{t^2}dt$

*Đặt $u=\ln t; dv=\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow du=\frac{1}{t}dt; v=-\frac{1}{t}$

Suy ra $I=-\frac{1}{t}\ln t\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{1}{t^2}dt=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2-\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$

*Kết quả $I=\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$

**Câu 11.** Tính tích phân sau: $\int_1^e\frac{\log_2{}^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$

Đặt $\sqrt{2x-x^2}=u\Rightarrow 2x-x^2=u^2\Rightarrow(1-x)dx=udu$

Từ $2x-x^2=u^2\Rightarrow(x-1)^2=1-u^2$

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow u=0$

$x=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow u=\frac{1}{2}$

$I=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{u^4}{(1-u^2)^2}du=-(\int_0^{\frac{1}{2}}1+\frac{2u^2-1}{u^4-2u^2+1}du)$

*) $\frac{2u^2-1}{u^4-2u^2+1}=\frac{2(u^2-1)+1}{(u^2-1)^2}=\frac{2}{u^2-1}+\frac{1}{(u^2-1)^2}$

$=\frac{2}{u^2-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{[(u+1)-(u-1)]^2}{(u^2-1)^2}$

$=\frac{2}{u^2-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{2}{(u+1)(u-1)}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)$

$$I = -(\int_0^{\frac{1}{2}} 1+\frac{2u^2-1}{u^4-2u^2+1}du) = -\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\right)du$$

$$= \left(-u+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)+\frac{3}{4}\ln\frac{|u+1|}{|u-1|}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{5}{6}$$

**Câu 12.** Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x}dx$

$$I = \int_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e x\ln x dx$$

$$A = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^e = 1$$

$$B = \int_1^e x\ln x dx \qquad Dat \begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} \Rightarrow I = \frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}$$

**Câu 13.** Tính tích phân: $\mathrm{I} = \int_1^e \frac{\ln x - 1}{x^2 - \ln^2 x}dx$

$$\mathrm{I} = \int_1^e \frac{\ln x - 1}{x^2\left[1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]} \text{ . Đặt } u = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow du = \frac{1-\ln x}{x^2}dx : u(1)=0;\ u(e)=\frac{1}{e}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{u^2-1}du = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right|$$

**Câu 14.** Tính tích phân $\int_0^1 (x+3e^x)e^{2x}dx$ .

Ta có $I = \int_0^1 (x+3e^x)e^{2x}dx = \int_0^1 xe^{2x}dx + 3\int_0^1 e^{3x}dx$ .

Đặt $J = 3\int_0^1 e^{3x}dx$ và $K = \int_0^1 xe^{2x}dx$ ; ta có $J = 3\int_0^1 e^{3x}dx = e^{3x}\Big|_0^1 = e^3 - 1$

$K=\int_0^1 xe^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$; khi đó $K=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$\Leftrightarrow K=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$. Vậy $I=e^3+\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$

**Câu 15.** Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{3x+2\ln x+1}{x^2+x\ln x}dx$

Phân tích $I=\int_1^e\frac{3x+2\ln x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{2(x+\ln x)}{x^2+x\ln x}dx+\int_1^e\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx$

Tính $\int_1^e\frac{2(x+\ln x)}{x^2+x\ln x}dx=\mathbf{2}\int_1^e\frac{1}{x}dx=2.$

Tính $\int_1^e\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int_1^e\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}dx=\int_1^e\frac{d(x+\ln x)}{x+\ln x}=\ln(x+\ln x)\Big|_1^e=\ln(e+1)$

Vậy I = 2 + ln(e+1).

**Câu 16.** Tính nguyên hàm sau: $\int\frac{dx}{e^x+1}$

Ta có: $\int\frac{dx}{e^x+1}=\int(1-\frac{e^x}{e^x+1})dx$

$=\int dx-\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=$ x – ln( $e^x+1$) + C

**Câu 17.** Tính tích phân: $I=\int_0^1(1+e^x)xdx$

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=(1+e^x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=x+e^x\end{cases}$

Khi đó: $I=x(x+e^x)\Big|_0^1-\int_0^1(x+e^x)dx\Rightarrow I=1+e-(\frac{x^2}{2}+e^x)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$

**Câu 18.** Tính tích phân $I=\int_1^e x^3\ln xdx.$

Đặt $\begin{cases}\ln x=u(x)\\x^3=v'(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}dx=u'(x)dx\\v(x)=\frac{1}{4}x^4\end{cases}$

$$I=\frac{1}{4}x^4.\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{4}x^4.\frac{1}{x}dx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^e=\frac{3e^4+1}{16}$$

**Câu 19.** Tính tích phân: $I=\int_1^e\frac{4+x\ln^3 x}{x^2}dx$

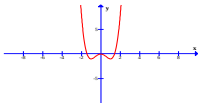
$$I=4\int_1^e\frac{1}{x^2}dx+\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x^2}dx=-\frac{4}{x}\Big|_1^e+I_1=-\frac{4}{e}+4+I_1$$

Tính $I_1=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x^2}dx$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0; x=e\Rightarrow t=1$

$$I_1=\int_0^1 t^3dt=\frac{t^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

Vậy 

**Câu 20.** Tính tích phân sau $I=\int_0^1(2x+e^x)dx$

$$I=\int_0^1\left(2x+e^x\right)dx=\int_0^1 2xdx+\int_0^1 e^xdx=x^2\Big|_0^1+e^x\Big|_0^1=1-0+e-1=e$$

**Câu 21.** Tính tích phân sau $I=\int_0^1 2^x\left(e^x+3\right)dx$

$$I=\int_0^1 2^x\left(e^x+3\right)dx=\int_0^1(2e)^x\,dx+3\int_0^1 2^x\,dx=\frac{(2e)^x}{\ln 2e}\Big|_0^1+3\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\left(\frac{2e-1}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$$

**Câu 22.** Tính các tích phân sau $I=\int_1^e\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)}\right)dx$

$$I=\int_1^e\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)}\right)dx$$

- Tính $I_1=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ta được kết quả $I_1=2\left(\sqrt{e}-1\right)$

- Đặt $\ln x = t$ ta được $dt = \dfrac{dx}{x}$
- Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = e \Rightarrow t = 1$
- Khi đó $K_2 = \int\limits_0^1 \dfrac{2t+1}{t+1} dt = \left(2t - \ln\left(t+1\right)\right)\Big|_0^1 = 2 - \ln 2$
- Vậy ta được $I = I_1 + I_2 = 2\sqrt{e} - \ln 2$

**Câu 23.** Tính các tích phân sau $I = \int\limits_0^{\ln 2} \left( x + \dfrac{1}{2e^x + 1} \right) dx$

$I = \int\limits_0^{\ln 2} \left( x + \dfrac{1}{2e^x + 1} \right) dx$

- Tính $I_1 = \int\limits_0^{\ln 2} x dx$ ta được kết quả $I_1 = \dfrac{1}{2} \ln^2 2$
- Tính $I_2 = \int\limits_0^{\ln 2} \dfrac{1}{2e^x + 1} dx$
- Đặt $e^x = t$ ta được $e^x dx = dt$
- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$
- Khi đó $I_2 = \int\limits_1^2 \dfrac{dt}{t\left(2t+1\right)} = \left(\ln t - \ln\left(2t+1\right)\right)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln \dfrac{5}{3} = \ln \dfrac{6}{5}$

Vậy ta được $L = L_1 + L_2 = \dfrac{1}{2} \ln^2 2 + \ln \dfrac{6}{5}$

**Câu 24.** Tính các tích phân $I = \int\limits_1^e x \ln x dx$

$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$I = \dfrac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \dfrac{x}{2} dx = \dfrac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \dfrac{x^2}{4} \Big|_1^e = \dfrac{e^2 + 1}{4}$

**Câu 25.** Tính các tích phân $I = \int\limits_0^1 x e^x dx$

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$. $I = x e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$

**Câu 26.** Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 2}{{{\left( {{e}^{x}}-1 \right)}^{2}}{{e}^{x}}dx}$.

Đặt $t={{e}^{x}}-1\Rightarrow dt={{e}^{x}}dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\ln 2 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \end{cases}$

Suy ra: $I=\int\limits_0^1{{{t}^{2}}dt}=\left. \frac{{{t}^{3}}}{3} \right|_0^1=\frac{1}{3}$

Vậy $I=\frac{1}{3}$.

**Câu 27.** Tính tích phân $I=\int\limits_1^e{\frac{\sqrt{4+5\ln x}}{x}dx}$.

Đặt $t=\sqrt{4+5\ln x}\Leftrightarrow {{t}^{2}}=4+5\ln x\Rightarrow 2tdt=\frac{5}{x}dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=e \\ x=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=2 \end{cases}$

Suy ra: $I=\frac{2}{5}\int\limits_2^3{{{t}^{2}}dt}=\left. \frac{2}{15}{{t}^{3}} \right|_2^3=\frac{2}{15}\left( {{3}^{3}}-{{2}^{3}} \right)=\frac{38}{15}$

Vậy $I=\frac{38}{15}$.

**Câu 28.** Tính tích phân $I=\int\limits_1^2{\frac{{{x}^{2}}+2\ln x}{x}dx}$ .

Ta có: $I=\int\limits_1^2{xdx}+2\int\limits_1^2{\frac{\ln x}{x}dx}$

- $\int\limits_0^2{xdx}=\left. \frac{{{x}^{2}}}{2} \right|_1^2=\frac{3}{2}$

Tính $\int\limits_1^2{\frac{\ln x}{x}dx}$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t=\ln 2 \\ t=0 \end{cases}$

Suy ra: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^{\ln 2} t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$

Vậy $I = \frac{3}{2} + \ln^2 2$.

**Câu 29.** Tính tích phân $I = \int_0^1 (2e^{x^2} + e^x)xdx$.

Ta có: $I = \int_0^1 2xe^{x^2} dx + \int_0^1 xe^x dx$.

- $I1 = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e - 1.$
- $I2 = \int_0^1 xe^x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = exdx$

$dv = exdx \Rightarrow v = ex.$

Suy ra: $I2 = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = 1.$

Vậy $I = e - 1 + 1 = e.$

**Câu 30.** Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{x^2 - 1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x + \frac{1}{x} \end{cases}$

Suy ra: $I = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \Big|_1^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$

$= \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$

Vậy $I = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$.

## 4.4. Tích phân hàm lượng giác

**Câu 1.** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2 x)\cos x dx.$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2 x)\cos x dx=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx}_{M}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx}_{N}.$$

Tính M

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\sin x\end{cases}$

$$M=x\sin x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.=\frac{\pi}{2}-1.$$

Tính N

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

$x=0\Rightarrow t=0$

$$N=\int_0^1 t^2 dt=\frac{t^3}{3}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.=\frac{1}{3}.$$

Vậy $I=M+N=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}.$

**Câu 2. .**Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos^2 x dx$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x dx$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x dx=\frac{x^2}{2}\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.=\frac{\pi^2}{8}$$

$$+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x dx=x\sin 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=\frac{1}{4}c\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.=0$$

$$I=\frac{\pi^2}{8}$$

**Câu 3.** Tính tích phân I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos^2 x)\sin x dx$.

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx$. Đặt $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}\Rightarrow I_1=-x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x d(\cos x)=-\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$.

Vậy $I=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

**Câu 4.** Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(1+\cos x)xdx$

$I=\int_0^{\pi}(1+\cos x)xdx=\int_0^{\pi}xdx+\int_0^{\pi}x\cos xdx$

- Với $I_1=\int_0^{\pi}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{\pi^2}{2}$
- Với $I_2=\int_0^{\pi}x\cos xdx$
- Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\sin x\end{cases}$. Thay vào công thức tích phân từng phần ta được:

$I_2=x\sin x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=0-(-\cos x)|_0^{\pi}=\cos x|_0^{\pi}=\cos\pi-\cos 0=-2$

- Vậy, $I=I_1+I_2=\frac{\pi^2}{2}-2$

**Câu 5.** Tính Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$,

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$I = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

**Câu 6 .** Tính tích phân sau: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)^2} dx$

+ Ta có: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

+ Do đó: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} d\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}\ln\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\ln 3$

**Câu 7.** Tính các tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.\sin^3 x.dx$

Tính các tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.\sin^3 x.dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^4 x.\cos x.dx$.

Đặt t=sinx => dt=cosxdx

▪ $I = \int_0^1 2t^4 dt = \quad 2\frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$.

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x) = \tan x\left(2\cot x - \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x\right)$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. Tìm nguyên hàm $F(x)$của hàm số đã cho.

**Tìm nguyên hàm** $F(x)$

$F(x) = \int \tan x\left(2\cot x - \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x\right)dx = \int \left(2 - \sqrt{2}\sin x + \sin 2x\right)dx$

$= 2x + \sqrt{2}\cos x - \frac{\cos 2x}{2} + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = -1$

Vậy $F(x) = 2x + \sqrt{2}\cos x - \frac{\cos 2x}{2} - 1$

**Câu 9.** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x - 1 - \sin x\right) dx$ .

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x - 1 - \sin x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = A - B - C$

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x.dx = x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$; $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Vậy $I = A - B + C = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - 1}$

**Câu 10.** Tính tích phân $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx$

$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$

. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \frac{1}{\cos^2 x} dx = I_1$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$\mathrm{I}_1 = x \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$ .

Vậy $\mathrm{I} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} - \frac{\pi^2}{32}$ .

**Câu 11.** Tính nguyên hàm $I = \int \left(x - 2\right)\sin 3x dx$

Tính nguyên hàm $I = \int \left(x - 2\right)\sin 3x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = \sin 3x dx \end{cases}$, ta được $\begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{cases}$

Do đó: $I = -\frac{\left(x - 2\right)\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{\left(x - 2\right)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$

**Câu 12.** Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)dx$

$I=\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)dx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_0^{\pi}\cos xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\sin x\Big|_0^{\pi}=2$

**Câu 13.** Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}(x-\sin 2x)dx$

$I=\int_0^{\pi}(x-\sin 2x)dx=\int_0^{\pi}xdx-\int_0^{\pi}\sin 2xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$

**Câu 14.** Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}(1-\sin^3 x)\cos xdx$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3 x)\cos xdx$

- Đặt $\sin x=t\Rightarrow dt=\cos xdx$
- Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$
- Khi đó $I=\int_0^1(1-t^3)dt=\left(t-\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{4}$

**Câu 15.** Tính tích phân sau $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$

- Đặt $\cot x=t\Rightarrow dt=\frac{-1}{\sin^2 x}dx$
- Đổi cận $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\sqrt{3};x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$

Khi đó $I=\int_1^{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2dt=\int_1^{\sqrt{3}}\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)dt=\left(t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{27}+\frac{4}{3}$

**Câu 16.** Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\pi}(\sin x+x)\sin xdx$

$I=\int_0^{\pi}(\sin x+x)\sin x dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx+\int_0^{\pi}x\sin x dx$

- Đặt $I_1=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\pi$
- $I_2=\int_0^{\pi}x\sin x dx$
- $\begin{cases}u=x\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$
- $I_2=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx \ =\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi$

Khi đó $I=\frac{3}{2}\pi$

**Câu 17.** Tính các tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$

$I=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx \ =0-0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

**Câu 18.** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)\sin 2x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\dv=\sin 2x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

Suy ra: $I=-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}$

Vậy $I=\frac{3}{4}$.

**Câu 19.** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ 1+\sin 2x\ dx$.

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx=\frac{\pi^2}{32}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx=-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}$

Vậy $I=\frac{\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$.

## 4.5. Ứng dụng của tích phân

**Câu 1.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{e^x+1}$ ,trục hoành, x = ln3 và x = ln8.

Diện tích $S=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{e^x+1}dx$ ; Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Leftrightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow e^x=t^2-1$

Khi x = ln3 thì t = 2 ; Khi x = ln8 thì t = 3; Ta có 2tdt = $e^x$dx $\Leftrightarrow$ $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

Do đó $S=\int\limits_2^3\frac{2t^2}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt=$

$=\left(2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (đvdt)

**Câu 2.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại (-1; 0). Do đó $S=\int\limits_{-1}^{0}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|dx$

Ta có $S=\left|\int\limits_{-1}^{0}\frac{x+1}{x-2}dx\right|=\left|\int\limits_{-1}^{0}(1+\frac{3}{x-2})dx\right|$

$=\left|(x+3\ln|x-2|)\Big|_{-1}^{0}\right|=\left|1+3\ln\frac{2}{3}\right|=3\ln\frac{3}{2}-1$

**3.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=(x-1)\ln x$ và đường thẳng $y=x-1$.

+) Xét phương trình: (x-1)lnx = x-1 x = 1 hoặc x = e.

+ Diện tích cần tìm là:

$S=\int\limits_1^e|(x-1)(\ln x-1)|dx=\left|\int\limits_1^e(x-1)(\ln x-1)dx\right|=\left|\int\limits_1^e(\ln x-1)d(\frac{x^2}{2}-x)\right|=$

$=\left|(\frac{x^2}{2}-x)(\ln x-1)\,|_1^e-\int\limits_1^e(\frac{x}{2}-1)dx\right|=\left|-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}x^2-x\right)|_1^e\right|$

$=\frac{e^2-4e+5}{4}$ (đvdt).

**Câu 4.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng x=0, x=2.

$y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng x= 0, x=2.

Trên [0; 2] ta có $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [0;2]$

Diện tích của hình phẳng đã cho:

$$S = \int_0^2 \left|x^2\right| dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

**Câu 5.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau $y = x^2$ , $y = -2x + 3$ và hai đường thẳng x =0, x=2.

Đặt $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -2x + 3$

Ta có: $f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-2x+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -3 \notin [0;2] \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng đã cho

$$S = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3|\, dx$$

$$= \left|\int_0^1 (x^2 + 2x - 3)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 + 2x - 3)dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_0^1\right| + \left|\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3} - 2\right| + \left|\frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3\right| = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4$$

**Câu 6.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau $y = x^2$, $y = x + 2$

Ta có: $x^2 - (x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2|\, dx = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^2\right| = \left|\frac{8}{3} - 2 - 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right| = \frac{9}{2}$$

**Câu 7.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây:

$$y = x^3 - 4x^2 + 3x - 1 \text{ và } y = -2x + 1.$$

Cho $x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = -2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

• Diện tích cần tìm là: $S = \int_1^2 \left|x^3 - 4x^2 + 5x - 2\right| dx$

hay $S = \left|\int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2\right| = \left|-\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12}$ (đvdt)

**Câu 8.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)$: $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và đường thẳng $\Delta$: $y = -x - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $\Delta$ là:

$$-x^3 + 3x^2 - 4 = -x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng phải tìm:

$$S = \int_{-1}^{3} \left|\left(-x^3 + 3x^2 - 4\right) - \left(-x - 1\right)\right| dx = \int_{-1}^{3} \left|-x^3 + 3x^2 + x - 3\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left|-x^3 + 3x^2 + x - 3\right| dx + \int_{1}^{3} \left|-x^3 + 3x^2 + x - 3\right| dx$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} \left(-x^3 + 3x^2 + x - 3\right) dx\right| + \left|\int_{1}^{3} \left(-x^3 + 3x^2 + x - 3\right) dx\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-1}^{1}\right| + \left|\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{1}^{3}\right|$$

$$= \left|-4\right| + \left|4\right| = 8 \text{ (đvdt)}$$

**Câu 9.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1).(x^2 - 2x)$ với trục hoành.

Ta có

$$(x-1).(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Do đó diện tích cần tìm là

$$S=\int_0^2\left|(x-1).(x^2-2x)\right|dx$$

$$=\int_0^1\left|(x-1).(x^2-2x)\right|dx+\int_1^2\left|(x-1).(x^2-2x)\right|dx$$

$$=\int_0^1(x-1).(x^2-2x)dx-\int_1^2(x-1).(x^2-2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-2x)d(x^2-2x)-\frac{1}{2}\int_1^2(x^2-2x)d(x^2-2x)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(x^2-2x)^2\Big|_0^1-(x^2-2x)^2\Big|_1^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}[1-(0-1)]$$

$$=\frac{1}{2}.$$

**Câu 10.** Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình (D) quanh trục Ox biết (D) giới hạn bởi $y=1-x^2,\ y=0$

Ta có: $1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Áp dụng công thức: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Ta có: $V=\pi\int_{-1}^1(1-x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^1\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1$

$$=\pi\left[\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{16\pi}{15}$$

**Câu 11.** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=\sqrt{x}\sin x$, các trục Ox, Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

V= $\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{x}\sin x)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x.\sin^2xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x.\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos2xdx\right)$

+ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$.

+ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos2xdx$. Đặt từng phần u = x, dv = cos 2xdx. Ta có du = dx, v = $\frac{1}{2}\sin2x$.

Từ đó, tính được $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. Do đó, V = $\frac{\pi}{64}(\pi^2 - 4\pi + 8)$.

**Câu 12.** Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường y = tanx ; y=0 ; x=0; x = $\frac{\pi}{4}$ quanh trục Ox.

Gọi V là thể tích của vật thể cần tìm:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \quad = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx \ = \pi(\tan x - 1)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi(1 - \frac{\pi}{4})$$

**Câu 13.** Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 1$,y =0,x =0,x =1 khi quay xung quanh trục Ox.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x^3 + 1$ và y=0:

$$x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [0;1]$$

Gọi V là thể tích của vật thể cần tìm:

$$V = \pi \int_0^1 (x^3 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1)dx = \pi \left( \frac{x^7}{7} + \frac{1}{2}x^4 + x \right)\Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{23}{14}\pi \ (đvtt)$$

# PHẦN 5. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

## 5.1. Bài toán đếm

**Câu 1.** Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và số đó chia hết cho 3?

Số có 5 chữ số cần lập là $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$; a, b, c, d, e $\in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$)

$\overline{abcde} \vdots 3 \Leftrightarrow (a+b+c+d+e) \vdots 3$

- Nếu $(a+b+c+d) \vdots 3$ thì chọn e = 0 hoặc e = 3
- Nếu $(a+b+c+d)$ chia 3 dư 1 thì chọn e = 2 hoặc e = 5
- Nếu $(a+b+c+d)$ chia 3 dư 2 thì chọn e = 1 hoặc e = 4

Như vậy với mỗi số $\overline{abcd}$ đều có 2 cách chọn e để được một số có 5 chữ số chia hết cho 3

Số các số dạng $\overline{abcd}$ lập được từ tập A là: 5x6x6x6= 1080 số

Số các số cần tìm là 2 x 1080 = 2160 số

**Câu 2.** Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8.

Giả sử số cần lập có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$

Theo đề $a_3 + a_4 + a_5 = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_3, a_4, a_5 \in \{1;2;5\} \\ a_3, a_4, a_5 \in \{1;3;4\} \end{array}\right.$.

TH1: $a_3, a_4, a_5 \in \{1;2;5\}$.

Có 6 cách chọn $a_1$; 5 cách chọn $a_2$; 3! Cách chọn $a_3$,$a_4$,$a_5$ và 4 cách chọn $a_6$

Vậy có 6.5.3!.4=720 số

TH2: $a_3, a_4, a_5 \in \{1;3;4\}$. Tương tự có 720 số

Vậy có 1440 số thỏa đề.

**Câu 3.** Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3.

-Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$

-Tìm số các số có 5 chữ số khác nhau mà có mặt 0 và 3 không xét đến vị trí a.

Xếp 0 và 3 vào 5 vị trí có: $A_5^2$ cách

3 vị trí còn lại có $A_4^3$ cách

Suy ra có $A_5^2 A_4^3$ số

-Tìm số các số có 5 chữ số khác nhau mà có mặt 0 và 3 với a = 0.

Xếp 3 có 4 cách

3 vị trí còn lại có $A_4^3$ cách

Suy ra có $4.A_4^3$ số

Vậy số các số cần tìm tmycbt là: $A_5^2 A_4^3 - 4.A_4^3 = 384$

**Câu 4.** Cho tập A= {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau chọn trong A sao cho số đó chia hết cho 15.

Nhận xét: Số chia hết cho 15 thì chia hết 3 và chia hết 5.

- Các bộ số gồm 5 số có tổng chia hết cho 3 là: (0; 1; 2; 3; 6), (0; 1; 2; 4; 5), (0; 1; 3; 5; 6), (0; 2; 3; 4; 6), (0; 3; 4; 5; 6),(1; 2; 3; 4; 5), (1; 2; 4; 5; 6).
- Mỗi số chia hết cho 5 khi và chỉ khi số tận cùng là 0 hoặc 5.

+ Trong các bộ số trên có 4 bộ số có đúng một trong hai số 0 hoặc 5 $\Rightarrow 4.P_4 =$ 96 số chia hết cho 5

+ Trong các bộ số trên có 3 bộ số có cả 0 và 5.

Nếu tận cùng là 0 thì có $P_4$= 24 số chia hết cho 5.

Nếu tận cùng là 5 vì do số hàng chục nghìn không thể là số 0, nên có $3.P_3$=18 số chia hết cho 5.

Trong trường hợp này có: $3(P_4+3P_3)$ = 126 số.

Vậy số các số theo yêu cầu bài toán là: 96 + 126 = 222 số.

**Câu 5.** Một hộp đựng 5 viên bi trắng, 3 viên bi xanh. **Lấy ngẫu nhiên 2 bi**.

a) Có bao nhiêu cách lấy được 2 bi ?

b) Có bao nhiêu cách lấy được 2 bi trắng ?

c) Có bao nhiêu cách lấy được 1 bi trắng, 1 bi xanh ?

a) Có $C_8^2 = 28$ cách lấy

b) Có $C_5^2 = 10$ cách lấy

c) Có $C_5^1 C_3^1 = 15$ cách lấy

**Câu 6.** Một hộp đựng 5 viên bi trắng, 3 viên bi xanh. **Lấy lần lượt 2 bi.**

a) Có bao nhiêu cách lấy được 2 bi ?

b) Có bao nhiêu cách lấy được 2 bi trắng ?

c) Có bao nhiêu cách lấy được 1 bi trắng, 1 bi xanh ?

a) Có $C_8^1 C_7^1 = 56$ cách lấy (hoặc $A_8^2 = 56$)

b) Có $C_5^1 C_4^1 = 20$ cách lấy (hoặc $A_5^2 = 20$)

c) Có $C_5^1 C_3^1 + C_3^1 C_5^1 = 30$ cách lấy

**Câu 7.** Một hộp đựng 5 viên bi trắng, 6 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 bi.

a) Có bao nhiêu cách lấy được 4 bi ?
b) Có bao nhiêu cách lấy được 4 bi có đủ cả ba màu ?

a) Có $C_{18}^4 = 3060$ cách lấy

b) Có $C_5^2C_6^1C_6^1 + C_5^1C_6^2C_7^1 + C_5^1C_6^1C_7^2 = 1575$ cách lấy

**Câu 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong mỗi số đều có mặt các chữ số 8 và 9 ?

Giả sử số cần lập là $\overline{abcd}, d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Xét các trường hợp sau

- $d = 0$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có các chữ số 8 và 9 là $C_7^1.3! = 42$.
- $d = 8$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có chữ số 9 là $C_8^2.3! - C_7^1.2! = 154$.
- $d \in \{2, 4, 6\}$. Số cách lập $\overline{abc}$ trong đó có các chữ số 8 và 9 là $3.\left(C_7^1.3! - 2\right) = 120$.

Vậy số các số lập được là $42 + 154 + 120 = 316$.

**Câu 9.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số đầu và chữ số cuối của mỗi số đó đều là số chẵn?

+ Chữ số đầu tiên là chữ số chẵn, khác 0 nên có 4 cách chọn.

+ Chữ số tận cùng cũng là chữ số chẵn, khác với chữ số đầu tiên nên cũng có 4 cách chọn.

+ Ba chữ số ở giữa có số cách sắp xếp là $A_8^3$.

Suy ra số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $4 \times 4 \times A_8^3 = 5376$.

**Câu 10.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và ba chữ số lẻ.

Từ giả thiết bài toán ta thấy có $C_5^2 = 10$ cách chọn 2 chữ số chẵn (kể cả số có chữ số 0 đứng đầu) và $C_5^3 = 10$ cách chọn 2 chữ số lẽ => có $C_5^2 . C_5^3 = 100$ bộ 5 số được chọn.

Mỗi bộ 5 số như thế có 5! số được thành lập => có tất cả $C_5^2 . C_5^3 .5! = 12000$ số.

Mặt khác số các số được lập như trên mà có chữ số 0 đứng đầu là $C_4^1.C_5^3.4! = 960$.

Vậy có tất cả 12000 – 960 = 11040 số thỏa mãn bài toán.

**Câu 11.** Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh.

Tổng số cách chọn 6 học sinh trong 12 học sinh là $C_{12}^6$

Số học sinh được chọn phải thuộc ít nhất 2 khối

Số cách chọn chỉ có học sinh khối 12 và khối 11 là: $C_7^6$

Số cách chọn chỉ có học sinh khối 11 và khối 10 là: $C_9^6$

Số cách chọn chỉ có học sinh khối 12 và khối 10 là: $C_8^6$

Số cách chọn thoả mãn đề bài là: $C_{12}^6 - C_7^6 - C_9^6 - C_8^6 = 805$ (cách)

**Câu 12.** Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD lần lượt cho 1, 2, 3 và n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n biết số tam giác có ba đỉnh lấy từ n + 6 điểm đã cho là 439.

Nếu n ≤ 2 thì n + 6 ≤ 8. Do đó số tam giác có ba đỉnh được lấy từ n + 6 điểm đó không vượt qua $C_8^3 = 56 < 439$ (loại). Vậy n ≥ 3

Vì mỗi tam giác được tạo thành ứng với 1 tổ hợp 3 chập n + 6 phần tử. Nhưng trên cạnh CD có 3 đỉnh, trên cạnh DA có n đỉnh nên số tam giác tạo thành là:

$$C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{6} - 1 - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 439$$

$\Leftrightarrow$ (n + 4)(n + 5)(n + 6) – (n – 2)(n – 1)n = 2540

$\Leftrightarrow$ $n^2 + 4n - 140 = 0$

Từ đó tìm được n = 10.

**C âu 13.** Trong mp có bao nhiêu hình chữ nhât được tạo thành từ 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng vuông góc với 6 đường thẳng song song đó.

Gọi A là tập hợp gồm 6 đường thẳng song song

B là tập hợp gồm 8 đường thẳng vuông góc

Mỗi hình chữ nhật được tạo thành gồm 2 đường thẳng trong tập hợp A và 2 đường thẳng trong tập hợp B.

Như vậy số hình chữ nhật được tạo thành là $C_8^2.C_6^2 = 420$

**Câu 14.** Trong không gian cho $n$ điểm phân biệt $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$, trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Tìm $n$, biết rằng số tứ diện có đỉnh là 4 trong $n$ điểm đã cho nhiều gấp 4 lần số tam giác có đỉnh là 3 trong $n$ điểm đã cho.

Số tứ diện có đỉnh là 4 trong n điểm đã cho là $C_n^4$, số tam giác có đỉnh là 3 trong n điểm đã cho là $C_n^3$.

Theo giả thiết, ta có

$$C_n^4 = 4C_n^3 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 4.\frac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow n - 3 = 16 \Leftrightarrow n = 19.$$

## 5.2. Nhị thức Newton

**Câu 1.** Giải phương trình: $C_n^1+3C_n^2+7C_n^3+...+(2^n-1)C_n^n=3^{2n}-2^n-6480$

$C_n^1+3C_n^2+7C_n^3+...+(2^n-1)C_n^n=3^{2n}-2^n-6480$

Xét $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1.x+C_n^2.x^2+C_n^3.x^3+...+C_n^n.x^n$

- Với x = 2 ta có: $3^n=C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+8C_n^3+...+2^nC_n^n$ (1)

Với x = 1 ta có: $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+...+C_n^n$ (2)

- Lấy (1) – (2) ta được: $C_n^1+3C_n^2+7C_n^3+...+(2^n-1)C_n^n=3^n-2^n$

• PT $\Leftrightarrow 3^n-2^n=3^{2n}-2^n-6480\Leftrightarrow 3^{2n}-3^n-6480=0\Rightarrow 3^n=81\Leftrightarrow n=4$

**Câu 2.** Giải phương trình $C_x^x+2C_x^{x-1}+C_x^{x-2}=C_{x+2}^{2x-3}$ ($C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử)

ĐK : $\begin{cases}2\le x\le 5\\ x\in N\end{cases}$

Ta có $C_x^x+C_x^{x-1}+C_x^{x-1}+C_x^{x-2}=C_{x+2}^{2x-3}\Leftrightarrow C_{x+1}^x+C_{x+1}^{x-1}=C_{x+2}^{2x-3}\Leftrightarrow C_{x+2}^x=C_{x+2}^{2x-3}$

$\Leftrightarrow (5-x)!=2!\Leftrightarrow x=3$

**Câu 3.** Tính tổng $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

**Tính tổng** $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$

Ta có $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: $\frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

$$(n+1)(n+2)S=-C_{n+2}^3+2C_{n+2}^4-3C_{n+2}^5+...+(-1)^n nC_{n+2}^{n+2}$$
$$=-\left(C_{n+1}^2+C_{n+1}^3\right)+2\left(C_{n+1}^3+C_{n+1}^4\right)-3\left(C_{n+1}^4+C_{n+1}^5\right)+...+(-1)^n nC_{n+1}^{n+1}$$
$$=-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}$$

$$=C_{n+1}^0-C_{n+1}^1-\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+C_{n+1}^4-C_{n+1}^5+...+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)=$$

$1-(n+1)-(1-1)^{n-1}=-n$

Vậy $S=\frac{-n}{(n+1)(n+2)}$.

**Câu 4.** Cho khai triển đa thức: $(1-2x)^{2013} = a_o + a_1x + a_2.x^2 + ... + a_{2013}.x^{2013}$

Tính tổng: $S = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + ... + 2014|a_{2013}|$

Ta có: $\left(x(1-2x)^{2013}\right)' = a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2 + ... + 2014a_{2014}x^{2013}$.

$\Leftrightarrow (1-2x)^{2013} - 4026x(1-2x)^{1012} = a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2 + ... + 2014a_{2013}x^{2013}$ (*).

Nhận thấy: $a_kx^k = |a_k|(-x)^k$ do đó thay $x = -1$ vào cả hai vế của (*) ta có:

$S = |a_0| + 2|a_1| + 3|a_2| + ... + 2014|a_{2013}| = 1343.3^{2213}$

**Câu 5.** Tính giá trị biểu thức: $A = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + 12C_{100}^6 + ... + 200C_{100}^{100}$.

Ta có: $(1+x)^{100} = C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + ... + C_{100}^{100}x^{100}$ (1)

$(1-x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 - C_{100}^3x^3 + ... + C_{100}^{100}x^{100}$ (2)

Lấy (1)+(2) ta được: $(1+x)^{100} + (1-x)^{100} = 2C_{100}^0 + 2C_{100}^2x^2 + 2C_{100}^4x^4 + ... + 2C_{100}^{100}x^{100}$

Lấy đạo hàm hai vế theo ẩn x ta

được: $100(1+x)^{99} - 100(1-x)^{99} = 4C_{100}^2x + 8C_{100}^4x^3 + ... + 200C_{100}^{100}x^{99}$

Thay x=1 vào => $A = 100.2^{99} = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + ... + 200C_{100}^{100}$

## 5.3. Hệ số khai triển nhị thức

**Câu 1.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^6$ trong khai triển của: $x^3\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết tổng các hệ số trong khai triển trên bằng $4096$ ( trong đó n là số nguyên dương và $x>0$ ).

Xét khai triển :

$$x^3\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n = x^3\left(\frac{1}{x^3}+x^{\frac{5}{2}}\right)^n$$

$$= x^3\left[C_n^0\left(\frac{1}{x^3}\right)^n + C_n^1\left(\frac{1}{x^3}\right)^{n-1}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)+...+C_n^k\left(\frac{1}{x^3}\right)^{n-k}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^k+...+C_n^n\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^n\right]$$

Thay $x=1$ vào khai triển ta được:

$$2^n=\left[C_n^0+C_n^1+...+C_n^k+...+C_n^n\right]$$

Theo giả thiết ta có:

$$C_n^0+C_n^1+...+C_n^k+...+C_n^n=4096 \quad \Leftrightarrow 2^n=2^{12}\Leftrightarrow n=12$$

Với $n=12$ ta có khai triển: $x^3\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x^5}\right)^{12}$

Gọi số hạng thứ $k+1\left(0\le k\le 12, k\in Z\right)$ là số hạng chứa $x^6$ .

Ta có : $T_{k+1}=x^3C_{12}^k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x^5}\right)^k=C_{12}^k x^{2k-21+\frac{5k}{2}}$

Vì số hạng có chứa $x^6$ nên : $2k-21+\frac{5k}{2}=6\Leftrightarrow k=\frac{2(21+6)}{9}=6$.

Với $k=6$ ta có hệ số cần tìm là : $C_{12}^6=924$.

**Câu 2.** Tìm hệ số của $x^4$ trong khai triển Niutơn của biểu thức : $P=(1+2x+3x^2)^{10}$.

+ Ta có $P=(1+2x+3x^2)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(2x+3x^2)^k=\sum_{k=0}^{10}(\sum_{i=0}^{k}C_{10}^kC_k^i2^{k-i}3^ix^{k+i})$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}k+i=4\\0\le i\le k\le 10\\i,k\in N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i=0\\k=4\end{cases}\vee\begin{cases}i=1\\k=3\end{cases}\vee\begin{cases}i=2\\k=2\end{cases}$

+Vậy hệ số của $x^4$ là: $C_{10}^4 2^4+C_{10}^3C_3^1 2^2 3+C_{10}^2C_2^2 3^2=8085$.

**Câu 3.** Cho số nguyên dương n thỏa điều kiện $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n-1}=1023$ . Tìm hệ số của $x^{13}$ trong khai triển $(x+3)^{3n}$

Đặt S = $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$

Ta có $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n1}^2+...+C_{2n+1}^{2n}$

Do đó $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n+1}=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}.2^{n+1}=2^n$

=> $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n-1}=2^n-C_{2n+1}^{2n+1}=2^n-1$

Vậy $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^{2n-1}=1023<=>2^n-1=1023<=>n=5$

Với n=5 , ta có $(x+3)^{3n}=(x+3)^{15}\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{15-k}3^{15-k}x^k$ .

Vậy hệ số của $x^{13}$ trong khai triển $(x+3)^{15}$ là $3^2.C_{15}^{13}=945$

**Câu 4.** Tìm hệ số của $x^9$ trong khai triển $2-3x^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}=4096$.

Ta có

$1+x^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

Cho x=1, ta có $2^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n+1}$ (1)

Cho x= -1, ta có : $0=C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2-...-C_{2n+1}^{2n+1}$ (2)

Lấy (1) trừ (2), ta được : $2^{2n+1}=2\ C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}$

$\Leftrightarrow\ 2^{2n}=C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}$

Từ giả thiết ta có $2^{2n}=4096\Leftrightarrow 2^{2n}=2^{12}\Leftrightarrow 2n=12$

Do đó ta có $2-3x^{12}=\sum_{k=0}^{12}(-1)^kC_{12}^k2^{12-k}(3x)^k$ ( $0\le k\le 12$, k nguyên)

$\Rightarrow$ hệ số của $x^9$ là : $-C_{12}^9 3^9 2^3$.

**Câu 5.** $(3x+1)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k+...+a_{2n}x^{2n}$, $(k,n\in N;0\le k\le 2n)$

Biết rằng: $a_0-a_1+a_2-...+(-1)^k a_k+...+a_{2n}=4096$. Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển.

Ta có:

$(3x+1)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k+...+a_{2n}x^{2n}$

Thay x = -1, ta có: (-2)2n = a0 – a1 + a2 - … + (-1)kak +…+ a2n

Từ giả thiết suy ra: (-2)2n = 4096 $\Rightarrow$ n = 6

Với n = 6, ta có khai triển:

$(1+3x)^{12}=C_{12}^0+C_{12}^1.(3x)+C_{12}^2(3x)^2+...+C_{12}^{12}(3x)^{12}$

$\Rightarrow$ Hệ số của x8 trong khai triển là: $C_{12}^8.3^8$

**Câu 6.** Cho n là số nguyên dương thỏa $4C_{n+1}^{n-1} < 2C_n^2 + 25n - 120$

Tìm hệ số của số hạng chứa $x^7$ trong khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$, (x > 0)

$\bullet 4C_{n+1}^{n-1} < 2C_n^2 + 25n - 120 \Leftrightarrow 4\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} < 2\frac{n!}{2!(n-2)!} + 25n - 120$

$\Leftrightarrow 2n(n+1) < (n-1)n + 25n - 120 \Leftrightarrow n^2 - 22n + 120 < 0 \Leftrightarrow 10 < n < 12$

Mà n nguyên dương nên n = 11

$\bullet \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ có số hạng tổng quát là:

$T_{k+1} = (-1)^k C_{11}^k x^{22-2k} \frac{2^k}{x^{k/2}} = (-1)^k C_{11}^k 2^k x^{\frac{44-5k}{2}}$

$T_{k+1}$ là số hạng chứa $x^7$ khi $\frac{44-5k}{2} = 7 \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow T_7 = C_{11}^6 2^6 x^7$

$\Rightarrow$ Hệ số cần tìm là: $C_{11}^6 2^6$

**Câu 7.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{10}$ trong khai triển biểu thức $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^4 = 13C_n^{n-2}$.

Điều kiện $\begin{cases} n \geq 3 \\ n \in N \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = 13.\frac{n!}{(n-2)!2!}$$

Vậy $n = 15. \Leftrightarrow n^2 - 5n - 150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 15(t/m) \\ n = -10(l) \end{array}\right.$

Với n = 15 ta có

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(x^3\right)^{15-k} . \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^k . x^{45-5k}$$

Để trong khai triển đã cho có số hạng chứa $x^{10}$ thì $45 - 5k = 10 \Rightarrow k = 7(t/m)$

Vậy hệ số của $x^{10}$ trong khai triển đã cho là $C_{15}^7 . (-1)^7 = -6435$.

**Câu 8.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển : $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{14}$.

Tìm hệ số của số hạng chứa $x^5$ trong khai triển : $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{14}$.

$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{14}=\left(x+2x^{-2}\right)^{14}=\sum C_{14}^{k}x^{14-3k}.2^{k}$

số hạng chứa $x^5$ trong khai triển ứng với k thoả mãn 14 - 3k = 5 => k=3

Hệ số cần tìm là $C_{14}^{3}2^{3}=2912$

**Câu 9.** Tìm số hạng chứa $x^3$ trong khai triển của $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^9$.

Ta có $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k x^{9-k}\left(\frac{-2}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}C_9^k x^{9-3k}(-2)^k$

Số hạng chứa $x^3$ tương ứng giá trị k thoả mãn $9-3k=3\Leftrightarrow k=2$

Suy ra số hạng chứa $x^3$ bằng $C_9^2x^3(-2)^2=144x^3$

**Câu 10.** Tìm số hạng chứa $x^4$ trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ với $x\neq 0$, biết rằng: $C_n^1+C_n^2=15$ với n là số nguyên dương.

Ta có $C_n^1+C_n^2=15\Leftrightarrow C_{n+1}^2=15\Leftrightarrow\frac{n(n+1)}{2}=15$

$\Leftrightarrow n^2+n-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\ (\text{t/m})\\n=-6\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Với n = 5 và $x\neq 0$ ta có $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k(x^2)^k(-\frac{2}{x})^{5-k}=\sum_{k=0}^{5}C_5^k x^{3k-5}(-2)^{5-k}$

Số hạng chứa $x^4$ trong khai triển trên thỏa mãn $3k-5=4\Leftrightarrow k=3$, suy ra số hạng chứa $x^4$ trong khai triển trên là $40x^4$.

**Câu 11.** Tìm số hạng chứa $x^3$ trong khai triển nhị thức Niu - tơn của biểu thức $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$, $x>0$. Trong đó $n$ là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2-2C_n^1=180$.

- ĐK: $n\in\mathbb{N},n\geq 2$

- Khi đó: $A_n^2-2C_n^1=180\Leftrightarrow n^2-3n-180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=15\\n=-12\end{array}\right.\xrightarrow{DK}n=15$

- Khi n = 15 ta có: $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(-1)^k2^k x^{\frac{15-3k}{2}}$

Mà theo bài ra ta có: $\frac{15-3k}{2}=3\Leftrightarrow k=3$

Do đó số hạng chứa $x^3$ trong khai triển trên là: $C_{15}^{3}(-1)^3 2^3 x^3=-3640x^3$

**Câu 12.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{12}$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{18}$

Khai triển nhị thức Niutơn ta có:

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{18}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.x^{18-k}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.\ -1\ ^{k}.x^{18-3k}$$

Chọn k thỏa mãn: $18-3k=12\Leftrightarrow k=2$

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^{12}$ trong khai triển là $-1\ ^{2}C_{18}^{2}=153.$

**Câu 13.** Tìm hệ số của số hạng không chứa $x$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{18}$

Khai triển nhị thức Niutơn ta có:

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{18}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.x^{18-k}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.\ -1\ ^{k}.x^{18-3k}$$

Chọn k thỏa mãn: $18-3k=0\Leftrightarrow k=6$

Vậy số hạng không chứa $x$ trong khai triển là $-1\ ^{6}C_{18}^{6}=18564.$

**Câu 14.** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{n}$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7\ n+3$ (1)

Giải phương trình (1) tìm n, ta có:

$$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7\ n+3\Leftrightarrow\frac{n+4\ !}{n+1\ !3!}-\frac{n+3\ !}{n!3!}=7\ n+3$$

$$\Leftrightarrow\ n+2\ \ n+3\ \ n+4\ -\ n+1\ \ n+2\ \ n+3\ =42\ n+3$$

$$\Leftrightarrow\ n+2\ \ n+4\ -\ n+1\ \ n+2\ =42$$

$\Leftrightarrow 3n+6=42\Leftrightarrow n=12$

Khai triển nhị thức Niutơn ta có:

$$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k.\left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-k}.\sqrt{x^5}^{\,k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k.x^{\frac{60-11k}{2}}$$

Chọn k thỏa mãn: $\frac{60-11k}{2}=8\Leftrightarrow k=4$

Vậy hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển là $C_{12}^4=495$.

**Câu 15.** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(2.x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, biết rằng $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=4n+6$

Giải phương trình $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=4n+6$; Điều kiện: $n\geq 2$ ; $n\in N$.

Phương trình tương đương với $n(n-1)-\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=4n+6$ $\Leftrightarrow$

$n(n-1)-\frac{n(n+1)}{2}=4n+6$

$\Leftrightarrow n^2-11n-12=0\Leftrightarrow$ n = - 1 (Loại) v n = 12.

Với n = 12 ta có nhị thức Niutơn: $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển là: $T_{k+1}=C_{12}^k(2x)^{12-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$ ; $k\in N$, $0\leq k\leq 12$

Hay $T_{k+1}=C_{12}^k(2x)^{12-k}.x^{-\frac{k}{2}}=C_{12}^k.2^{12-k}.x^{\frac{24-3k}{2}}$.

Số hạng này không chứa x khi $\begin{cases}k\in N,\ 0\leq k\leq 12\\24-3k=0\end{cases}\Leftrightarrow k=8$.

Vậy số hạng thứ 9 không chứa x là $T_9=C_{12}^8 2^4=7920$

**Câu 16.** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển $(x^2+2)^n$, biết: $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$.

Điều kiện $n\geq 4$. Ta có $\left(x^2+2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2k}2^{n-k}$

Hệ số của số hạng chứa $x^8$ là $C_n^4 2^{n-4}$

Hệ số của số hạng chứa $x^8$ là $C_n^4 2^{n-4}$

Ta có: $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$

$\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n-4(n-1)n+n=49$

$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow (n-7)(n^2+7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$

Nên hệ số của $x^8$ là $C_7^4 2^3 = 280$

**Câu 17.** Cho khai triển: $(1+2x)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2 = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{14} x^{14}$. Hãy tìm giá trị của $a_6$.

Ta có $x^2 + x + 1 = \frac{1}{4}(2x+1)^2 + \frac{3}{4}$ nên

$(1+2x)^{10}(x^2+x+1)^2 = \frac{1}{16}(1+2x)^{14} + \frac{3}{8}(1+2x)^{12} + \frac{9}{16}(1+2x)^{10}$

Trong khai triển $(1+2x)^{14}$ hệ số của $x^6$ là: $2^6 C_{14}^6$ ; Trong khai triển $(1+2x)^{12}$ hệ số của $x^6$ là: $2^6 C_{12}^6$

Trong khai triển $(1+2x)^{10}$ hệ số của $x^6$ là: $2^6 C_{10}^6$

Vậy hệ số $a_6 = \frac{1}{16}2^6 C_{14}^6 + \frac{3}{8}2^6 C_{12}^6 + \frac{9}{16}2^6 C_{10}^6 = 41748.$

**Câu 18.** Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Tìm số nguyên dương $n$ biết $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$.

Ta có $(1+2x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k$. Khi đó, suy ra $a_k = C_n^k 2^k$

Do đó, ta có $a_0 = C_n^0; a_1 = 2C_n^1; a_2 = 4C_n^2$

Vậy $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1 \Leftrightarrow C_n^0 + 16C_n^1 = 8C_n^2 + 1 \Leftrightarrow 1 + 16n = \frac{8n(n-1)}{2!} + 1$

$16n = 4n(n-1) \Leftrightarrow 4 = n - 1 (n > 0) \Leftrightarrow n = 5$

## 5.4. Xác suất

**Câu 1.** Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1,2,3,..,9. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân 3 số ghi trên ba thẻ với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là một số lẻ.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^3 = 84$

Số cách chọn 3 thẻ có tích là số lẻ là $n(A) = C_5^3 = 10$

=> Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$

**Câu 2.** Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật . Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

$n(\Omega) = C_{11}^3 = 165$

Số cách chọn 3 học sinh có cả nam và nữ là $C_5^2.C_6^1 + C_5^1.C_6^2 = 135$

Do đó xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ là $\frac{135}{165} = \frac{9}{11}$

**Câu 3.** Từ các chữ số 1;2;3;4;5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ thuộc $\{1;2;3;4;5\}$

Sắp chữ số 3 vào ba vị trí, có $C_5^3 = 10$ (cách)

Còn lại hai vị trí, 4 chữ số. Chọn hai chữ số xếp vào hai vị trí đó, có $C_4^2 = 12$ (cách)

Vậy không gian mẫu có $10.12 = 120$ phần tử

Gọi A là biến cố: "số được chọn chia hết cho 3", có hai phương án:

Hai chữ số còn lại là 1 và 5, có $C_5^3.2! = 20$ số

Hai chữ số còn lại là 2 và 4, có $C_5^3.2! = 20$ số

Vậy biến cố A có 40 phần tử. Xác suất của biến cố A là: $P = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

**Câu 4.**Xét các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Tìm xác suất để số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lấy ra từ các số trên thảo mãn: Chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước.

Các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó $a_i \neq a_j$ với i≠ j

$a_1 \neq 0 \Rightarrow$ Có 9 cách chọn $a_1$

Mỗi cách chọn $a_1$ có 9 cách chọn $a_2$

Mỗi cách chọn $a_1$, $a_2$ có 8 cách chọn $a_3$

Mỗi cách chọn $a_1$, $a_2$, $a_3$ có 7 cách chọn $a_4$

Mỗi cách chọn $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ có 6 cách chọn $a_5$

$\Rightarrow |\Omega| = 9.9.8.7.6 = 27216$

Xét biến cố A: " Số có năm chữ số lấy ra thoả mãn chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước". Vì chữ số 0 không thể đứng trước bất kỳ số nào nên xét tập hợp:

X= $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ . Mỗi bộ gồm 5 chữ số khác nhau lấy ra từ X có một cách sắp xếp theo thứ tự tăng dần $\Rightarrow |\Omega_A| = C_9^5$

$\Rightarrow P(A) = \frac{126}{27216} = \frac{1}{216}$

**Câu 5.** Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi.

+ Hai chữ số cuối phân biệt nên gọi $\Omega$ là tập hợp tất cả các cách chọn 2 số phân biệt trong 10 chữ số $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ta có được $|\Omega| = A_{10}^2 = 90$

+ Gọi A là biến cố "Gọi 1 lần đúng số cần gọi", ta có $|\Omega_A| = 1$. Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{1}{90}$

**Câu 6.** Đề cương ôn tập cuối năm môn Toán lớp 12 có 40 câu hỏi. Đề thi cuối năm gồm 3 câu hỏi trong số 40 câu đó. Một học sinh chỉ ôn 20 câu trong đề cương. Giả sử các câu hỏi trong đề cương đều có khả năng được chọn làm câu hỏi thi như nhau. Hãy tính xác suất để có ít nhất 2 câu hỏi của đề thi cuối năm nằm trong số 20 câu hỏi mà học sinh nói trên đã ôn.

Không gian mẫu $\Omega$ có n($\Omega$)= $C_{40}^3 = 9880$ (phần tử)

Gọi A là biến cố "có ít nhất 2 câu hỏi của đề thi nằm trong số 20 câu đã ôn".Ta thấy xảy ra một trong hai TH sau

TH1: Trong đề thi có đúng 2 câu hỏi trong 20 câu đã ôn

TH2: Trong đề thi có đúng 3 câu hỏi trong 20 câu đã ôn

Do đó n(X)= $C_{20}^2.C_{20}^1 + C_{20}^1 = 1330$ (phần tử)

Vậy xác suất cần tìm: P(X)= $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1330}{9880} = \frac{7}{52}$

**Câu 7.** Giải bóng chuyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^4.C_8^4.C_4^4 = 34.650$

Gọi A là biến cố "3 đội bong của Việt nam ở ba bảng khác nhau"
Số các kết quả thuận lợi của A là $n(A) = 3C_9^3.2C_6^3.1.C_3^3 = 1080$

Xác xuất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega} = \frac{1080}{34650} = \frac{54}{173} \simeq 0,31$

**Câu 8.** Gieo đồng thời ba con xúc sắc.Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên ba con là 10.

Gọi $\Omega$ là tập hợp tất cả các khả năng xảy ra.Ta có n($\Omega$) = 6.6.6=216
Gọi A là biến cố:" tổng số chấm xuất hiện trên ba con là 10".
Các khả năng thuận lợi của A chính là tổ hợp có tổng bằng 10 là: (1;3;6), (1;4;5), (2;2;6), (2;3;5), (3;3;4) và các hoán vị có thể của các tổ hợp này.
Ta có n(A) = 6+6+3+6+3 = 24 ( do (2;2;6), (3;3;4) chỉ có 3 hoán vị)
Vậy xác suất P(A) = $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$

**Câu 9.** Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên lấy 4 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố " trong số 4 viên bi lấy được có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng. Tính xác suất của biến cố A.

$|\Omega| = C_{12}^4 = 495$
Các khả năng:
+4 bi lấy được không có bi vàng:4bi đỏ; 1 bi đỏ +3bi xanh;
+4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng:gồm 2bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh hoặc 3 bi đỏ , 1 bi vàng.
$|\Omega| = C_5^4 + C_5^1.C_4^3 + C_5^2.C_4^2 + C_5^3.C_4^1 + C_5^2.C_3^1.C_4^1 + C_5^3.C_3^1 = 275$
$P(A) = \frac{275}{495} = \frac{5}{9}$

**Câu 10.** Gọi M là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ M, tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa hai chữ số lẻ (các chữ số liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ).

Xét các số có 9 chữ số khác nhau:
- Có 9 cách chọn chữ số ở vị trí đầu tiên.
- Có $A_9^8$ cách chọn 8 chữ số tiếp theo

Do đó số các số có 9 chữ số khác nhau là: 9. $A_9^8$ = 3265920
Xét các số thỏa mãn đề bài:

- Có $C_5^4$ cách chọn 4 chữ số lẻ.
- Đầu tiên ta xếp vị trí cho chữ số 0, do chữ số 0 không thể đứng đầu và cuối nên có 7 cách xếp.
- Tiếp theo ta có $A_4^2$ cách chọn và xếp hai chữ số lẻ đứng hai bên chữ số 0.
- Cuối cùng ta có 6! cách xếp 6 chữ số còn lại vào 6 vị trí còn lại.

Gọi A là biến cố đã cho, khi đó $n(A) = C_5^4.7.A_4^2.6! = 302400$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{302400}{3265920} = \frac{5}{54}$.

**Câu 11.** Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^5 = 15504$.

Trong 20 tấm thẻ, có 10 tấm thẻ mang số lẻ, có 5 tấm thẻ mang số chẵn và chia hết cho 4, 5 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 4.

Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Ta có: $n(A) = C_{10}^3.C_5^1.C_5^1 = 3000$.

Vậy, xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3000}{15504} = \frac{125}{646}$.

**Câu 12.** Từ các chữ số của tập $T = \{0;1;2;3;4;5\}$, người ta ghi ngẫu nhiên hai số tự nhiên có ba chữ số khác nhau lên hai tấm thẻ. Tính xác suất để hai số ghi trên hai tấm thẻ đó có ít nhất một số chia hết cho 5.

+ Có $5.A_5^2 = 100$ số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau

+ Có $A_5^2 + 4.A_4^1 = 36$ số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

+ Có 64 số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.

+ $n(\Omega) = C_{100}^1.C_{99}^1 = 9900$

+ Gọi A là biến cố : "Trong hai số được ghi trên 2 tấm thẻ có ít nhất 1 số chia hết cho 5"

Ta có: $n(A) = C_{36}^1.C_{64}^1 + C_{36}^1.C_{35}^1 = 3564$

Vậy : $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3564}{9900} = \frac{9}{25} = 0,36$

**Câu 13.** Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất của các biến cố sao cho chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

Gọi A là biến cố của người bắn trúng mục tiêu với xác suất là 0.8
B là biến cố của người bắn trúng mục tiêu với xác suất là 0.9
Gọi C là biến cố cần tính xác suất thì C= $\boldsymbol{A.\overline{B}+\overline{A}.B}$
Vậy xác suất cần tính là P(C)=0,8.(1-0,9)+(1-0,8).0,9=0,26

**Câu 14.** Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam , 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người, tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

Ta có : $|\Omega| = C_{16}^4 = 1820$

Gọi A: "2nam toán ,1 lý nữ, 1 hóa nữ"
B: "1 nam toán , 2 lý nữ , 1 hóa nữ"
C: "1 nam toán , 1 lý nữ , 2 hóa nữ "

Thì H= $A \cup B \cup C$ : "Có nữ và đủ ba bộ môn"

$$P(H) = \frac{C_8^2 C_5^1 C_3^1 + C_8^1 C_5^2 C_3^1 + C_8^1 C_5^1 C_3^2}{|\Omega|} = \frac{3}{7}$$

**Câu 15.** Có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Người ta chọn ra một cách ngẫu nhiên 4 học sinh. Tìm xác suất để trong 4 học sinh được chọn ra có ít nhất 2 học sinh nữ.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{10}^4 = 210$

Gọi A là biến cố: **"4 học sinh được chọn ra có ít nhất 2 học sinh nữ"**

Khi đó biến cố $\overline{A}$ là: "4 học sinh được chọn ra có nhiều nhất 1 học sinh nữ"

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$ là: $|\Omega_{\overline{A}}| = C_6^4 + C_4^1 C_6^3 = 95$

Suy ra: $P(\overline{A}) = \frac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = \frac{95}{210} = \frac{19}{42}$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{19}{42} = \frac{23}{42}$

**Câu 16.** Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc . Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

Số cách lấy 4 chiếc giày tùy ý : $C_{20}^4 = 4845$
Số cách chọn 4 chiếc giày từ 4 đôi ( mỗi chiếc lấy từ một đôi )là :
(số cách chọn 4 đôi từ 10 đôi)×( số cách chọn 4 chiếc)= $C_{10}^4 2^4$

Xác suất cần tìm là : $\frac{C_{20}^4 - C_{10}^4.2^4}{C_{20}^4} = \frac{672}{969}$

**Câu 17.** Trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, lớp 12A Có 2 học sinh đạt giải môn Toán đều là học sinh nam và 4 học sinh đạt giải môn Vật lí trong đó có 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh trong các học sinh đạt giải đó đi dự lễ tổng kết năm học của tỉnh. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có 2 nam và 2 nữ, đồng thời còn có cả học sinh đạt giải môn Toán và học sinh đạt giải môn Vật lí.

Không gian mẫu **Ω** là tập hợp gồm tất cả các cách chọn ra 3 học sinh trong các học sinh đạt giải của kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, do đó ta có $n(\Omega) = C_6^3 = 20$

Kí hiệu A là biến cố ‘‘4 học sinh được chọn có 2 nam và 2 nữ, đồng thời còn có cả học sinh đạt giải môn Toán và học sinh đạt giải môn Vật lí’’.

Vì chỉ có đúng 2 học sinh nữ đạt giải đều thuộc môn Vật lí, do đó phải chọn tiếp ra 2 học sinh nam lại phải có mặt ở hai môn khác nhau thì chỉ có thể là 2 học sinh nam đạt giải môn Toán hoặc 1 học sinh nam đạt giải môn Toán và 1 học sinh nam đạt giải môn Vật lí. Vậy ta có $n(\mathrm{A}) = 1 + C_2^1.C_2^1 = 5 \Rightarrow P(\mathrm{A}) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$

**Câu 18.** Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ,5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có duy nhất 1 tấm mang số chia hết cho 10.

Gọi A là biến cố lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Chọn 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ có : $C^{10}_{30}$ cách chọn

Ta phải chọn :

5 tấm thẻ mang số lẻ trong 15 tấm mang số lẻ có $C_{15}{}^5$ cách chọn.

1 tấm thẻ chia hết cho 10 trong 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10, có : $C^1{}_3$ cc

4 tấm thẻ mang số chẵn nhưng không chia hết cho 10 trong 12 tấm như vậy, có : $C^4{}_{12}$

Vậy xác suất cần tìm là : $P(\mathrm{A}) = \frac{C_{15}^5.C_{12}^4.C_3^1}{C_{30}^{10}} = \frac{99}{667}$

**Câu 19.** Có 5 hộp bánh, mỗi hộp đựng 8 cái bánh gồm 5 cái bánh mặn và 3 bánh ngọt. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra hai bánh. Tính xác suất biến cố trong năm lần lấy ra đó có bốn lần lấy được 2 bánh mặn và một lần lấy được 2 bánh ngọt.

Gọi $\Omega$ là không gian mẫu của phép thử.

Gọi A là biến cố “Trong năm lần lấy ra có bốn lần lấy được 2 bánh mặn và một lần lấy được 2 bánh ngọt”.

$\Rightarrow n(\Omega) = (C_8^2)^5, \quad n(A) = 5.(C_5^2)^4.C_3^2$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{5.(C_5^2)^4.C_3^2}{(C_8^2)^5} = \dfrac{9375}{1075648} \approx 0,0087$

**Câu 20.** Cho tập $A = \{0;1;2;4;5;7;8\}$.Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ A.Tính số phần tử của X.Lấy ngẫu nhiên một số từ tập X,tính xác suất để số lấy được là số chẵn.

+) Xét các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ A, giả sử các số đó có dạng: $\overline{abcd}, a \neq 0$.

Chọn $a \neq 0$, có 6 cách chọn, chọn các chữ số $b, c, d \neq a$ và xếp thứ tự có: $A_6^3 = 120$ cách.

$\Rightarrow$có tất cả: 6.120 = 720 số tự nhiên như vậy.

Vậy số phần tử của X là: 720. Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 720$.

+) Gọi B là biến cố: "Số tự nhiên được chọn là số chẵn".

+) Xét các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số phân biệt lấy từ A, giả sử các số đó có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4}, a_1 \neq 0, a_4 \in \{0;2;4;8\}$.

+) **TH1:** $a_4 = 0$, có 1 cách chọn; chọn các chữ số $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ và xếp thứ tự có $A_6^3 = 120$ cách chọn $\Rightarrow$TH1 có: 1.120 = 120 số tự nhiên như vậy.

+) **TH2:** $a_4 \in \{2;4;6\}$, có 3 cách chọn; chọn $a_1 \in A \setminus \{0; a_4\}$, có 5 cách chọn; chọn các chữ số $a_2, a_3 \in A \setminus \{a_1; a_4\}$ và xếp thứ tự có $A_5^2 = 20$ cách chọn $\Rightarrow$TH2 có: 3.5.20 = 300 số tự nhiên như vậy.

$\Rightarrow$có tất cả: 120 + 300 = 420 số tự nhiên như vậy $\Rightarrow$Số phần tử thuận lợi cho biến cố B là: n(B) = 420.

+) Vậy: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{420}{720} = \dfrac{7}{12}$.

**Câu 21.** Một nhóm gồm 6 học sinh có tên khác nhau, trong đó có hai học sinh tên là An và Bình. Xếp ngẫu nhiên nhóm học sinh đó thành một hàng dọc. Tính xác suất sao cho hai học sinh An và Bình đứng cạnh nhau.

Mỗi cách xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành 1 hàng dọc là một hoán vị của 6 phần tử

$\Rightarrow n(\Omega) = 6! = 720$ (phần tử)

Gọi A là biến cố: "An và Bình đứng cạnh nhau".

$\Rightarrow n(A) = 5!.2! = 240$ (phần tử)

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{240}{720} = \dfrac{1}{3}$ (phần tử)

**Câu 22.** Trong đợt thi học sinh giỏi của tỉnh Nam Định trường THPT Xuân Trường môn Toán có 5 em đạt giải trong đó có 4 nam và 1 nữ, môn Văn có 5 em đạt giải trong đó có 1 nam và 4 nữ, môn Hóa học có 5 em đạt giải trong đó có 2 nam và 3 nữ, môn Vật lí có 5 em đạt giải trong đó có 3 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mỗi môn một em học sinh để đi dự đại hội thi đua? Tính xác suất để có cả học sinh nam và nữ để đi dự đại hội?

Có tất cả 5.5.5.5=625 cách $\Rightarrow n(\Omega)=625$

Gọi A là biến cố "có cả HS nam và nữ đi dự đại hội"

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "Cả bốn HS nam hoặc cả 4 HS nữ đi dự ĐH"

$\Rightarrow n(\overline{A})=4.1.2.3+1.4.3.2=48 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{48}{625}$

Vậy $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{48}{625}=\dfrac{577}{625}$

**Câu 23.** Một xí nghiệp có 50 công nhân, trong đó có 30 công nhân tay nghề loại A, 15 công nhân tay nghề loại B, 5 công nhân tay nghề loại C. Lấy ngẫu nhiên theo danh sách 3 công nhân. Tính xác suất để 3 người được lấy ra có 1 người tay nghề loại A, 1 người tay nghề loại B, 1 người tay nghề loại C.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{50}^{3}=19600.$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố "trong 3 người được lấy ra, mỗi người thuộc 1 loại" là $C_{30}^{1}.C_{15}^{1}.C_{5}^{1}=2250$. Xác suất cần tính là $p=\dfrac{2250}{19600}=\dfrac{45}{392}$.

**Câu 24.** Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Gọi $\Omega$ là tập hợp các cách chọn ra 10 tấm thẻ từ 30 tấm thẻ đã cho

Suy ra $|\Omega|=C_{30}^{10}$

Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số lẻ, 15 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Gọi $\Omega_A$ là tập hợp các cách chọn ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10

Suy ra $|\Omega_A|=C_{15}^{5}.C_{12}^{4}.C_{3}^{1}$

Vậy $P(A)=\dfrac{C_{15}^{5}.C_{12}^{4}.C_{3}^{1}}{C_{30}^{10}}=\dfrac{99}{667}.$

**Câu 25.** Đội văn nghệ của một lớp có 5 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn, tìm xác suất để trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số bạn nam nhiều hơn số bạn nữ.

Đội văn nghệ của một lớp có 5 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn, tìm xác suất để trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số bạn nam nhiều hơn số bạn nữ.

Số cách chọn 5 bạn bất kì là: $C_{12}^5 = 729$. Để chọn được 5 bạn thỏa mãn yêu cấu bài toán, ta có hai khả năng sau:

-TH1: Chọn 4 bạn nam và 1 bạn nữ, có $C_5^4.C_7^1 = 35$ cách chọn.

-TH2: Chọn 3 bạn nam và 2 bạn nữ, có $C_5^3.C_7^2 = 210$ cách chọn.

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{35+210}{729} = \dfrac{245}{729}$.

**Câu 26.** Trong cuộc thi "Rung chuông vàng" có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiên bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm.

Chia 20 học sinh thành 4 nhóm nên số phần tử của không gian mẫu là
$|\Omega| = C_{20}^5.C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5$

Gọi A là biến cố " Chia 20 học sinh thành 4 nhóm sao cho 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm"

Xét 5 bạn nữ thuộc một nhóm có $C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5$ cách chia 15 nam vào 3 nhóm còn lại

Vì 5 bạn nữ có thể thuộc nhóm A,B,C hay D nên ta có $|\Omega_A| = 4.C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{4.C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5}{C_{20}^5.C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5} = \dfrac{1}{3876}$.

**Câu 27.** Trong bộ môn Toán, thầy giáo có 40 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 15 câu hỏi trung bình, 20 câu hỏi dễ. Một ngân hàng đề thi mỗi đề thi có 7 câu hỏi được chọn từ 40 câu hỏi đó. Tính xác suất để chọn được đề thi từ ngân hàng đề nói trên nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 4.

Không gian mẫu của việc tạo đề thi là : $|\Omega| = C_{40}^7 = 18643560$

Gọi A là biến cố chọn được đề thi có đủ 3 loại câu hỏi(khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 4.

$|\Omega_A| = C_{20}^4.C_5^2.C_{15}^1 + C_{20}^4.C_5^1.C_{15}^2 + C_{20}^5.C_5^1C_{15}^1 = 4433175$

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{915}{3848}$

**Câu 28.** Một đội văn nghệ gồm có 20 người trong đó có 12 nam và 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người để hát đồng ca. Tính xác suất để 8 người được chọn có cả nam và nữ và số nữ nhiều hơn số nam.

+) Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 8 người từ 20 người, mỗi kết quả của phép thử ứng với một cách chọn được 8 người từ 20 người => Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^{8} = 125970$.

+) Gọi biến cố A: "8 người được chọn có cả nam và nữ và số nữ nhiều hơn số nam"

Ta có $n(A) = C_8^5.C_{12}^3 + C_8^6.C_{12}^2 + C_8^7.C_{12}^1 = 14264$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{14264}{125970} = \frac{7132}{62985}.$$

**Câu 29.** Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác xuất để 4 viên bi được chon có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất.

Ta có: $n(\Omega) = C_{15}^{4} = 1365$

Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất'

Khi đó $n(A) = C_4^1 C_5^2 C_6^1 = 240$

Vậy $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{91}$

**Câu 30.** Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng năm học. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A.

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là $\Omega$

Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^5 = 126$

Gọi A là biến cố "Chọn 5 học sinh từ đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba lớp và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A".

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là :

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C

+ 3 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 1 học sinh lớp 12C

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $C_4^2.C_3^1.C_2^2 + C_4^2.C_3^2.C_2^1 + C_4^3.C_3^1.C_2^1 = 78$.

Xác suất cần tìm là $P=\frac{78}{126}=\frac{13}{21}$.

**Câu 31.** Một ngân hàng đề thi gồm 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 20 câu hỏi trên. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc.

Lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi 4 câu hỏi để lập một đề thi có $C_{20}^4=4845$ đề thi.
Thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 đề thi có 2 câu đã thuộc, có $C_{10}^2.C_{10}^2=2025$ trường hợp.
Thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 đề thi có 3 câu đã thuộc, có $C_{10}^3.C_{10}^1=1200$ trường hợp.
Thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 đề thi có 4 câu đã thuộc, có $C_{10}^4=210$ trường hợp.
Do đó, thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc, có $2025+1200+210=3435$ trường hợp
Vậy xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được 1 đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc là $\frac{3435}{4845}=\frac{229}{323}$.

**Câu 32.** Một hộp đựng 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra 4 viên bi, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ ba màu và số bi xanh nhiều nhất.

+ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{15}^4=1365$

+ Gọi A là biến cố " 4 viên bi được chọn có đủ cả ba màu và bi xanh nhiều nhất"

Số phần tử của biến cố A là $n(A)=C_4^1.C_5^1.C_6^2=300$

+ Vậy xác suất của biến cố A là :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{20}{91}$$

**Câu 33.** Đội dự tuyển học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay môn toán của một trường phổ thông có 4 học sinh nam khối 12, 2 học sinh nữ khối 12 và 2 học sinh nam khối 11. Để thành lập đội tuyển dự thi học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay môn toán cấp tỉnh nhà trường cần chọn 5 em từ 8 em học sinh trên. Tính xác suất để trong 5 em được chọn có cả học sinh nam và học sinh nữ, có cả học sinh khối 11 và học sinh khối 12.

- Số cách chọn 5 em học sinh từ 8 học sinh trên là $C_8^5 = 56$ cách

- Để chọn 5 em thỏa mãn bài ra, ta xét các trường hợp sau

+) 1 nam khối 11, 1 nữ khối 12 và 3 nam khối 12 có: $C_2^1C_2^1C_4^3$ cách

+) 1 nam khối 11, 2 nữ khối 12 và 2 nam khối 12 có: $C_2^1C_2^2C_4^2$ cách

+) 2 nam khối 11, 1 nữ khối 12 và 2 nam khối 12 có: $C_2^2C_2^1C_4^2$ cách

+) 2 nam khối 11, 2 nữ khối 12 và 1 nam khối 12 có: $C_2^2C_2^2C_4^1$ cách

Số cách chọn 5 em thỏa mãn bài ra là:

$$C_2^1C_2^1C_4^3 + C_2^1C_2^2C_4^2 + C_2^2C_2^1C_4^2 + C_2^2C_2^2C_4^1 = 44 \text{ cách}$$

- Vậy xác suất cần tính là: $\frac{44}{56} = \frac{11}{14}$

**Câu 34.** Trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh của trường THPT Phù Cừ có 10 học sinh đạt giải trong đó có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Nhà trường muốn chọn một nhóm 5 học sinh trong 10 học sinh trên để tham dự buổi lễ tuyên dương khen thưởng cuối học kỳ 1 năm học 2015 – 2016 do huyện uỷ Phù Cừ tổ chức. Tính xác suất để chọn được một nhóm gồm 5 học sinh mà có cả nam và nữ, biết số học sinh nam ít hơn số học sinh nữ.

Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{10}^5 = 252$

Gọi A là biến cố 5 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời số học sinh nam ít hơn học sinh nữ.

**Trường hợp 1:** Chọn 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ nên ta có $C_4^1.C_6^4$

**Trường hợp 2:** Chọn 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ nên ta có $C_4^2.C_6^3$

Suy ra $n(A) = C_4^1.C_6^4 + C_4^2.C_6^3 = 180$

Vậy xác suất cần tìm là $\boxed{P(A) = \frac{5}{7}}$

**Câu 35.** Trong cụm thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT thí sinh phải thi 4 môn trong đó có 3 môn bắt buộc là Toán, Văn, Ngoại ngữ và một môn do thí sinh tự chọn trong số các môn: Vật lí, Hóa học, Sinh học, Lịch sử và Địa lí. Trường A có 30 học sinh đăng kí dự thi, trong đó có 10 học sinh chọn môn Lịch sử. Lấy ngẫu nhiên 5 học sinh bất kỳ của trường A, tính xác suất để trong 5 học sinh đó có nhiều nhất 2 học sinh

chọn môn Lịch sử.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{30}^{5}=142506$

Gọi A là biến cố : "5 học sinh được chọn có nhiều nhất 2 học sinh chọn môn lịch sử"

Số phần tử của biến cố A là: $n(A)=C_{20}^{5}+C_{20}^{4}C_{10}^{1}+C_{20}^{3}C_{10}^{2}=115254$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{115254}{142506}\approx 0,81$.

**Câu 36.** Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5.

Số phần tử của A là $6.\mathrm{A}_6^3=720$
Số cách chọn một số có hàng đơn vị là số 0 có $1.\mathrm{A}_6^3=120$ cách
Số cách chọn một số có hàng đơn vị là số 5 có $1.5.\mathrm{A}_5^2=100$ cách
Suy ra số cách chọn một số chia hết cho 5 là $120+100=220$ cách
Vậy xác suất cần tìm bằng $\dfrac{220}{720}=\dfrac{11}{36}$.

**Câu 37.** Cho X là tập hợp gồm 6 số tự nhiên lẻ và 4 số tự nhiên chẵn. Chọn ngẫu nhiên từ tập X ba số tự nhiên. Tính xác suất chọn được ba số tự nhiên có tích là một số chẵn.

Phép thử T: "Chọn ngẫu nhiên từ tập X ba số tự nhiên".
$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là: $\mathrm{n}(\Omega)=\mathrm{C}_{10}^{3}=120.$
Gọi A là biến cố "Chọn được ba số tự nhiên có tích là một số chẵn".
$\Rightarrow \bar{\mathrm{A}}$ là biến cố "Chọn được ba số tự nhiên có tích là một số lẻ"
Chọn được 3 số tự nhiên lẻ có $\mathrm{C}_6^3$ cách.
$\Rightarrow \mathrm{n}(\bar{\mathrm{A}})=\mathrm{C}_6^3=20.$
Do đó: $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})=\dfrac{\mathrm{n}(\bar{\mathrm{A}})}{\mathrm{n}(\Omega)}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}.$
Vậy $\mathrm{P}(\mathrm{A})=1-\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}.$

**Câu 38.** Gọi M là tập hợp các số có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ra từ tập M một số bất kỳ. Tính xác suất để lấy được số có tổng các chữ số là số lẻ ?

Gọi A là biến cố "Số chọn được là số có 4 chữ số đôi một khác nhau và tổng các chữ số là một số lẻ". Số các số có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ 7 chữ số đã cho là $A_7^4 = 840$ (số), suy ra: $|\Omega| = 840$

Gọi số 4 chữ số đôi một khác nhau và tổng các chữ số là một số lẻ có dạng $\overline{abcd}$. Do tổng $a+b+c+d$ là số lẻ nên số chữ số lẻ là lẻ

Trường hợp 1 : có 1 chữ số lẻ , 3 chữ số chẵn : có $C_4^1.C_3^3 = 4$ bộ số

Trường hợp 2 : có 3 chữ số lẻ , 1 chữ số chẵn : có $C_4^3.C_3^1 = 12$ bộ số

Từ mỗi bộ số trên ta lập được $P_4 = 24$ số

Tất cả có 16.24= 384 số , suy ra: $|\Omega_A| = 384$.

Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{384}{840} = \dfrac{48}{105}$.

**Câu 39.** Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm các chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Lấy ngẫu nhiên một số trong A , tính xác suất để lấy được số có chứa chữ số 3.

+ Số các số có một, hai, ba, bốn, năm chữ số phân biệt lần lượt là:

$A_5^1$, $A_5^2$, $A_5^3$, $A_5^4$, $A_5^5$. Vậy tập A có $A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 325$ số.

+ Tương tự, số các số của A không có chữ số 3 là: $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4 = 64$ số.

Vậy số các số có chứa chữ số 3 là: 325 – 64 = 261 số

Từ đó xác suất cần tìm là P = 261/325

**Câu 40.** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{12}^3 = 220$

Gọi A là biến cố: **"3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_5^1 C_4^1 C_3^1 = 60$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

**Câu 41.** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, **chọn ngẫu nhiên 4 thẻ**. Tính xác suất để **4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn**.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{16}^4 = 1820$

Gọi A là biến cố: **"4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_8^4 = 70$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{70}{1820} = \frac{1}{26}$.

**Câu 42.** Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. **Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi**, tính xác suất để **hai viên bi được lấy ra có cùng màu.**

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_7^1 C_6^1 = 42$

Gọi A là biến cố: **"hai viên bi được lấy ra có cùng màu"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_4^1 C_2^1 + C_3^1 C_4^1 = 10$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$.

**Câu 43.** Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{25}^4 = 12650$

Gọi A là biến cố: **"4 học sinh được gọi có cả nam và nữ"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_{15}^1 C_{10}^3 + C_{15}^2 C_{10}^2 + C_{15}^3 C_{10}^1 = 11075$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$.

**Câu 44.** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. **Chọn ngẫu nhiên 1 số từ S**, tính xác suất để **số được chọn là số chẵn**.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = A_7^3 = 210$

Gọi A là biến cố: **"số được chọn là số chẵn"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = 3.6.5 = 90$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

**Câu 45.** Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc E. **Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M**. Tính xác suất để **tổng các chữ số của số đó bằng 10**.

Số các số thuộc M có 3 chữ số là $A_5^3 = 60$.

Số các số thuộc M có 4 chữ số là $A_5^4 = 120$.

Số các số thuộc M có 5 chữ số là $A_5^5 = 120$.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 60 + 120 + 120 = 300$.

Gọi A là tập con của M mà mỗi số thuộc A có tổng các chữ số bằng 10.

Các tập con của E có tổng các phần tử bằng 10 gồm

$$E_1 = \{1,2,3,4\},\ E_2 = \{2,3,5\},\ E_3 = \{1,4,5\}.$$

Từ $E_1$ lập được số các số thuộc A là $4!$

Từ mỗi tập $E_2$ và $E_3$ lập được số các số thuộc A là $3!$

Suy ra số phần tử của A là $4! + 2.3! = 36$.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$.

**Câu 46.** Một tổ học sinh gồm có 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ. **Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh đi chăm sóc bồn hoa.** Tính xác suất để **2 học sinh được chọn đi chăm sóc bồn hoa có cả nam và nữ**.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{12}^2 = 66$

Gọi A là biến cố: **"2 học sinh được chọn đi chăm sóc bồn hoa có cả nam và nữ"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_5^1 C_7^1 = 35$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{35}{66}$

**Câu 47.** Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. **Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi**. Tính xác xuất để **3 viên bi được chọn có đủ cả ba màu**.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{12}^3 = 220$

Gọi A là biến cố: **"3 viên bi được chọn có đủ cả ba màu"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_3^1 C_4^1 C_5^1 = 60$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

**Câu 48.** Một hộp đựng 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. **Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên**. Tính xác xuất để **4 viên bi được lấy ra có cả bi xanh và bi đỏ**.

Số phần tử của **không gian mẫu** là: $|\Omega| = C_{14}^4 = 1001$

Gọi A là biến cố: **"4 viên bi được lấy ra có cả bi xanh và bi đỏ"**

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = C_8^1 C_6^3 + C_8^2 C_6^2 + C_8^3 C_6^1 = 916$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{916}{1001}$

# PHẦN 6. HÀM SỐ MŨ - LOGARITH

## 6.1. Phương trình mũ

**Câu 1.** Giải phương trình $5^{2x+1}-6.5^x+1=0$.

$$5^{2x+1}-6.5^x+1=0 \Leftrightarrow 5.5^{2x}-6.5^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=1 \\ 5^x=\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

**Câu 2.** Giải phương trình $3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}=x-3$.

$$+3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}=x-3$$
$$\Leftrightarrow 5^{x-2}\left(3.5^{x-2}-1\right)+x\left(3.5^{x-2}-1\right)-3\left(3.5^{x-2}-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(3.5^{x-2}-1\right)\left(5^{x-2}+x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3.5^{x-2}-1=0 & (1) \\ 5^{x-2}+x-3=0 & (2) \end{array}\right.$$

$+\ (1) \Leftrightarrow 5^{x-2}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=2+\log_5\dfrac{1}{3}=2-\log_5 3$

$(2) \Leftrightarrow 5^{x-2}=-x+3$**.** Vế trái là hàm đồng biến vế phải là hàm nghịch biến mà (2) có nghiệm x = 2 nên là nghiệm duy nhất.

Vậy Phương trình có nghiệm là: x = $2-\log_5 3$ và x = 2.

**Câu 3.** Giải phương trình: $(3+2\sqrt{2})^x-2(\sqrt{2}-1)^x-3=0$

$$(3+2\sqrt{2})^x-2(\sqrt{2}-1)^x-3=0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{2x}-2(\sqrt{2}+1)^{-x}-3=0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{3x}-3(\sqrt{2}+1)^x-2=0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x=2$$
$$\Leftrightarrow x=\log_{\sqrt{2}+1}2$$

**Câu 4.** Giải phương trình: $\sqrt{2}^{\,2x^2+6x-6}=2.4^{x+1}$

$$\sqrt{2}^{\,2x^2+6x-6}=2.4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(2x^2+6x-6)}=2.2^{2(x+1)} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-3}=2^{2x+3}$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x-3=2x+3 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$$

**Câu 5.** Giải phương trình: $2^{4x-4}-17.2^{2x-4}+1=0$

$2^{4x-4}-17.2^{2x-4}+1=0 \Leftrightarrow \frac{16^x}{16}-17.\frac{4^x}{16}+1=0 \Leftrightarrow 4^{2x}-17.4^x+16=0$

$t^2-17t+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x=1 \\ 4^x=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

**Câu 6.** Giải phương trình: $25^x+3.5^x-10=0$

$25^x+3.5^x-10=0 \Leftrightarrow 5^{2x}+3.5^x-10=0$

Đặt $t=5^x,\ t>0$

Phương trình trở thành:

$$t^2+3t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2(nhan) \\ t=-5(loai) \end{array}\right.$$

$t=2 \Leftrightarrow 5^x=2 \Leftrightarrow x=\log_5 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\log_5 2$.

**Câu 7.** Giải phương trình $2^x-2^{3-x}-2=0$

$2^x-2^{3-x}-2=0 \Leftrightarrow 2^x-\frac{8}{2^x}-2=0 \Leftrightarrow 2^{2x}-2.2^x-8=0$

Đặt $t=2^x,\ t>0$

Phương trình trở thành:

$$t^2-2.t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4\ (nhan) \\ t=-2\ (loai) \end{array}\right.$$

$t=4 \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

**Câu 8.** Giải phương trình sau: $9^x-10.3^x+9=0$

$9^x-10.3^x+9=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-10.3^x+9=0$

Đặt $t=3^x,\ t>0$.

Phương trình trở thành: $t^2-10t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ (nhan) \\ t=9\ (nhan) \end{array}\right.$

$t=1 \Leftrightarrow 3^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$t=9 \Leftrightarrow x^x=9 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có hai nghiệm x = 0 và x = 2.

**Câu 9.** Giải phương trình sau: $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$

Phương trình đã cho tương đương $(3^x - 3)(8 - 2^x) = 0$
Từ đó tìm được x=1 hoặc x=3

**Câu 10.** Giải phương trình $2e^x + 2e^{-x} - 5 = 0,\ x \in R$ .

$2e^x + 2e^{-x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0.$
Đặt $t = e^x, t > 0$ . Phương trình trở thành

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x = 2 \\ e^x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln 2 \\ x = \ln \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

**Câu 11.** Giải phương trình sau:

$$5.3^{2x-1} - 7.3^{x-1} + \sqrt{1 - 6.3^x + 9^{x+1}} = 0$$

**Đặt** $t = 3^x > 0$ **. (1)** $\Leftrightarrow 5t^2 - 7t + 3|3t - 1| = 0$

$\Rightarrow x = \log_3 \dfrac{3}{5};\ x = -\log_3 5$

**Câu 12.** Giải phương trình $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$

Phương trình $\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x} = 4$ .

+) Ta có: $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}.(2-\sqrt{3})^{x^2-2x} = (4-3)^{x^2-2x} = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

đặt $t = (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} > 0 \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} = \dfrac{1}{t}$ .

trở thành: $t + \dfrac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 - \sqrt{3}\ (TM) \\ t = 2 + \sqrt{3}\ (TM) \end{array}\right.$.

$t = 2 + \sqrt{3}$, ta có: $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

$t = 2 - \sqrt{3}$, ta có: $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

+) KL: ...

**Câu 13.** Giải phương trình $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2} \Leftrightarrow 2^{x^2-1}(1+8) = 3^{x^2-1}(1+3)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$

**Câu 14.** Giải phương trình: $7^x + 2.7^{1-x} - 9 = 0$.

Đặt $t = 7^x, t > 0$. Ta có phương trình: $t + \frac{14}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 7 \end{array}\right.$

Với $t = 2$, *suy ra* $7^x = 2 \Rightarrow x = \log_7 2$

Với $t = 7$, *suy ra* $7^x = 7 \Rightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{\log_7 2; 1\}$.

**Câu 15.** Giải phương trình: $3^{4-2x} = 9^{5-3x-x^2}$

Đưa về cùng cơ số 3 khi đó ***phương trình tương đương*** **v**ới $x^2 + 2x - 3 = 0$

nghiệm cần tìm là x = 1 hoặc x = -3

**Câu 16.** Giải phương trình $5^{2x-2} - 26.5^{x-2} + 1 = 0$

Giải phương trình $5^{2x-2} - 26.5^{x-2} + 1 = 0$

Đặt $t = 5^x > 0$. Phương trình <=> $t^2 - 26t + 25 = 0$ <=> $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 25 \end{array}\right.$

<=> $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

**Câu 17.** Giải phương trình $2.4^x + 6^x = 9^x$.

Phương trình

$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 1 \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -1 \ (Loai) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\log_{\frac{2}{3}} 2$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\log_{\frac{2}{3}} 2$

**Câu 18.** Giải phương trình: $3^{1-2x}.27^{\frac{x+1}{3}} = 81$.

Phương trình đã cho tương đương với : $3^{1-2x}.3^{3.\frac{x+1}{3}} = 81 \Leftrightarrow 3^{1-2x}.3^{x+1} = 3^4$

$3^{2-x} = 3^4 \Leftrightarrow 2 - x = 4 \Leftrightarrow x = -2.$

**Câu 19.** Giải phương trình $4^{x^2+x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ trên tập số thực.

$4^{x^2+x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}=2^{1-x}$

$2x^2+2x=1-x\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

**Câu 20.** Giải phương trình $5.9^x-2.6^x=3.4^x$ (1)

Phương trình đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

Chia cả hai vế của phương trình (1) cho $4^x>0$ ta được :

$5.9^x-2.6^x=3.4^x\Leftrightarrow 5.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=3$

$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-3=0\Leftrightarrow\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1\right]\left[5.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+3\right]=0$ (2)

Vì $5.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình (2) tương đương với $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=0$

**Câu 21.** Giải phương trình $2^{2x+5}+2^{2x+3}=5^{2x+2}+3.5^{2x+1}$.

TXĐ D = $\mathbb{R}$

Phương trình $\Leftrightarrow 2^{2x+3}(4+1)=5^{2x+1}(5+3)$

$\Leftrightarrow 2^{2x+3}.5=5^{2x+1}.8$

$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}=1$ .

$\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

**Câu 22.** Giải phương trình: $\left(\sqrt{5}+1\right)^x+\left(\sqrt{5}-1\right)^x=2^{x+1}$

$PT\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=2$

Đặt $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=t(t>0)$ ta có phương trình: $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t=1$

Với t=1 $\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình có nghiệm x=0

**Câu 23.** Giải phương trình $0,125.4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ (1)

Đưa hai vế về cơ số 2, ta được:

$$1 \Leftrightarrow 2^{-3}.2^{4x-6}=\left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{4x-9}=2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 4x-9=\frac{5}{2}x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x=9 \Leftrightarrow x=6$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=6$

**Câu 24.** Giải phương trình $9^x-4.3^x-45=0$ (1)

Đặt $t=3^x$ với $t>0$, phương trình (1) trở thành $t^2-4t-45=0$ (2)

$$2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \quad \text{loại} \\ t=9 \end{array}\right.$$

- Với $t=9$ thì $3^x=9 \Leftrightarrow x=2$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$

**Câu 25.** Giải phương trình $3^{x+1}+18.3^{-x}=29$ (1)

Biến đổi phương trình (1) ta được

$$1 \Leftrightarrow 3.3^x+\frac{18}{3^x}=29 \quad (2)$$

Đặt $t=3^x$ với $t>0$, phương trình (1) trở thành $3t^2-29t+18=0$ (3)

$$3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3} \\ t=9 \end{array}\right.$$

- Với $t=9$ thì $3^x=9 \Leftrightarrow x=2$
- Với $t=\frac{2}{3}$ thì $3^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\log_3\frac{2}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2; x=\log_3\frac{2}{3}$

**Câu 26.** Giải phương trình $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$ (1)

Chia hai vế phương trình (1) cho $4^x$ ta được $1 \Leftrightarrow 6.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$ (2)

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ với $t > 0$, phương trình (1) trở thành $6t^2 - 13t + 6 = 0$ (3)

$$3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

- Với $t = \frac{3}{2}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$
- Với $t = \frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1; x = 1$

**Câu 27.** Giải phương trình $2^{\log_3 x + 1} + 2^{\log_3 x - 2} = x$ (1)

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$ thì phương trình (1) trở thành

$$2.2^t + \frac{1}{4}.2^t = 3^t \Leftrightarrow \frac{9}{4}.2^t = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{4}{9} \Leftrightarrow t = 2$$

Với $t = 2$ thì $x = 9$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 9$

**Câu 28.** Giải phương trình $4.5^x + 25.2^x = 100 + 10^x$ (1)

Ta có: $1 \Leftrightarrow 4.5^x - 2^x.5^x + 25.2^x - 100 = 0$

$$\Leftrightarrow 5^x\ (4 - 2^x) + 25\ (2^x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - 2^x)\ (5^x - 25) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 25 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$

**Câu 29.** Giải phương trình $3^x.2^{x^2}=1$ (1)

Lấy lôgarit hai vế với cơ số 3, ta có

$$1 \Leftrightarrow \log_3 3^x.2^{x^2} = \log_3 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^x + \log_3 2^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x + x^2 \log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\,(1 + x\log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{\log_3 2} = -\log_2 3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0, x = -\log_2 3$

**Câu 30.** Giải phương trình $3^x + 4^x = 5^x$ (1)

Chia hai vế phương trình (1) cho $5^x$ $5^x \neq 0, \forall x$ , ta có

$$1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \quad (2) \qquad (\text{Dạng } f(x) = C)$$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \quad (*)$$

Mặt khác $f(2) = 1 \Rightarrow$ (2) có nghiệm $x = 2$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra phương trình (2) có nghiệm **duy nhất** $x = 2$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 2$

**Câu 31.** Giải phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2x + 1$

Xét các hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và $g(x) = 2x + 1$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (*)

Mặt khác $f(0) = g(0) \Rightarrow$ (1) có nghiệm $x = 0$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra phương trình (1) có nghiệm **duy nhất** $x = 0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$

**Câu 32.** Giải phương trình $2^{\log_5 x+3}=x$ (1)

Điều kiện: $x>-3$

Khi đó: $1 \Leftrightarrow \log_5 x+3=\log_2 x$ (2)

Đặt $t=\log_2 x \Leftrightarrow x=2^t$ thì phương trình (2) trở thành

$$\log_5 2^t+3=t \Leftrightarrow 2^t+3=5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t+3\left(\frac{1}{5}\right)^t=1 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{2}{5}\right)^t+3\left(\frac{1}{5}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$f'(t)=\left(\frac{2}{5}\right)^t \ln\frac{2}{5}+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t \ln\frac{1}{5}<0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (*)

Mặt khác $f(1)=1 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $t=1$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra phương trình (3) có nghiệm **duy nhất** $t=1$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=2$

**Câu 33.** Giải phương trình sau: $5^{x^2+3x}=625$

$5^{x^2+3x}=625 \Leftrightarrow 5^{x^2+3x}=5^4 \Leftrightarrow x^2+3x=4$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 1 và x = -4.

**Câu 34.** Giải phương trình sau: $2^{x^2-3x-6}=16$

$2^{x^2-3x-6}=16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x-6}=2^4 \Leftrightarrow x^2-3x-6=4$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 5 và x = -2.

**Câu 35.** Giải phương trình sau: $2^{x+1}.5^x=200$

$2^{x+1}.5^x=200 \Leftrightarrow 2.2^x.5^x=200$

$\Leftrightarrow 10^x=100 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

**Câu 36.** Giải phương trình: $2^{3x^2-x-10}+4^{x^2-x-4}-2^{x^2+x+2}-16=0$.

Phương trình tương đương:

$2^{3x^2-x-10}+2^{2x^2-2x-8}-2^{x^2+x+2}-16=0 \Leftrightarrow 2^{3x^2-x-14}+2^{2x^2-2x-12}-2^{x^2+x-2}-1=0$

$\Leftrightarrow (2^{2x^2-2x-12}-1)(2^{x^2+x-2}+1)=0 \Leftrightarrow 2^{2x^2-2x-12}-1=0$

$\Leftrightarrow 2^{2x^2-2x-12}=2^0 \Leftrightarrow 2x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-2, x=3$.

**Câu 37.** Giải phương trình: $\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}=\frac{2x}{3}$.

Điều kiện: x > 0

Ta có phương trinhg tương đương với: $\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}=\frac{2}{3}.3^{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x}-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{\log_3 x}=\frac{2}{3}$. Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x}$ (t > 0).

Phương trình trở thành: $t-\frac{1}{t}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ t=\frac{1-\sqrt{10}}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $t=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ ta giải được x = 3

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x =3.

## 6.2. Bất phương trình mũ

**Câu 1.** Giải bất phương trình: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 2^{-2x}$

BPT $\Leftrightarrow 2^{-x-1} > 2^{-2x} \Leftrightarrow -x-1 > -2x \Leftrightarrow x > 1$

**Câu 2.** Giải bất phương trình: $3.9^x - 10.3^x + 3 \le 0$.

Đặt $t = 3^x (t > 0)$. Bất phương trình đã cho trở thành

$3t^2 - 10t + 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le t \le 3$

Suy ra $\frac{1}{3} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-1;1]$.

**Câu 3.** Giải bất phương trình: $2^{2x+1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x^2-1}{3}}$.

Bất phương trình tương đương với

$$2^{2x+1} < \left(2^{-3}\right)^{\frac{x^2-1}{3}} \Leftrightarrow 2^{2x+1} < 2^{-x^2+1} \Leftrightarrow 2x+1 < -x^2+1$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$**.** Vậy bất phương trình có tập nghiệm $\boxed{S = (-2;0)}$.

**Câu 4.** Giải bất phương trình: $\sqrt{2}^{\frac{-8}{x-2}} > 4^{\frac{x+3}{x+1}}$

$\sqrt{2}^{\frac{-8}{x-2}} > 4^{\frac{x+3}{x+1}} \Leftrightarrow 2^{\frac{-4}{x-2}} > 2^{\frac{2x+6}{x+1}} \Leftrightarrow \frac{-4}{x-2} > \frac{2x+6}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)(x+4)}{(x-2)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$

**Câu 5.** Giải bất phương trình $3^{x^2-x} < 9$ (1)

Ta có: $1 \Leftrightarrow 3^{x^2-x} < 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x < 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow -1 < x < 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = -1;2$

**Câu 6.** Giải bất phương trình sau: $7^{6x^2+3x-7} \le 49$

$7^{6x^2+3x-7} \le 49 \Leftrightarrow 7^{6x^2+3x-7} \le 7^2 \Leftrightarrow 6x^2+3x-7 \le 2 \Leftrightarrow 6x^2+3x-9 \le 0$

$VT = 0 \Leftrightarrow 6x^2+3x-9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Xét dấu VT ta được tập nghiệm của bất phương trình S = [-3; 1].

**Câu 7.** Giải bất phương trình: $4^x - 3.2^x + 2 < 0$

Bất phương trình $4^x - 3.2^x + 2 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 3.2^x + 2 < 0$

Đặt $t = 2^x,\ t > 0$

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 3t + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 2 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Vậy bất phương trình có nghiệm S = (0; 1).

**Câu 8.** Giải bất phương trình $2^{\log^2_{\sqrt{2}} x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$

Điều kiện: x> 0 ; BPT $\Leftrightarrow 2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $x = 2^t$.

BPT trở thành $4^{2t^2} + 2^{2t^2} - 20 \le 0$. Đặt $y = 2^{2t^2}$ ; y ≥ 1.

BPT trở thành $y^2 + y - 20 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le y \le 4$.

Đối chiếu điều kiện ta có: $2^{2t^2} \le 4 \Leftrightarrow 2t^2 \le 2 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1$.

Do đó $-1 \le \log_2 x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2$.

**Câu 9.** Giải bất phương trình $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \le \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

Bpt $\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} \le 4$

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} (t > 0)$

BPTTT: $t + \frac{1}{t} \le 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \le t \le 2+\sqrt{3}$ (tm)

$2-\sqrt{3} \le \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} \le 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow -1 \le x^2-2x \le 1 \Leftrightarrow x^2-2x-1 \le 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$

## 6.3. Phương trình logarith

**Câu 1.** Giải phương trình: $2\log_2(x-2)+\log_{0,5}(2x-1)=0$

$2\log_2(x-2)+\log_{0,5}(2x-1)=0$ **(*)**

• Điều kiện: $\begin{cases}x-2>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

• Khi đó, **(*)** $\Leftrightarrow \log_2(x-2)^2-\log_2(2x-1)=0\Leftrightarrow\log_2(x-2)^2=\log_2(2x-1)$

$\Leftrightarrow(x-2)^2=(2x-1)\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (loai)}\\x=5\text{ (nhan)}\end{array}\right.$

**Câu 2.** Giải phương trình: $x+\log_2(9-2^x)=3$.

Điều kiện: $9-2^x>0$. Phương trình đã cho tương đương: $\log_2(9-2^x)=3-x\Leftrightarrow 9-2^x=2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 9-2^x=\frac{8}{2^x}\Leftrightarrow 2^{2x}-9.2^x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

**Câu 3.** Giải phương trình $\log_5^2 x+\log_{0,2}(5x)-5=0.$

GPT: $\log_5^2 x+\log_{0,2}(5x)-5=0$ (1)

Đk: $x>0$. PT (1) $\Leftrightarrow\log_5^2 x-\log_5(5x)-5=0\Leftrightarrow\log_5^2 x-\log_5 x-6=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=3\\\log_5 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=125\\x=1/25\end{array}\right.$

KL: Vậy tập nghiệm PT (1) là $T=\{1/25;125\}$

**Câu 4.** Giải phương trình $2\log_3(x-1)+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$.

+ $PT\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\\log_3(x-1)+\log_3(2x-1)=1\end{cases}$

+ $\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\2x^2-3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

**Câu 5.** Giải phương trình: $\log_2(x^2-2x-8)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$\log_2(x^2-2x-8)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$\Leftrightarrow\log_2(x^2-2x-8)=\log_2 2+\log_2(x+2)\Leftrightarrow\log_2(x^2-2x-8)=\log_2 2(x+2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x^2-2x-8=2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x^2-4x-12=0 \end{cases} <=> x=6$

**Câu 6.** Giải phương trình: $\log_2 3.\log_3(2x-1)=1$

PT $\Leftrightarrow \log_2(2x-1)=1 \Leftrightarrow 2x-1=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

**Câu 7.** Giải phương trình: $\log_3(x+1)+\log_3(3-x)=\log_3(2x+3)$

Điều kiện $\begin{cases} x+1>0 \\ 3-x>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<3$ (*)

Phương trình tương đương $\log_3(x+1)+\log_3(3-x)=\log_3(2x+3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)(3-x)=\log_3(2x+3)$

$\Leftrightarrow (x+1)(3-x)=2x+3$

$\Leftrightarrow -x^2+2x+3=2x+3 \Leftrightarrow -x^2=0$

$\Leftrightarrow$ x = 0 , kết hợp với đk (*) phương trình có 1 nghiệm x = 0

**Câu 8.** Giải phương trình: $\log_2(3x-1)=6+\log_{0,5}(5x-2)$

ĐK $x>\frac{2}{5}$

PT đã cho tương đương với $\log_2(3x+2)(5x-2)=6 \Leftrightarrow (3x+2)(5x-2)=64$

$\Leftrightarrow 15x^2-4x-68=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{34}{15} \end{array}\right.$

Kết hợp đk ta được tập nghiệm phương trình là: $S=\{2\}$

**Câu 9.** Giải phương trình: $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x+2}-\log_{\frac{1}{3}}(2-x)-\log_{27}x^3=0$

+ ĐK: $0<x<2$ (*)

+PT $\Leftrightarrow \log_3(x+2)+\log_3(2-x)-\log_3 x=0 \Leftrightarrow \log_3[(x+2)(2-x)]=\log_3 x \Leftrightarrow (2+x)(2-x)=x$

$\Leftrightarrow x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

Kết hợp với (*) ta được nghiệm của phương trình là $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

**Câu 10.** Giải phương trình: $\log_2(4^{x+1}+4).\log_2(4^x+1)=3$.

$\log_2(4^{x+1}+4).\log_2(4^x+1)=3\Leftrightarrow\left(2+\log_2(4^x+1)\right).\log_2(4^x+1)=3$

Đặt $t=\log_2(4^x+1)$, phương trình trở thành: $(2+t)t=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.$

- $t=1\Rightarrow\log_2(4^x+1)=1\Leftrightarrow 4^x+1=2\Leftrightarrow x=0$.
- $t=-3\Rightarrow\log_2(4^x+1)=-3\Leftrightarrow 4^x+1=\frac{1}{8}\Leftrightarrow 4^x=-\frac{7}{8}$: Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=0$.

**Câu 11.** Giải phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+x+1\right)=\log_2\left(x^2+x+3\right)$

ĐK: $x\in\mathbb{R}$

PT $\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+x+1\right)^2=\log_2\left(x^2+x+3\right)\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\right)^2-\left(x^2+x+1\right)-2=0$

Đặt: $t=x^2+x+1, t\geq\frac{3}{4}$

Ta được phương trình : $t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(L)\\t=2(N)\end{array}\right.$

Với $t=2\Rightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Vậy : $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ và $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình.

**Câu 12.** Giải phương trình sau:

$$2\log_3^2 x-5\log_3(9x)+3=0$$

Đk:x>0

$\Leftrightarrow 2\log_3^2 x-5(\log_3 9+\log_3 x)+3=0$

Khi đó PT $\Leftrightarrow 2\log_3^2 x-5\log_3 x-12=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=4\\\log_3 x=\frac{-3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=81\\x=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\end{array}\right.$ (t/m)

**Câu 13.** Giải phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(3x-4)-1=0$.

Điều kiện xác định: $x>\frac{4}{3}$ (*). Với điều kiện (*), ta có

$(1)\Leftrightarrow \log_2(x-1)(3x-4)=1\Leftrightarrow \log_2(3x^2-7x+4)=\log_2 2$

$\Leftrightarrow 3x^2-7x+2=0\Leftrightarrow x=2$ (do điều kiện (*)).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

**Câu 14.** $\log_3(x+5)+\log_9(x-2)^2-\log_{\sqrt{3}}(x-1)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}.\ (2)$

Tập xác định $D=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

$(2)\Leftrightarrow \log_3(x+5)+\log_3|x-2|-2\log_3(x-1)=\log_3 2$

$\Leftrightarrow \frac{(x+5).|x-2|}{(x-1)^2}=2\Leftrightarrow (x+5).|x-2|=2(x-1)^2$

Với $x>2$ ta có: $(x+5)(x-2)=2(x-1)^2\Leftrightarrow x^2+3x-10=2x^2-4x+2$

$\Leftrightarrow x^2-7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4\end{array}\right.$

Với $1<x<2$ ta có $(x+5)(2-x)=2(x-1)^2\Leftrightarrow -x^2-3x+10=2x^2-4x+2$

$\Leftrightarrow 3x^2-x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\frac{\sqrt{97}}{6}(t/m)\\x=\frac{1-\sqrt{97}}{6}(loai)\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=\left\{\frac{1+\sqrt{97}}{6};3;4\right\}$.

**Câu 15.** Giải phương trình: $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$

Điều kiện $x>5$. Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(x-5)(x+2)=3\Leftrightarrow (x-5)(x+2)=8$

$\Leftrightarrow x^2-3x-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6(t/m)\\x=-3(l)\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=6$.

**Câu 16.** Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+2x-3\right)+\log_2\frac{x+3}{x-3}=0$

Điều kiện: $x<-3\ \vee\ x>7$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(x^2+2x-3)-\log_2\frac{x-7}{x+3}=0$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x^2+2x-3).(x+3)}{x-7}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+2x-3).(x+3)}{x-7}=1$$

$$\Leftrightarrow x^3+5x^2+2x-2=0 \qquad \Leftrightarrow (x+1)(x^2+4x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+4x-2=0 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2-\sqrt{6} \vee x=-2+\sqrt{6} \end{array}\right.$$

So với điều kiện, phương trình có nghiệm $x=-2-\sqrt{6}$.

**Câu 17.** Giải phương trình $2\log_8(2x)+\log_8(x^2-2x+1)=\frac{4}{3}$

Điều kiện $x>0, x\neq 1$.

Với điều kiện đó, PT đã cho tương đương với :

$$\log_8(2x)^2(x-1)^2=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[2x(x-1)\right]^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x(x-1)=4 \\ 2x(x-1)=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$$

**Câu 18.** $(2-\log_3 x)\log_{9x}3-\frac{4}{1-\log_3 x}=1$

Giải phương trình $(2-\log_3 x)\log_{9x}3-\frac{4}{1-\log_3 x}=1$ (1)

ĐKXĐ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 3 \ (*) \\ x\neq \frac{1}{9} \end{cases}$

Với ĐK (*), ta có : $(1) \Leftrightarrow (2-\log_3 x)\frac{1}{\log_3 9x}-\frac{4}{1-\log_3 x}=1 \Leftrightarrow \frac{2-\log_3 x}{2+\log_3 x}-\frac{4}{1-\log_3 x}=1$ (2)

Đặt: $t=\log_3 x$ ( ĐK: $\begin{cases} t\neq 1 \\ t\neq -2 \end{cases}$ (**)). Khi đó phương trình (2) trở thành:

$$\frac{2-t}{2+t}=\frac{4}{1-t} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 1 \\ t\neq -2 \\ t^2-3t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=81 \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện được 2 nghiệm $x=\frac{1}{3}$; $x=81$

**Câu 19.** Giải phương trình: $\log_2(x-1)+3\log_{\frac{1}{8}}(3x-2)+2=0$

Điều kiện: $x>1$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$\log_2(x-1)-\log_2(3x-2)+2=0 \Leftrightarrow \log_2(4x-4)=\log_2(3x-2)$

$\Leftrightarrow 4x-4=3x-2 \Leftrightarrow x=2$

Kết hợp với điều kiện phương trình có nghiệm $x=2$.

**Câu 20.** Giải phương trình: $\log_3\left(x^2-x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+4\right)=1$.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ -4<x<0 \end{array}\right.$

$\log_3\left(x^2-x\right)-\log_3\left(x+4\right)=1 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x\right)=\log_3\left(x+4\right)+\log_3 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x\right)=\log_3\left[3\left(x+4\right)\right] \Leftrightarrow x^2-x=3\left(x+4\right)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=6 \end{array}\right.$ (thoả mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm $\boxed{x=-2;x=6}$.

**Câu 21.** Giải phương trình: $\log_3(x^2+3x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+2)=0$; $(x\in\mathbb{R})$

Đk: x>0 (*)

Với Đk(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow \log_3(x^2+3x)=\log_3(2x+2)$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(t/m) \\ x=-2(loai) \end{array}\right.$. Vậy nghiệm của PT là x = 1

**Câu 22.** Giải phương trình: $\log_2^2 x+4\log_4 4x=7$.

Đk: x>0, $\log_2^2 \mathrm{x}+4\log_4 4\mathrm{x}-7=0 \Leftrightarrow \log_2^2 \mathrm{x}+2\log_2 \mathrm{x}-3=0$

$\left[\begin{array}{l} \log_2 \mathrm{x}=1 \\ \log_2 \mathrm{x}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{x}=2 \\ \mathrm{x}=\dfrac{1}{8} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của PT là $\mathrm{x}=2$ và $\mathrm{x}=\dfrac{1}{8}$.

**Câu 23.** Giải phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-5=0$

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}, t\ge 1$.

Phương trình trở thành $t^2+t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-3(loại)\end{array}\right.$

Với t = 2 thì $\sqrt{\log_3^2 x+1}=2\Leftrightarrow \log_3{}^2 x=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=\sqrt{3}\\\log_3 x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3^{\sqrt{3}}\\x=3^{-\sqrt{3}}\end{array}\right.$ (tmđk).

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=3^{\sqrt{3}}$ và $x=3^{-\sqrt{3}}$

**Câu 24.** Giải phương trình: $(2-\log_3 x)\log_{9x}3-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1$

Điều kiện $x>0, x\ne 3, x\ne 1/9$

Phương trình $\Leftrightarrow(2-\log_3 x)\dfrac{1}{\log_3 9x}-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1\Leftrightarrow\dfrac{2-\log_3 x}{2+\log_3 x}-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1$

**Câu 25.** Giải phương trình $\log_2(x-1)-2\log_4(3x-2)+2=0$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\3x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x>\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>1$ (*)

Khi đó: $1\Leftrightarrow\log_2(x-1)-\log_2(3x-2)=-2$

$\Leftrightarrow\log_2\dfrac{x-1}{3x-2}=-2\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{3x-2}=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4x-4=3x-2\Leftrightarrow x=2$ [thỏa (*)]

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$

**Câu 26.** Giải phương trình $\log_2 x+\log_3 x+\log_6 x=\log_{36} x$ (1)

Điều kiện: $x>0$

Áp dụng công thức $\log_a c=\log_a b\cdot\log_b c$, $(0<a,b,c;a\ne 1;b\ne 1)$, ta có

$1\Leftrightarrow\log_2 x+\log_3 2\cdot\log_2 x+\log_6 2\cdot\log_2 x=\log_{36}2\cdot\log_2 x$

$\Leftrightarrow\log_2 x(\log_3 2+\log_6 2+1-\log_{36}2)=0$ (*)

Do $\log_3 2+\log_6 2+1-\log_{36}2>0$ nên (*) $\Leftrightarrow\log_2 x=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$

**Câu 27.** Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\neq 0\\ 2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (*)

Khi đó: $1\Leftrightarrow 2\log_3|x-1|+2\log_3(2x-1)=2$

$\Leftrightarrow \log_3|x-1|+\log_3(2x-1)=1$

$\Leftrightarrow \log_3\left[|x-1|(2x-1)\right]=1$

$\Leftrightarrow |x-1|(2x-1)=3$ (2)

- Với $\dfrac{1}{2}<x<1$ thì $2\Leftrightarrow (1-x)(2x-1)=3\Leftrightarrow 2x^2+3x+4=0$ : phương trình vô nghiệm
- Với $x>1$ thì $2\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)=3\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=2\end{array}\right.$ loại [thỏa (*)]

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$

**Câu 28.** Giải phương trình $\log_2^2 x+3\log_2(2x)-1=0$ (1)

Điều kiện: $x>0$

Khi đó: $1\Leftrightarrow \log_2^2 x+3\log_2 x+2=0$

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình (1) trở thành $t^2+3t+2=0$ (3)

$3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-2\end{array}\right.$

- Với $t=-1$ thì $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ [thỏa (*)]
- Với $t=-2$ thì $\log_2 x=-2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ [thỏa (*)]

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{4};x=\dfrac{1}{2}$

**Câu 29.** Giải phương trình $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log x \neq 5 \\ \log x \neq -1 \end{cases}$ (*)

Đặt $t=\log x \quad t\neq 5, t\neq -1$ , phương trình (1) trở thành $\frac{1}{5-t}+\frac{2}{1+t}=1$ (3)

$$3 \Leftrightarrow 1+t+2\ 5-t\ =\ 5-t\ \ 1+t\ \Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right.$$

- Với $t=2$ thì $\log x=2 \Leftrightarrow x=100$ [thỏa (*)]
- Với $t=3$ thì $\log x=3 \Leftrightarrow x=1000$ [thỏa (*)]

Vậy nghiệm của phương trình là $x=100; x=1000$

**Câu 30.** Giải phương trình $\log_2\left(\frac{5.2^x-8}{2^x+2}\right)=3-x$ (1)

Điều kiện $5.2^x-8>0$ (*)

Ta có: $1 \Leftrightarrow \frac{5.2^x-8}{2^x+2}=2^{3-x}$

$$\Leftrightarrow\ 2^x\ 5.2^x-8\ =8\ 2^x+2$$

$$\Leftrightarrow\ 5.2^{2x}-16.2^x-16=0 \quad (2)$$

Đặt $t=2^x$ với $t>0$, phương trình (2) trở thành $5t^2-16t-16=0$ (3)

$$3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-\frac{4}{5} \end{array}\right.$$

- Với $t=4$ thì $2^x=4 \Leftrightarrow x=2$ [thỏa (*)]

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$

**Câu 31.** Giải phương trình sau $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$

$\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$ (1)

Điều kiện: x > 0.

(1) $\Leftrightarrow \log_2 x+\log_{2^2} x+\log_{2^3} x=11$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 11$

$\Leftrightarrow \frac{11}{6}\log_2 x = 11$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$ (*nhan*)

Vậy phương trình có nghiệm x = 64.

**Câu 32.** Giải phương trình sau $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{0,2} \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\log_5 x + \log_{25} x = \log_{0,2} \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1)

Điều kiện: x > 0.

(1) $\Leftrightarrow \log_5 x + \log_{5^2} x = \log_{5^{-1}} \left(\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow \log_5 x + \frac{1}{2}\log_5 x = \log_5 \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_5 x = \log_5 \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_5 x = \frac{2}{3}\log_5 \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 \sqrt[3]{3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \sqrt[3]{3}$.

**Câu 33.** Giải phương trình sau $\log_2^2 x - \log_2 x - 6 = 0$

$\log_2^2 x - \log_2 x - 6 = 0$ (3)

Điều kiện: x > 0.

Đặt $t = \log_2 x$. PT (3) trở thành $t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 2 \end{array}\right.$

$t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$ (thỏa mãn)

$t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm x = 4 và x = 8.

**Câu 34.** Giải phương trình sau $4\log_2^2 x + \log_{\sqrt{2}} x = 2$

$4\log_2^2 x + \log_{\sqrt{2}} x = 2$ (1)

Điều kiện x > 0.

$(1) \Leftrightarrow 4\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2^2}} x = 2 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 = 0$ (1')

Đặt $t = \log_2 x$. PT (1') trở thành $4t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$t = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ (*t / m*)

$t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (*t / m*)

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ và $x = \sqrt{2}$

**Câu 35.** Giải phương trình sau $3\log_3^2 x = 10\log_3 x - 3$

$3\log_3^2 x = 10\log_3 x - 3$ (5)

Điều kiện x > 0

Đặt $t = \log_3 x$ ta được $3t^2 = 10t - 3 \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$t = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 3^3 = 27$ (nhận)

$t = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

Vậy phương trình có hai nghiệm x = 27 và $x = \sqrt[3]{3}$.

**Câu 36.** Giải phương trình sau $\ln(x^2 - 6x + 7) = \ln(x - 3)$

$\ln(x^2 - 6x + 7) = \ln(x - 3)$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 6x + 7 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ (loai) \\ x = 5 \ (nhan) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm x = 5.

**Câu 37.** Giải phương trình:

$$\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \ (1)$$

Điều kiện: $\frac{1}{2} < x \neq 1$

$\Leftrightarrow 2\log_3|x-1| + 2\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_3|x-1| + \log_3(2x-1) = 1$

$$\Leftrightarrow \log_3|x-1|(2x-1) = \log_3 3 \Leftrightarrow |x-1|(2x-1) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{2} < x < 1\\ 2x^2-3x+4=0\,(vn)\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ 2x^2-3x-2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$$

**Câu 38.** Giải phương trình:

$$\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3 \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\neq 0\\ 4-x>0\\ 4+x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4<x<4\\ x\neq -1\end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \log_2|x+1| + 2 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x) \Leftrightarrow \log_2|x+1| + 2 = \log_2(16-x^2)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2(16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$

+ Với $-1 < x < 4$ ta có phương trình $x^2+4x-12=0\,(2)$;

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-6\,(\text{loại})\end{array}\right.$

+ Với $-4 < x < -1$ ta có phương trình $x^2-4x-20=0$ (3);

$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{24}\\ x=2+\sqrt{24}\,(\text{loại})\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ hoặc $x=2\left(1-\sqrt{6}\right)$.

**Câu 39.** Giải phương trình: $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40.\log_{4x}\sqrt{x} = 0$

$\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40.\log_{4x}\sqrt{x} = 0$ (1)

Đk: $x>0,\ x\neq 1/4,\ x\neq 1/16, x\neq 2$ (*)

Khi đó, phương trình tương đương với $2.\log_{\frac{x}{2}} x - 42.\log_{16x} x + 20.\log_{4x} x = 0$ (2)

Nhận thấy x =1 luôn là nghiệm của PT.

Với 0 < x ≠ 1, PT (2) $\Leftrightarrow \frac{2}{\log_x \frac{x}{2}} - \frac{42}{\log_x 16x} + \frac{20}{\log_x 4x} = 0$

Đặt t = $\log_x 2$, phương trình trên trở thành $\frac{2}{1-t}-\frac{42}{1+4t}+\frac{20}{1+2t}=0$ (3)

(3) $\Leftrightarrow 2t^2+3t-2=0 \Leftrightarrow$ t = 1/2 hoặc t = -2(tmđk)

* Với t = -2 thì $\log_x 2 = -2 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

* Với t = 1/2 thì $\log_x 2 = 1/2 \Leftrightarrow$ x = 4.

Kết hợp đk ta được nghiệm của phương trình là x = 4, x = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Câu 40** Giải phương trình $\log_3 \frac{x^2+x+1}{2x^2-2x+3}=x^2-3x+2$

Đặt $u=x^2+x+1;\ v=2x^2-2x+3\ (u>0,\ v>0)$ suy ra $v-u=x^2-3x+2$.

PT đã cho trở thành $\log_3 \frac{u}{v}=v-u \Leftrightarrow \log_3 u-\log_3 v=v-u \Leftrightarrow \log_3 u+u=\log_3 v+v$ (1).

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=\log_3 t+t, t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0, \forall t>0$ nên hàm số đồng biến khi t > 0.

Từ (1) ta có f(u) = f(v), suy ra u = v hay v-u=0, tức là $x^2$-3x+2=0.

Phương trình có nghiệm $x=1,\ x=2$.

## 6.4. Bất phương trình logarith

**Câu 1.** Giải bất phương trình: $\log_{0,2} x + \log_{0,2}(x+1) < \log_{0,2}(x+2)$.

Điều kiện: $x > 0$ (*).

$\log_{0,2} x + \log_{0,2}(x+1) < \log_{0,2}(x+2) \Leftrightarrow \log_{0,2}(x^2+x) < \log_{0,2}(x+2)$

$\Leftrightarrow x^2 + x > x + 2 \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$ (vì $x > 0$).

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > \sqrt{2}$.

**Câu** 2. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right] > 0 \quad (x \in R)$.

Điều kiện: $\log_2(2-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 > 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \log_2(2-x^2) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2 - x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm bpt là $S = (-1;0) \cup (0;1)$

**Câu 3.** Giải bất phương trình: $2\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \le 2$

ĐK: $x > 1$ , $2\log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \le 2 \Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)] \le 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 2$ => tập nghiệm S = (1;2]

**Câu 4.** Giải bất phương trình: $\log_5(4x+1) - \log_5(7-2x) \le 1 + \log_{\frac{1}{5}}(3x+2)$

+ Điều kiện: $-\frac{1}{4} < x < \frac{7}{2}$

+ BPT $\Leftrightarrow \log_5(4x+1) + \log_5(3x+2) \le 1 + \log_5(7-2x)$

$\Leftrightarrow \log_5(4x+1)(3x+2) \le \log_5 5(7-2x)$

$\Leftrightarrow (4x+1)(3x+2) \le 5(7-2x)$

$\Leftrightarrow 12x^2 + 21x - 33 \le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{33}{12} \le x \le 1$

Giao với điều kiện, ta được: $-\frac{1}{4} < x \le 1$

Vậy: nghiệm của BPT đã cho là $-\frac{1}{4} < x \le 1$

**Câu 5.** Giải bất phương trình sau:

$$1+\log_2 x+\log_2(x+2)>\log_{\sqrt{2}}(6-x)$$

ĐK: $0<x<6$. BPT $\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2+4x\right)>\log_2(6-x)^2$.

Hay: BPT $\Leftrightarrow 2x^2+4x>(6-x)^2 \Leftrightarrow x^2+16x-36>0$

Vậy: $x<-18$ hay $2<x$

So sánh với điều kiện.

KL: Nghiệm BPT là $2<x<6$.

**Câu 6.** Giải bất phương trình $\log_2(2x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\le 1$.

- ĐK: $x>2$

- Khi đó bất phương trình có dạng: $\log_2(2x-1)+\log_2(x-2)\le 1$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[(2x-1)(x-2)\right]\le 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]$$

- Kết hợp điều kiện ta có: $x\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$

**Câu 7.** Giải bất phương trình sau: $\log_3\left[\log_2(x-2)\right]<3\log_{25}4.\log_8 5$

$\log_3\left[\log_2(x-2)\right]<3\log_{25}4.\log_8 5 \Leftrightarrow \log_3\left[\log_2(x-2)\right]<\log_3 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2(x-2)<3\\ \log_2(x-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow 4<x<10$$

**Câu 8.** Giải bất phương trình sau : $\log_2(x^2-1)\ge\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

ĐK: $x>1$. BPT

$$\log_2(x^2-1)\ge\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x^2-1)+\log_2(x-1)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x-1)\ge 1 \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1\ge 1 \Leftrightarrow x(x^2-x-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow x\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (do $x>1$).

Vậy tập nghiệm của BPT là $S=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

**Câu 9.** Giải bất phương trình $\log_2^2 x \ge \log_2 \frac{x}{4} + 4$

Giải bất phương trình $\log_2^2 x \ge \log_2 \frac{x}{4} + 4$ (1)

Điều kiện của bất phương trình (1) là: $x > 0$ (*)

Với điều kiện (*),

$(1) \Leftrightarrow \log_2^2 x \ge \log_2 x - \log_2 4 + 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 1) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \ge 2 \\ \log_2 x \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ 0 < x \le \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*), ta có tập nghiệm của bất phương trình (1) là

$S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty)$

**Câu 10.** Giải bất phương trình $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x$

Điều kiện x > 0.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2^4(x) - \left[\log_2 x^3 - \log_2 8\right]^2 + 9\left[\log_2 32 - \log_2 x^2\right] < 4\log_2^2(x)$

$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - \left[3\log_2 x - 3\right]^2 + 9\left[5 - 2\log_2 x\right] < 4\log_2^2(x)$

Đặt t = $\log_2$(x), bất phương trình trên tương đương với

$t^4 - 13t^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow 4 < t^2 < 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < t < -2 \\ 2 < t < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -2 \\ 2 < \log_2 x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4} \\ 4 < x < 8 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có nghiệm $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup (4,8)$.

**Câu 11.** Giải bất phương trình: $\log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4}\right) < 0$ (1)

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$ (*)

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow \log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4}\right) < \log_{0,7} 1 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > \log_6 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{array}\right.$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\left[\begin{array}{l}-4 < x < -3\\ x > 8\end{array}\right.$

**Câu 12.** Giải bất phương trình $\log_2(4x^2-4x+1)-2x > 2-(x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)$

ĐK: $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}-x>0\\ 4x^2-4x+1>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x<\frac{1}{2}\\ (2x-1)^2>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x<\frac{1}{2}\\ x\neq\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \qquad (*)$

Với điều kiện (*) bất phương trình tương đương với:

$2\log_2(1-2x)-2x > 2+(x+2)\left[\log_2(1-2x)-1\right] \Leftrightarrow x\left[\log_2(1-2x)+1\right]<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\ \log_2(1-2x)+1<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ \log_2(1-2x)+1>0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\ \log_2 2(1-2x)<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ \log_2 2(1-2x)>0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\ 2(1-2x)<1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0\\ 2(1-2x)>1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{4}\\ x<0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có: $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ hoặc x < 0.

**Câu 13.** Giải bất phương trình: $\log_2(x-1) \le \log_{\frac{1}{2}}(x+3)+5.$

Điều kiện: $x>1.$

BPT $\Leftrightarrow \log_2(x-1)+\log_2(x+3)\le 5 \Leftrightarrow \log_2(x^2+2x-3)\le 5$

$\Leftrightarrow x^2+2x-35\le 0 \Leftrightarrow -7\le x\le 5$

Kết hợp điều kiện ta được: $1<x\le 5$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $1<x\le 5.$

**Câu 14.** Giải bất phương trình:

$$\log_2{}^2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1)-3>0$$

$\log_2{}^2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1)-3>0 \Leftrightarrow \log_2{}^2(x+1)-2\log_2(x+1)-3>0$

Đặt t = $\log_2$(x+1) ta được : $t^2 - 2t - 3 > 0$ <=> t < -1 hoặc t > 3.

Vậy: $\left[\begin{array}{l}\log_2(x+1)<-1\\ \log_2(x+1)>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{2}\\ x+1>8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<-\frac{1}{2}\\ x>7\end{array}\right.$

**Câu 15.** Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}4x-3>0\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3}{4}\\x>-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$ (*)

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2\le 2+\log_3(2x+3)$$
$$\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2\le \log_3\left[9(2x+3)\right]$$
$$\Leftrightarrow (4x-3)^2\le 9(2x+3)$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le x\le 3$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\dfrac{3}{4}<x\le 3$

**Câu 16.** Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$ (1)

Điều kiện: $\dfrac{x^2-3x+2}{x}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2\end{array}\right.$ (*)

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-3x+2}{x}\ge\log_{\frac{1}{2}}1\quad\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{x}\le 1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+2}{x}\le 0\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\le x<1\\2<x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$

**Câu 17.** Giải bất phương trình $\log_2^2 x+\log_2 x-2\le 0$ (1)

Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$ , bất phương trình (1) trở thành $t^2+t-2\le 0\Leftrightarrow -2\le t\le 1$

Suy ra: $-2\le\log_2 x\le 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\le x\le 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{1}{4};2\right]$

**Câu 18.** Giải bất phương trình sau: $\log_3(4x-3)<2$

$\log_3(4x-3)<2$

Điều kiện $4x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}$

$\log_3(4x-3)<2 \Leftrightarrow 4x-3<3^2 \Leftrightarrow 4x<12 \Leftrightarrow x<3$

Kết hợp điều kiện, bất phương trình có nghiệm $S=\left(\dfrac{3}{4};3\right)$

**Câu 19.** Giải bất phương trình sau: $\log_{0,5}(x^2-5x+6)\geq -1$

$\log_{0,5}(x^2-5x+6)\geq -1$

Điều kiện $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ x>3 \end{array}\right.$

$\log_{0,5}(x^2-5x+6)\geq -1 \Leftrightarrow x^2-5x+6\leq (0,5)^{-1} \Leftrightarrow x^2-5x+4\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 4$

Kết hợp điều kiện bất phương trình có nghiệm $S=[1;2)\cup(3;4]$

**Câu 20.** Giải bất phương trình sau: $\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)\leq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-x-6)$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)\leq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-x-6)$

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+4>0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>3$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x+4)\leq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-x-6) \Leftrightarrow 2x+4\geq x^2-x-6$

$\Leftrightarrow x^2-3x-10\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 5$

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình có nghiệm $S=(3;5]$

**Câu 21.** Giải bất phương trình sau: $\log(7x+1)\geq \log(10x^2-11x+1)$

$\log(7x+1)\geq \log(10x^2-11x+1)$

Điều kiện: $\begin{cases}7x+1>0\\10x^2-11x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{7}\\\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{1}{10}\\x>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{-1}{7};\dfrac{1}{10}\right)\cup(1;+\infty)$

$\log(7x+1)\ge\log(10x^2-11x+1)\Leftrightarrow 7x+1\ge 10x^2-11x+1$

$\Leftrightarrow 10x^2-18x\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{9}{5}$

Kết hợp điều kiện, bất phương trình có nghiệm $S=\left[0;\dfrac{1}{10}\right)\cup\left(1;\dfrac{9}{5}\right]$

**Câu 22.** Giải bất phương trình:

$$\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$$

Điều kiện: $x>3$

Bất phương trình đã cho tương đương:

$\dfrac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)+\dfrac{1}{2}\log_{3^{-1}}(x-2)>\dfrac{1}{2}\log_{3^{-1}}(x+3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)-\dfrac{1}{2}\log_3(x-2)>-\dfrac{1}{2}\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow\log_3\left[(x-2)(x-3)\right]>\log_3(x-2)-\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow\log_3\left[(x-2)(x-3)\right]>\log_3\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)\Leftrightarrow(x-2)(x-3)>\dfrac{x-2}{x+3}$

$\Leftrightarrow x^2-9>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{10}\\x>\sqrt{10}\end{array}\right.$

Giao với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x>\sqrt{10}$.

**Câu 23.** Giải bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{3}}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

Đk: $x>0$

$(1) \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) + \log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \log_3 \left( \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right) < 0$

$\Leftrightarrow \log_5^2 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1$

$\Leftrightarrow 0 < \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1$

*) $0 < \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \Leftrightarrow x > 0$

*) $\log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < 5-x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$

Vậy BPT có nghiệm $x \in \left(0; \frac{12}{5}\right)$

**Câu 24.** Giải bất phương trình $x(3\log_2 x - 2) > 9\log_2 x - 2$

Điều kiện: $x > 0$ Bất phương trình $\Leftrightarrow 3(x-3)\log_2 x > 2(x-1)$

Nhận thấy x=3 không là nghiệm của bất phương trình.

TH1 Nếu $x > 3$ BPT $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x > \frac{x-1}{x-3}$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $g(x) = \frac{x-1}{x-3}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ *Với $x > 4$:Ta có $\left.\begin{matrix} f(x) > f(4) = 3 \\ g(x) < g(4) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Bpt có nghiệm $x > 4$ *

Với $x < 4$:Ta có $\left.\begin{matrix} f(x) < f(4) = 3 \\ g(x) > g(4) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Bpt vô nghiệm

TH 2:Nếu $0 < x < 3$ BPT $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x < \frac{x-1}{x-3}$ $f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ ;

$g(x) = \frac{x-1}{x-3}$ nghịch biến trên $(0;3)$ *Với $x > 1$:Ta có $\left.\begin{matrix} f(x) > f(1) = 0 \\ g(x) < g(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Bpt vô nghiệm

- Với $x < 1$:Ta có $\left.\begin{matrix} f(x) < f(1) = 0 \\ g(x) > g(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Bpt có nghiệm $0 < x < 1$
- Vậy Bpt có ngh $\left[\begin{matrix} x > 4 \\ 0 < x < 1 \end{matrix}\right.$

# PHẦN 7. TỌA ĐỘ MẶT PHẲNG

## 7.1. Tọa độ đỉnh của tam giác

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(3;2)$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(2;-1)$ và điểm B nằm trên đường thẳng d có phương trình: $x-y-7=0.$ Tìm tọa độ đỉnh B, C.

Tìm tọa độ đỉnh B, C.

Ta có: $\overrightarrow{IA}=(1;3)\Rightarrow IA=\sqrt{10}.$

Giả sử $B(b,b-7)\in d\Rightarrow \overrightarrow{IB}=(b-2,b-6)\Rightarrow IB=\sqrt{2b^2-16b+40}$

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC\Rightarrow IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2$

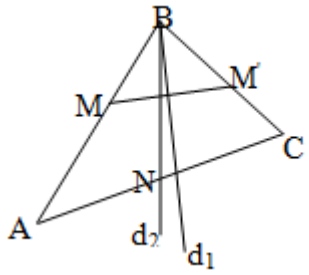
$$\Leftrightarrow 10=2b^2-16b+40\Leftrightarrow b^2-8b+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=5\Rightarrow B(5;-2)\\ b=3\Rightarrow B(3;-4)\end{array}\right.$$

Do tam giác ABC vuông tại $A\Rightarrow I(2;-1)$ là trung điểm của BC.

- Với $B(5;-2)\Rightarrow C(-1;0).$
- Với $B(3;-4)\Rightarrow C(1;2).$

Vậy tọa độ đỉnh B, C là: $B(5;-2),C(-1;0)$ và $B(3;-4),C(1;2).$

**Câu 2.** Cho tam giác ABC. Đường phân giác trong của góc B có phương trình $d_1:x+y-2=0$, đường trung tuyến kẻ từ B có phương trình $d_2:4x+5y-9=0$. Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(2;\frac{1}{2})$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=\frac{5}{2}$. Tìm tọa độ đỉnh A .




Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-2=0\\4x+5y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua $d_1$, $M'(\frac{3}{2};0)$.

Do AB đi qua B và M nên có pt: $x+2y-3=0$. BC đi qua M' và B nên có pt: 2x + y – 3 = 0. Gọi $\alpha$ là góc giữa 2 đường thẳng AB và BC suy ra $\cos\alpha=\frac{|2.1+1.2|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

Từ định lý sin trong tam giác ABC $2R = \dfrac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow AC = 3$.

$A \in AB, C \in BC \Rightarrow A(a; \dfrac{3-a}{2}); C(c; 3-2c)$, trung điểm của AC là $N(\dfrac{a+c}{2}; \dfrac{9-a-4c}{4})$.

$$\begin{cases} N \in d_2 \\ AC = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 4c + 3 = 0 \\ (c-a)^2 + \left(\dfrac{a-4c+3}{2}\right)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5; c = 2 \\ a = -3, c = 0 \end{cases}$$

Khi a = 5 ta được A(5; -1). Khi a = -3 ta được A(-3; 3).
Đs: $A_1$(5; -1), $A_2$ (-3; 3).

**Câu 3.** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $AIB = 90°$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$. Đường thẳng AC qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết đỉnh A có hoành độ dương.

$AIB = 90° \Rightarrow BCA = 45°$ hoặc $BCA = 135°$

Suy ra $CAD = 45° \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D.

Ta có $DI \perp AC$ Khi đó phương trình đường thẳng AC có dạng: $x - 2y + 9 = 0$ .

$A(2a-9; a), \overrightarrow{AD} = (8-2a; -1-a)$

$$AD^2 = 40 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ a = 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A(1;5)(\text{n})$$

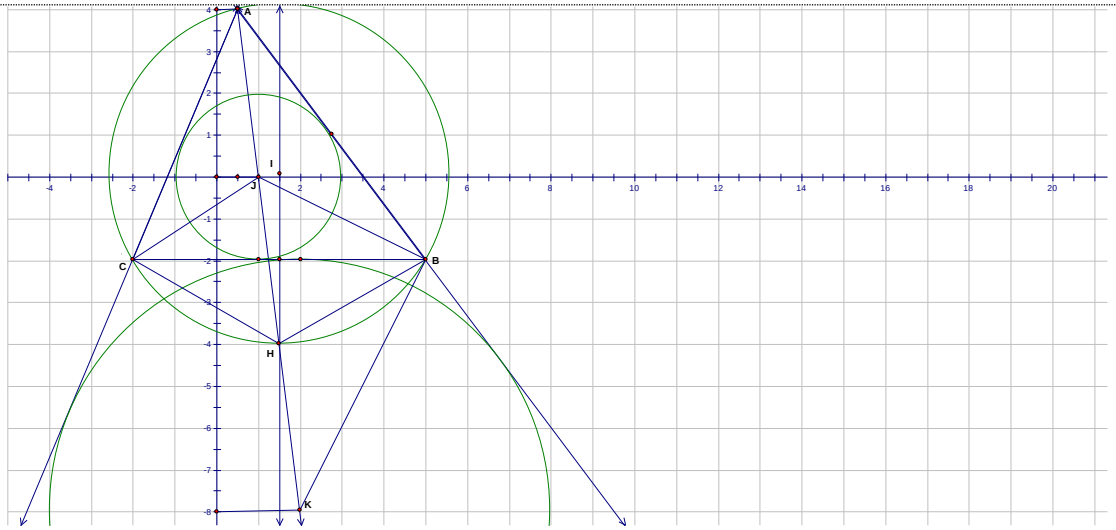
Phương trình BD : $x + 3y + 4 = 0$

Phương trình BI: $3x + 4y + 5 = 0$

$B = BI \cap BD \Rightarrow B(2;-2)$.

**Câu 4.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{16}\right)$, tâm đường tròn nội tiếp là $J(1;0)$. Đường phân giác trong góc $BAC$ và đường phân giác ngoài góc $ABC$ cắt nhau tại $K(2;-8)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ dương.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{16}\right)$, tâm đường tròn nội tiếp là $J(1;0)$. Đường phân giác trong góc $BAC$ và đường phân giác ngoài góc $ABC$ cắt nhau tại $K(2;-8)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ dương.




Gọi giao điểm của AK và đường tròn (I) là H. Xét tam giác BHJ có $HJB = JAB + JBA$ (góc ngoài tam giác JAB)

$= JAC + JBC$ ( vì AJ, BJ là các đường phân giác)

$= CBH + JBC$ (nội tiếp cùng chắn cung $CH$ của đường tròn (I))

$= HBJ$

Suy ra tam giác HJB cân tại H, vậy HJ=HB và $HJB = HBJ$ (1)

Lại có BJ, BK thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài góc $ABC$ nên tam giác BKJ vuông tại B. Suy ra $HJB + HKB = 90^0 = HBJ + HBK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $HKB = HBK$ hay tam giác HBK cân tại H, do đó $HJ = HB = HK$, vậy H là trung điểm JK, hay $H\left(\frac{3}{2};-4\right)$. Tương tự $HJ = HC = HK$.

Ta có $\overrightarrow{IH}\left(0;-\frac{65}{16}\right);\overrightarrow{HJ}\left(-\frac{1}{2};4\right)$

B, C cùng thuộc các đường tròn (I;IH) và (H; HJ) nên tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

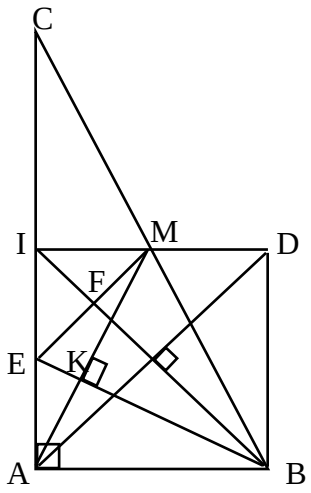
$$\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{16}\right)^2=\left(\frac{65}{16}\right)^2\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+4)^2=\frac{1}{4}+16\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5;y=-2\\ x=-2;y=-2\end{array}\right.\Rightarrow B(5;-2),C(-2;-2).$$

AH đi qua J và K nên phương trình đường thẳng AH là: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{-8-0}\Leftrightarrow 8x+y-8=0$.

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với AH, d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=-2\overrightarrow{HJ}=(1;-8)$, phương trình đường thẳng d là: $x-8y-1=0$. Gọi M là giao điểm của d và AH, tọa độ M là nghiệm hệ: $\begin{cases}x-8y-1=0\\ 8x+y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow M(1;0)\equiv J$.

M là trung điểm AH nên $A\left(\frac{1}{2};4\right)$. Kết luận: $A\left(\frac{1}{2};4\right), B(5;-2), C(-2;-2)$.

**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $AC = 2AB$. Điểm $M(2;-2)$ là trung điểm của cạnh $BC$. Gọi $E$ là điểm thuộc cạnh $AC$ sao cho $EC = 3EA$, điểm $K\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$ là giao điểm của $AM$ và $BE$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác $ABC$, biết điểm $E$ nằm trên đường thẳng $d: x + 2y - 6 = 0$.




Kẻ $MI \perp AC$ tại I và $BD \perp MI$ tại D. Khi đó ta có tứ giác AIDB là hình vuông có M, E lần lượt là trung điểm của BC, AI. Do đó ta có $BE \perp AM$ tại K

$\Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến của BE là $\overrightarrow{KM} = \left(\frac{6}{5};-\frac{18}{5}\right)$

hay $\vec{n} = (1;-3) \Rightarrow$ phương trình $BE: x - 3y + 4 = 0$

Ta có $E = BE \cap d: x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow E(2;2)$

$AD \perp BI$, ME là đường trung bình của $\Delta AID$

nên suy ra $BI \perp ME$ tại F(2 ; 0) là trung điểm của ME

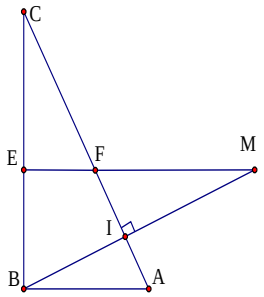
$\Rightarrow$ phương trình $BI: y = 0$; vậy $B = BE \cap BI \Rightarrow B(-4;0)$

$\Rightarrow C(8;-4)$ (vì M(2; -2) là trung điểm của BC)

Ta có $\overrightarrow{BI} = 4\overrightarrow{FI} \Rightarrow$ tọa độ điểm I(4; 0)

$\Rightarrow$ tọa độ điểm A(0; 4 ) (vì I(4; 0) là trung điểm của AC)

**Câu 6.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, $BC = 2BA$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC. Trên tia đối của tia FE lấy điểm M sao cho $FM = 3FE$. Biết điểm M có tọa độ $(5;-1)$, đường thẳng AC có phương trình $2x + y - 3 = 0$, điểm A có hoành độ là số nguyên. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.




Gọi I là giao điểm của BM và AC.

Ta thấy $BC = 2BA \Rightarrow EB = BA, FM = 3FE \Rightarrow EM = BC$

$\Delta ABC = \Delta BEM \Rightarrow EBM = CAB \Rightarrow BM \perp AC$.

Đường thẳng BM đi qua M vuông góc với AC $BM: x - 2y - 7 = 0$.

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{5} \\ y = \dfrac{-11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{13}{5}; \frac{-11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}\right), \overrightarrow{IB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IM} = \left(\frac{-8}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow B(1;-3)$$

Trong $\Delta ABC$ ta có $\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{5}{4BA^2} \Rightarrow BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2} BI$

Mặt khác $BI = \sqrt{\left(\dfrac{-8}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{-4}{5}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, suy ra $BA = \dfrac{\sqrt{5}}{2} BI = 2$

Gọi toạ độ $A(a, 3-2a)$, Ta có

$$BA^2 = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (6-2a)^2 = 4 \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \dfrac{11}{5} \end{array}\right.$$

Do a là số nguyên suy ra $A(3;-3)$. $\overrightarrow{AI} = \left(\dfrac{-2}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI} = (-2;4) \Rightarrow C(1;1)$. Vậy $A(3;-3), B(1;-3), C(1;1)$.

**Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-2;-4)$, $AB = 2\sqrt{10}$ và $M(8;1)$ là trung điểm cạnh AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $(CH): x - 3y - 10 = 0$ và tung độ của đỉnh A nhỏ hơn tung độ đỉnh B.

Trực tâm $H(-2;-4)$ , $AB = 2\sqrt{10}$ , $M(8;1)$ trung điểm AC $(CH): x - 3y - 10 = 0$ , $y_A < y_B$

Gọi N trung diểm BC suy ra pt MN : 3x + y – 25 = 0

N thuộc M N , $MN = \dfrac{1}{2} AB = \sqrt{10}$ suy ra $N(9;-2)$ , $N(7;4)$

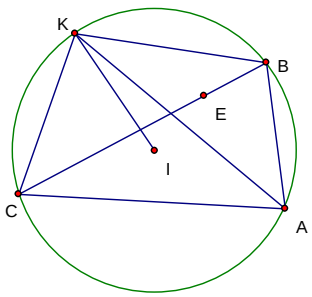
C $\in$ CH suy ra $(3c+10; c)$ vì M , N trung điểm AC,BC nên $A(6-3c; 2-c)$ và

$\left[\begin{array}{l} B(8-3c; -4-c) \\ B(4-3c; 8-c) \end{array}\right.$ do đk $y_A < y_B$ nên nhận $\begin{cases} N(7;4) \\ B(4-3c; 8-c) \end{cases}$

H trực tâm suy ra $AH \perp BC \Leftrightarrow 20c^2 - 50c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Tìm được $\left[\begin{array}{l} A(6;2), B(4;8), C(10;0) \\ A\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right), B\left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{11}{2}\right), C\left(\dfrac{35}{2}; \dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right.$

**Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường phân giác trong của góc A, điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2+y^2-2x-10y-24=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.




Đường tròn ngoại tiếp có tâm I(1;5)

Tọa đôi điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-10y-24=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$$

Do A có hoành độ âm suy ra A(-4;0).

Và gọi K(6;0),vì AK là phân giác trong góc A nên KB=KC, do đó $KI \perp BC$ và $\overrightarrow{IK}(-5;5)$ là vtpt của đường thăng BC.

$\Rightarrow BC: -5(x-3)+5(y+1)=0 \Leftrightarrow -x+y+4=0$.

Suy ra tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-10y-24=0 \\ -x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vây A(-4;0), B(8;4), C(2;-2) và A(-4;0), C(8;4), B(2;-2) .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm H(-2; 4) và điểm I(-1; 1) lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

+ $\overrightarrow{IM}=(-\frac{7}{2};\frac{1}{2})$. Ta có $M \in AB; AB \perp IM$ nên đường thẳng AB có pt:

7x – y + 33 = 0.

+ $A \in AB \Rightarrow A(a;7a+33)$ .

Vì M là trung điểm cạnh AB nên B( - a – 9; - 7a – 30).

Ta có: $HA \perp HB \Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}=0 \Leftrightarrow a^2+9a+20=0 \Leftrightarrow$ a = -4 hoặc a = -5.

+ Với a = - 4, ta có A( -4;5), B(-5;-2).

Ta có: $AC \perp BH$ nên AC có phương trình: x + 2y – 6 = 0.

$C \in AC \Rightarrow C(6-2c;c)$

$IA = IC \Leftrightarrow (7-2c)^2 + (c-1)^2 = 25$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \Rightarrow C(4;1) \\ c = 5 \Rightarrow C(-4;5)(loai) \end{array}\right.$

+ Với a = -5, ta có A(-5;-2), B(-4;5)

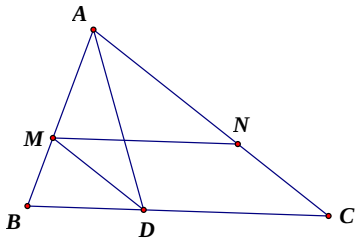
Ta có: $AC \perp BH$ nên AC: 2x – y + 8 = 0.

$C \in AC \Rightarrow C(t; 2t+8)$

Từ IA=IC $\Leftrightarrow (t+1)^2 + (2t+7)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow C(-1;6) \\ t = -5 \Rightarrow C(-5;-2)(loai) \end{array}\right.$

**Câu 10.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N sao cho $AM = CN$. Biết rằng M(–4; 0), C(5; 2) và chân đường phân giác trong của góc A là D(0; –1). Hãy tìm tọa độ của A và B.

Gọi D' là điểm trên cạnh BC sao cho CD' = MN.




Ta có MNCD' là hình bình hành

$\Rightarrow$ MD' = CN = AM $\Rightarrow \Delta$ AMD' cân tại M

$\Rightarrow \angle$ MD'A = $\angle$ MAD' = D'AC

$\Rightarrow$ AD' là phân giác của góc A $\Rightarrow$ D' trùng D. CA qua C và song song MD

$\Rightarrow$ CA có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MD}$ = (4; –1)

$\Rightarrow$ AC: $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

A $\in$ AC $\Rightarrow$ A(5 + 4a; 2 – a) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MA}$ = (9 + 4a; 2– a).

Ta có MA = MD $\Leftrightarrow (9 + 4a)^2 + (2 - a)^2 = 17 \Leftrightarrow 17a^2 + 68a + 85 - 17 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ .
Vậy **A(–3; 4).**

$\overrightarrow{MA}$ = (1; 4) $\Rightarrow$ AB: $\frac{x+4}{1} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x - y = -16$ ; $\overrightarrow{DC}$ = (5; 3) $\Rightarrow$ BC: $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} \Leftrightarrow 3x - 5y = 5$ .

Do đó B: $\begin{cases} 4x - y = -16 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$. Vậy B(–5; –4).

**Câu 11.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đường cao AH, phân giác trong BD và trung tuyến CM . Biết $H(-4;1); M\left(\frac{17}{5};12\right)$ và phương trình đường thẳng BD: x + y – 5 = 0. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC.

Gọi H' là đối xứng của H qua phân giác trong BD thì $H' \in AB$

$HH' \perp BD \Rightarrow ptHH': x - y + c = 0$

$H(-4;1) \in HH' \Rightarrow c = 5$

Vậy pt HH': x –y + 5 = 0

Gọi K là giao điểm của HH' và BD , tọa độ K thỏa hệ:

$\begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow K(0;5)$

K là trung điểm HH' $\Rightarrow H'(4;9)$

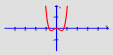
$\overrightarrow{MH'} = \left(\frac{3}{5};-3\right) = \frac{3}{5}(1;-5)$

$AB: \begin{cases} quaH'(4;9) \\ VTPT\,\vec{n} = (5;1) \end{cases}$

Pt AB: 5x + y – 29 = 0

B là giao điểm của AB và BD $\Rightarrow$ tọa độ B thỏa hệ $\begin{cases} 5x + y = 29 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(6;-1)$

M là trung điểm AB $\Rightarrow A\left(\frac{4}{5};25\right)$

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 3x - 5y + 6 = 0$. Trực tâm của tam giác $ABC$ là  và đoạn $BC = \sqrt{5}$. Tìm tọa độ các điểm $A, B, C$ biết điểm A có hoành độ dương .

Gọi tâm đường tròn (C) là $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và A(x;y) suy ra $\overrightarrow{AH}(2-x;2-y)$ M là trung điểm của BC

Học sinh tính được $AH = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

kết hợp với A thuộc đường tròn (C) nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases}$ Giải hệ ta được (x;y)=(0;3) (loại);Hoặc(x;y)=(1;4) (Nhận)

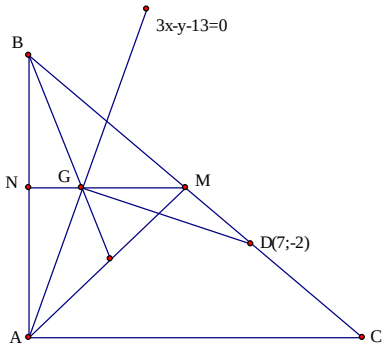
Suy ra toạ độ của A(1;4) ,chứng minh được $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$

Từ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ ta tính được M(2;3/2) Do (BC ) vuông góc với IM nên ta viết được phương trình (BC): x-2y+1 =0 <=> x= 2y-1 thay vào phương trình đường tròn (C) ta được $(2y-1)^2 + y^2 - 3(2y-1) - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Suy ra toạ độ của B(1;1) , C(3;2) hoặc B(3;2) , C(1;1)
Vậy A( 1;4), B(1;1) , C(3;2) hoặc A( 1;4), B(3;2) , C(1;1)

**Câu 13.** Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$, $G$ là trọng tâm điểm $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn $MC$ sao cho $GA=GD$. Tìm tọa độ điểm $A$, lập phương trình $AB$, biết hoành độ của $A$ nhỏ hơn 4 và $AG$ có phương trình $3x-y-13=0$.

Ta có $d(D;AG)=\dfrac{|3.7-(-2)-13|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$




$\Delta ABM$ vuông cân $\Rightarrow GA=GB\Rightarrow GA=GB=GD$
Vậy $G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABD$ $\Rightarrow AGD=2ABD=90^0\Rightarrow \Delta GAD$ vuông cân tại $G$.
Do đó $GA=GD=d(D;AG)=\sqrt{10}\Rightarrow AD^2=20;$
Gọi $A(a;3a-13);a<4$

$$AD^2=20\Leftrightarrow (a-7)^2+(3a-11)^2=20\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5(loai)\\ a=3\end{array}\right.$$

Vậy $A(3;-4)$
Gọi VTPT của $AB$ là $\vec{n}_{AB}(a;b)$

$$\cos NAG=\left|\cos(\vec{n}_{AB},\vec{n}_{AG})\right|=\frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}\quad (1)$$

Mặt khác $\cos NAG=\dfrac{NA}{AG}=\dfrac{NM}{\sqrt{NA^2+NG^2}}=\dfrac{3NG}{\sqrt{9.NG^2+NG^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow 6ab+8b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0\\ 3a=-4b\end{array}\right.$

Với $b=0$ chọn $a=1$ ta có $AB:x-3=0;$
Với $3a=-4b$ chọn $a=4;b=-3$ ta có $AB:4x-3y-24=0$

Nhận thấy với $AB:4x-3y-24=0$ $d(D;AB)=\dfrac{|4.7-3.(-2)-24|}{\sqrt{16+9}}=2<d(D;AG)=\sqrt{10}$ (loại)

Vậy $AB:x-3=0.$

## 7.2. Tọa độ đỉnh của tứ giác

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BD là $H\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$, điểm $M(-1;0)$ là trung điểm cạnh BC và phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH có phương trình là $7x+y-3=0.$ Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Gọi N, K lần lượt là trung điểm của HD và $AH \Rightarrow NK // AD$ và $NK = \frac{1}{2}AD$

Do $AD \perp AB \Rightarrow NK \perp AB.$

Mà $AK \perp BD \Rightarrow K$ là trực tâm tam giác ABN.

Suy ra $BK \perp AN$ (1)

Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC.$

Do đó $NK // BM$ và $NK = BM$

$\Rightarrow \Diamond BMNK$ là hình bình hành $\Rightarrow MN // BK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp AN.$

$\Rightarrow$ phương trình MN có dạng: $x-7y+c=0.$

$M(-1;0) \in MN \Leftrightarrow -1-7.0+c=0 \Leftrightarrow c=1.$

$\Rightarrow$ phương trình AM là: $x-7y+1=0.$

Mà $N = MN \cap AN \Rightarrow N\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right).$ Vì N là trung điểm HD $\Rightarrow D(2;-1).$

Ta có: $\overrightarrow{HN} = \left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$

Do $AH \perp HN \Rightarrow$ AH đi qua H và nhận $\vec{n} = (4;-3)$ là 1 VTPT.

$\Rightarrow$ phương trình AH là: $4x-3y+9=0.$

Mà $A = AH \cap AN \Rightarrow A(0,3).$

Ta có: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(-1-x_B) \\ -4 = 2(0-y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -2 \\ y_B = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-2;2).$

Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow C(0;-2).$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(0;3), B(-2;2), C(0;-2), D(2;-1).$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm E(2; 3) thuộc đoạn thẳng BD, các điểm H(-2; 3) và K(2; 4) lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $E$ trên $AB$ và $AD$. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông ABCD.

Ta có: $EH: y-3=0 \qquad EK: x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} AH: x+2=0 \\ AK: y-4=0 \end{cases} \Rightarrow A(-2;4)$

Giả sử $\vec{n}(a;b)$, $(a^2+b^2>0)$ là VTPT của đường thẳng $BD$.

Có: $ABD=45^0$ nên: $\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm b$

Với $a=-b$, chọn $b=-1\Rightarrow a=1\Rightarrow BD: x-y+1=0$

$\Rightarrow B(-2;-1); D(3;4)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{EB}=(-4;-4)\\ \overrightarrow{ED}=(1;1)\end{cases}\Rightarrow E$ nằm trên đoạn $BD$ (t/m)

Khi đó: $C(3;-1)$

Với $a=b$, chọn $b=1\Rightarrow a=1\Rightarrow BD: x+y-5=0$.

$\Rightarrow B(-2;7); D(1;4)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{EB}=(-4;4)\\ \overrightarrow{ED}=(-1;1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{EB}=4\overrightarrow{ED}\Rightarrow E$ ngoài đoạn $BD$ (L)

Vậy: $A(-2;4); B(-2;-1); C(3;-1); D(3;4)$

**Câu 3.** Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của cạnh BC,phương trình đường thẳng $DM: x-y-2=0$ và $C(3;-3)$. Biết đỉnh A thuộc đường thẳng $d: 3x+y-2=0$ ,xác định toạ độ các đỉnh A,B,D.

Gọi $A(t;-3t+2)$.Ta có khoảng cách:

$$\mathrm{d(A,DM)=2d(C,DM)}\Leftrightarrow\frac{|4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{2.4}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=3\vee t=-1$$

hay $A(3;-7)\vee A(-1;5)$.Mặt khác A,C nằm về 2 phía của đường thẳng DM nên chỉ có $A(-1;5)$ thoả mãn.

Gọi $D(m;m-2)\in DM$ thì $\overrightarrow{AD}=(m+1;m-7), \overrightarrow{CD}=(m-3;m+1)$

Do ABCD là hình vuông

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0\\ DA=DC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\vee m=-1\\ (m+1)^2+(m-7)^2=(m-3)^2+(m+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow m=5$$

Hay $D(5;3), \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(-2;-6)\Rightarrow B(-3;-1)$..

Kết luận $A(-1;5).B(-3;-1), D(5;3)$.

**Câu 4**. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D ; AB = AD , AD < CD ; B(1;2) ; phương trình đường thẳng BD : y =2 . Biết rằng đường thẳng d : 7x-y-25 = 0 cắt các cạnh AD,CD lần lượt tại M,N sao cho BM vuông góc với BC và tia BN là tia phân giác của $^{MBC}$. Tìm tọa độ đỉnh D có hoành độ dương.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên CD

$\Delta ABM = \Delta HBC \Rightarrow BM = BC \Rightarrow \Delta BNC = \Delta BMN$

$\Rightarrow BH = d(B,d) = 2\sqrt{2} \Rightarrow BD = 4$

$D \in BD \Rightarrow D(m;2) : BD = 4 \Leftrightarrow (d-1)^2 = 4 \Leftrightarrow d = -1(L) \text{ V } d = 3$

Vậy : D(3;2)

**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình thang vuông ABCD $\left(BAD = ADC = 90^0\right)$ có đỉnh $D(2;2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh $A,B,C$, biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta : x - 2y + 4 = 0$.

Gọi E là trung điểm của đoạn DH. Khi đó tứ giác ABME là hình bình hành $\Rightarrow ME \perp AD$ nên E là trực tâm tam giác ADM. Suy ra $\Rightarrow AE \perp DM$ mà $AE // DM \Rightarrow DM \perp BM$

Phương trình đường thẳng $BM : 3x + y - 16 = 0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$

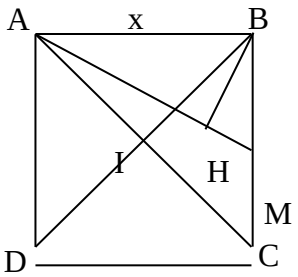
Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{IB}{IC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow I\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng $AC : x + 2y - 10 = 0$

phương trình đường thẳng $DH : 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow H\left(\frac{14}{5};\frac{18}{5}\right) \Rightarrow C(6;2)$

Từ $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IA} \Rightarrow A(2;4)$.

**Câu 6.** Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của BC. Biết AM có phương trình là: 3x+y-7 = 0, đỉnh B(4;1). Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh A có tung độ dương, điểm M có tung độ âm




$\frac{x}{2}$

Gọi H là hinh chiếu vuông góc của B trên AM $\Rightarrow BH = d(B;AM) = \frac{6}{\sqrt{10}}$

Đặt cạnh hình vuông là x>0

Xét tam giác $ABM$ có $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2}\Leftrightarrow\frac{10}{36}=\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}$

A thuộc AM nên $A(t;7-3t)$

$AB=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(4-t)^2+(3t-6)^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow 10t^2-44t+34=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{17}{5}\Rightarrow A\left(\frac{17}{5};-\frac{16}{5}\right)-loai,\ A(1;4)-t/m\end{array}\right.$

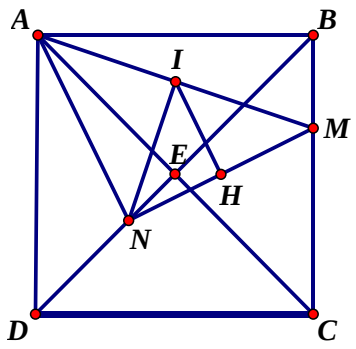
Làm tương tự cho điểm B, với $BM=\frac{x}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow M\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$

M là trung điểm của BC $\Rightarrow C(1;-2)$

Gọi I là tâm của hình vuông $\Rightarrow I(1;1)$

Từ đó $\Rightarrow D(-2;1)$

**Câu 7.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm M(5;7) nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BC tại B và cắt BD tại N(6;2), đỉnh C thuộc đường thẳng d: 2x-y-7=0. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.




Gọi I là tâm đường tròn đường kính AM thì I là trung điểm AM.

Dễ thấy $MIN=sd\,MN=2MBN=90^0$

Điểm C ∈ d: 2x-y-7=0. ⇒C(c;2c-7)

Hội H là trung điểm của MN =>H(11/2; 9/2)

Phương trình đường thẳng Δ trung trực của MN đi qua H và vuông góc với MN là d: x-5y+17=0

Điểm I∈Δ => I(5a - 17;a)

$\overrightarrow{MN}=(1;-5)\Rightarrow MN=\sqrt{26}$

$\overrightarrow{IM}=(22-5a;7-a)\Rightarrow IM=\sqrt{(22-5a)^2+(7-a)^2}$

Vì ΔMIN vuông cân tại I và

$MN=\sqrt{26}\Rightarrow IM=\sqrt{13}\Leftrightarrow\sqrt{(22-5a)^2+(7-a)^2}=\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow 26a^2-234a+520=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=4\end{array}\right.$

Với a=5 =>I(8;5) => A(11;9) (loại)

Với a=4 =>I(3;4) => A(1;1) (t/m)

Gọi E là tâm hình vuông nên $E(\frac{c+1}{2};c-3)\Rightarrow\overrightarrow{EN}=\left(\frac{11-c}{2};5-c\right)$

Vì AC⊥BD $\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EN}=0$

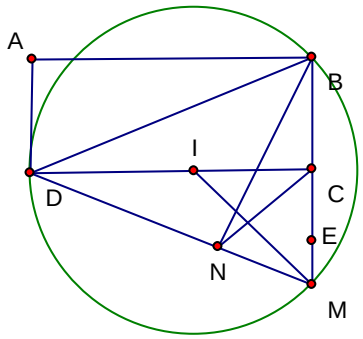
$\Leftrightarrow (c-1).\dfrac{11-c}{2}+(2c-8).(5-c)=0$

$\Leftrightarrow 5c^2-48c+91=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=7(t/m) \\ c=\dfrac{13}{5}(loai) \end{array}\right.$

Suy ra: C(7;7) => E(4;4)

Pt BD: x+y−8=0, pt BC:x−7=0 ⇒B(7,1)⇒D(1,7)

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD.Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $(x-4)^2+(y-1)^2=25$.Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN là: $3x-4y-17=0$; đường thẳng BC đi qua điểm E(7;0) và điểm M có tung độ âm




+(T) có tâm I(4;1);R=5

+ Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N,C là chân các đường cao nên chứng minh được :IM⊥ CN

+ Lập ptđt IM qua I và IM⊥ CN : 4(x-4)+3(y-1)=0 ⇔ 4x+3y-19=0

+ M là giao điểm (T) với IM : $\left[\begin{array}{l} M(7;-3) \\ M(1;5) \quad (loai) \end{array}\right.$

+Đường thẳng BC qua M,E có pt : x=7

+ C là giao điểm BC và NC => C(7 ;1)

+ B đối xứng M qua C => B(7 ;5)

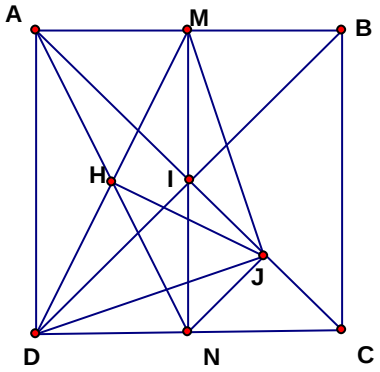
+ Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC : y=1

D là giao điểm (T) và DC : $\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

Vì B,D nằm cùng phía với CN nên D(-1 ;1)

+Do $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ => A(-1 ;5)

**Câu 9.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.




Gọi N là trung điểm CD và H là tâm hình chữ nhật AMND. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật AMND. Từ giả thiết, suy ra NJ//DI, do đó NJ vuông góc với AC, hay J thuộc (C) (vì AN là đường kính của (C)). Mà MD cũng là đường kính của (C) nên JM vuông góc với JD. (1)

D thuộc $\Delta$ nên $D(t;t+1) \Rightarrow \overrightarrow{JD}(t-1;t+1), \overrightarrow{JM}(-1;3).$ Theo (1)

$\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -t+1+3t+3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow D(-2;-1)$.

Gọi a là cạnh hình vuông ABCD. Dễ thấy $DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4$.

Gọi $A(x;y).$ Vì $\begin{cases} AM = 2 \\ AD = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 3 \\ x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5} \end{cases}$

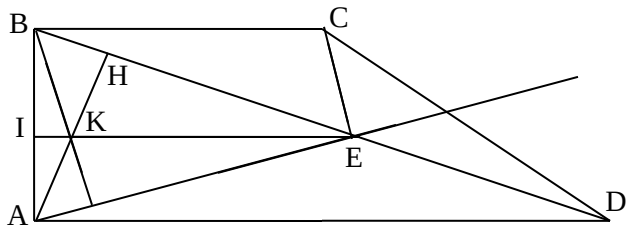
- Với $A(-2;3) \Rightarrow B(2;3) \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(2;-1) \Rightarrow J(1;0)$ (thỏa mãn)
- Với

$A\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};\frac{23}{5}\right) \Rightarrow I\left(\frac{-8}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{-22}{5};\frac{11}{5}\right) \Rightarrow J\left(-3;2\right)$ (loại).

Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2;3), B(2;3), C(2;-1), D(-2;-1).$.

(Học sinh lấy cả 2 nghiệm, trừ 0.25 điểm)

**Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và $AD = 2BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD. Giả sử $H(-1;3)$, phương trình đường thẳng $AE: 4x + y + 3 = 0$ và $C\left(\frac{5}{2};4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.



- Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I
Suy ra: +) K là trực tâm của tam giác ABE, nên BK $\perp$ AE.

+) K là trung điểm của AH nên $KE /\!/ = \frac{1}{2}AD$ hay $KE /\!/ = BC$

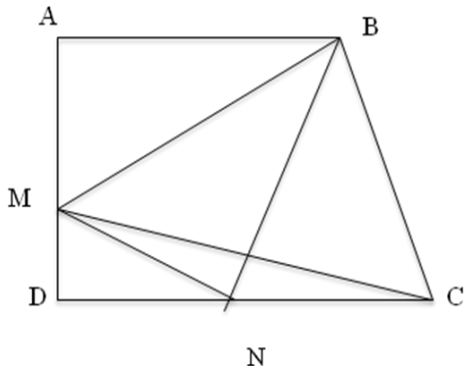
Do đó: $CE \perp AE \Rightarrow$ CE: 2x - 8y + 27 = 0

Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2;3)$

- Khi đó BD: y - 3 = 0, suy ra AH: x + 1 = 0 nên A(-1; 1).
- Suy ra AB: x - 2y +3=0. Do đó: B(3; 3).

KL: A(-1; 1), B(3; 3) và D(-2; 3)

**Câu 11.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $AB = AD < CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình là $y - 2 = 0$. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt cạnh AD tại. Đường phân giác trong góc $MBC$ cắt cạnh DC tại N. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình $7x - y - 25 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh D.




Tứ giác $BMDC$ nội tiếp

$\Rightarrow BMC = BDC = DBA = 45^0$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại B, BN là phân giác trong $MBC$

$\Rightarrow M, C$ đối xứng qua BN

$\Rightarrow AD = d(B,CN) = d(B,MN) = \frac{4}{\sqrt{2}}$

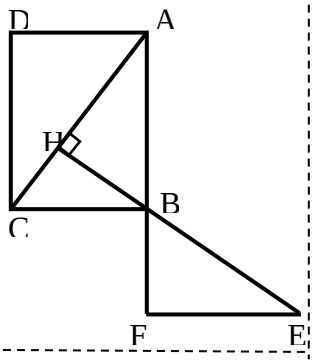
Do $AB = AD \Rightarrow BD = AD\sqrt{2} = 4$

$BD: y - 2 = 0 \Rightarrow D(a;2)$, $BD = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -3 \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là: $D(5;2)$ hoặc $D(-3;2)$

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phương trình $AD: x - 2y + 3 = 0$. Trên đường thẳng qua B và vuông góc với đường chéo AC lấy điểm E sao cho BE=AC (D và E nằm về hai phía so với đường thẳng AC). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết điểm $E(2;-5)$ và đường thẳng AB đi qua điểm $F(4;-4)$ và điểm B có hoành độ dương.

Ta có $AB \perp AD: x-2y+3=0$ và AD đi qua F(4 ; -4)




$\Rightarrow AB: 2x+y-4=0$. Khi đó $A = AB \cap AD \Rightarrow A(1;2)$

Ta có đường thẳng EF đi qua hai điểm E(2;-5) và F(4;-4)

Do đó ta lập được phương trình $EF: x-2y-12=0$

Suy ra $EF \parallel AD \Rightarrow EF \perp AB$ tại F. Khi đó, ta có

$\Delta ABC = \Delta EFB$ vì $AC = BE, EBF = BCA$ (cùng phụ với $HBC$) $\Rightarrow AB = EF = \sqrt{5}$.

Ta có $B \in AB: 2x+y-4=0 \Rightarrow B(b;4-b)\ (b>0)$

Vậy $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow (b-1)^2 + (2-2b)^2 = 5 \Leftrightarrow 5b^2 - 10b = 0 \Leftrightarrow b = 2 (do\, b>0) \Rightarrow B(2;0)$

Ta có $BC \perp AB: 2x+y-4=0$ và BC đi qua B(2; 0) $\Rightarrow BC: x-2y-2=0$

AC đi qua A(1; 2) và vuông góc với BE $\Rightarrow$AC nhận $\overrightarrow{BE} = (0;-5)$ là véc tơ pháp tuyến $\Rightarrow AC: -5(y-2)=0 \Leftrightarrow y=2$. Khi đó, ta có $C = AC \cap BC \Rightarrow C(6;2)$

CD đi qua C(6; 2) và $CD \perp AD: x-2y+3=0 \Rightarrow \Rightarrow CD: 2x+y-14=0$.

Khi đó $D = CD \cap AD \Rightarrow D(5;4)$. Vậy ta có tọa độ A(1;2), B(2;0), C(6;2), D(5;4).

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang OABC (O là gốc tọa độ) có diện tích bằng 6, OA song song với BC, đỉnh $A(-1;2)$, đỉnh $B$ thuộc đường thẳng $(d_1): x+y+1=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $(d_2): 3x+y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

$OA: 2x+y=0$.

$OA \parallel BC \Rightarrow BC: 2x+y+m=0\ (m \neq 0)$.

Tọa độ điểm $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-m \\ y=m-2 \end{cases} \Rightarrow B(1-m;m-2)$.

Tọa độ điểm $C$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+y+2=0 \\ 2x+y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-2 \\ y=4-3m \end{cases} \Rightarrow C(m-2;4-3m)$.

$S_{OABC} = \frac{1}{2}(OA+BC).d(O,BC) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left[\sqrt{(-1)^2+2^2} + \sqrt{(2m-3)^2+(4m-6)^2}\right].\frac{|m|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 6$

$\Leftrightarrow (|2m-3|+1)|m| = 12$. Giải pt này bằng cách chia trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối ta được $m = 1-\sqrt{7}; m = 3$. Vậy $B(\sqrt{7};-1-\sqrt{7}), C(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7})$ hoặc $B(-2;1), C(1;-5)$

**Câu 14.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại B và C có AB >CD và CD = BC. Đường tròn đường kính AB có phương trình $x^2+y^2-4x-5=0$ cắt cạnh AD của hình thang tại điểm thứ hai N. Gọi M là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng AB. Biết điểm N có tung độ dương và đường thẳng MN có phương trình 3x + y – 3 = 0, tìm tọa độ của các đỉnh A, B, C, D của hình thang ABCD.

+) N ∈ MN∩(C) => tọa độ N là nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ x^2+y^2-4x-5=0 \end{cases},$$

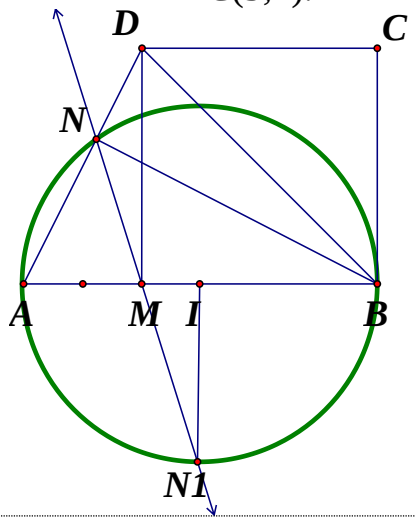
do N có tung độ dương nên $N(\frac{1}{5};\frac{12}{5}),\ N_1(2;-3)$.

+) Tứ giác BMND nội tiếp $\Rightarrow BNM = BDM = 45^o$ => MN là đường phân giác góc $BNA$ => N1 là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow IN_1 \perp AB$ với I(2;0) là tâm của (C) => AB: y = 0.

+) M = MN∩AB => M (1;0) , A,B là các giao điểm của đt AB và (C) => A(-1;0) và B(5;0) hoặc A(5;0) và B(-1;0). Do $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ nên A(-1;0) và B(5;0) .

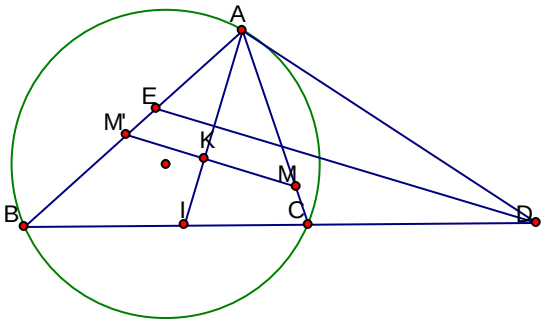
+) AN: 2x – y + 2 = 0, MD: y = 1 => D = AN∩MD => D(1;4).

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC}$ => C(5;4).



## 7.3. Viết phương trình đường thẳng, cạnh của đa giác

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$ cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt $BC$ tại $D$, đường phân giác trong của $ADB$ có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh $AC$. Viết phương trình đường thẳng $AB$.




Gọi AI là phân giác trong của $BAC$

Ta có : $AID = ABC + BAI$

$IAD = CAD + CAI$

Mà $BAI = CAI$, $ABC = CAD$ nên $AID = IAD$

$\Rightarrow \Delta DAI$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$

PT đường thẳng AI là : $x+y-5=0$

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI $\Rightarrow$ PT đường thẳng MM' : $x-y+5=0$

Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow$K(0;5) $\Rightarrow$M'(4;9)

VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5) \Rightarrow$VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (5;-3)$

Vậy PT đường thẳng AB là: $5(x-1)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x-3y+7=0$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân, cạnh đáy BC có phương trình: $x+y+1=0$, phương trình đường cao kẻ từ B là: $x-2y-2=0$. Điểm M(2;1) thuộc đường cao kẻ từ C. Viết phương trình các cạnh bên của tam giác ABC.

Gọi H là trực tâm $\Delta$ ABC. Tìm được B(0;-1), $\cos HBC = \frac{1}{\sqrt{10}} = \cos HCB$

Pt đthẳng HC có dạng: a(x-2)+b(y-1)=0($\vec{n} = (a;b)$ là VTPT và $a^2+b^2>0$ )

$$\cos HCB = \frac{|a+b|}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow 4a^2+10ab+4b^2=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2+5\left(\frac{a}{b}\right)+2=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=-2 \\ \frac{a}{b}=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2, b=1 \\ a=-1, b=2(l) \end{array}\right.$ , phương trình CH: -2x + y + 3 = 0

AB $\perp$ CH. Tìm được pt AB:x+2y+2=0

Tìm được : $C(\frac{2}{3};-\frac{5}{3})$ ,pt AC:6x+3y+1=0

**Câu 3.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy,cho hình vuông ABCD có M(1;2) là trung điểm AB, N(-2;1) là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN=3NC. Viết phương trình của đường thẳng CD

Ta có MN= $\sqrt{10}$ ,AN=3AC/4= $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$MN^2=AM^2+AN^2-2AM.AN.\cos 45^0=\frac{5a^2}{8}$

=>a=4

Gọi I(x;y) là trung điểm của CD.Ta có

$\left\{\begin{array}{l} IM=4 \\ IN=\frac{BD}{4}=\sqrt{2} \end{array}\right. => \left\{\begin{array}{l} x=1, y=-2 \\ x=\frac{17}{5}, y=-\frac{6}{5} \end{array}\right.$

+Đường thẳng CD đi qua I(1;-2) có pt : y+2=0

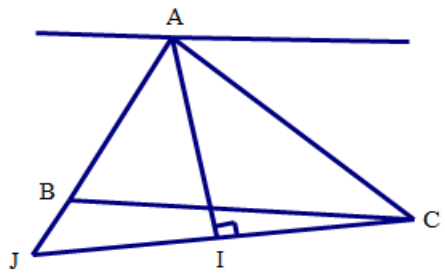
+ Đường thẳng CD đi qua I(17/5;-6/5) có pt : 3x-4y-15=0

**Câu 4.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $C(5;4)$, đường thẳng $d: x-2y+11=0$ đi qua A và song song với BC, đường phân giác trong AD có phương trình $3x+y-9=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Tìm được $A(1;6)$, $AC: x+2y-13=0$, $BC: x-2y+3=0$.

Từ $C$ kẻ đường thẳng vuông góc $AD$, cắt $AD$ tại $I$, cắt $AB$ tại $J$. Khi đó tam giác $ACJ$ cân tại $A$.

Phương trình đường thẳng $CI: x-3y+7=0 \Rightarrow I(2;3), J(-1;2)$, phương trình đường thẳng $AB: 2x-y+4=0$.



**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB: x - y - 2 = 0, phương trình cạnh AC: x + 2y - 5 = 0. Biết trọng tâm của tam giác G(3; 2). Viết phương trình cạnh BC.

Tọa độ điểm A là nghiệm của HPT: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ A(3; 1)

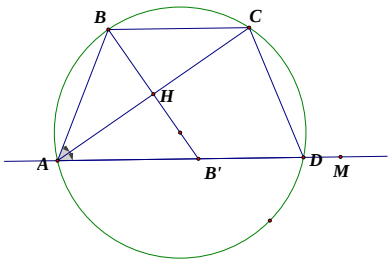
Gọi B(b; b- 2) $\in$ AB, C(5- 2c; c) $\in$ AC

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases} 3 + b + 5 - 2c = 9 \\ 1 + b - 2 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$. Hay B(5;3), C(1;2)

Một vectơ chỉ phương của cạnh BC là $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (-4;-1)$.

Phương trình cạnh BC là: x - 4y + 7 = 0.

**Câu 6.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, Cho hình thang cân ABCD với hai đáy AD, BC. Biết B(2; 3) và $AB = BC$, đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$, điểm $M(-2;-1)$ nằm trên đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD.




Vì ABCD là hình thang cân nên nội tiếp trong một đường tròn. Mà $BC = CD$ nên AC là đường phân giác của góc $BAD$.

Gọi $B'$ là điểm đối xứng của B qua AC.

Khi đó $B' \in AD$.

Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$. Suy ra $H(3;2)$.

Vì B' đối xứng với B qua AC nên H là trung điểm của BB'. Do đó $B'(4;1)$.

Đường thẳng AD đi qua M và nhận $\overrightarrow{MB'}$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $x - 3y - 1 = 0$. Vì $A = AC \cap AD$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Do đó, $A(1;0)$.

Ta có ABCB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'C}$. Do đó, $C(5;4)$.

Gọi d là đường trung trực của BC, suy ra $d: 3x + y - 14 = 0$.

Gọi $I = d \cap AD$, suy ra I là trung điểm của AD. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$. Suy ra, $I\left(\frac{43}{10};\frac{11}{10}\right)$. Do đó, $D\left(\frac{38}{5};\frac{11}{5}\right)$.

Vậy, đường thẳng CD đi qua C và nhận $\overrightarrow{CD}$ làm vectơ chỉ phương nên có phương

trình $9x+13y-97=0$. **(Học sinh có thể giải theo cách khác)**

**Câu 7.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn ($C_1$) và ($C_2$) lần lượt có phương trình là $(x+1)^2+(y-4)^2=10, x^2+y^2-6x-6y+13=0$. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ qua M(2;5) cắt hai đường tròn (C), (C') lần lượt tại A, B sao cho $S_{I_1MA}=\frac{25}{12}S_{I_2MB}$ biết rằng phương trình đường thẳng $\Delta$ có hệ số nguyên ($I_1$,$I_2$ lần lượt là tâm của ($C_1$) và ($C_2$)).

- ($C_1$) có tâm $I_1(-1;4)$, bán kính $R_1=\sqrt{10}$
- ($C_1$) có tâm $I_1(3;3)$, bán kính $R_2=\sqrt{5}$
- Dễ kiểm tra được: M là một giao điểm của ($C_1$),($C_2$)
- $\Delta$ qua M nên $\Delta: a(x-2)+b(y-5)=0, (a,b\in Z, a^2+b^2>0)$
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của $I_1$,$I_2$ lên $\Delta$

Ta có: $IH=d_{(I_1;\Delta)}=\frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}; IK=d_{(I_2;\Delta)}=\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- Ta có: $S_{I_1MA}=\frac{25}{12}S_{I_2MB}\Leftrightarrow\frac{1}{2}I_1H.MA=\frac{25}{24}I_2K.MB\Leftrightarrow 12I_1H.2MH=25I_2K.2MK$

$\Leftrightarrow 12.I_1H.\sqrt{I_1M^2-I_1H^2}=25I_2K.\sqrt{I_2M^2-I_2K^2}$

$\Leftrightarrow 12.I_1H.\sqrt{10-I_1H^2}=25I_2K.\sqrt{5-I_2K^2}$

$\Leftrightarrow 144I_1H^2\left(10-I_1H^2\right)=625I_2K^2\left(5-I_2K^2\right)$

$\Leftrightarrow 144\left(\frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\left(10-\left(\frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right)=625\left(\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\left(5-\left(\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow 144(3a+b)^2(a-3b)^2=625(a-2b)^2(2a+b)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12(3a+b)(a-3b)=25(a-2b)(2a+b)\\12(3a+b)(a-3b)=-25(a-2b)(2a+b)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}14a^2+21ab-14b^2=0\\86a^2-171ab-86b^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\frac{a}{b}-2=0\\86\left(\frac{a}{b}\right)^2-171\frac{a}{b}-86=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=-2\vee\frac{a}{b}=\frac{1}{2}(n)\\\frac{a}{b}=\frac{171\pm\sqrt{2975}}{172}(\text{loai do a,b}\in Z)\end{array}\right.$

+ Với $\frac{a}{b}=-2$, chọn a = 2, b= -1 $\Rightarrow\Delta: 2x-y+1=0$

+ Với $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, chọn a = 1, b= 2 $\Rightarrow\Delta: x+2y-12=0$

Có hai có hai đường thẳng thỏa điều kiện bài toán là 2x–y+1=0, x+2y–12 = 0

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: y-2=0$ và các điểm $A(0;6), B(4;4)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm C

trên đường thẳng $\Delta$ sao cho tam giác ABC vuông tại B.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: y-2=0$ và các điểm $A(0;6), B(4;4)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng $\Delta$ sao cho tam giác ABC vuông tại B.

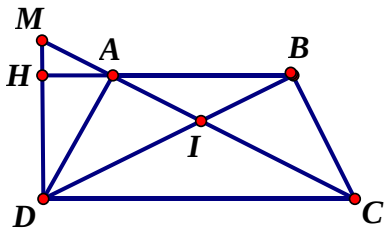
Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-6}{4-6}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-6}{-1}$

$-x=2y-12\Leftrightarrow x+2y-12=0.$

$C\in\Delta\Rightarrow C(t;2)\Rightarrow\overrightarrow{BA}(-4;2),\overrightarrow{BC}(t-4;-2)$

Tam giác ABC vuông tại B nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow-4t+16-4=0\Leftrightarrow t=3\Rightarrow C(3;2).$

**Câu 9.** Cho hình thang cân ABCD có AB // CD, CD = 2AB. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là điểm đối xứng của I qua A với $M\left(\frac{2}{3};\frac{17}{3}\right)$. Biết phương trình đường thẳng DC : x + y – 1= 0 và diện tích hình thang ABCD bằng 12. Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm C có hoành độ dương.




Ta có : tam giác MDC vuông tại D
=>(MD) : x – y + 5 = 0
=> D(-2; 3)
MD = $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ => HD = $\frac{3}{4}$MD = $2\sqrt{2}$
Gọi AB = a => $S_{ABCD}$ = $\frac{3a.2\sqrt{2}}{2}$ = 12 => a = $2\sqrt{2}$
=>DC = $4\sqrt{2}$
Gọi C(c; 1 –c ) => $DC^2 = 2(c+2)^2$ => c = 2 hay c = -6 (loại)=>C(2; -1)
=>B(3; 2)
=> (BC): 3x – y – 7 = 0

**Câu 10.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$ cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2=13$ và đường tròn $(C_2): (x-6)^2+y^2=25$ cắt nhau tại A(2; 3). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và lần lượt cắt $(C_1)$, $(C_2)$ theo hai dây cung phân biệt có độ dài bằng nhau.

Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng cần tìm với $(C_1)$ và $(C_2)$ lần lượt là M và N.

Gọi $M(x;\ y) \in (C_1) \Rightarrow x^2 + y^2 = 13$ (1)

Vì A là trung điểm của MN nên $N(4-x;\ 6-y)$

Do N $\in (C_2) \Rightarrow (2+x)^2 + (6-y)^2 = 25$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ (2+x)^2 + (6-y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \right.$

$\left. \begin{cases} x = -\dfrac{17}{5} \Rightarrow \text{M}(\dfrac{-17}{5}\ ;\ \dfrac{6}{5}) \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases} \right.$

Đường thẳng cần tìm đi qua A và M có phương trình: $x - 3y + 7 = 0$

**Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với AB//CD có diện tích bằng 14, $H(-\frac{1}{2};0)$ là trung điểm của cạnh BC và $I(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng d: $5x - y + 1 = 0$.

Vì I là trung điểm của AH nên A(1;1); Ta có: $AH = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Phương trình AH là: $2x - 3y + 1 = 0$.Gọi $M = AH \cap CD$ thì H là trung điểm của AM

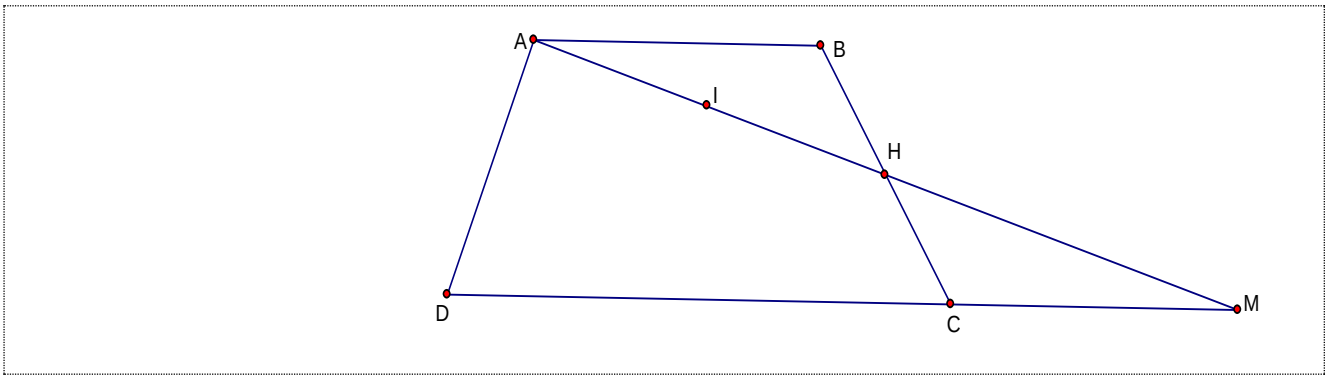
Suy ra: M(-2; -1). Giả sử D(a; 5a+1) (a>0). Ta có:

$\Delta ABH = \Delta MCH \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\Delta ADM} = AH.d(D, AH) = 14 \Rightarrow d(D, AH) = \dfrac{28}{\sqrt{13}}$

Hay $|13a + 2| = 28 \Leftrightarrow a = 2 (\text{vì } a > 0) \Rightarrow D(2;11)$

Vì AB đi qua A(1;1) và có 1VTCP là $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MD} = (1;3) \Rightarrow$ AB có 1VTPT là $\vec{n}(3;-1)$ nên AB có

Pt là: $3x - y - 2 = 0$


A
B
I
H
D
C
M

## 7.4. Bài toán về góc, khoảng cách

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d: mx+y-m-4=0$ và đường thẳng $\Delta: x+2y+9=0$; điểm B(-3; 2). Gọi H là hình chiếu của B trên d. Xác định tọa độ điểm H biết rằng khoảng cách từ H đến đường thẳng $\Delta$ nhỏ nhất.

Ta có phương trình $d: mx+y-m-4=0 \Leftrightarrow (x-1)m+(y-4)=0$. Suy ra d luôn đi qua điểm cố định A(1; 4), mà BH vuông góc với d nên suy ra H luôn thuộc đường tròn (C) đường kính AB.

Gọi I là tâm của (C). Ta có pt (C): $(x+1)^2+(y-3)^2=5$

Gọi d' là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $\Delta$. Khi đó d' có pt: $2x-y+5=0$.

Tọa độ giao điểm của d' và (C) là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases}2x-y+5=0\\(x+1)^2+(y-3)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=5\\x=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=1\\x=-2\end{cases}$. Khi đó d' cắt (C) tại $M_1(0;5); M_2(-2;1)$

Ta có $d(M_1,\Delta)=\frac{19\sqrt{5}}{5}; d(M_2,\Delta)=\frac{9\sqrt{5}}{5}$. Vậy H trùng với $M_2(-2;1)$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(1;1) và đường thẳng $\Delta: 2x+3y+4=0$. Tìm tọa độ điểm B thuộc đường thẳng $\Delta$ sao cho đường thẳng AB và $\Delta$ hợp với nhau góc $45^0$.

*$\Delta$ có phương trình tham số $\begin{cases}x=1-3t\\y=-2+2t\end{cases}$ và có vtcp $\vec{u}=(-3;2)$

*A thuộc $\Delta \Rightarrow A(1-3t;-2+2t)$

*Ta có (AB; $\Delta$)=$45^0 \Leftrightarrow \left|\cos(\overrightarrow{AB};\vec{u})\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right|}{AB.\left|\vec{u}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 169t^2-156t-45=0 \Leftrightarrow t=\frac{15}{13} \vee t=-\frac{3}{13}$

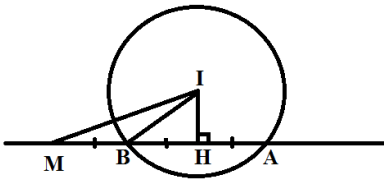
*Các điểm cần tìm là $A_1(-\frac{32}{13};\frac{4}{13}), A_2(\frac{22}{13};-\frac{32}{13})$

**Câu 3.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=25$ và điểm M (7,3). Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho MA = 3MB.

Đường tròn (C) có tâm I(1;1) và bán kính R = 5.

Ta có IM = $2\sqrt{10} > R \Rightarrow$ M nằm ngoài đường tròn (C).

Gọi H là trung điểm AB mà MA = 3MB $\Rightarrow$ B là trung điểm MH




Ta có : $\begin{cases} IH^2 + MH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2 + 4BH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow IH^2 = 20 \Leftrightarrow IH = 2\sqrt{5}$

Đường thẳng d qua M(7;3) và có VTPT $\vec{n}(a;b)$ với $a^2 + b^2 > 0$:

$a(x-7) + b(y-3) = 0 \quad \Leftrightarrow ax + by - 7a - 3b = 0$

Ta có: $IH = d(I,d) = \dfrac{|a + b - 7a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |3a + 2b| = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{b}{2} \\ a = -2b \end{array}\right.$

- $a = \dfrac{b}{2} \Rightarrow d: x + 2y - 13 = 0$
- $a = -2b \Rightarrow d: 2x - y - 11 = 0$

**Câu 4.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến của (C) mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng $60^0$.

(C) có tâm I(3;0) và bán kính R = 2. Gọi M(0; m) $\in$ Oy

Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AMB = 60^0 \quad (1) \\ AMB = 120^0 \ (2) \end{array}\right.$

Vì MI là phân giác của $AMB$ nên:

(1) $\Leftrightarrow AMI = 30^0 \Leftrightarrow MI = \dfrac{IA}{\sin 30^0} \Leftrightarrow$ MI = 2R $\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$

(2) $\Leftrightarrow AMI = 60^0 \Leftrightarrow MI = \dfrac{IA}{\sin 60^0} \Leftrightarrow$ MI = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$R $\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ Vô nghiệm Vậy có hai điểm $M_1(0;\sqrt{7})$ và $M_2(0;-\sqrt{7})$

**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ có phương trình $AB, AC$ lần lượt là $x + 2y - 2 = 0, 2x + y + 1 = 0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn thẳng $BC$. Tìm tọa độ điểm $D$ sao cho tích vô hướng $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Gọi vec tơ pháp tuyến của $AB, AC, BC$ lần lượt là $\vec{n_1}(1;2), \vec{n_2}(2;1), \vec{n_3}(a;b)$. Pt $BC$ có dạng $a(x-1) + b(y-2) = 0$, với $a^2 + b^2 > 0$. Tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên

$\cos B = \cos C \Leftrightarrow \left|\cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_3}\right)\right| = \left|\cos\left(\vec{n_2}, \vec{n_3}\right)\right| \Leftrightarrow$

$\dfrac{|a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{5}} = \dfrac{|2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = b \end{array}\right.$

Với $a=-b$. Chọn $b=-1\Rightarrow a=1\Rightarrow BC: x-y+1=0\Rightarrow B(0;1), C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, không thỏa mãn $M$ thuộc đoạn $BC$.

Với $a=b$. Chọn $a=b=1\Rightarrow BC: x+y-3=0\Rightarrow B(4;-1), C(-4;7)$, thỏa mãn $M$ thuộc đoạn $BC$.

Gọi trung diểm của $BC$ là $I\Rightarrow I(0;3)$.

Ta có $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}\right)=DI^2-\frac{BC^2}{4}\geq -\frac{BC^2}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $D\equiv I$. Vậy $D(0;3)$

## 7.5. Tính diện tích tam giác

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ toạ đ ộ Oxy cho điểm C(2;-5 ) và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$.Tìm trên $\Delta$ hai điểm A và B đối xứng nhau qua I(2;5/2) sao cho diện tích tam giác ABC bằng15.

+ Gọi $A(a;\frac{3a+4}{4}) \Rightarrow B(4-a;\frac{16-3a}{4})$. Khi đó diện tích tam giác ABC là

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C\to\Delta)=3AB$.

+Theo giả thiết ta có $AB=5\Leftrightarrow(4-2a)^2+\left(\frac{6-3a}{2}\right)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a=0\end{array}\right.$

Vậy hai điểm cần tìm là A(0;1) và B(4;4).

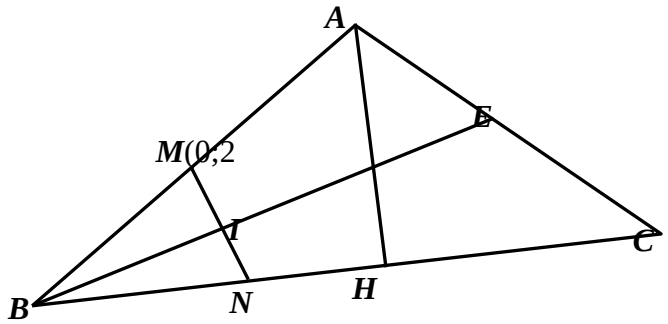
**Câu 2.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác $ABC$ với đường cao $AH$ có phương trình $3x+4y+10=0$ và đường phân giác trong $BE$ có phương trình $x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng $AB$ và cách đỉnh $C$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tính diện tích tam giác $ABC$.

Gọi N là điểm đối xứng của M qua phân giác BE thì N thuộc BC

Tính được N(1; 1). Đường thẳng BC qua N và vuông góc với AH nên có phương trình 4x − 3y – 1 = 0

B là giao điểm của BC và BE. Suy ra tọa độ B là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases}4x-3y-1=0\\x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow B(4;5)$$




Đường thẳng AB qua B và M nên có phương trình : 3x – 4y + 8 = 0

A là giao điểm của AB và AH, suy ra tọa độ A là nghiệm hệ pt:

$$\begin{cases}3x-4y-8=0\\3x+4y+10=0\end{cases}\Leftrightarrow A(-3;-\frac{1}{4})$$

Điểm C thuộc BC va MC = 2 suy ra tọa độ C là nghiệm hệ pt:

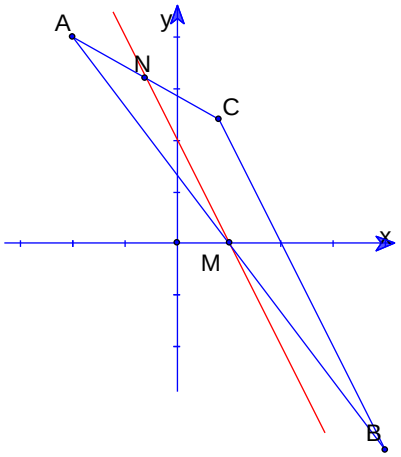
$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=1 \\ x=\dfrac{31}{25}; y=\dfrac{33}{25} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(1;1) \\ C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right) \end{array}\right.$$

Thế tọa độ A và C(1; 1) vào phương trình BE thì hai giá trị trái dấu, suy ra A, C khác phía đối với BE, do đó BE là phân giác trong tam giác ABC.

Tương tự A và $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$ thì A, C cùng phía với BE nên BE là phân giác ngoài của tam giác ABC.

BC = 5, $AH = d(A,BC) = \dfrac{49}{20}$. Do đó $S_{ABC} = \dfrac{49}{8}$ (đvdt).

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x+y-1=0$ và điểm $A(-1; 2)$. Gọi M là giao điểm của $\Delta$ với trục hoành. Tìm hai điểm B, C sao cho M là trung điểm AB và trung điểm N của đoạn AC nằm trên đường thẳng $\Delta$, đồng thời diện tích tam giác ABC bằng 4.




Tọa độ M: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$

Giả sử $B(x;y)$, M là trung điểm AB nên $\begin{cases} x-1=1 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow B(2;-2)$

Giả sử $C(x;y)$, ta có:

$$\begin{cases} N \in \Delta \\ S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC.2d(A;\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{2}-1=0 \\ 4=\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}.\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ (x-2)^2+(y+2)^2=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x^2-20x-60=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases}$$

ĐS: $B(2;-2)$, $C(6;-10)$ hoặc $C(-2;6)$

**Câu 4.** Trong mp(Oxy) cho 4 điểm A(1;0),B(-2;4),C(-1;4),D(3;5). Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng $(\Delta): 3x-y-5=0$ sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Viết phương trình đường AB: $4x+3y-4=0$ và $AB=5$

Viết phương trình đường CD: $x-4y+17=0$ và $CD=\sqrt{17}$

Điểm M thuộc $\Delta$ có toạ độ dạng: $M=(t;3t-5)$ Ta tính được:

$$d(M,AB)=\frac{|13t-19|}{5}; d(M,CD)=\frac{|11t-37|}{\sqrt{17}}$$

Từ đó: $S_{MAB}=S_{MCD}\Leftrightarrow d(M,AB).AB=d(M,CD).CD$

$\Leftrightarrow t=-9\vee t=\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ Có 2 điểm cần tìm là: $M(-9;-32), M(\frac{7}{3};2)$

**Câu 5** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-1)^2=4$ có tâm là $I_1$ và đường tròn $(C_2):(x-4)^2+(y-4)^2=10$ có tâm là $I_2$, biết hai đường tròn cắt nhau tại $A$ và $B$. Tìm tọa độ diểm $M$ trên đường thẳng $AB$ sao cho diện tích tam giác $MI_1I_2$ bằng 6.

**Tìm tọa độ diểm** $M$

Phương trình đường thẳng $d$ qua 2 điểm $A$ và $B$ (trục đẳng phương)

$d: x+y-4=0$

Đường thẳng $(I_1I_2)$ đi qua tâm $I_1$ và $I_2$

$(I_1I_2): x-y=0$

$M(m;\ 4-m)\in d$

$S_{MI_1I_2}=\frac{1}{2}d(M,(I_1I_2)).I_1I_2=6$ $m=4,\ m=0$

Vậy : $M(4;\ 0)$ và $M(0;\ 4)$

**Câu 6** Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có tâm I và diện tích bằng $100\pi$. Khoảng cách từ I đến (P) bằng 3. Chứng minh rằng (P) cắt (S) theo một đường tròn, tính diện tích hình tròn đó.

Theo công thức tính diện tích mặt cầu, ta có $S_{mc}=4\pi R^2=100\pi\Rightarrow R=5.$

Vì $d(I,(P))=3<R$ nên (P) cắt (S) theo một đường tròn (C).

Gọi H, r thứ tự là tâm và bán kính đường tròn (C), ta có $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Vậy diện tích hình tròn (C) là: S = $\pi r^2 = 16\pi$.

**Câu 7** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và A(−4; 8). Gọi E là điểm đối xứng với B qua C, F(5; −4) là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng ED. Tìm tọa độ điểm C và tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

Ta có C$\in d: 2x + y + 5 = 0$ nên C(t; –2t – 5).

Ta chứng minh 5 điểm A, B, C, D, F cùng nằm trên đường tròn đường kính BD. Do tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì AC cũng là đường kính của đường tròn trên, nên suy ra được $AFC = 90^0 \Leftrightarrow AC^2 = AF^2 + CF^2$. Kết hợp với gt ta có phương trình:

$(t+4)^2 + (-2t-13)^2 = 81 + 144 + (t-5)^2 + (-2t-1)^2 \Leftrightarrow t = 1$.

Từ đó ta được C(1; –7).

Từ giả thiết ta có AC // EF, BF $\perp$ ED nên BF $\perp$ AC, do C là trung điểm BE nên BF cắt và vuông góc với AC tại trung điểm.

Suy ra F đối xứng với B qua AC, suy ra $\Delta ABC = \Delta AFC$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{AFC} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{AFC} = 75$ (đvdt).

## 7.6. Viết phương trình đường tròn

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy,cho 2 đường thẳng d: $\sqrt{3}$x+y=0 và d': $\sqrt{3}$x-y=0. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d tại A,cắt d' tại 2 điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C) biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và A có hành độ dương.

Ta thấy đường tròn (C ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác vông ABC,có đường kính AC

Điểm A thuộc d nên A(a;-a$\sqrt{3}$ ) (a>0).

+Đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với d' có pt: x+$\sqrt{3}$y+2a=0

Do đó B là giao điểm của AB với d' .khi đó B$\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

+ Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với d có pt: x-$\sqrt{3}$y-4a=0

Do đó C là giao điểm của AC với d' .khi đó C$\left(-2a;-2a\sqrt{3}\right)$ ----------

Ta lại có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ =>a=$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right),C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right)$ ----------

Do đó đường tròn (C ) có tâm $I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC và bán kính R=IA=1

Vậy pt của( C):$\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1$: $x+y+5=0$, $d_2$: $x+2y-7=0$ và tam giác ABC có A(2; 3), trọng tâm là điểm G(2; 0), điểm B thuộc $d_1$ và điểm C thuộc $d_2$ . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do B $\in$ $d_1$ nên B(m; – m – 5), C $\in$ $d_2$ nên C(7 – 2n; n)

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\begin{cases}2+m+7-2n=3.2\\3-m-5+n=3.0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}\Rightarrow$ B(–1; –4), C(5; 1)

$\Rightarrow$ PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $x^2+y^2-\frac{83}{27}x+\frac{17}{9}y-\frac{338}{27}=0$

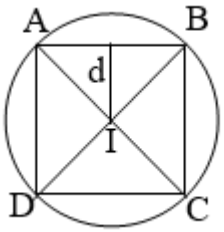
**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (S), có A và C đối xứng qua BD. Phương trình AB: y – 2 = 0; phương trình BD: $\sqrt{3}x-y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (S) biết diện tích tứ giác ABCD bằng $4\sqrt{3}$ và $x_A$ > 0, $y_A<y_D$.

+B là giao điểm của AB và BD, tìm được B(0; 2).
+Tính góc giữa hai đường thẳng AB và BD bằng $60^0$.
+Ta có BD là đường trung trực của dây cung AC nên BD là đường kính.
+Tam giác ABD vuông tại A có $ABD = 60^0 \Rightarrow AD = AB\sqrt{3}$
+Ta có $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} \Leftrightarrow S_{\Delta ABD} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AD = 2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB^2.\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 2.$$

+Ta có $A \in AB \Leftrightarrow A(a;2), a > 0, \overrightarrow{AB} = (-a;0)$
$AB = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(-a)^2 + 0^2} = 2 \Leftrightarrow a = 2 \ (a > 0)$ suy ra $A(2;2)$.
+Ta có $D \in BD \Leftrightarrow D\left(d;\sqrt{3}d + 2\right), \overrightarrow{AD} = \left(d - 2;\sqrt{3}d\right)$.
Nên $AD = AB\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(d-2)^2 + \left(\sqrt{3}d\right)^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 4d^2 - 4d - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -1 \\ d = 2 \end{array}\right.$
Suy ra $\left[\begin{array}{l} D\left(-1;-\sqrt{3}+2\right) \\ D\left(2;2\sqrt{3}+2\right) \end{array}\right.$. Vì $y_A < y_D$ nên chọn $D\left(2;2\sqrt{3}+2\right)$.
+ Đường tròn (S) có tâm $I\left(1;\sqrt{3}+2\right)$, bán kính $IA = 2$ nên có phương trình:
$(x-1)^2 + \left(y - \sqrt{3} - 2\right)^2 = 4$.

**Câu 4.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho 3 đường thẳng $d_1 : x + 2y - 6 = 0$; $d_2 : x + 2y = 0$ và $d_3 : 3x - y - 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc $d_3$, cắt $d_1$ tại A và B, cắt $d_2$ tại C và D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông.




Gọi I(a; 3a – 2)
Vì ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ d(I, AB) = d(I, CD) = d

$$\Leftrightarrow \frac{|7a - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|7a - 4|}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow$ a = 1 $\Rightarrow$ I(1;1) $\Rightarrow$ d = $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Bán kính: $R = d\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ pt(C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{18}{5}$

**Câu 5.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y-1=0$ và hai đường tròn: $(C_1): x^2+y^2-6x+8y+23=0$; $(C_2): x^2+y^2+12x-10y+53=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng d, tiếp xúc trong với đường tròn $(C_1)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C_2)$.

+) $(C_1)$ có tâm $I_1(3;-4)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$ ; $(C_2)$ có tâm $I_1(3;-4)$, bán kính $R_2=2\sqrt{2}$.

+) Gọi I là tâm, R là bán kính của đường tròn (C). $I \in d \Leftrightarrow I(a;a-1)$.

+) (C) tiếp xúc trong với $(C_1) \Leftrightarrow II_1 = |R-R_1|$ (1).

+) (C) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Leftrightarrow II_2 = R+R_2 \Leftrightarrow R = II_2 - R_2$ (2).

+) **TH1:** $R > R_1$, (1) $\Leftrightarrow R = II_1 + R_1$, từ (1) và (2) ta có: $II_1 + R_1 = II_2 - R_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+(a+3)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(a+6)^2+(a-6)^2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 0$

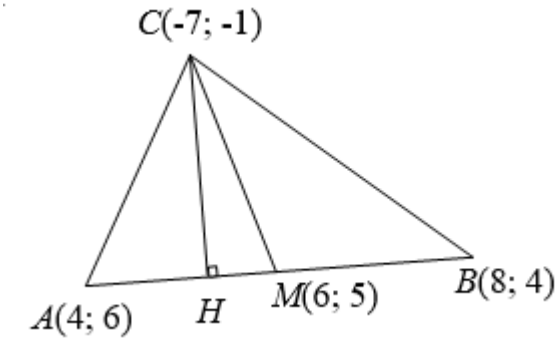
$\Rightarrow I(0;-1); R = 4\sqrt{2} \Rightarrow$ PT đường tròn (C): $x^2+(y+1)^2 = 32.$

+) **TH2:** $R < R_1$, (1) $\Leftrightarrow R = R_1 - II_1$, từ (1) và (2) ta có: $R_1 - II_1 = II_2 - R_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{(a-3)^2+(a+3)^2} = \sqrt{(a+6)^2+(a-6)^2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+9} + \sqrt{a^2+36} = 3$ (vô ng)

+) KL: …

**Câu 6.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy$, cho tam giác ABC có A(4; 6), phương trình đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh C lần lượt là $2x-y+13=0$ và $6x-13y+29=0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.




- Gọi đường cao và trung tuyến kẻ từ C là CH và CM.

Khi đó

CH có phương trình $2x-y+13=0$,

CM có phương trình $6x-13y+29=0.$

- Từ hệ $\begin{cases}2x-y+13=0\\6x-13y+29=0\end{cases}\Rightarrow C(-7;-1).$

- $AB\perp CH\Rightarrow \vec{n}_{AB}=\vec{u}_{CH}=(1,2)$

$\Rightarrow pt\ AB: x+2y-16=0$.

- Từ hệ $\begin{cases}x+2y-16=0\\6x-13y+29=0\end{cases}\Rightarrow M(6;5)\ \Rightarrow B(8;4).$

- Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC: x^2+y^2+mx+ny+p=0.$

- Vì A, B, C thuộc đường tròn nên $\begin{cases}52+4m+6n+p=0\\80+8m+4n+p=0\\50-7m-n+p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-4\\n=6\\p=-72\end{cases}$.

Suy ra pt đường tròn: $x^2+y^2-4x+6y-72=0$ hay $(x-2)^2+(y+3)^2=85.$

**Câu 7.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1$: x – 2y + 3 = 0, $d_2$ : 4x + 3y – 5 = 0. Lập phương trình đường tròn (C) có tâm I trên $d_1$, tiếp xúc $d_2$ và có bán kính R = 2.

$d_1$: $\begin{cases}x=-3+2t\\y=t\end{cases}$, $I\in d_1\Rightarrow I(-3+t;t)$

d(I , $d_2$) = 2 $\Leftrightarrow |11t-17|=10\Leftrightarrow t=\dfrac{27}{11},\quad t=\dfrac{7}{11}$

- t = $\dfrac{27}{11}\Rightarrow I_1\left(\dfrac{21}{11};\dfrac{27}{11}\right)\quad (C_1):\left(x-\dfrac{21}{11}\right)^2+\left(y-\dfrac{27}{11}\right)^2=4$
- t = $\dfrac{7}{11}\Rightarrow I_2\left(\dfrac{-19}{11};\dfrac{7}{11}\right)\quad (C_2):\left(x+\dfrac{19}{11}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{11}\right)^2=4$

**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm E(3; 4), đường thẳng $d: x+y-1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y-4=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=3$. Do $M\in d$ nên $M(a;1-a)$.

Do M nằm ngoài (C) nên $IM>R\Leftrightarrow IM^2>9\Leftrightarrow (a+2)^2+(-a)^2>9$

$\Leftrightarrow 2a^2+4a-5>0$ (*)

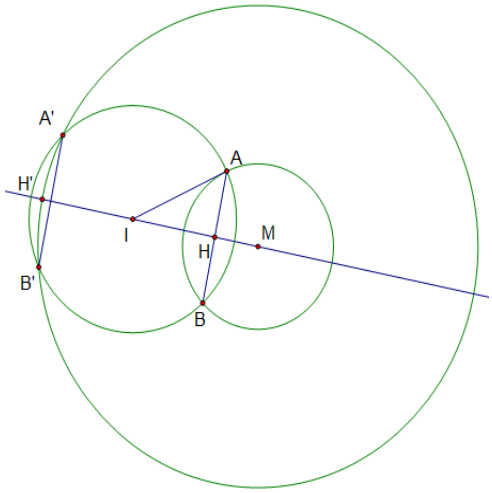
Ta có $MA^2=MB^2=IM^2-IA^2=(a+2)^2+(-a)^2-9=2a^2+4a-5$

Do đó tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình: $(x-a)^2+(y+a-1)^2=2a^2+4a-5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax+2(a-1)y-6a+6=0$ (1)

Do A, B thuộc (C) nên tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình
$x^2+y^2+4x-2y-4=0$ (2).
Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được $(a+2)x-ay+3a-5=0$ (3)
Do tọa độ của A, B thỏa mãn (3) nên (3) chính là phương trình của đường thẳng $\Delta$ đi qua A, B.
+) Do (E) tiếp xúc với $\Delta$ nên (E) có bán kính $R_1=d(E,\Delta)$
Chu vi của (E) lớn nhất $\Leftrightarrow R_1$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(E,\Delta)$ lớn nhất
Nhận thấy đường thẳng $\Delta$ luôn đi qua điểm $K\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$
Gọi H là hình chiếu vuông góc của E lên $\Delta$ $\Rightarrow d(E,\Delta)=EH\le EK=\frac{\sqrt{10}}{2}$
Dấu "=" xảy ra khi $H\equiv K\Leftrightarrow \Delta\perp EK$.
Ta có $\overrightarrow{EK}=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\Delta$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;a+2)$
Do đó $\Delta\perp EK\Leftrightarrow \overrightarrow{EK}.\vec{u}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}(a+2)=0\Leftrightarrow a=-3$ (thỏa mãn (*))
Vậy $M(-3;4)$ là điểm cần tìm.

**Câu 9.** Trong mặt phẳng 0xy cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết pt đường tròn (C') tâm M(5;1) biết (C') cắt (C) tại A, B sao cho AB=$\sqrt{3}$ và bán kính của nó lớn hơn 4.




Từ pt đường tròn (C) $\Rightarrow$ Tâm I(1;-2) và R=$\sqrt{3}$. Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn tại A, B nên AB$\perp IM$ tại trung điểm H của AB.
$AH=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
Nhận xét : Tồn tại 2 vị trí của AB (hình vẽ) là AB, A'B' chúng có cùng độ dài là $\sqrt{3}$. Các trung điểm H, H' đối xứng nhau qua tâm I và cùng nằm trên đường thẳng IM.
Ta có : IH'=IH=$\sqrt{IA^2-AH^2}=\frac{3}{2}$

Mà $MI = 5$ nên MH=MI-HI=$\frac{7}{2}$; MH'=MI+IH'=$\frac{13}{2}$

$\Rightarrow MA^2 = AH^2 + MH^2 = 13 < 16$ (loại)

$\Rightarrow MA'^2 = AH'^2 + MH'^2 = 43 > 16\ (t/m)$

Vậy (C') :$(x-5)^2 + (y-1)^2$=43.

**Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1 : x-2y+2=0, d_2 : 3x-3y+\sqrt{6}=0$ và tam giác ABC đều có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và trực tâm I thuộc $d_1$. Đường thẳng $d_2$ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ giao điểm $d_1$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết điểm I có hoành độ dương.

Gọi $M = AI \cap BC$. Giả sử $AB = x(x>0), R, r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC

-Do tam giác ABC đều nên $S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = 2$

-Do tam giác ABC đều nên trực tâm I là tâm đường tròn ngoại tiếp , nội tiếp tam giác ABC $\Rightarrow r = IM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Giả sử $I(2a-2;a) \in d_1 (a>1)$

Do $d_2$ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên

$$d(I;d_2) = r \Leftrightarrow \frac{\left|3(2a-2)-3a+\sqrt{6}\right|}{\sqrt{9+9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left|3a-6+\sqrt{6}\right| = \sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{6-2\sqrt{6}}{3} < 1 (l) \\ a = 2 \end{array}\right.$$

Suy ra $I(2;2)$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính $R = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC

là : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{3}$

Giao điểm của đường thẳng $(d_1)$ và (C ) là nghiệm của hệ phương trình:

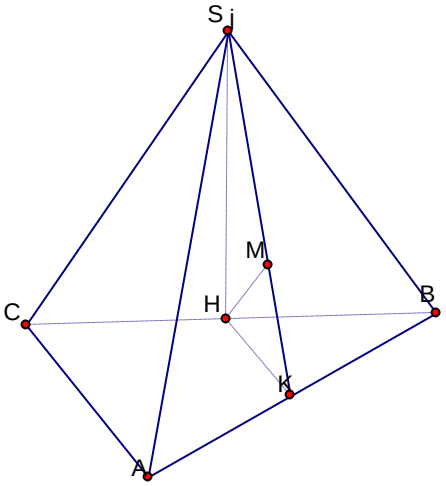
$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2)$ là $E(2+\frac{2}{\sqrt{15}}; 2+\frac{4}{\sqrt{15}}), F(2-\frac{2}{\sqrt{15}}; 2-\frac{4}{\sqrt{15}})$.

# PHẦN 8. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

## 8.1. Hình chóp tam giác

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $AB = AC = a$, $I$ là trung điểm của $SC$, hình chiếu vuông góc của $S$ lên mặt phẳng $(ABC)$ là trung điểm $H$ của $BC$, mặt phẳng $(SAB)$ tạo với đáy 1 góc bằng $60^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm $I$ đến mặt phẳng $(SAB)$ theo $a$.




Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1)

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa $(SAB)$ với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $SKH = 60^\circ$

Ta có $SH = HK \tan SKH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

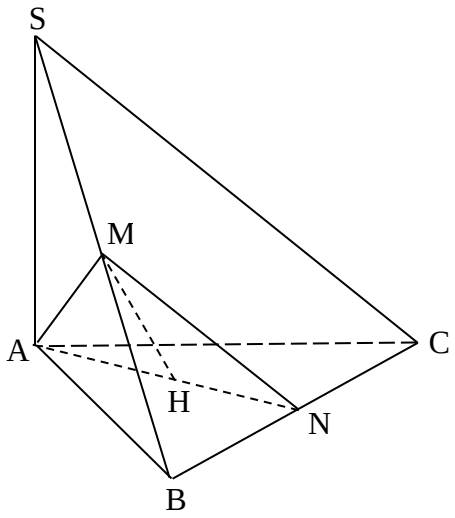
Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d\left(I,(SAB)\right) = d\left(H,(SAB)\right)$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,(SAB)\right) = HM$

Ta có $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d\left(I,(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

**Câu 2.** Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = 8a, tam giác ABC đều cạnh bằng 4a; M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SB và BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMN).

*) Ta có: $AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = 2a\sqrt{3}$




Diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC.AN = 4a^2\sqrt{3}$ .

Thể tích hình chóp S.ABC là:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3} 4a^2\sqrt{3}.8a$

$= \frac{32a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

*) Ta có:

$\frac{V_{B.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{BA}{BA}.\frac{BM}{BS}.\frac{BN}{BC} = \frac{1}{4}$

$V_{B.AMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác, $SB = SC = 4\sqrt{5}a \Rightarrow MN = \frac{1}{2} SC = 2\sqrt{5}a$ ; $AM = \frac{1}{2} SB = 2\sqrt{5}a$ .

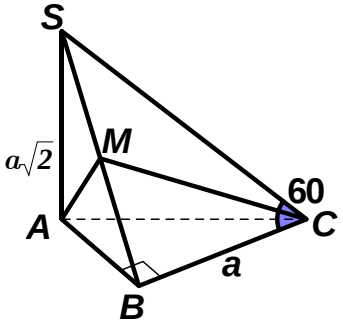
Gọi H là trung điểm AN thì $MH \perp AN$ , $\Rightarrow MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = a\sqrt{17}$ .

Diện tích tam giác AMN là $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AN.MH = \frac{1}{2} 2a\sqrt{3}.a\sqrt{17} = a^2\sqrt{51}$.

Vậy khoảng cách từ B đến (AMN) là:

$d(B,(AMN)) = \frac{3V_{B.AMN}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{51}} = \frac{8a}{\sqrt{17}} = \frac{8a\sqrt{17}}{17}$.

**Câu 3.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh SA vuông góc với mặt đáy. Góc $SCB = 60^0$, BC = a, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB.Tính thể tích khối chóp MABC




$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ (do SA cắt BC)

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$

Ta có, $SB = BC.\tan SCB = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$

$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Thể tích khối chóp M.ABC: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta MAB} \cdot BC$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvdt)

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác $ABC$ vuông tại $C$, $AC = a$, $AB = 2a$, $SA$ vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng $(SAB)$ và mặt phẳng $(SBC)$ bằng $60^\circ$. Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ lên $SB$ và $SC$. Chứng minh rằng $AK$ vuông góc $HK$ và tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

$SA \perp BC, AC \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$.

Mà $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp HK$.

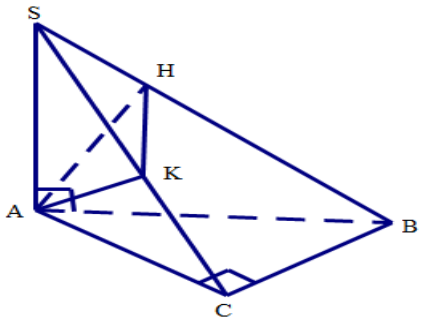
$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $AK = \text{AH}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AH$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4a^2}$ (1),

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{4}{3AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{3}{4SA^2} + \frac{3}{4a^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

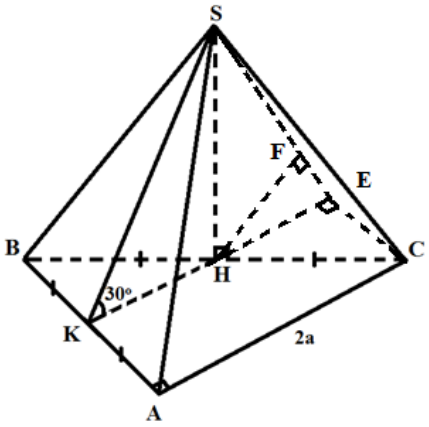
$V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.




**Câu 5.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a; AC = 2a. Mặt bên (SBC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc giữa hai mặt (SAB) và (ABC) bằng $30^0$. Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB theo a

**Tính $V_{S.ABC}$**

Gọi H là trung điểm BC.




Do $\Delta SBC$ cân tại S nên $SH \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow$ HK // AC mà $AC \perp AB$

$\Rightarrow HK \perp AB$ và $SH \perp AB$ (do $SH \perp (ABC)$)

$\Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK$

$\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SK \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa (SAB) và (ABC) là $SKH = 30^o$

$\tan 30^o = \dfrac{SH}{HK} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

- **Tính d(SC,AB)**

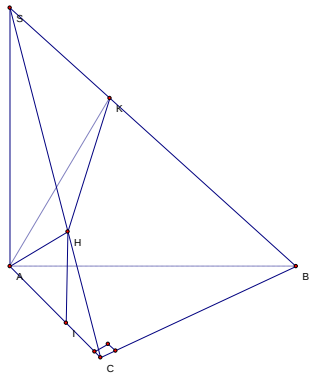
Vẽ hình chữ nhật BKEC $\Rightarrow$ CE // AB mà $AB \perp (SHK) \Rightarrow CE \perp (SHK)$

d(AB,SC) = d(AB,(SEC)) = d(K,(SEC)) = 2 d(H,(SEC))

Kẻ $HF \perp SE$ và $HF \perp CE \Rightarrow HF \perp (SEC)$

Ta có: $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{a^2} \Rightarrow HF = \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ d(H,(SEC)) = $\dfrac{a}{2} \Rightarrow$ d(AB,SC) = a.

**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA$ bằng $2a$, tam giác $ABC$ vuông ở $C$ có $AB = 2a, CAB = 30^\circ$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông của $A$ trên $SC$. Tính theo $a$ thể tích của khối chóp $H.ABC$. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$.



Trong mặt phẳng $(SAC)$, kẻ $HI$ song song với $SA$ thì $HI \perp (ABC)$.

Ta có $CA = AB\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$. Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.2a.a\sqrt{3}.\sin 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\frac{HI}{SA} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC.SC}{SC^2} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3a^2}{4a^2 + 3a^2} = \frac{3}{7} \Rightarrow HI = \frac{6}{7}a$.

Vậy $V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{6}{7}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

(Cách khác: $V_{H.ABC} = V_{B.AHC} = \frac{1}{3}S_{AHC}.BC$)

Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $SB$. Ta có $AH \perp SC, AH \perp CB$ (do $CB \perp (SAC)$), suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$.

Lại có: $SB \perp AK$, suy ra $SB \perp (AHK)$. Vậy góc giữa giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$ là $HKA$.

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{a.2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AK = a\sqrt{2}$.

Tam giác $HKA$ vuông tại $H$ (vì $AH \perp (SBC), (SBC) \supset HK$).

$\sin HKA = \frac{AH}{AK} = \frac{\frac{a.2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos HKA = \frac{\sqrt{7}}{7}$

**Câu 7.** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC theo a.

+) Từ giả thiết suy ra tam giác ABC đều cạnh a và SH⊥(ABC) với H là tâm của tam giác đều ABC => AH = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và SH là đường cao của hình chóp S.ABC

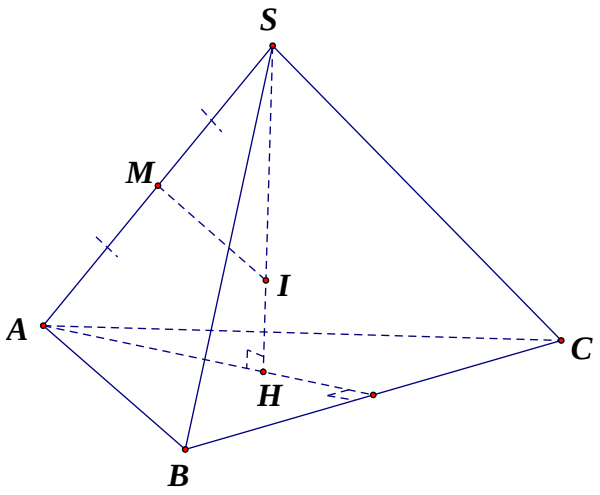
Từ giả thiết => SA = $a\sqrt{3}$ => trong tam giác vuông SAH vuông tại H có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

+) Diện tích tam giác ABC bằng: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

+) SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, trong mặt phẳng (SAH) kẻ đường trung trực của cạnh SA cắt SH tại I => I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có bán kính R = IS. Hai tam giác vuông SMI và SHA đồng dạng =>

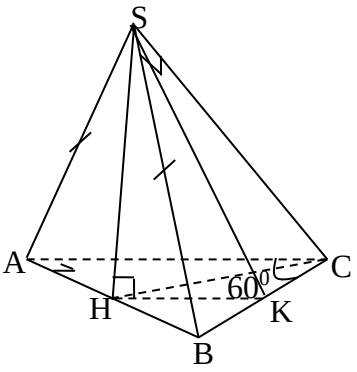
$SI = \dfrac{SM.SA}{SH} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}a$

+) Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{27}{8}\pi a^2$.




...

**Câu 8.** Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, BC = 2a, Góc $ACB = 60^0$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mp(ABC), tam giác SAB cân tại S, tam giác SBC vuông tại S. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm A tới mp(SBC).




a) Gọi H là trung điểm của cạnh AB, từ gt có $SH \perp (ABC)$. $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH$. Tam giác ABC vuông tại A có: $AB = 2a\sin 60^0 = \sqrt{3}a; AC = 2a\cos 60^0 = a$

Nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Gọi K là trung điểm của cạnh BC thì

$SK = \frac{1}{2}BC = a; HK = \frac{1}{2}AC = a\cos 60^0 = \frac{1}{2}a$

$SH^2 = SK^2 - KH^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{4}a^3$.

b) Ta có $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

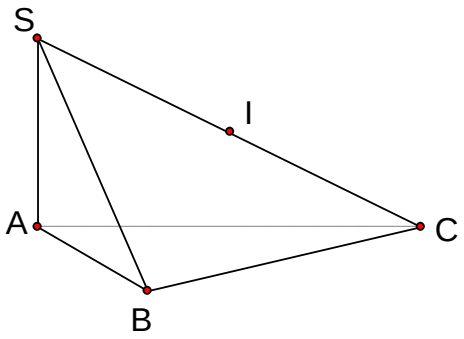
$HC^2 = AC^2 + AH^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$

$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{7a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}a$

$S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.SC = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{2}a.\frac{\sqrt{10}}{2}a = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$

Vậy $d(A;(SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{3}{4}a^3}{\frac{\sqrt{15}}{4}a^2} = \frac{3}{\sqrt{15}}a$

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), ABC = 90^0, AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = 2a$ Chứng minh trung điểm I của cạnh SC là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và tính diện tích mặt cầu đó theo a.




Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác theo giả thiết $AB \perp BC$, nên $BC \perp (SAB)$ và do đó $BC \perp SB$

Ta có tam giác SBC vuông đỉnh B; tam giác SAB vuông đỉnh A nên

$IA = IB = \frac{SC}{2} = IS = IC$ (*)

Vậy điểm I cách đều bốn đỉnh của hình chóp, do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$

Từ (*) ta có bán kính của mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$

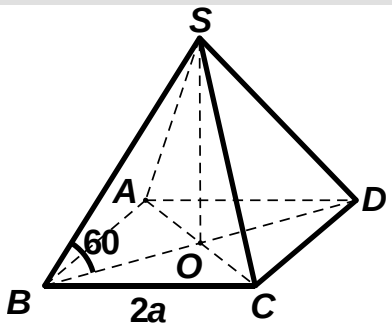
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

Diện tích mặt cầu là $4\pi R^2 = 8\pi a^2$

## 8.2. Hình chóp tứ giác

**Câu 1.** Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy 2a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60^0$. Tính thể tích của hình chóp.




• Gọi O là tâm của mặt đáy thì $SO \perp (ABCD)$ do đó SO là đường cao của hình chóp và hình chiếu của SB lên mặt đáy là BO,

do đó $SBO = 60^0$ (là góc giữa SB và mặt đáy)

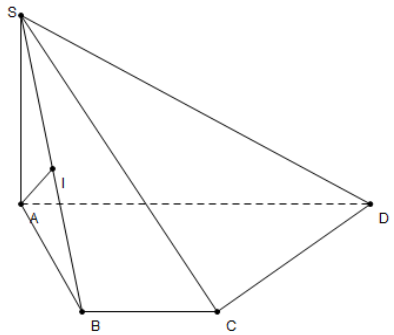
• Ta có, $\tan SBO = \dfrac{SO}{BO} \Rightarrow SO = BO.\tan SBO = \dfrac{BD}{2}.\tan SBO$

$= a\sqrt{2}.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$

• Vậy, thể tích hình chóp cần tìm là

$V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}AB.BC.SO = \dfrac{1}{3}2a.2a.a\sqrt{6} = \dfrac{4a^3\sqrt{6}}{3}$

**Câu 2.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $CD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).




Kẽ đường thẳng qua C và song song với AB cắt AD tại E.

Ta có: $AE = BC = a$ ; DE= $DE = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra diện tích hình thang ABCD là: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}a^2\left(2+\sqrt{3}\right)$

Vậy: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{SABCD}=\frac{1}{6}a^3\left(2+\sqrt{3}\right)$

Vì AD//(SBC) nên $d(D,(SBC))=d(A,(SBC))$

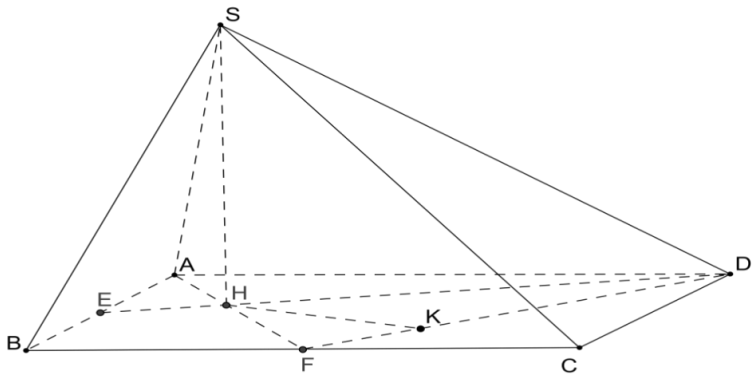
Kẻ AI vuông góc SB tại I, chứng minh được AI vuông góc (SBC).

Nên $d(A,(SBC))=AI$

Trong tam giác SAB vuông tại A có AI là đường cao nên: $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}$

Suy ra: $AI=\frac{SA.AB}{SB}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. $E,F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$, $H$ là giao điểm của $AF$ và $DE$. Biết $SH$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và góc giữa đường thẳng $SA$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $SH$, $DF$.




Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $S_{ABCD}=4a^2$.

$SH\perp(ABCD)\Rightarrow HA$ là hình chiếu vuông góc của $SA$ trên mp$(ABCD)$

$\Rightarrow SAH=60^0\Rightarrow SH=AH\sqrt{3}$

$\Delta ABF=\Delta DAE(c.g.c)\Rightarrow BAF=ADE$

Mà: $AED+ADE=90^0$ Nên $BAF+AED=90^0\Rightarrow AHE=90^0\Rightarrow DE\perp AF$

Trong $\Delta ADE$ có: $AH.DE=AD.AE\Rightarrow AH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.4a^2=\frac{8a^3\sqrt{15}}{15}$ (đvtt)

Trong mp $(ABCD)$ kẻ $HK\perp DF$ tại $K.\Rightarrow d(SH,DF)=HK$.

Trong $\Delta ADE$ có: $DH.DE=DA^2\Rightarrow DH=\frac{4a}{\sqrt{5}}$ Có : $DF=a\sqrt{5}$

Trong $\Delta DHF$ có: $HF^2=DF^2-DH^2=5a^2-\frac{16a^2}{5}=\frac{9a^2}{5}\Rightarrow HF=\frac{3a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow HK=\frac{HF.HD}{DF}=\frac{12a\sqrt{5}}{25}$ Vậy $d(SH,DF)=\frac{12a\sqrt{5}}{25}$

**Câu 4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B biết AB=AC=a, AD=2a, SA vuông góc với đáy và (SCD) hợp với đáy một góc $60^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

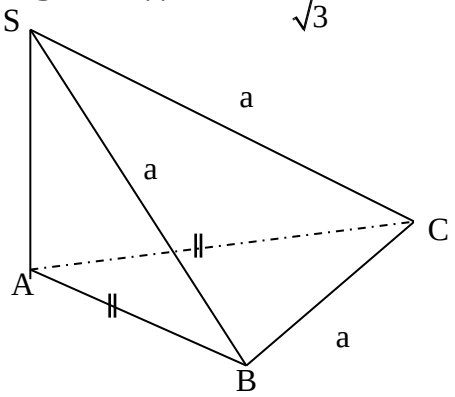
Hình chiếu của SB và SC trên (ABC) là AB và AC , mà SB=SC nên AB=AC

Ta có : $BC^2=2AB^2-2AB^2\cos 120^0\Leftrightarrow a^2=3AB^2\Leftrightarrow AB=\frac{a}{\sqrt{3}}$

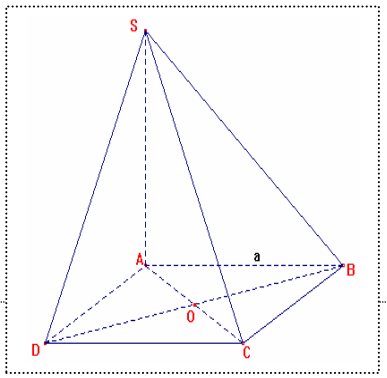
$SA^2=a^2-\frac{a^2}{3}\Rightarrow SA=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0=\frac{1}{2}\frac{a^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

$V=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{a^2\sqrt{3}}{12}=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ **(đvtt)**




**Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng $SB$ tạo với mặt phẳng $(SAD)$ một góc $60^0$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.




Ta có SA $\perp(ABCD)\Rightarrow$ SA là chiều cao

Đáy ABCD là hình vuông cạnh a

nên $S_{ABCD}=(a\sqrt{2})^2=2a^2$

Ta có góc [SB,(SAD)] = BSA $=60^o$

Tam giác SAB vuông tại A có

$$AB = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = \frac{AB}{\tan 60^o} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}2a^2.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$

**Câu 6.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi ; hai đường chéo AC= $2\sqrt{3}a$ , BD = 2a và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Từ giả thiết AC = $2a\sqrt{3}$; BD = 2a và AC ,BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo.Ta có tam giác ABO vuông tại O và AO = $a\sqrt{3}$; BO = a , do đó $ABD = 60^0$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của chúng là SO ⊥ (ABCD).

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và DH = $a\sqrt{3}$; OK // DH và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ OK ⊥ AB ⇒ AB ⊥ (SOK)

Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có OI ⊥ SK; AB ⊥ OI ⇒ OI ⊥ (SAB) , hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

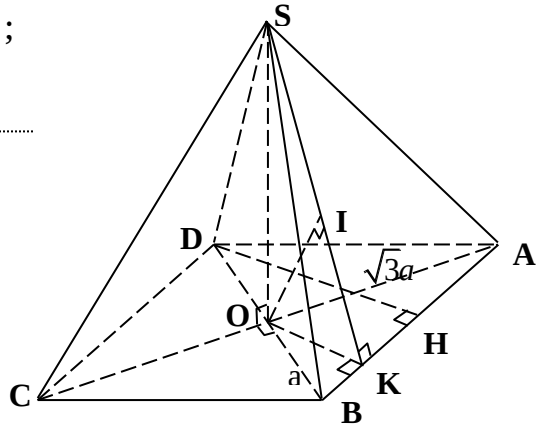
Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao ⇒ $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$;

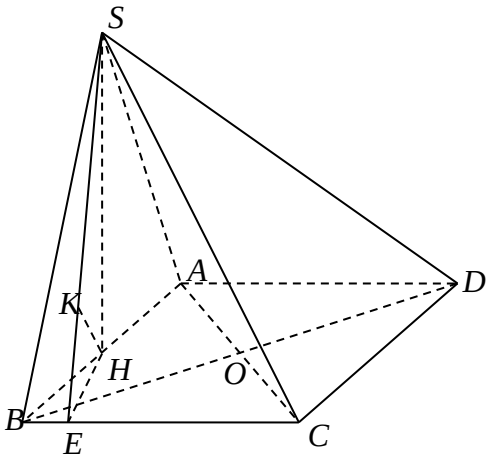
đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$



**Câu 7.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết $AC = 2a, BD = 4a$, tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.



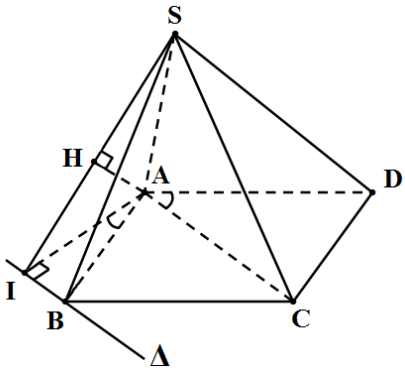

Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB, suy ra $SH \perp AB$.
Do $AB = (SAB) \cap ABCD)$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$
+) Ta có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a$, $OB = \frac{BD}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$.
$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$

+) $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} 2a.4a = 4a^2$.

Thể tích khối chóp $S_{ABCD}$ là : $V = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} .4a^2 = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Ta có BC // AD nên AD //(SBC) $\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.
Do H là trung điểm của AB và B = $AH \cap (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$.
Kẻ $HE \perp BC, H \in BC$, do $SH \perp BC$ nên $BC \perp (SHE)$.
Kẻ $HK \perp SE, K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$.
$HE = \frac{2S_{BCH}}{BC} = \frac{S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{2.AB} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.
$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{4}{15a^2} = \frac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \frac{2a\sqrt{1365}}{91}$
Vậy $d(AD, SC) = 2HK = \frac{4a\sqrt{1365}}{91}$.

**Câu 8.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$, SA $\perp$ (ABCD). Gọi M là trung điểm của SA. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN và khoảng cách giữa SB và AC.




Do (BCM) // AD nên mp này cắt mp (SAD) theo giao tuyến MN // AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp BM$

Tứ giác BCMN là hình thang vuông có BM là đường cao, $MN = \frac{a}{2}; BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích hình thang BCMN là $S_{BCMN} = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{5}}{8}$.

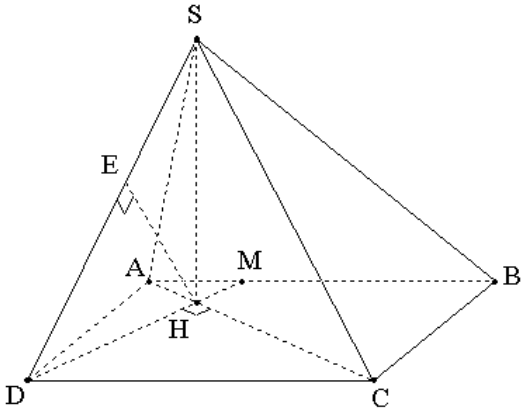
Dựng $SK \perp BM$, do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SK \Rightarrow SK \perp (BCMN)$.

Có $SK = d(A, BM) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Vậy $V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{5}}{8}.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^3}{8}$.

Trong mặt phẳng (ABCD) dựng $\Delta$ qua B song song với AC. Đặt (P) = ($\Delta$, SB).
Khi đó, AC // (P) và d(AC; SB) = d(AC; (P)) = d(A; (P)).
Từ A hạ AI $\perp \Delta$ tại I; Từ A hạ AH $\perp$ SI tại H suy ra AH = d(A; (P)).

Ta có $AI = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 9.** Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, biết AB=2a , AD= a . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{2}$, cạnh AC cắt MD tại H . Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = a . Tính thể tích khối chóp S. HCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC theo a.



*** Tính thể tích khối chóp S.HCD:**

Hai tam giác vuông AMD và DAC có $\frac{AM}{AD}=\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}$ nên đồng dạng,

Suy ra $ADH=DCH$, mà $ADH+HDC=90^\circ \Rightarrow DHC=90^\circ$

$\Delta ADC$ vuông tại D: $AC^2=AD^2+DC^2 \Rightarrow AC=a\sqrt{5}$

Hệ thức lượng $\Delta ADC$: DH.AC = DA.DC

Suy ra: $DH=\frac{DC.DA}{AC}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

$\Delta DHC$ vuông tại H: $HC=\sqrt{DC^2-DH^2}=\frac{4a}{\sqrt{5}}$

Do đó diện tích $\Delta HCD$: $S_{HCD}=\frac{1}{2}DH.HC=\frac{4a^2}{5}$

Thể tích khối chóp SHCD: $V_{S.HCD}=\frac{1}{3}SH.S_{HCD}=\frac{4a^3}{15}$

**Tính khoảng cách giữa SD và AC:**

Dựng $HE \perp SD$

Ta có SH $\perp$ (ABCD) nên SH $\perp$ AC và DH $\perp$ AC , do đó AC $\perp$ (SHD)

Mà HE $\subset$ (SHD) nên HE $\perp$ AC

Từ đó HE là đoạn vuông góc chung của SD và AC.

nên $HE=d(SD;AC)$

$\Delta SHD$ vuông tại H nên:

$$\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HD^2} \Rightarrow HE=\frac{2a}{3}$$

Vậy $d(SD;AC)=HE=\frac{2a}{3}$

**Câu 10.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AD; các đường thẳng SA, AC và CD đôi một vuông góc với nhau; $AC=CD=a\sqrt{2}$ và $AD=2BC$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

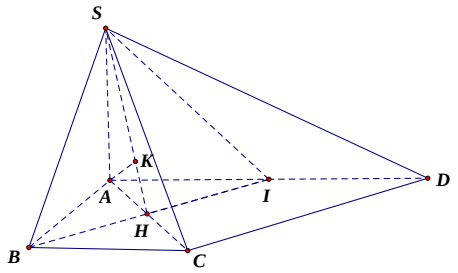
Ta có: SA $\perp$ AC và SA $\perp$ CD

$\Rightarrow$ SA $\perp$ (ABCD).

$\Delta$ ACD vuông cân tại C

$\Rightarrow$ AD = 2a $\Rightarrow$ BC = a.

Gọi I là trung điểm AD $\Rightarrow$ AI = BC, AI // BC và CI $\perp$ AD $\Rightarrow$ ABCI là hình vuông.



$\Rightarrow$ AB $\perp$ AD.

Do đó $S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).AB}{2} = \frac{3a^2}{2}$. Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

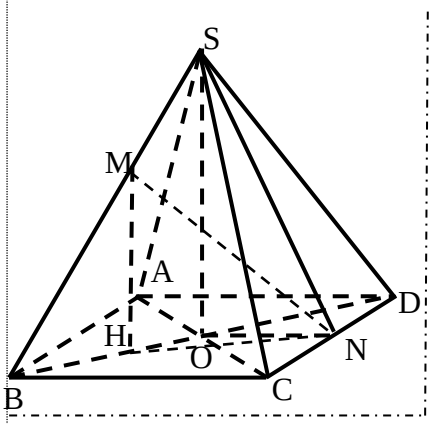
Ta có CD // BI $\Rightarrow$ CD // (SBI) $\Rightarrow$ d(SB, CD) = d(CD, (SBI)) = d(C, (SBI))
Gọi H = AC $\cap$ BI và AK $\perp$ SH tại K. Ta có AK $\perp$ (SBI) $\Rightarrow$ d(A, (SBI)) = AK.

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{5}{2a^2}$ $\Rightarrow$ AK = $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

$\Rightarrow$ d(A; (SBI)) = AK = $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. Vì H là trung điểm AC nên d(C; (SBI)) = d(A; (SBI)) = $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. Vậy d(CD, SB) = $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$, tâm $O$ và $SO$ vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho MA = 2MS.

Gọi N là trung điểm của $CD$, $SNO = 60^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo $a$ và cosin góc giữa MN với mặt phẳng $(ABCD)$.




Xét $\Delta SON$ vuông tại O, có $ON = \frac{a}{2}$, $SNO = 60^0$

$SO = ON.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD} = a^2$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Kẻ $MH \parallel SO (H \in BD) \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

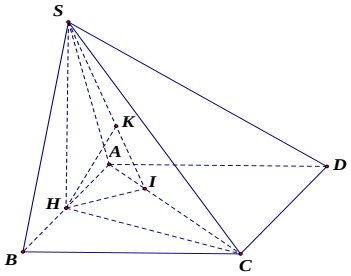
Khi đó, ta có hình chiếu vuông góc của MN trên (ABCD) là HN suy ra góc giữa MN và (ABCD) là $\varphi = MNH$

Vì $MH \parallel SO, MA = 2MS \Rightarrow BH = 2HO$ nên ta có $HD = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$

Xét $\Delta HND$, ta có $HN^2 = HD^2 + DN^2 - 2HD.DN.\cos 45^0 = \frac{17}{16}a^2 \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{17}}{4}$

Xét $\Delta MHN$ vuông tại H, ta có $\tan\varphi = \frac{MH}{HN} = \frac{2\sqrt{51}}{17} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{\frac{17}{29}}$

**Câu 12.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (ABCD) bằng $30^0$. Tính theo $a$ thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).




Gọi H là trung điểm của AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$

và $SCH = 30^0$.

Ta có: $\Delta SHC = \Delta SHD \Rightarrow SC = SD = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có:

$SH = SC.\sin SCH = SC.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

$HC = SC.\cos SCH = SC.\cos 30^0 = 3a$

Vì tam giác SAB đều mà $SH = a\sqrt{3}$ nên $AB = 2a$. Suy ra

$BC = \sqrt{HC^2 - BH^2} = 2a\sqrt{2}$. Do đó, $S_{ABCD} = AB.BC = 4a^2\sqrt{2}$.

Vậy, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Vì $BA = 2HA$ nên $d\left(B,(SAC)\right) = 2d\left(H,(SAC)\right)$

Gọi I là hình chiếu của H lên AC và K là hình chiếu của H lên SI. Ta có:

$AC \perp HI$ và $AC \perp SH$ nên $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. Mà, ta lại có: $HK \perp SI$.

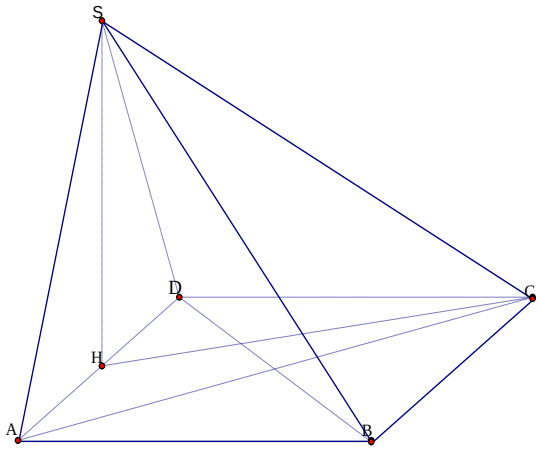
Do đó: $HK \perp (SAC)$.

Vì hai tam giác SIA và SBC đồng dạng nên $\frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow HI = \frac{AH.BC}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra, $HK = \frac{HS.HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Vậy , $d\left(B,(SAC)\right) = 2d\left(H,(SAC)\right) = 2HK = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a$, mặt bên $SAD$ là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AD, SB$ theo $a$.




Gọi $H$ là chân đường cao hạ từ $S$ của tam giác đều $SAD$
Suy ra:

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } SH \perp (ABCD)$$

Trong tam giác vuông $HSC$ có $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\cos HDC = \frac{DH^2 + DC^2 - CH^2}{2DH.DC} = \frac{\frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.a} = \frac{1}{2} \Rightarrow HDC = 60^0$$

Suy ra $S_{ABCD} = DA.DC.\sin ADC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}a^3$$

Ta có $\Delta ADC$ đều cạnh $a \Rightarrow CH \perp AD \Rightarrow CH \perp BC$
hay $BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta CSB$ vuông tại $C$

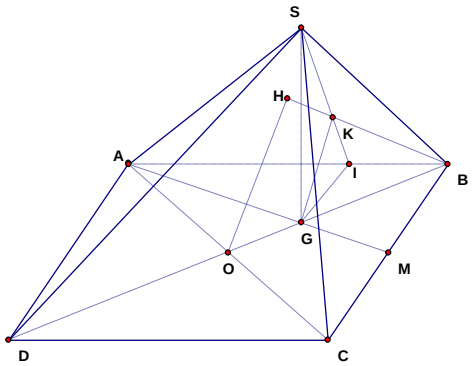
Lại có $V_{D.SBC} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}.\frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}d\left(D;(SBC)\right).S_{\Delta SBC} = \frac{a^3}{8} \Leftrightarrow d\left(D;(SBC)\right) = \frac{3a^3}{8.S_{\Delta SBC}}$$

$$\Rightarrow d\left(D;(SBC)\right) = \frac{3a^3}{8.\frac{1}{2}CS.CB} = \frac{3a^3}{4.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $d(AD;SB) = d\left(D;(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$

**Câu 14.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30^0$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và cosin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SAB).




Gọi M là trung điểm BC, O là giao điểm của AC và BD. Ta có

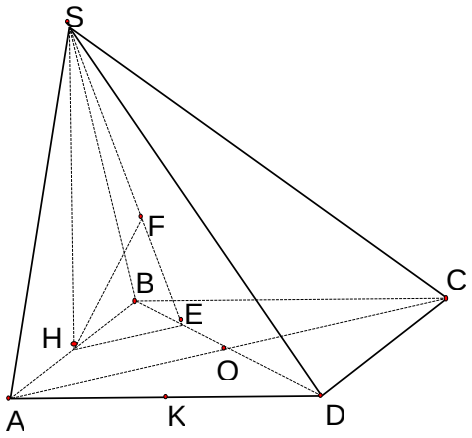
$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{5}a}{3}$. Vì SG vuông góc với mặt đáy, nên góc giữa SA và mặt đáy là $SAG = 30^0$. Xét tam giác vuông SGA, ta có $\tan SAG = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{SG}{AG} \Rightarrow SG = \frac{2\sqrt{5}a}{3\sqrt{3}}$.

$S_{ABCD} = 4a^2$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{5}a}{3\sqrt{3}}.4a^2 = \frac{8\sqrt{15}a^3}{27}$ (đvtt)

Hạ GI vuông góc với AB, I thuộc AB. Nối S với I, hạ GK vuông góc với SI, K thuộc SI. Khi đó K là hình chiếu vuông góc của G trên (SAB). Ta có $GI = \frac{2}{3}MB = \frac{2a}{3}$, do đó $GK = \frac{GS.GI}{\sqrt{GS^2 + GI^2}} = \frac{\sqrt{10}a}{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (SAB), ta có $OH = \frac{3}{2}GK = \frac{\sqrt{10}a}{4}$. Khi đó AH là hình chiếu của AO lên (SAB) suy ra góc giữa AC và (SAB) là $OAH$. Xét tam giác vuông OHA, ta có $\sin OAH = \frac{OH}{OA} = \frac{\sqrt{10}a}{4.\sqrt{2}.a} = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos OAH = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của đoạn $AB$. Gọi $K$ là trung điểm của đoạn $AD$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $HK$ và $SD$.




Từ giả thiết ta có $SH$ là đường cao của hình chóp S.ABCD và

$SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{SD^2-(AH^2+AD^2)}=\sqrt{(\frac{3a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2-a^2}=a$

Diện tích của hình vuông ABCD là $a^2$, $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a.a^2=\frac{a^3}{3}$

Từ giả thiết ta có $HK//BD\Rightarrow HK//(SBD)$

Do vậy: $d(HK,SD)=d(H,(SBD))$ (1)

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên BD, F là hình chiếu vuông góc của H lên SE

Ta có $BD\perp SH, BD\perp HE\Rightarrow BD\perp(SHE)\Rightarrow BD\perp HF$ mà $HF\perp SE$ nên suy ra

$HF\perp(SBD)\Rightarrow HF=d(H,(SBD))$ (2)

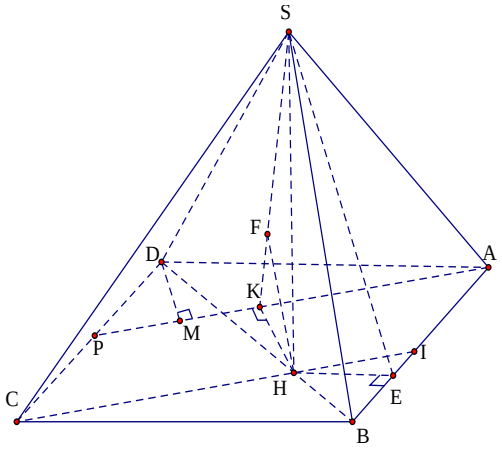
+) $HE=HB.\sin HBE=\frac{a}{2}.\sin 45^0=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

+) Xét tam giác vuông SHE có:

$HF.SE=SH.HE\Rightarrow HF=\frac{SH.HE}{SE}=\frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2+a^2}}=\frac{a}{3}$ (3)

+) Từ (1), (2), (3) ta có $d(HK,SD)=\frac{a}{3}$.

**Câu 16.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I là trung điểm AB, H là giao điểm của BD với IC. Các mặt phẳng (SBD) và (SIC) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SAB) và (ABCD) bằng $60^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và IC.




Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$, trong đó $S_{ABCD}=a^2$

Do (SIC),(SBD) cùng vuông với đáy suy ra $SH\perp(ABCD)$

Dựng $HE\perp AB\Rightarrow(SHE)\perp AB$, suy ra $SEH$ là góc giữa (SAB) và (ABCD) $\Rightarrow SEH=60^0$

Ta có $SH=HE.\tan 60^0=\sqrt{3}HE$

$\frac{HE}{CB}=\frac{HI}{IC}=\frac{1}{3}\Rightarrow HE=\frac{a}{3}$

$\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Gọi P là trung điểm của CD, suy ra AP song song vớiCI

$\Rightarrow d(SA,CI)=d(CI,(SAP))=d(H,(SAP))$

Dựng $HK\perp AP$, suy ra $(SHK)\perp(SAP)$

Dựng $HF\perp SK\Rightarrow HF\perp(SPA)\Rightarrow d(H,(SPA))=HF$

Do $\Delta SHK$ vuông tại $H\Rightarrow\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{HS^2}(1)$

Dựng $DM\perp AP$, ta thấy $DM=HK\Rightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{DM^2}=\frac{1}{DP^2}+\frac{1}{DA^2}$

Thay vào (1) ta có $\Rightarrow\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{DP^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{8}{a^2}\Rightarrow HF=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(SA,CI)=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

**Câu 17.** Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), đáy ABCD là hình chữ nhật có AD = 3a, AC = 5a, góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng $45^0$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC).

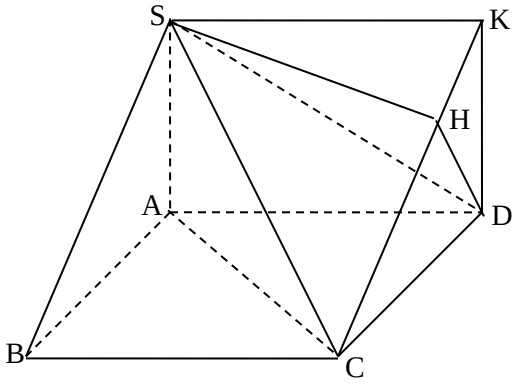
- Tính thể tích

+) Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 4a$

+) Mà $\left((SCD),(ABCD)\right) = SDA = 45^0$

nên SA = AD = 3a

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = 12a^3$ (đvtt)




- Tính góc…

+) Dựng điểm K sao cho $\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{AD}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của

D lên CK, khi đó: $DK \perp (SBC)$. Do đó: $\left(SD,(SBC)\right) = DSH$

+) Mặt khác $DH = \frac{DC.DK}{KC} = \frac{12a}{5}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 3a\sqrt{2}$

$$SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{3a\sqrt{34}}{5}$$

Do đó: $\left(SD,(SBC)\right) = DSH = \arccos\frac{SH}{SD} = \arccos\frac{\sqrt{17}}{5} \approx 34^0 27'$

**Câu 18.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, hai đường chéo $AC = 2\sqrt{3}a, BD = 2a$, BD = 2a; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC.

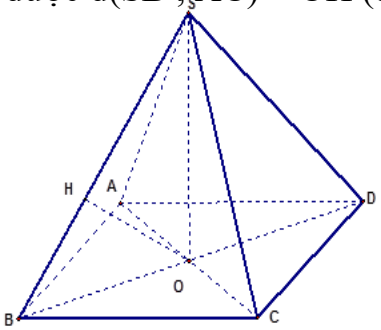
Tính $V_{S.ABCD}$ và d(SB , AC)

Cm được góc giữa SB và mp (SAC) là góc $BSO = 30^0$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} AC.BD.SO = 2a^3$

Vẽ OH vuông góc SB . Chứng minh được d(SB , AC) = OH (đường vuông góc chung)

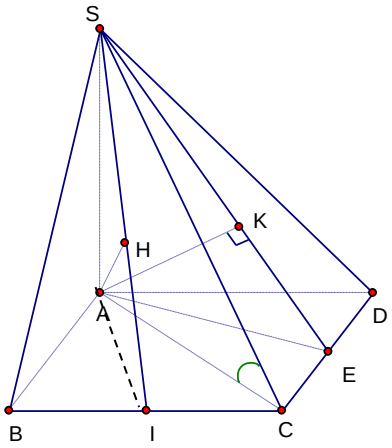
Tính được: d(SB , AC) = OH $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$




**Câu 19.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\hat{ABC} = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc $60^0$. Gọi I là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SI.

**a)** Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

**b)** Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) theo a.




a) Do $\hat{ABC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều, suy ra

$S_{ABCD} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $AC = a$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \hat{SCA} = 60^0$

$\Rightarrow SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}.$

b)Ta có $\frac{HS}{IS} = \frac{HS.IS}{IS^2} = \frac{AS^2}{IS^2} = \frac{AS^2}{IA^2 + AS^2} = \frac{4}{5}$

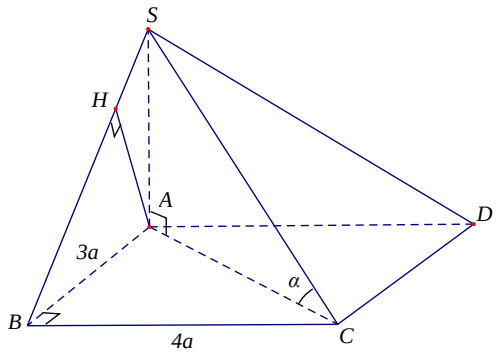
$\Rightarrow d(H,(SCD)) = \frac{4}{5} d(I,(SCD)) = \frac{2}{5} d(B,(SCD)) = \frac{2}{5} d(A,(SCD))$

( vì I là trung điểm BC và AB//(SCD))

Gọi E là trung điểm CD, K là hình chiếu của A lên SE, ta có $AE \perp DC \Rightarrow DC \perp (SAE) \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Suy ra $d(H,(SCD)) = \frac{2}{5} d(A,(SCD)) = \frac{2}{5} AK = \frac{2}{5} \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{2a\sqrt{15}}{25}.$

**Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật .Biết $SA \perp (ABCD)$, $SC$ hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $\alpha$ với $\tan\alpha = \frac{4}{5}$, $AB = 3a$ và [illegible]. Tính thể tích của khối chóp [illegible] và khoảng cách từ điểm $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$.




Xác định đúng góc $\hat{SCA} = \alpha$

Thể tích $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.3a.4a.\frac{4}{5}.5a = 16a^3$

**Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC)**

Xác định dược khoảng cách $d(D,(SBC)) = d(A,(SBC)) = AH$

Tính đúng $d(D,(SBC)) = AH = \frac{12a}{5}$

Vậy : $D(0;0;0)$ và $D(6;0;0)$

## 8.3. Hình lăng trụ đứng

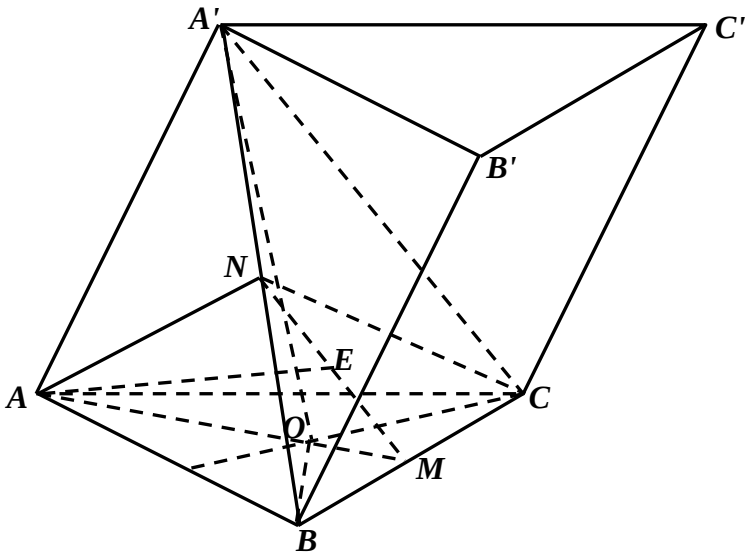
**Câu 1.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng $a$, $AA'=a$ và đỉnh $A'$ cách đều $A,B,C$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $A'B$. Tính theo $a$ thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(AMN)$.

● Gọi O là tâm tam giác đều ABC $\Rightarrow$ A'O $\perp$ (ABC)

Ta có $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$A'O=\sqrt{AA'^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ ; $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V=S_{\Delta ABC}.A'O=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$




● Ta có $V_{NAMC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta AMC}.d\left[N,(ABC)\right]\Rightarrow d\left[C,(AMN)\right]=\dfrac{3V_{NAMC}}{S_{\Delta AMC}}$

$S_{AMC}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$; $d\left[N,(ABC)\right]=\dfrac{1}{2}A'O=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Suy ra: $V_{NAMC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{48}$

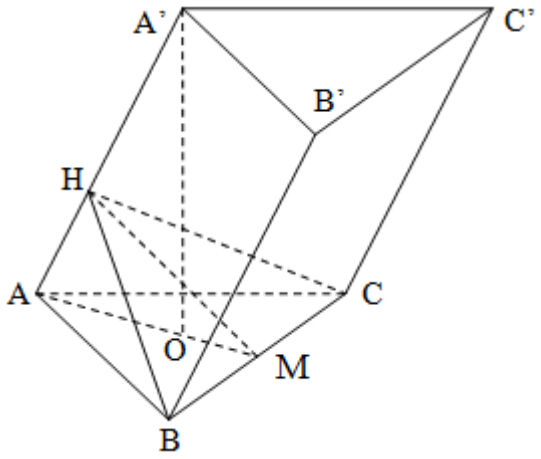
lại có : $AM=AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, nên $\Delta AMN$ cân tại A

Gọi E là trung điểm AM suy ra $AE\perp MN$, $MN=\dfrac{A'C}{2}=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow AE=\sqrt{AN^2-NE^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{11}}{4}$; $S_{AMN}=\frac{1}{2}MN.AE=\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$

$\Rightarrow d\left[C,(AMN)\right]=\frac{3a^2\sqrt{2}}{48}:\frac{a\sqrt{11}}{16}=\frac{a\sqrt{22}}{11}$ (đvđd)

**Câu 2.** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$




Gọi M là trung điểm BC ta thấy: $\left.\begin{matrix}AM\perp BC\\A'O\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(A'AM)$

Kẻ $MH\perp AA'$, (do $\hat{A}$ nhọn nên H thuộc trong đoạn AA'.)

Do $\left.\begin{matrix}BC\perp(A'AM)\\HM\in(A'AM)\end{matrix}\right\}\Rightarrow HM\perp BC$. Vậy HM là đoạn vuông góc chung của

AA'và BC, do đó $d(AA',BC)=HM=a\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Xét 2 tam giác đồng dạng AA'O và AMH, ta có: $\frac{A'O}{AO}=\frac{HM}{AH}$

$\Leftrightarrow$ suy ra $A'O=\frac{AO.HM}{AH}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{4}{3a}=\frac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ: $V=A'O.S_{ABC}=\frac{1}{2}A'O.AM.BC=\frac{1}{2}\frac{a}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}a=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

**Câu 3.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BAD=120^o$ và $AC'=a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AB'$ và BD theo a.

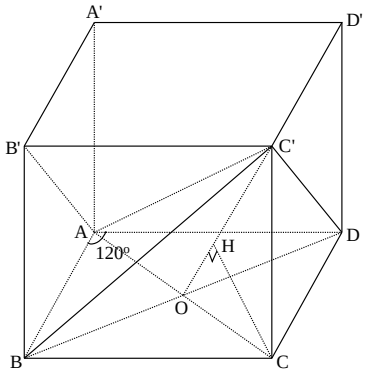
Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

Do hình thoi ABCD có $BAD = 120^o$

$\Rightarrow \Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

$\Rightarrow AC = a.$

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$




Mà $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng.

$\Rightarrow \Delta ACC'$ vuông tại C $\Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = 2a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}.$

Tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành $\Rightarrow AB' // C'D \Rightarrow AB' // (BC'D).$

$\Rightarrow d(AB', BD) = d(AB', (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = d(C, (BC'D)).$

Vì $BD \perp AC, BD \perp CC' \Rightarrow BD \perp (OCC') \Rightarrow (BC'D) \perp (OCC').$

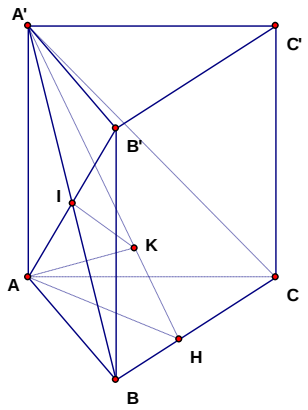
Trong $(OCC')$, kẻ $CH \perp OC'$ $(H \in OC').$

$\Rightarrow CH \perp (BC'D) \Rightarrow d(C, (BC'D)) = CH$

$\Delta OCC'$ vuông tại C $\Rightarrow \dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CO^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}$

Vậy $d(AB', BD) = \dfrac{2a}{\sqrt{17}}.$

**Câu 4.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, $AB = a$, $ABC = 60^0$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABC)$ bằng $45^0$. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a và cosin của góc giữa đường thẳng $AB'$ và mặt phẳng $(A'BC)$.



Theo giả thiết, ta có $AB = BC.\cos ABC \Rightarrow BC = \dfrac{a}{\cos 60^0} = 2a \Rightarrow AC = \sqrt{3}a$. Góc giữa $A'C$ và (ABC) là $A'CA = 45^0 \Rightarrow AA' = AC = \sqrt{3}a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{3a^3}{2}$.

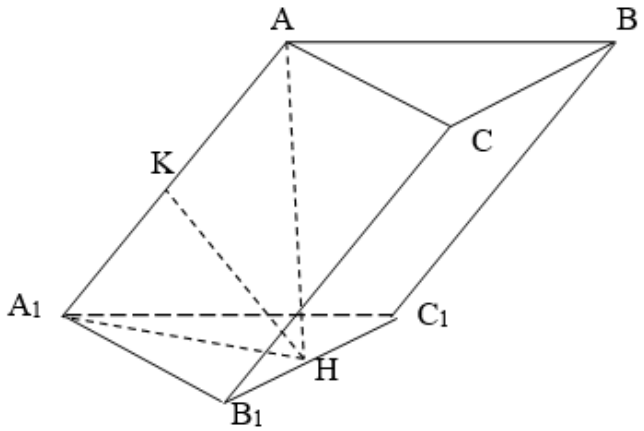
Gọi I là tâm hình chữ nhật ABB'A', H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, K là hình chiếu vuông góc của A trên A'H. Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BC \perp AK$. Do đó $AK \perp (A'BC)$. Vậy IK là hình chiếu của IA lên $(A'BC)$, hay góc giữa AB' và mặt phẳng $(A'BC)$ là $AIK$.

Dễ thấy $AB' = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2} = 2a \Rightarrow IA = a.$ Ứng dụng hệ thức trong tam giác vuông, ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{5}{3a^2}$. Suy ra $AK = \dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông AKI. ta có $\sin AIK = \dfrac{AK}{AI} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \Rightarrow \cos AIK = \sqrt{\dfrac{2}{5}}.$

**Câu 5.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng $a$, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $30^0$. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng $B_1C_1$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AA_1$ và $B_1C_1$ theo $a$.

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc $AA_1H$ là góc giữa $AA_1$ và $(A_1B_1C_1)$, theo giả thiết thì góc $AA_1H$ bằng $30^0$.



Xét tam giác vuông $AHA_1$ có $AA_1 = a$, góc $AA_1H = 30^0 \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

$V_{ABCA_1B_1C_1} = AH.S_{A_1B_1C} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Xét tam giác vuông $AHA_1$ có $AA_1 = a$, góc $AA_1H = 30^0 \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều cạnh a, H thuộc $B_1C_1$ và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $A_1H$ vuông góc với $B_1C_1$. Mặt khác $AH \perp B_1C_1$ nên $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

Kẻ đường cao HK của tam giác $AA_1H$ thì HK chính là khoảng cách giữa $AA_1$ và $B_1C_1$

Ta có $AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

# PHẦN 9. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## 9.1. Tìm tọa độ điểm

**Câu 1.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$. Tìm tọa độ điểm $B$ thuộc $d$ sao cho $AB=\sqrt{27}$.

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(-2;1;3)$

Vì $(P)\perp d$ nên $(P)$ nhận $\overrightarrow{u_d}=(-2;1;3)$ làm VTPT

Vậy PT mặt phẳng $(P)$ là : $-2(x+4)+1(y-1)+3(z-3)=0$

$\Leftrightarrow -2x+y+3z-18=0$

Vì $B\in d$ nên $B(-1-2t;1+t;-3+3t)$

$AB=\sqrt{27}\Leftrightarrow AB^2=27\Leftrightarrow(3-2t)^2+t^2+(-6+3t)^2=27\Leftrightarrow 7t^2-24t+9=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\frac{3}{7}\end{array}\right.$ Vậy $B(-7;4;6)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(-1;0;0) và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Từ đó suy ra tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d.

+) d có 1 VTCP là $\vec{u}=(1;2;1)$.

+) (P) qua A(-1;0;0) và có VTPT $\vec{n}=\vec{u}=(1;2;1)$ có pt : x + 2y + z +1 = 0.

+) H là giao điểm của (d) và (P) nên tọa độ H là nghiệm của hệ pt

$\left\{\begin{array}{l}\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}\\x+2y+z+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=-1\\z=0\end{array}\right.$. Vậy H(1;-1;0).

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(2;-1;4), B(0;1;0) và đường thẳng $\Delta:\left\{\begin{array}{l}x=2t\\y=1-t\\z=4+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng và tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $\Delta$ sao cho tam giác ABM vuông tại M.

**a**) * Mp(P) có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{a_\Delta} = (2;-1;1)$

*Ptmp(P) là: 2x – y + z - 9 = 0.

*Xét ptgđ của đt $\Delta$ và mp(P) 4t – 1(1-t) + (4 + t) - 9 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 1.

* Gọi N là gđ cần tìm

Thay t = 1 vào đt $\Delta$ ta được N(2 ; 0 ; 5)

**b**) Ta có M$\in \Delta$ nên tọa độ M(2t ; 1- t ; 4 + t)

Vì tam giác ABM vuông tại M nên ta có

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

* Vậy ta có hai điểm M cần tìm là M(0;1;4), M($\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{13}{3}$)

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(1;-2;1), B(-1;0;3), C(0;2;1). Lập phương trình mặt cầu đường kính AB và tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Tìm được tọa độ tâm I của mặt cầu I(0;-1;2), bán kính mặt cầu: $R = \sqrt{3}$

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$

Giả sử H(x;y;z), $\overrightarrow{AH} = (x-1; y+2; z-1), \overrightarrow{BC} = (1;2;-2), \overrightarrow{BH} = (x+1; y; z-3)$

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z = -5$

$\overrightarrow{BH}$ cùng phương $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ y + z = 3 \end{cases}$, Tìm được H($-\frac{7}{9};\frac{4}{9};\frac{23}{9}$)

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt cầu (S) có diện tích $784\pi$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Suy ra: $d: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H = d \cap (P)$.

Vì $H \in d$ nên $H(2+6t;5+3t;1-2t)$.

Mặt khác, $H \in (P)$ nên ta có: $6(2+6t) + 3(5+3t) - 2(1-2t) + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó, $H(-4;2;3)$.

Gọi $I$, R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng $784\pi$, suy ra $4\pi R^2 = 784\pi \Rightarrow R = 14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH \perp (P) \Rightarrow I \in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t;5+3t;1-2t)$, với $t \neq -1$.

Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I,(P)) = 14 \\ AI < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}} = 14 \\ \sqrt{(6t)^2+(3t)^2+(-2t)^2} < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \\ -2 < t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó, $I(8;8;-1)$.

Vậy, mặt cầu $(S): (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$

**Câu 6.** Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(1;0;0); B(0;2;0); C(0;0;-2) tìm tọa độ điểm O' đối xứng với O qua (ABC).

*Từ phương trình đoạn chắn suy ra pt tổng quát của mp(ABC) là:2x+y-z-2=0

*Gọi H là hình chiếu vuông góc của O l ên (ABC), OH vuông góc với (ABC) nên $\overrightarrow{OH} // \vec{n}(2;1;-1)$ ; $H \in (ABC)$

Ta suy ra H(2t;t;-t) thay vào phương trình( ABC) có t=$\frac{1}{3}$ suy ra $H(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$

*O' đỗi xứng với O qua (ABC) $\Leftrightarrow$H là trung điểm của OO' $\Leftrightarrow O'(\frac{4}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$

**Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d; tìm tọa độ điểm A thuộc d sao cho khoảng cách từ A đến (P) bằng $2\sqrt{3}$.

Ta có phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = -t \end{cases}$

$I = d \cap (P) \Rightarrow$ Ta có phương trình: $(2+t)+(-1-2t)+(-t)-3=0$

$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(1;1;1)$

Ta có $A \in d \Rightarrow A(2+t;-1-2t;-t)$

Khi đó, ta có $d(A;(P)) = \dfrac{|(2+t)+(-1-2t)+(-t)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|-2t-2|}{\sqrt{3}}$

Vậy $d(A;(P))=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{|-2t-2|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow|-t-1|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=2\end{array}\right.$

Khi đó $t=-4\Rightarrow A(-2;7;4);\ t=2\Rightarrow A(4;-5;-2)$

**Câu 8.** Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(0;2;4)$, $C(4;2;1)$. Tính diện tích tam giác $ABC$ và tìm tọa độ điểm $D$ trên trục $Ox$ sao cho $AD=BC$.

**Tính diện tích tam giác** $ABC$

$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-18;7;-24)$

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{18^2+7^2+24^2}=\dfrac{\sqrt{494}}{2}$

**Tìm tọa độ điểm D trên trục** $Ox$ **sao cho** $AD=BC$**.**

Gọi $D(x;0;0)$. Ta có $AD=BC\Leftrightarrow(x-3)^2+4^2+0^2=4^2+0^2+3^2$

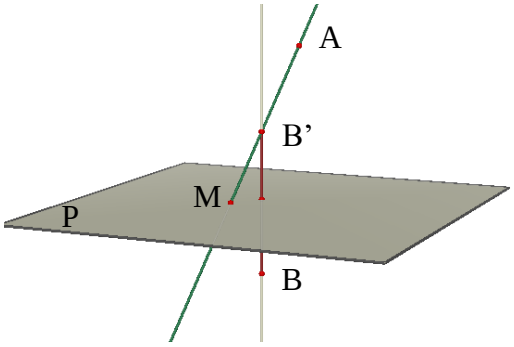
**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$ và hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm $M$ trên mặt phẳng $(P)$ sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Kiểm tra thấy $A$ và $B$ nằm khác phía so với mặt phẳng $(P)$.

Gọi $B'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với $B(5;-1;-2)$

Suy ra $B'(-1;-3;4)$. Lại có $|MA-MB|=|MA-MB'|\le AB'=\text{const}$

Vậy $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi $M,A,B'$ thẳng hàng hay $M$ là giao điểm của đường thẳng $AB'$ với mặt phẳng $(P)$




$AB'$ có phương trình $\left\{\begin{array}{l}x=1+t\\y=-3\\z=-2t\end{array}\right.$

Tọa độ $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ $\left\{\begin{array}{l}x=1+t\\y=-3\\z=-2t\\x+y+z-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=-3\\x=-2\\y=-3\\z=6\end{array}\right.$

Vậy điểm $M(-2;-3;6)$

## 9.2. Phương trình đường thẳng

**Câu 1.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(7;2;1), B(-5;-4;-3)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y-6z+3=0$. Viết phương trình đường thẳng AB và chứng minh rằng AB song song với (P).

+ Đường thẳng AB đi qua A, VTCP $\overrightarrow{AB}=(-12;-6;-4)$ có PTTS là $\begin{cases} x=7-12t \\ y=2-6t \\ z=1-4t \end{cases}$

+ Xét hệ phương trình $\begin{cases} x=7-12t \\ y=2-6t \\ z=1-4t \\ 3x-2y-6z+3=0 \end{cases}$ và CM được hệ VN

**Câu 2.** Trong khoâng gian Oxyz cho đđường thẳng $(d_1): \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{-2}$ và đường thẳng $(d_2)$ : $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ .Tìm tọa độ giao điểm của( $d_1$ )và ( $d_2$).Viết phương trình đường thẳng (d) đối xứng ($d_1$) qua ($d_2$).

Tọa độ giao điểm I(1;2;-1)

Trên ($d_1$) lấy $M_1(2;0;-3)$.tọa độ hình chiếu của $M_1$lên ($d_2$) là H($\frac{13}{7};\frac{17}{7};\frac{-16}{7}$)

Điểm đối xứng của $M_1$ qua ($d_2$) là M'$_1$($\frac{22}{7};\frac{34}{7};\frac{-11}{7}$ )

.đường thẳng (d) đi qua I có VTCP $\overrightarrow{IM}=(\frac{15}{7};\frac{20}{7};\frac{-4}{7})$

PTTS(d): $\begin{cases} x=1+\frac{15}{7}t \\ y=2+\frac{20}{7}\ t(t\in\mathbb{R}) \\ z=-1-\frac{4}{7}t \end{cases}$

**Câu 3.** Trong không gian oxyz cho điểm A(0;2;2) . Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ qua A và vuông góc đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{2}$; đồng thời cắt $d_2: \begin{cases} x=-2 \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$.

Giả sử $\Delta$ cắt $d_2$ tại B(-2;t;1+t)

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;t-2;t-1)$

Đường thẳng $d_1$ có VTCP $\vec{u}=(3;2;2)$

$\Delta$ vuông $d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$.

Vậy $\Delta$ qua A có VTCP $\overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$ có PTTS: $\begin{cases} x=-2u \\ y=2+u \\ z=2+2u \end{cases}$

**Câu 4.** Viết phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $A(3;-2;-4)$, song song với mặt phẳng $(P):3x-2y-3z-7=0$ và cắt đường thẳng $(d):\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}(3;-2;-3)$. Giả sử B(2 + 3t ; –4 – 2t ; 1 + 2t) là giao điểm của $\Delta$ và $d$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}(-1+3t;-2-2t;5+2t)$, $AB \| (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow t=2$.

Vậy $B(8;-8;5)$ và $\overrightarrow{AB}(5;-6;9)$.

Vậy phương trình đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$.

**Câu 5.** Viết phương trình đường thẳng d’ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$ trên mặt phẳng (P): x + y – z +1 =0.

PTTS của $d:\begin{cases} x=2t \\ y=-1+t \\ z=1+3t \end{cases}$

Thay x, y, z của phương trình đường thẳng d vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: 2t – 1 +t – 1 – 3t + 1 = 0

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ d // (P).

Lấy điểm $A(0;-1;1) \in d$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua A và vuông góc với mp(P) $\Rightarrow \Delta:\begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) $\Rightarrow H=\Delta \cap (P)$

Thay x, y, z của phương trình $\Delta$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$t-1+t-1+t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$$

Gọi d’ là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) $\Rightarrow$ d'qua H và song song với d

$\Rightarrow d': \begin{cases} x = 1/3 + 2t \\ y = -2/3 + t \\ z = 2/3 + 3t \end{cases}$

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1$: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ ; $d_2$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng (P): x - y - 2z + 3 = 0. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết Δ nằm trên mặt phẳng (P) và Δ cắt hai đường thẳng $d_1$ , $d_2$ .

Gọi A = $d_1 \cap$(P) suy ra A(1; 0 ; 2) ; B = $d_2 \cap$ (P) suy ra B(2; 3; 1)
Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua A và B.
Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1;3;-1)$
Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$

**Câu 7.** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta$: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng (P): x + 3y + 2z + 2 = 0. Lập phương trình đường thẳng song song với mặt phẳng (P), đi qua M(2; 2; 4) và cắt đường thẳng (Δ).

Đường thẳng (Δ) có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

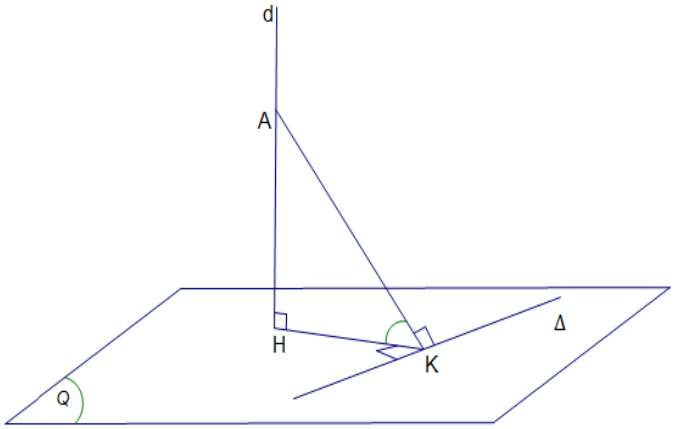
Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (1;\ 3;\ 2)$

Giả sử N(−1 + 3t ; 2 − 2t ; 2 + 2t) $\in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3t-3;-2t;2t-2)$

Để MN // (P) thì $\overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow t = 7 \Rightarrow$ N(20; −12; 16)

Phương trình đường thẳng cần tìm : $\frac{x-2}{9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-4}{6}$

**Câu 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-6}{2}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d và cách d một khoảng bằng $\sqrt{\frac{3}{238}}$




Gọi $A = d \cap (P) \Rightarrow A(3;0;0)$

$\Delta \perp d \Rightarrow \exists (Q)$ chứa $\Delta \perp d$. Giả sử $d \perp (Q)$ tại H. Hạ HK$\perp \Delta$, thì $\Delta \perp (AHK) \Rightarrow \Delta \perp AK$. Vậy góc AKH nhọn là góc giữa (P) và (Q). Và HK là đoạn vuông góc chung của d và $\Delta$ nên $HK = \sqrt{\frac{3}{238}}$. Do (Q) vuông góc với d nên (Q) có dạng: $-2x + 3y + 2z + D = 0$

Với $D_1 = 7 \Rightarrow (Q_1): -2x + 3y + 2z + 7 = 0 \Rightarrow \Delta_1: (P) \cap (Q_1)$

Với $D_2 = 5 \Rightarrow (Q_2): -2x + 3y + 2z + 5 = 0 \Rightarrow \Delta_2: (P) \cap (Q_2)$

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 6 = 0$, mặt phẳng $(Q): 2x + y - 2z + 1 = 0$ và đường thẳng D : $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$ . Tìm điểm M thuộc D , N thuộc mặt phẳng (P) sao cho MN vuông góc với mặt phẳng (Q) và MN = 3

VTPT $\overrightarrow{n_Q} = (2;1;-2)$

$M \in D \Rightarrow M(2-t;3+t;4+t)$

$MN \perp (Q) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{n_Q} = (2k;-k;-2k) \Rightarrow N(2k-t+2;k+t+3;-2k+t+4)$

$N \in (P) \Leftrightarrow k + t = -3$

$MN = 3 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

$k = 1 \Rightarrow t = -4 : M(6;-1;0); N(8;0;-2)$

$k = -1 \Rightarrow t = -2 : M(4;1;2); N(2;0;4)$

## 9.3. Phương trình mặt phẳng

**Câu 1.** Trong không gian Oxyz , cho điểm $A(-3;2;-3)$ và hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1} \text{ và } d_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{3}$$

a/ Chứng minh rằng $d_1$ và $d_2$ cắt nhau.

b/ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $d_1$ và $d_2$. Tính khoảng cách từ A đến mp(P).

a/ • $d_1$ đi qua điểm $M_1(1;-2;3)$, có vtcp $\vec{u}_1 = (1;1;-1)$

• $d_2$ đi qua điểm $M_2(3;1;5)$, có vtcp $\vec{u}_2 = (1;2;3)$

• Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (5;-4;1)$

và $\overrightarrow{M_1M_2} = (2;3;2)$

• Suy ra, $[\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2} = 5.2 - 4.3 + 1.2 = 0$, do đó $d_1$ và $d_2$ cắt nhau.

b/ Mặt phẳng (P) chứa $d_1$ và $d_2$.

• Điểm trên (P): $M_1(1;-2;3)$

• vtpt của (P): $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (5;-4;1)$

• Vậy, PTTQ của mp(P) là: $5(x-1) - 4(y+2) + 1(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow 5x - 4y + z - 16 = 0$$

• Khoảng cách từ điểm A đến mp(P) là:

$$d(A,(P)) = \frac{|5.(-3) - 4.2 + (-3) - 16|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{42}{\sqrt{42}} = \sqrt{42}$$

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4z - 7 = 0$ và mặt phẳng (α) : x - 2y + 2z + 3 = 0

a. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (α).

b. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

a. (S) có tâm I(2;-1;-2) và bán kính R=4

Do đó d(I,($\alpha$))=1

b. Viết phương trinh mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Vì mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) nên pt của (β) có dạng

x-2y+2z+D=0

Ta có d(I, (β))=R

$\Leftrightarrow \frac{|D|}{3}=4 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=12 \\ D=-12 \end{array}\right.$

Vậy (β) có pt là x-2y+2z+12=0 hoặc x-2y+2z-12=0

**Câu 3.** Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;3;-1)$, $B(-1;1;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB và tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho CAB là tam giác cân tại C.

Tọa độ trung điểm M của đoạn AB: $M(0;2;1)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;4)$

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB đi qua M, nhận $\vec{n}=(1;1;-2)$ làm VTPT nên có phương trình:

$x+y-2-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-2z=0$

$\Delta CAB$ cân tại C $\Leftrightarrow CA=CB \Leftrightarrow C\in(P)$

Vậy C là giao điểm của d với (P), tọa độ C là nghiệm: $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1} \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow C(-6;4;-1)$

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S)$: $x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z-7=0$ , đường thẳng d : $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua tâm của mặt cầu (S), cắt và vuông góc với đường thẳng d.

d có một vtcp $\vec{u}=(1;2;-1)$ , (S) có tâm I(2;-1;-2) và bán kính R=4

Vì (P) vuông góc với d nên (P) nhận $\vec{u}=(1;2;-1)$ làm vtpt .Do đó pt của (P) có dạng

x+2y-z+D=0

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên ta có

d(I,(P))=R$\Leftrightarrow \frac{|2+D|}{\sqrt{6}}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-2+4\sqrt{6} \\ D=-2-4\sqrt{6} \end{array}\right.$

Vậy pt của (P) là x+2y-z-2+$4\sqrt{6}$=0 hoặc x+2y-z-2-$4\sqrt{6}$=0

Pt của d được viết dưới dạng tham số $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$

Gọi d' là đt cần tìm,và H(t ;1+2t ;2-t) là giao điểm của d và d'

Ta có $\overrightarrow{IH}=(t-2;2+2t;4-t)$

Và $\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0$ ⇔t-2+2(2+2t)-(4-t)=0⇔t=1/3

Vậy H(1/3 ;5/3 ;5/3)

Do đó d' đi qua 2 điểm I(2;-1;2) và H(1/3 ;5/3 ;5/3)

Vậy pt đt cần tìm $\begin{cases} x=2-5t \\ y=-1+8t \\ z=-2+11t \end{cases}$

**Câu 5.** Trong không gian tọa độ Oxyz , cho $A(1;1;1), B(2;1;0), C(2;0;2)$. Viết phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua hai điểm B, C và cách A một khoảng lớn nhất.

Lập luận để được mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng qua BC và vuông góc với (ABC)

$\overrightarrow{BC}=(0;-1;2), \overrightarrow{AB}=(1;0;-1)$.Vectơ pháp tuyến của (ABC) là: $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right]=(1;2;1)$

Suy ra VTPT của $(\alpha)$ là : $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{n_{(ABC)}}\right]=(-5;2;1)$

Pt $(\alpha)$: $-5x+2y+z+8=0$

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1;-1;2), B(3;0;-4)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\overrightarrow{AB}=(2;1;-6)$ là vtcp của đường thẳng AB.

Ptts AB: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=2-6t \end{cases} \quad (t\in R)$

Gọi M là giao điểm của AB và (P). Khi đó $M(1+2t;-1+t;2-6t)$ .

$M\in(P)\Rightarrow(1+2t)-2(-1+t)+2(2-6t)-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow M\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{6};1\right)$

Vtpt $\vec{n}_{(Q)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(-10;-10;-5)$.

$(Q): 2x+2y+z-2=0.$

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

(S) có tâm I(1; –2; –1), bán kính R = 3. (Q) chứa Ox $\Rightarrow$ (Q): ay + bz = 0.

Mặt khác đường tròn thiết diện có bán kính bằng 3 cho nên (Q) đi qua tâm I.

Suy ra: $-2a - b = 0 \Leftrightarrow b = -2a \quad (a \neq 0) \Rightarrow$ (Q): $y - 2z = 0$.

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2;-1;2),\ B(0;0;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d và phương trình mặt cầu có tâm B, tiếp xúc với (P).

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-2;2;1)$

$(P) \perp d \Rightarrow$ (P) nhận $\vec{u} = (-2;2;1)$ là véc tơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Phương trình của $(P): -2(x-2) + 2(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y + z + 4 = 0$

Gọi (S) là mặt cầu tâm B, có bán kính là $R$

Ta có (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $R = d(B;(P)) = 2$

$\Rightarrow$ phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

**Câu 9.** Trong không gian Oxyz ,cho điểm M(0;2;0) và hai đường thẳng $d_1; d_2$ có phương trình: $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$; $d_2: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M , song song với trục Ox , sao cho (P) cắt hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt tại A, B sao cho AB = 1 .

Giả sử có mặt phẳng (P) thỏa yêu cầu đề bài

$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2t; 2-2t; -1+t)$

$B \in d_2 \Rightarrow B(3+2l; -1-2l; l)$

$\overrightarrow{AB} = (2(l-t)+2; -2(l-t)-3; (l-t)+1)$

$$AB^2 = 9(l-t)^2 + 22(l-t) + 14 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l-t = -1 \\ l-t = -\dfrac{13}{9} \end{array}\right.$$

*$l-t=-1$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0;-1;0)\Rightarrow VTPT\ \vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{i}\right]=(0;0;1)$

Pt mặt phẳng (P): z = 0 ( loại vì (P) chứa Ox)

*$l-t=-13/9$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\frac{-8}{9};\frac{-1}{9};\frac{-4}{9}\right)\Rightarrow VTPT\ \vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{i}\right]=\left(0;-\frac{4}{9};\frac{1}{9}\right)$

Pt mặt phẳng (P): - 4 y + z + 8 = 0 ( thỏa đề bài nhận)

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ và mặt phẳng (P): x + y + z + 2015 = 0

a) Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính của mặt cầu (S). Viết phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với mặt phẳng (P)

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) và tiếp xúc (S)

(S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ và (P): x + y + z + 2015 = 0

a) (S) có tâm I(1; -2; 3) và R = 4

(D) qua I(1; -2; 3) và có VTCP $\vec{u}$ = (1; 1; 1;) có ptts : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3+t \end{cases}$

b) (Q)// (P) => (Q): x + y + z + D = 0 (D ≠ 2015)

$d\left(I,(Q)\right)=4\Leftrightarrow D=-2\pm 4\sqrt{3}$

Vậy (Q) : x + y + z $-2\pm 4\sqrt{3}=0$

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-3}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-5}$. Tìm tọa độ giao điểm của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ và viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng $\Delta_2$ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $\Delta_1$ lên mặt phẳng (P).

Viết lại $\Delta_1$ và $\Delta_2$ dưới dạng tham số

Giải hệ phương trình tìm được giao điểm A(3; 0; 2)

Đường thẳng $\Delta_1$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;2)$

Đường thẳng $\Delta_2$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(6;4;-5)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $\Delta_1, \Delta_2$ thì (Q) có VTPT là $\vec{n} = \left[\vec{u_1}, \vec{u_2}\right] = (7;22;26)$

Vì $\Delta_2$ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $\Delta_1$ lên mặt phẳng (P) $\Rightarrow$(P) chứa $\Delta_2$ và $(P) \perp (Q)$

Do đó (P) cũng đi qua A và có VTPT là $\vec{n_1} = \left[\vec{n}, \vec{u_2}\right] = (-214;191;-104)$

(P) có phương trình là: $-214x + 191y - 104z + 850 = 0$

**Câu 12.** Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(2;3;0), B(0;1-2), C(1,4,-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa B, C và song song với đường thẳng OA. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

Theo đề bài mặt phẳng (P) có VTPT $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BC} = (1;3;1) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{OA} = (2;3;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OA}\right] = (-3;2;-3)$

mp(P)có VTPT $\vec{n}$ và qua B suy ra $(P): -3(x-0) + 2(y-1) - 3(z+2) = 0$
$\Leftrightarrow -3x + 2y - 3z - 8 = 0$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (4;0;-4) \Rightarrow S_{ABC} = 2\sqrt{2}$

$d(A, BC) = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \dfrac{4\sqrt{22}}{11}$

**Câu 13.** Trong không gian Oxyz cho điểm A(3; -2; -2) và mặt phẳng $(P): x - y - z + 1 = 0$.

a) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mp (P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, vuông góc với mp (P) biết rằng mp (Q) cắt hai trục Oy, Oz lần lượt tại điểm phân biệt M và N sao cho OM = ON.

a) Vì (S) có tâm A và tiếp xúc (P) nên bán kính của (S) là R = d(a, (P)) = $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Vậy pt của (S) là: $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \dfrac{64}{3}$

b) Gọi $\vec{n_Q}$ là VTPTcủa (Q), $\vec{n_P}$ = (1;-1;-1) là VTPT của (P). Khi đó $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P}$ Mp(Q) cắt hai trục Oy và Oz tại $M(0;a;0), N(0;0;b)$ phân biệt sao cho

OM = ON nên $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \neq 0 \\ a = -b \neq 0 \end{array}\right.$

+ a = b thì $\overrightarrow{MN} = (0;-a;a) \nearrow\swarrow \vec{u}(0;-1;1)$ và $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u}$ => $\overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{n_P}\right] = (2;1;1)$. Khi đó mp

(Q): $2x+y+z-2=0$ và $M(0;2;0)$ ; $N(0;0;2)$ (thỏa mãn)

+ a = - b thì $\overrightarrow{MN}=(0;-a;-a)\nearrow\swarrow\vec{u}(0;1;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}\perp\vec{u}$ => $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;1;-1)$

Khi đó mp (Q): $y-z=0$ và $M(0;0;0)$ và $N(0;0;0)$ (loại).

Vậy $(Q):2x+y+z-2=0$.

**Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(10; 2; -1) và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu của A trên d, mặt phẳng (P) đi qua A và (P)//d, khi đó khoảng cách giữa d và (P) là khoảng cách từ H đến (P).

Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có $AH\geq HI$ => HI lớn nhất khi $A\equiv I$
Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm véc tơ pháp tuyến.
$H\in d\Rightarrow H(1+2t;t;1+3t)$ vì H là hình chiếu của A trên d nên
$AH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ($\vec{u}=(2;1;3)$ là véc tơ chỉ phương của d) $\Rightarrow H(3;1;4)\Rightarrow\overrightarrow{AH}(-7;-1;5)$
Vậy (P): 7(x – 10) + (y – 2) – 5(z + 1) = 0
$\Leftrightarrow$ 7x + y -5z -77 = 0

**Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz , cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-2=0$ . Lập phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa truc Oy và cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn có bán kính $r=2\sqrt{3}$.

$(S):x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-2=0\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16$
$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(2;-3;1)$ bán kính $R=4$ ; trục Oy có VTCP $\vec{j}=(0;1;0)$
Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là VTPT mp(P) ,
$(P)$ chứa Oy $\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{j}\Rightarrow b=0\ \Rightarrow\vec{n}=(a;0;c)\ (a^2+c^2\neq0)$
Phương trình mp(P): $ax+cz=0$
(P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kinh $r=2\sqrt{3}$
$\Rightarrow d\left[I,(P)\right]=\sqrt{R^2-r^2}=2\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+c^2}}=2\Leftrightarrow4a^2+4ac+c^2=4a^2+4c^2$
$\Leftrightarrow3c^2-4ac=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\3c=4a\end{array}\right.$
Vậy phương trình mp(P) : $x=0$ hoặc $3x+4z=0$.

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(1;-1;1) và hai đường thẳng $(d):\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-3}$ và $(d'):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{5}$. Chứng minh: điểm M, (d), (d') cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

*(d) đi qua $M_1(0;-1;0)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;-3)$

(d') đi qua $M_2(0;1;4)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}=(1;2;5)$

*Ta có $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-4;-8;4)\neq\vec{O}$ , $\overrightarrow{M_1M_2}=(0;2;4)$

Xét $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=-16+14=0$

⇨ (d) và (d') đồng phẳng .

*Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d) và (d') => (P) có vtpt $\vec{n}=(1;2;-1)$ và đi qua $M_1$ nên có phương trình $x+2y-z+2=0$

*Dễ thấy điểm M(1;-1;1) thuộc mf(P) , từ đó ta có đpcm

**Câu 17** Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$.

a) Xác định tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S).

b) Viết phương trình mp(P) tiếp xúc với mặt cầu tại M(1;1;1).

a.Từ phương trình mặt cầu ta có: $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=6\\-2c=-8\\d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=4\\d=1\end{cases}$

Tọa độ tâm I(1; -3; 4).

Bán kính: $r=\sqrt{1+9+16-1}=5$

Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M nên IM vuông với mp.

$\overrightarrow{IM}=(0;4;-3)$

Mp(P) qua M(1;1;1), có VTPT $\overrightarrow{IM}=(0;4;-3)$ có phương trình:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Leftrightarrow 0(x-1)+4(y-1)-3(z-1)=0\Leftrightarrow 4y-3z-1=0$$

**Câu 18.** Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai điểm A(1; −1; 1), B(2; 2; 2), mặt phẳng (P): x + y − z + 1 = 0 và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 − 2x + 8z − 7 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với đường thẳng AB, vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (S) theo một đường tròn (C) sao cho diện tích hình tròn (C) bằng 18π.

Mp(Q) // AB, (Q) ⊥ (P), cắt (S) theo đường tròn có bán kính $3\sqrt{2}$.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 − 2x + 8z − 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 24$.

Suy ra (S) có tâm I(1 ; 0 ; − 4), bán kính R = $2\sqrt{6}$ .

Gọi $\vec{n}_P$ , $\vec{n}_Q$ lần lượt là vecto pháp tuyến của mp(P), mp(Q). Ta có

$\vec{n}_P$ = (1; 1; −1), $\overrightarrow{AB}$ = (1; 3; 1), [$\vec{n}_P$ , $\overrightarrow{AB}$ ] = (4; − 2; 2) $\neq \vec{0}$ .

Ta có $\begin{cases}(Q)//AB\\(Q)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}_Q\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{n}_Q\perp\vec{n}_P\end{cases}$ nên có thể chọn $\vec{n}_Q = \frac{1}{2}[\vec{n}_P , \overrightarrow{AB}]$

Hay $\vec{n}_Q$ = (2; −1; 1). Suy ra pt mp(Q): 2x − y + z + d = 0

Gọi r, d lần lượt là bán kính của (C), khoảng cách từ tâm I của (S) đến mp(Q).

Ta có diện tích hình tròn (C) bằng 18π nên $r^2$ = 18.

Do đó $d^2 = R^2 - r^2 = 24 - 18 = 6 \Rightarrow d = \sqrt{6}$ .

Ta có d = $\sqrt{6}$ $\Leftrightarrow$ |d −2| = 6 $\Leftrightarrow$ d = 8 hoặc d = − 4.

Từ đó, có 2 mp là ($Q_1$): 2x − y + z + 8 = 0, ($Q_2$): 2x − y + z − 4 = 0

Mp(Q) có pt trên có thể chứa AB.

Kiểm tra trực tiếp thấy

A(1; −1; 1) $\notin$ ($Q_1$) nên AB // ($Q_1$); A(1; −1; 1) $\in$ ($Q_2$) nên AB $\subset$ ($Q_2$).

KL: pt mp(Q): 2x − y + z + 8 = 0.

## 9.4. Phương trình mặt cầu

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(0;0;-3), B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x-y-z+1=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng AB, bán kính bằng $2\sqrt{11}$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Đường thẳng AB đi qua A(0;0;-3) có VTCP $\overrightarrow{AB}=(2;0;2)$

Nên phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-3+2t \end{cases}$

Gọi I là tâm của mặt cầu thì I(2t;0;-3+2t).

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi:

$$d(I;(P))=2\sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{|6t-(-3+2t)+1|}{\sqrt{11}}=2\sqrt{11}$$

$$\Leftrightarrow |4t+4|=22 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4t+4=22 \\ 4t+4=-22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{2} \\ t=-\frac{13}{2} \end{array}\right.$$

$t=\frac{9}{2} \Rightarrow I(9;0;6)$. Phương trình mặt cầu $(S): (x-9)^2+y^2+(z-6)^2=44$

$t=-\frac{13}{2} \Rightarrow (I-13;0;-16)$ Phương trình $(S)=(x+13)^2+y^2+(z+16)^2=44$

**Câu 2.** Trong không gian Oxyz, cho 4 điểm $A(-1;1;1), B(5;1;-1), C(2;5;2), D(0;-3;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm D, tiếp xúc với mặt phẳng (ABC).Viết phương trình mp tiếp diện với mặt cầu (S) song song với mp(ABC).

•Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;0;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;4;1)$

$\Rightarrow$ vtpt của mp(ABC): $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}6 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right)=(8;-12;24)$

• PTTQ của mp(ABC): $8(x+1)-12(y-1)+24(z-1)=0$

$$8x-12y+24z-4=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z-1=0$$

**- Mặt cầu $(S)$ có tâm D, tiếp xúc mp(ABC)**

•Tâm của mặt cầu: $A(0;-3;1)$

• Bán kính mặt cầu: $R=d(D,(ABC))=\frac{|2.0-3.(-3)+6.1-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{14}{7}=2$

• Phương trình mặt cầu $(S): x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$

• **Gọi (P) là tiếp diện của $(S)$ song song với mp(ABC) thì (P) có phương trình**

$$2x-3y+6z+D'=0 \ (D' \neq -1)$$

• Vì (P) tiếp xúc với $(S)$ nên $d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2.0-3.(-3)+6.1+D'|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = 2$

$$\Leftrightarrow |15+D'| = 14 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 15+D' = 14 \\ 15+D' = -14 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D' = -1 \ \text{(loai)} \\ D' = -29 \,(\text{nhan}) \end{bmatrix}$$

• Vậy, phương trình mp(P) cần tìm là: $2x-3y+6z-29=0$

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+6}{-1}$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-6=0$, $(Q): 2x+y-2z-7=0$. Viết phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm thuộc $\Delta$ đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)$, $(Q)$.

Gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)$, khi đó $I(t;3+t;-6-t)$.

$d(I;(P)) = \dfrac{|5t+12|}{3}, d(I;(Q)) = \dfrac{|5t+8|}{3}$, theo giả thiết $\dfrac{|5t+12|}{3} = \dfrac{|5t+8|}{3}$

$\Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow I(-2;1;-4), R = \dfrac{2}{3}$.

Mặt cầu $(S)$: $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = \dfrac{4}{9}$.

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-6=0$. Tìm tọa độ giao điểm của d với (P) và viết phương trình mặt cầu (S) đi qua A, có tâm thuộc d đồng thời tiếp xúc với (P).

d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 4-t \\ z = -2t \end{cases}$.

Gọi $B = d \cap (P)$, do $B \in d$ nên $B(-1+2t;4-t;-2t)$

Do $B \in (P)$ nên $2(-1+2t)-2(4-t)-2t-6=0 \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow B(7;0;-8)$

Gọi I là tâm mặt cầu (S), do I thuộc d nên $I(-1+2a;4-a;-2a)$

Theo bài ra thì (S) có bán kính $R = IA = d(I,(P))$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-2a)^2+(a-1)^2+(2+2a)^2} = \frac{|2(-1+2a)-2(4-a)-2a-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9a^2-2a+9} = \frac{|4a-16|}{3}$$

$\Leftrightarrow 9(9a^2-2a+9)=(4a-16)^2 \Leftrightarrow 65a^2+110a-175=0 \Leftrightarrow a=1; a=-\frac{35}{13}$.

+) Với $a=1 \Rightarrow I=(1;3;-2), R=4 \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=16$

+) Với $a=-\frac{35}{13} \Rightarrow I=\left(-\frac{83}{13};\frac{87}{13};\frac{70}{13}\right); R=\frac{116}{13}$

$\Rightarrow (S):\left(x+\frac{83}{13}\right)^2+\left(y-\frac{87}{13}\right)^2+\left(z-\frac{70}{13}\right)^2=\frac{13456}{169}$

**Câu 5.** Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mp(P): x + y + z – 3 = 0 và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$; $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{5}$

Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc $d_1$, tiếp xúc với $d_2$ và cắt mp(P) theoo một đường tròn có bán kính r = $\sqrt{3}$ ,biết rằng tâm mặt cầu có cao độ dương

$d_2$ qua A(2;1;-1) có vtcp $\overrightarrow{u_{d_2}}=(1;2;5)$

- $I\in d_1 \Rightarrow I(-1+2t;-2+t;1-t)$
- $\overrightarrow{AI}=(2t-3;t-3;2-t), \left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7t-19;-11t+17;3t-3)$
- $d_{(I,d_2)}=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{u_{d_2}}\right|}=\frac{\sqrt{179t^2-658t+659}}{\sqrt{30}}$
- $d_2$ tiếp xúc với (S) nên $d_{(I,d_2)}=R \Leftrightarrow \frac{\sqrt{179t^2-658t+659}}{\sqrt{30}}=R(1)$
- $d_{(I,P)}=\frac{|2t-5|}{\sqrt{3}}$
- Ta có: $R^2=d_{(I,P)}^2+r^2 \Leftrightarrow R^2=\left(\frac{|2t-5|}{\sqrt{3}}\right)^2+3 \Leftrightarrow R^2=\frac{4t^2-20t+34}{3} \Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{4t^2-20t+34}{3}}$ (2)
- Từ (1) và (2), ta có: $\frac{179t^2-658t+659}{30}=\frac{4t^2-20t+34}{3} \Leftrightarrow 139t^2-458t+319=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{319}{139} \end{array}\right.$

Suy ra: I(1;-1;0) (nhận) hoặc $I\left(\frac{599}{139};\frac{41}{139};\frac{-180}{139}\right)$ (loại do $z_I > 0$)

- Với I(1;-1;0) $\Rightarrow R=\sqrt{6} \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$

Kết luận: phương trình mặt cầu cần tìm là $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2;1;1) và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) và tìm tọa độ các giao điểm của mặt cầu đó với trục Ox.

+) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính

$R = d(A,(P)) = \dfrac{|4-1+2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 2$

+) Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

+) Tọa độ giao điểm của mặt cầu và trục Ox là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{2} \\ x = 2-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

+) Các giao điểm: $M(2+\sqrt{2};0;0),\ N(2-\sqrt{2};0;0).$

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục 0xyz, cho hai điểm A(1; -2; 3), B(-1; 0; 1) và mặt phẳng (P): x + y + z + 4 = 0. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) và viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng AB, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P), $\overrightarrow{AH} = (x-1;y+2;z-3)$

AH có ptts là : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = 3+t \end{cases}$

+ $H \in AH$ nên $H(1+t;-2+t;3+t)$

Mặt khác: H∈(P) nên suy ra: $1+t-2+t+3+t+4=0 \Leftrightarrow t=-2$

Vậy H(-1;-4;1)

+ Đường thẳng AB có ptts là : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -2+2t \\ z = 3-2t \end{cases}$

+Gọi I là tâm mặt cầu (S):

$I \in AB \Rightarrow I(1-2t;-2+2t;3-2t)$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) có bán kính R=1 nên : d(I,(P))=1

$$\Leftrightarrow |6-2t| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ t = 3+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy có hai phương trình mặt cấu cần tìm là :

$$\left(x+5-\sqrt{3}\right)^2+\left(y-4+\sqrt{3}\right)^2+\left(z+3-\sqrt{3}\right)^2=1$$

và $\left(x+5+\sqrt{3}\right)^2+\left(y-4-\sqrt{3}\right)^2+\left(z+3+\sqrt{3}\right)^2=1.$

**Câu 8.** Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có A(1;1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2) và A'(2; 2; 1). Tìm tọa độ các đỉnh B', C' và viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, A'.

- Do ABC.A'B'C' là hình lăng trụ nên $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow B'(2;3;1)$

Tương tự: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'(2;2;2)$

- Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm dạng

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, a^2+b^2+c^2-d>0$$

Do A, B, C và A' thuộc mặt cầu (S) nên:

$$\begin{cases} 2a+2b+2c+d=-3 \\ 2a+4b+2c+d=-6 \\ 2a+2b+4c+d=-6 \\ 4a+4b+2c+d=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=-\dfrac{3}{2} \\ d=6 \end{cases}$$

- Do đó phương trình mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(2;1;-3), B(4;3;-2), C(6;-4;-1). Chứng minh rằng A, B,C là ba đỉnh của một tam giác vuông và viết phương trình mặt cầu tâm A đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2;2;1); \overrightarrow{AC}(4;-5;2) \Rightarrow \frac{2}{4} \neq \frac{2}{-5} \Rightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Rightarrow$ A; B; C lập

thành tam giác. Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2.4 + 2.(-5) + 1.2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$ suy ra ba điểm A; B; C là ba đỉnh của tam giác vuông.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên G(4;0; -2). Ta có: $AG = \sqrt{6}$

Mặt cầu cần tìm có tâm A và bán kính $AG = \sqrt{6}$ nên có pt: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 6$

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 4 điểm A(1; 1; 0); B(1; 0; 2); C(2;0; 1), D(-1; 0; -3). Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh của một hình chóp và viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-1;2); \overrightarrow{AC} = (1;-1;1); \overrightarrow{AD} = (-2;-1;-3)$.

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1;2;1); \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -7$

Do $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -7 \neq 0$, nên 3 véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng suy ra A, B, C, D là 4 đỉnh của một hình chóp.

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

( với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ).

Do mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D nên ta có hệ $\begin{cases} 2a + 2b + d = -2 \\ 2a + 4c + d = -5 \\ 4a + 2c + d = -5 \\ -2a - 6c + d = -10 \end{cases}$

Giải hệ suy ra $a = \frac{5}{14}; b = \frac{31}{14}; c = \frac{5}{14}; d = -\frac{50}{7}$

Vậy phương trình mc là: $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{5}{7}x + \frac{31}{7}y + \frac{5}{7}z - \frac{50}{7} = 0$.

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;4)$, $B(1;0;0)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB và tìm điểm M trên tia Oy sao cho $MA = MB\sqrt{13}$.

+ Gọi $(S)$ là mặt cầu có đường kính AB và I là trung điểm của AB.

Ta có $I(-1;0;2)$, $AB = 4\sqrt{2}$

Khi đó mặt cầu $(S)$ có tâm I và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình

$(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$

$+ M \in Oy \Rightarrow M\left(0;t;0\right)$

khi đó

$MA = MB\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{\left(-3\right)^2 + \left(-t\right)^2 + 4^2} = \sqrt{1^2 + \left(-t\right)^2 + 0^2}.\sqrt{13} \Leftrightarrow 25 + t^2 = 13\left(1 + t^2\right) \Leftrightarrow t = \pm 1$

Với $t = 1 \Rightarrow M\left(0;1;0\right)$

$t = -1 \Rightarrow M\left(0;-1;0\right)$

**Câu 12.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x - y - 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A\left(2;0;0\right), B\left(3;-1;2\right)$. Viết phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ tâm $I$ thuộc mặt phẳng $\left(P\right)$ và đi qua các điểm $A, B$ và điểm gốc toạ độ $O$.

Giả sử $I\left(x,y,z\right)$. Ta có $I \in \left(P\right) \Rightarrow x - y - 2z - 1 = 0 \qquad \left(1\right)$

Do $A, B, O \in \left(S\right) \Rightarrow IA = IB = IO$. Suy ra $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \Rightarrow I\left(1;-2;1\right) \\ z = 1 \end{cases}$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{6}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $\boxed{\left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 + \left(z-1\right)^2 = 6}$

# PHẦN 10. PHƯƠNG TRÌNH – BPT – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## 10.1. Phương trình

**Câu 1.** Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x^2-3x+5}=3x+7.$

Ta đặt $\sqrt{x^2-3x+5}=t\ \ (t\ge 0)$

Ta được $t^2+t-12=0$ , giải được t = 3 , t = -4 ( loại)

Với t = 3 , giải tìm được : $x=-1,\ \ x=4.$

**Câu 2.** Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

+ ĐK: $x\in[2;4]$

+ Áp dụng BĐT Cauchy $\begin{cases}\sqrt{x-2}\le\dfrac{x-2+1}{2}\\ \sqrt{4-x}\le\dfrac{4-x+1}{2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$

Dấu "="khi $\begin{cases}x-2=1\\ 4-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$

Mặt khác $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge 2$ dấu "="xảy ra khi x=3

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3.$

**Câu 3.** Giải phương trình: $4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$

ĐK: $x\le 5$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4\left(4+\sqrt[3]{9x-37}\right)+8\left(4-\sqrt{10-2x}\right)+4x^2-15x-81=0$

$$\Leftrightarrow\frac{4(27+9x)}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\frac{8(6+2x)}{4+\sqrt{10-2x}}+(x+3)(4x-27)=0$$

- TH1 $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ (TMPT)

- TH 2. $x\ne -3$

phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\dfrac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+4x-27=0$

$$\Leftrightarrow\frac{36}{12+\left(\sqrt[3]{9x-37}-2\right)^2}+\frac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+4x-27=0$$

Do $x\le 5$ nên $VT\le\dfrac{36}{12}+\dfrac{16}{4}+4.5-27=0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=5$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=-3,\ \ x=5.$

**Câu 4.** Giải phương trình: $\sqrt{x^4+x^2+1}+x=\sqrt{x(1-x^2)}$

ĐK: $\left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right.$

TH1: Với x = 0 không phải nghiệm của phương trình

TH2: Với $x\neq 0$.

* Với $0<x\le 1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2+1}+x=x\sqrt{\frac{1}{x}-x}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2+1}+1=\sqrt{\frac{1}{x}-x}$

Đặt $t=\sqrt{\frac{1}{x}-x}\Rightarrow t^4=\frac{1}{x^2}+x^2-2$. Khi đó ta được phương trình $\sqrt{t^2+3}+1=t\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ t^4-t^2+2t+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow t=-1(loai)$

* Với $x\le -1$. Ta có $-\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2+1}+1=-\sqrt{\frac{1}{x}-x}$

Đặt $t=\sqrt{\frac{1}{x}-x}\Rightarrow t^4=\frac{1}{x^2}+x^2-2$. Khi đó ta được $\sqrt{t^4+3}=t+1\Leftrightarrow t=1$

Khi đó ta được $x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

So sánh đk ta được nghiệm $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 5.** Giải phương trình: $\left(x+\sqrt{x-4}\right)^2+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+2x+\sqrt{x-4}=50.$

Điều kiện $x\ge 4$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x-4}\right)^2+\sqrt{x-4}+2+2x+\sqrt{x-4}=50$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x-4}\right)^2+2\left(x+\sqrt{x-4}\right)-48=0$

Giải phương trình: $x+\sqrt{x-4}=5\Rightarrow x=5.$

**Câu 6**. Giải phương trình: $x\sqrt{x-1}=\left(2x-3\right)^2\left(2x-2\right)+x-2.$

TXĐ D = $\left[1;+\infty\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-1}+(x-1)+\sqrt{x-1}=(2x-3)^3+(2x-3)^2+2x-3$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+2t+1\Rightarrow f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f(\sqrt{x-1}) = f(2x-3)$. Từ hai điều trên phương trình (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2x-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3/2 \\ x-1 = 4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3/2 \\ 4x^2-13x+10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

**Câu 7.** Giải phương trình: $4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2+8$ trên tập số thực.

$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2+8$

$pt \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+2} - \frac{x+4}{3}\right) + \sqrt{22-3x} + \frac{x-14}{3} = x^2-x-2$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{4}{9}\left(-x^2+x+2\right)}{\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}} + \frac{-\frac{1}{9}\left(-x^2+x+2\right)}{\sqrt{22-3x}-\frac{x-14}{3}} = x^2-x-2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \quad (1) \\ \dfrac{-\frac{4}{9}}{\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}} + \dfrac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{22-3x}-\frac{x-14}{3}} = 1 \quad (2) \end{array}\right.$ với đk $\begin{cases} x \ge -2 \\ x \le \frac{22}{3} \end{cases}$

Chứng minh được vế trái âm suy ra pt(2) vô nghiệm

Kết luận phương trình có 2 nghiệm $x=-1,\ x=2$.

**Câu 8.** Giải phương trình:

$$\frac{2x^5+3x^4-14x^3}{\sqrt{x+2}} = \left(4x^4+14x^3+3x^2+2\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$$

Điền kiện: $x > -2$ (*).

PT $\Leftrightarrow x^3(2x^2+3x-14) = (4x^4+14x^3+3x^2+2)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (4x^4+14x^3+3x^2+2)(x+2-4)$

$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (4x^4+14x^3+3x^2+2)(x-2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \ \text{(thỏa mãn (*))} \\ x^3(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = 4x^4+14x^3+3x^2+2 \quad (1) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2} + 4x^4+14x^3 = 4x^4+14x^3+3x^2+2$

$\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2} = 3x^2+2$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x \ne 0$.

Khi đó, PT $\Leftrightarrow (2x+4+3)\sqrt{x+2} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+2} = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}$ (2)

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+3t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=6t^2+3>0 \quad \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\sqrt{x+2}=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x+1)(x^2+x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x=2.$

**Câu 9.** Giải phương trình sau trên tập số thực

$$\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}.$$

Điều kiện $x\geq 7$

Phương trình tương đương $\sqrt{7x^2+25x+19}=7\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-2x-35}$.

Bình phương 2 vế suy ra: $3x^2-11x-22=7\sqrt{(x+2)(x+5)(x-7)}$

$$3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{(x+5)(x^2-5x-14)}$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-5x-14};b=\sqrt{x+5}$.( a ,b ≥ 0) Khi đó ta có phương trình

$3a^2+4b^2=7ab\Leftrightarrow 3a^2-7ab+4b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 3a=4b \end{array}\right.$

Với a = b suy ra $x=3+2\sqrt{7}\,(t/m);\ x=3-2\sqrt{7}\,(l)$.

Với 3a = 4b suy ra $x=\frac{61+\sqrt{11137}}{18}(t/m);\ x=\frac{61-\sqrt{11137}}{18}(l)$.

Đs: $x=3+2\sqrt{7},\ x=\frac{61+\sqrt{111237}}{18}$.

**Câu 10.** Giải phương trình: $2x^2-15x+34=3\sqrt[3]{4x-8}\,(1).$

Ta có $2x^2-15x+34>0\Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-8}>0\Rightarrow x>2$

**Cách 1**:(Liên hợp thành phần)

$$(1)\Leftrightarrow 2x^2-15x+28=3\left(\sqrt[3]{4x-8}-2\right)\Leftrightarrow (x-4)(2x-7)=\frac{12(x-4)}{\sqrt[3]{(4x-8)^2}+2\sqrt[3]{4x-8}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ (2x-7)-\frac{12}{\sqrt[3]{(4x-8)^2}+2\sqrt[3]{4x-8}+4}=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

+ Nếu $x>4\Rightarrow VT(*)>0\Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm

+ Nếu $x<4\Rightarrow VT(*)<0\Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm

+ Nếu $x=4$. Thỏa mãn phương trình (*)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

**Cách 2**:(Liên hợp hoàn toàn)

$(1)\Leftrightarrow 2x^2-16x+32=3\sqrt[3]{4x-8}-(x+2)$

$\Leftrightarrow 2(x-4)^2+\dfrac{(x-4)^2(x+14)}{9\sqrt[3]{(4x-8)^2}+3\sqrt[3]{4x-8}(x+2)+(x+2)^2}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ 2+\dfrac{(x+14)}{9\sqrt[3]{(4x-8)^2}+3\sqrt[3]{4x-8}(x+2)+(x+2)^2}=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

**Cách 3**:(Phương pháp đánh giá)

Ta có: $3\sqrt[3]{(4x-8).8.8}\le 4x+8\Rightarrow \sqrt[3]{(4x-8)}\le x+2$ ( Theo bất đẳng thức Cô si)

Do đó $2x^2-15x+34\le x+2\Leftrightarrow 2(x-4)^2\le 0\Leftrightarrow x=4$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4.$

**Câu 11.** Giải phương trình: $2(x-2)\left(\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}\right)=3x-1\ (x\in\mathbb{R})$.

Điều kiện xác định: $x\ge\dfrac{5}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}=\dfrac{3x-1}{2x-4} \quad \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}-\dfrac{3x-1}{2x-4}=0$

Đặt $f(x)=\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5}-\dfrac{3x-1}{2x-4}$ với x thuộc $\left[\dfrac{5}{2};-\infty\right)$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}}+\dfrac{10}{(2x-4)^2}>0$ với $\forall x>\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow$hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{5}{2};-\infty\right)$.

$\Rightarrow$phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm (1)

Ta có $f(3)=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3.$

**Câu 12.** Giải phương trình: $4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x+4x^2-2x^3-x^4$

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1},\ t\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$4t=-t^4+7t^2-5\Leftrightarrow t^4-6t^2+9-\left(t^2-4t+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t^2-3\right)^2-\left(t-2\right)^2=0\Leftrightarrow\left(t^2-t-1\right)\left(t^2+t-5\right)=0\,(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-t-1=0\\t^2+t-5=0\end{array}\right.$

• Với $t\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t^2-t-1=0$ có một nghiệm là $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

• Với $t\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t^2+t-5=0$ có một nghiệm là $t=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

• Khi $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x^2+x+1=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow 2x^2+2x-1-\sqrt{5}=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

•Khi $t=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ thì $x^2+x+1=\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2\Leftrightarrow 2x^2+2x-9+\sqrt{21}=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{-1-\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}$.

**Câu 13.** Giải phương trình: $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$ (1)

- TXĐ: $D=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$
- Ta có: $(1)\Leftrightarrow(2x)^3+2x=\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+\sqrt{2x+1}$ (2)
- Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$, khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow f(2x)=f\left(\sqrt{2x+1}\right)\quad(3)$$

- Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $f$ trên $\mathbb{R}$

  Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\quad\forall t\in\mathbb{R}$

  Do đó $f$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
- Suy ra: $(3)\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Câu 14.** Giải phương trình: $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$ (1)

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)$ (2)

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ với $t\in\mathbb{R}$, khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x) \quad (3)$$

Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $f$ trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

Do đó $f$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra: $(3)\Leftrightarrow 2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$ 8

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x=-\dfrac{1}{5}$.

**Câu 15.** Giải phương trình: $\sqrt{2x+15}=32x^2+32x-20$ (1)

Điều kiện: $2x+15\geq 0\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{15}{2}$

Phương trình (1) viết lại thành: $2\ 4x+2\ ^2=\sqrt{2x+15}+28$

Đặt $\sqrt{2x+15}=4y+2\ \left(y\geq-\dfrac{1}{2}\right)$, ta được hệ phương trình: $\begin{cases}4y+2\ ^2=2x+15 & (2)\\ 4x+2\ ^2=2y+15 & (3)\end{cases}$

Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được:

$$4y+4x+4\ \ 4y-4x\ =2\ \ x-y\ \ \Leftrightarrow\ \ x-y\ \left[1+8\ \ x+y+1\ \right]=0$$

+ Khi $x=y$, thay vào (3) ta được:

$$4x+2\ ^2=2x+15\Leftrightarrow 16x^2+14x-11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{11}{8}\end{array}\right.$$

So với điều kiện của $x$ và $y$ ta chọn $x=\dfrac{1}{2}$.

+ Khi $1+8\ \ x+y+1\ =0\Leftrightarrow y=-x-\dfrac{9}{8}$, thay vào (3) ta được:

$$4x+2\ ^2=-2x-\frac{9}{4}+15\Leftrightarrow 64x^2+72x-35=0\Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{221}}{16}$$

So với điều kiện của $x$ và $y$ ta chọn $x=\dfrac{-9-\sqrt{221}}{16}$.

Tập nghiệm của (1) là $x=\dfrac{1}{2};\ x=\dfrac{-9-\sqrt{221}}{16}$.

**Câu 16.** Giải phương trình: $4x^2+\sqrt{3x+1}+5=13x$ (1)

Điều kiện: $3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{3}$

Phương trình (1) viết lại thành: $2x-3^{\,2}=-\sqrt{3x+1}+x+4$

Đặt $\sqrt{3x+1}=-\,2y-3\ \left(y\le\frac{3}{2}\right)$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-3^{\,2}=2y+x+1 & (2)\\ 2y-3^{\,2}=3x+1 & (3)\end{cases}$$

Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được:

$$2\ 2x+2y-6\ \ x-y\ =2y-2x\ \Leftrightarrow\ \ x-y\ \ 2x+2y-5\ =0$$

+ Khi $x=y$, thay vào (3) ta được:

$$4x^2-12x+9=3x+1\Leftrightarrow 4x^2-15x+8=0\Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{97}}{8}$$

So với điều kiện của $x$ và $y$ ta chọn $x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$.

+ Khi $2x+2y-5=0\Leftrightarrow 2y=5-2x$, thay vào (3) ta được:

$$2-2x^{\,2}=3x+1\Leftrightarrow 4x^2-11x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{73}}{8}$$

So với điều kiện của $x$ và $y$ ta chọn $x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$.

Tập nghiệm của (1) là $x=\frac{11+\sqrt{73}}{8};\ x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$.

**Câu 17.** Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}+x-5=0$ (1)

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{3}$

Phương trình **có một nghiệm** là $x=1$ nên ta định hướng biến đổi về dạng $x-1\ .f(x)=0$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow\ \ \sqrt{3x+1}-2\ +\ \sqrt{x+3}-2\ +x-1=0$

(Tách thành các biểu thức liên hợp)

$$\Leftrightarrow\ \frac{3\ x-1}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+x-1=0 \qquad \text{(Nhân liên hợp)}$$

$$\Leftrightarrow\ \ x-1\ .\underbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+1\right)}_{>0}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ x=1$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x=1$.

**Câu 18.** Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-x+3}+x^2-x=\sqrt{21x-17}$ (1)

Điều kiện: $x\geq\frac{17}{21}$

Phương trình **có hai nghiệm** là $x=1$ và $x=2$ nên ta định hướng biến đổi về dạng $x-1\,.\,x-2\,.f(x)=0$

hay $x^2-3x+2\,.f\ x\ =0$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow\ \sqrt{2x^2-x+3}-x-1\ +\ 3x-1-\sqrt{21x-17}\ +x^2-3x+2=0$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9\ x^2-3x+2}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+x^2-3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-3x+2\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}}_{>0}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-3x+2=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x=1,\ x=2.$

**Câu 19.** Giải phương trình:

$$2x-8+2\sqrt{x^2-4x-12}=3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-6}\right).$$

Điều kiện $\begin{cases}x+2\geq0\\x-6\geq0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq6$

Đặt $t=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-6}$ (Đk: t > 0)

$\Rightarrow t^2=2x-4+2\sqrt{x^2-4x-12}$

$\Rightarrow t^2-4=2x-8+2\sqrt{x^2-4x-12}$

Phương trình đã cho trở thành $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\t=4(n)\end{array}\right.$

Với $t=4\ \Rightarrow\sqrt{x+2}+\sqrt{x-6}=4$

$\Leftrightarrow 2x-4+2\sqrt{x^2-4x-12}=16$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x-12}=10-x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}10-x\geq0\\x^2-4x-12=100-20x+x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq10\\16x-112=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x=7$ (Thoả đk $x\geq6$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=7.$

**Câu 20.** Giải phương trình: $15x^2+12x+12=10(2x+1)\sqrt{x^2+3}$

$15x^2+12x+12=10(2x+1)\sqrt{x^2+3}$ (1)

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương:

$3(2x+1)^2+3(x^2+3)=10(2x+1)\sqrt{x^2+3}$

Đặt $a=2x+1, b=\sqrt{x^2+3}$ $\left(b\ge\sqrt{3}\right)$ phương trình trở thành: $3a^2+3b^2=10ab$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2-10\left(\frac{a}{b}\right)+3=0 \quad \left(do\ b\ge\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=3\\ \frac{a}{b}=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3b=a\\ b=3a\end{array}\right.$$

Với $3b=a$, $a=3b$ ta được: $3\sqrt{x^2+3}=2x+1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge-\frac{1}{2}\\ 5x^2-4x+26=0\end{array}\right.$ $(VN)$

Với $b=3a$, $a=3b$ ta được: $\sqrt{x^2+3}=6x+3\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge-\frac{1}{2}\\ 35x^2+36x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{114}-18}{35}$

So điều kiện ta được $x=\frac{\sqrt{114}-18}{35}$.

**Câu 21.** Giải phương trình: $x+\sqrt{2x-1}=2(3-x)^2$

$x+\sqrt{2x-1}=2(3-x)^2$. Đk: $x\ge\frac{1}{2}$ Với đk trên, pt tương đương

$\sqrt{2x-1}-3=2x^2-13x+15$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-5)}{\sqrt{2x-1}+3}=(x-5)(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ (2x-3)(\sqrt{2x-1}+3)=2\end{array}\right.$$

Giải $(2x-3)(\sqrt{2x-1}+3)=2$ (1)

Đặt $t=\sqrt{2x-1}, t\ge 0\Rightarrow t^2=2x-1$

(1) trở thành: $t^3+3t^2-2t-8=0$

$$\Leftrightarrow(t+2)(t^2+t-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\ (\text{loại})\\ t^2+t-4=0\end{array}\right.$$ Giải $t^2+t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ (\text{nhận})\\ t=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{11-\sqrt{17}}{4}$ (nhận)

Vậy pt có nghiệm là $x = 5,\ x = \dfrac{11-\sqrt{17}}{4}$.

## 10.2. Bất phương trình

**Câu 1.** Giải bất phương trình: $(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}>10+4x-8x^2$

Điều kiện: $x\ge -2$, bất phương trình đã cho tương đương:

$(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}+2(4x^2-x-7)>2\left[(x+2)-4\right]$

$(4x^2-x-7)(\sqrt{x+2}+2)>2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-7>2\sqrt{x+2}-4\Leftrightarrow 4x^2>(x+2)+2\sqrt{x+2}+1$

$\Leftrightarrow (2x)^2>(\sqrt{x+2}+1)^2\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+1-2x)(\sqrt{x+2}+1+2x)<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+2}>2x-1\\ \sqrt{x+2}<-2x-1\end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+2}<2x-1\\ \sqrt{x+2}>-2x-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow -2\le x<-1$ hoặc $\Leftrightarrow x>\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}$

Vậy tập nghiệm $T=[-2;-1)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$.

**Câu 2.** Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$ .

+ ĐK: $\dfrac{2}{3}\le x\le 5$. Biến đổi bất phương trình về dạng

$$\sqrt{2x+7}\ge\sqrt{3x-2}+\sqrt{5-x}$$

+ Bình phương hai vế, đưa về được $3x^2-17x+14\ge 0$

+ Giải ra được $x\le 1$ hoặc $x\ge\dfrac{14}{3}$

+ Kết hợp với điều kiện, nhận được $\dfrac{2}{3}\le x\le 1$ hoặc $\dfrac{14}{3}\le x\le 5$.

**Câu 3.** Giải bất phương trình: $\left(x^3+1\right)+\left(x^2+1\right)+3x\sqrt{x+1}>0$.

+ $\left(x^3+1\right)+\left(x^2+1\right)+3x\sqrt{x+1}>0\Leftrightarrow\left(x^3+x^2\right)+3\sqrt{x^3+x^2}+2>0$

+ Đặt $t=x\sqrt{x+1}\ge-\dfrac{2}{3}$. Bất phương trình $\Leftrightarrow t^2+3t+2>0$

+ Giải ra được $x\le 1$ hoặc $x\ge\dfrac{14}{3}$

+ $\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-\dfrac{2}{3}\\ \left[\begin{array}{l}t>-1\\ t<-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t\ge-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x\sqrt{x+1}\ge-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x\ge-1$.

**Câu 4.** Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}>2x-1$

ĐK: $x\ge -\frac{2}{3}$

$\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}>2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}>(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+3})$

$\Leftrightarrow 1>\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+3}$ (vì $\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}>0$)

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x+3}>\sqrt{3x+2}$

$\Leftrightarrow 1+x+3+2\sqrt{x+3}>3x+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}>x-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<0 \\ \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+3>x^2-2x+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 1\le x<\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện , ta có nghiệm của bất phương trình là $-\frac{2}{3}\le x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

**Câu 5.** Giải bất phương trình: $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$ (x∈ R).

ĐK: $x(x^2+2x-4)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{5}\le x\le 0 \\ x\ge -1+\sqrt{5} \end{array}\right.$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}>x^2+5x-4$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x^2+2x-4)}>(x^2+2x-4)+3x$ (**)

TH 1: $x\ge -1+\sqrt{5}$, chia hai vế cho x > 0, ta có:

(**) $\Rightarrow 4\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}>\frac{x^2+2x-4}{x}+3$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}$, $t\ge 0$, ta có bpt: $t^2-4t+3<0\Leftrightarrow 1<t<3$

$1<\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x-4<0 \\ x^2+x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{65}}{2}$

TH 2: $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$, $x^2+5x-4<0$ , (**) luôn thỏa

Vậy tập nghiệm bất phương trình (*) là $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$.

**Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình sau có nghiệm $x^3+2x^2-8\le m\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)^3,(x\in R).$

Điều kiện $x\ge 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+2x^2-8}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)^3}\le m\Leftrightarrow\left(x^3+2x^2-8\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)^3\le 8m\cdot$$

Xét hàm số $f(x)=\left(x^3+2x^2-8\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)^3$ có $f'(x)>0,\forall x\ge 2$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Bất phương trình $f(x)\le 8m$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 8m\ge \min\limits_{x\in[2;+\infty)} f(x)=f(2)=16\sqrt{2}$.

Vậy $m\ge 2\sqrt{2}$.

**Câu 7.** Giải bất phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}\ge\sqrt{2-3x-4x^2}$.

$$\text{Điềukiện:}\begin{cases}x\ge 0\\1-x^2\ge 0\\2-3x-4x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}\le x\le\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{-3+\sqrt{41}}{8}.\quad(*)$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+1-x^2+2\sqrt{x(1-x^2)}\ge 2-3x-4x^2\Leftrightarrow 3(x^2+x)-(1-x)+2\sqrt{(x+x^2)(1-x)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{x^2+x}{1-x}+2\sqrt{\frac{x^2+x}{1-x}}-1\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^2+x}{1-x}}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow 9x^2+10x-1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{-5+\sqrt{34}}{9}\\x\le\dfrac{-5-\sqrt{34}}{9}.\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (*), ta suy ra nghiệm của bất phương trình là

$$\frac{-5+\sqrt{34}}{9}\le x\le\frac{-3+\sqrt{41}}{8}.$$

**Câu 8.** Giải bất phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2+5}+x>x^2+1.$

$+x\le 1$ : loại

$$+x>1:\sqrt{x^2+5}>\frac{x^2-x+1}{x-1}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5}>x+\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5}-x>\frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}>\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow 5(x-1)>\sqrt{x^2+5}+x\Leftrightarrow 4x-5>\sqrt{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{5}{4}\\15x^2-40x+20>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2\text{ . Vậy }x>2.$$

**Câu 9.** Giải bất phương trình

$$(x+2)(x-2\sqrt{2x+5})-9\le(x+2)(3\sqrt{x^2+5}-x^2-12)+\sqrt[3]{5x^2+7}$$

Điều kiện xác định: $x\ge-\frac{5}{2}$ . Khi đó ta có

$$(1)\Leftrightarrow x^3+3x^2+14x+15-2(x+2)\sqrt{2x+5}-3(x+2)\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{5x^2+7}\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2-x-18-2(x+2)(\sqrt{2x+5}-3)-3(x+2)(\sqrt{x^2+5}-3)+3-\sqrt[3]{5x^2+7}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+5x+9)-\frac{2(x+2)(2x-4)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)(x^2-4)}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{5(4-x^2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+5x+9-\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}\right)\le 0(*)$$

Ta có với $x\ge-\frac{5}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}\le\frac{4}{3}(x+2);\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}<\frac{3}{5}(x+2)^2\\ \frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}<\frac{5(x+2)}{9}\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+5x+9-\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}>\frac{18x^2+57x+127}{45}>0$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$, kết hợp với điều kiện $x\ge-\frac{5}{2}$ ta suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm là $-\frac{5}{2}\le x\le 2.$

**Câu 10:** Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x-2}>\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-6}$

$$BPT\Leftrightarrow\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x-6}>0$$

$$\Leftrightarrow(-2x+4)[\frac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-6}}]>0$$

$$\Leftrightarrow x<2$$

**Câu 11.** Giải bất phương trình: $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(1+\sqrt{1+x+x^2})\ge 0(1)$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})\ge-(2x+1)(2+\sqrt{[-(2x+1)^2]+3}$$

Xét hàm số $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3}),\ (t\in\mathbb{R});\qquad f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$

hàm số $f(t)$ luôn đồng biến $\mathbb{R}$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\ f(3x)\ge f(-2x-1)\ \Leftrightarrow 3x\ge -2x-1\ \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{5}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left[-\dfrac{1}{5};+\infty\right).$

**Câu 12.** Giải bất phương trình: $2\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+\sqrt{2x-\dfrac{8}{x}}\ge x.$

Điều kiện của bất phương trình: $\begin{cases}1-\dfrac{2}{x}\ge 0\\ 2x-\dfrac{8}{x}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x<0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ -2\le x<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le x<0\\ x\ge 2\end{array}\right.$

Với $-2\le x<0\Rightarrow$ bất phương trình đã cho luôn đúng

Với $x\ge 2\Rightarrow$ bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}+\sqrt{2(x-2)(x+2)}\ge x\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 4(x-2)+2(x^2-4)+4\sqrt{(x-2)^2(x+2)}\ge x^3$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x+16-4\sqrt{2(x^3-2x^2-4x+8)}\le 0$

$\Leftrightarrow 2(x^3-2x^2-4x+8)-8\sqrt{2(x^3-2x^2-4x+8)}+16\le 0$

$\left(\sqrt{2(x^3-2x^2-4x+8)}-4\right)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{2(x^3-2x^2-4x+8)}=4$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1+\sqrt{5}\\ x=1-\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1+\sqrt{5}$ (do $x\ge 2$)

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $T=[-2;0)\cup\left\{1+\sqrt{5}\right\}.$

**Câu 13.** Giải bất phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}}+x^2\le\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}+1$ trên tập số thực.

Điều kiện $x>-3.$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+x^2-1\le 0\Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+x+2}{x+3}-\frac{4}{x^2+3}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+6\right)}{(x+3)\left(x^2+3\right)}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left[\frac{x^2+x+6}{(x+3)\left(x^2+3\right)\left(\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}+1\right]\le 0$$

$\Leftrightarrow x^2-1\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$ (Với $x>-3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương). Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-1;1]$.

**Câu 14.** Giải bất phương trình: $1+\sqrt{4x^2+20}\le x+\sqrt{4x^2+9}.$

Giải bất phương trình: $1+\sqrt{4x^2+20}\le x+\sqrt{4x^2+9}.$ (1)

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{4x^2+9}-5+6-\sqrt{4x^2+20}+x-2\ge 0\Leftrightarrow \frac{4x^2-16}{\sqrt{4x^2+9}+5}+\frac{16-4x^2}{6+\sqrt{4x^2+20}}+x-2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1\right)\ge 0$$

Từ (1) suy ra $x-1\ge \sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}>0\Rightarrow x>1$.

Do đó $\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1=(4x+8).\frac{1+\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}}{\left(\sqrt{4x^2+9}+5\right)\left(6+\sqrt{4x^2+20}\right)}+1>0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 2.$

**Câu 15.** Giải bất phương trình: $\sqrt{9x^2+3}+9x-1\ge\sqrt{9x^2+15}.$

Nhận xét : $9x-1\ge\sqrt{9x^2+15}-\sqrt{9x^2+3}\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{1}{9}$

$bpt\Leftrightarrow\left(\sqrt{9x^2+3}-2\right)+3(3x-1)\ge\sqrt{9x^2+15}-4$

$$\Leftrightarrow\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+3}+2}+3(3x-1)-\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\ge 0$$

$$(3x-1)\left[\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+15}+4}+3\right]\geq 0$$

$$(3x-1)\left[(3x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\frac{1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\right)+3\right]\geq 0\Rightarrow 3x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{3}$$

Kết hợp các điều kiện suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\geq\frac{1}{3}$ là nghiệm của bất phương trình

**Câu 16.** Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2-5}}\leq\frac{2}{\sqrt{x^2-2}+1}$ trên tập số thực.

+) Đặt t = x² – 2, bất phương trình trở thành: $\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\frac{1}{\sqrt{3t+1}}\leq\frac{2}{\sqrt{t}+1}$ ĐK: t ≥ 0 với đk trên, bất phương trình tương đương

$(\sqrt{t}+1)(\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\frac{1}{\sqrt{3t+1}})\leq 2$. Theo Cô-si ta có:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{t}{t+1}.\frac{t+1}{t+3}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+3}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2}{t+3}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t+3}\right)$$

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2t}{3t+1}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3t+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{t+1}.\frac{t+1}{3t+1}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{3t+1}\right)$$

$\Rightarrow VT\leq 2\forall t\geq 0.$

+) Thay ẩn x được x² ≥ 2 $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)\Rightarrow T=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty).$

**Câu 17.** Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}\geq\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ trên tập hợp số thực.

- ĐK: $x\geq -1, x\neq 13$

- Khi đó: $\sqrt{x+1}\geq\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+2\geq\frac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3}\Leftrightarrow 1\geq\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+1}-3},(*)$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1}-3>0\Leftrightarrow x>13$ (1) thì (*) $\Leftrightarrow(2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}\geq(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t)=t^3+t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \geq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0$$

Suy ra: $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} \text{VN}$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 13$ (2) thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \leq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \leq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \leq (x+1)^3 \end{cases} \end{array}\right.$$ Suy ra:

$x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$. KL: $x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$

**Câu 18.** Giải bất phương trình sau trên tập $\mathbb{R}$:

$$\frac{5x - 13 - \sqrt{57 + 10x - 3x^2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{19-3x}} \geq x^2 + 2x + 9$$

Điều kiện $\begin{cases} -3 \leq x \leq \frac{19}{3} \\ x \neq 4 \end{cases}$

Bất phương trình tương đương

$$\frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{19-3x}\right)\left(2\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x}\right)}{\sqrt{x+3} - \sqrt{19-3x}} \geq x^2 + 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x} \geq x^2 + 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+3} - \frac{x+5}{3}\right) + \left(\sqrt{19-3x} - \frac{13-x}{3}\right) \geq x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(-x^2 - x + 2\right)}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{-x^2 - x + 2}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} \geq x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + x - 2\right)\left[\frac{2}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)}\right] \leq 0 \qquad (*)$$

Vì $\frac{2}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}>0$ với mọi $x\in\left[-3;\frac{19}{3}\right]\setminus\{4\}$

Do đó $(*)\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 1$ (thoả mãn)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;1]$.

**Câu 19.** Giải bất phương trình sau trên tập R

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$$

Gọi bất phương trình đã cho là (1).

+ ĐK: x $\in[-1;0)\cup[1;+\infty)$

Lúc đó:VP của (1) không âm nên (1) chỉ có nghiệm khi:

$\sqrt{x-\frac{1}{x}}>\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Rightarrow x-\frac{1}{x}>1-\frac{1}{x}\Rightarrow x>1$. Vậy (1) chỉ có nghiệm trên (1; +∞).

Trên (1; +∞): (1) <=> $\sqrt{x+1}-1>\sqrt{\frac{x-1}{x}}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}>1$.

Do $x+1-\frac{x-1}{x}=\frac{x^2+1}{x}>0$ khi x > 1 nên:

(1) $\Leftrightarrow x+1+\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}>1\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0\Leftrightarrow(\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-1)^2>0\Leftrightarrow x\ne\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm bất phương trình là: $\begin{cases}x>1\\ x\ne\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

**Câu 20.** Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$.

ĐK: $x\ge 4$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{2(x^2-16)}+x-3>7-x\Leftrightarrow\sqrt{2(x^2-16)}>10-2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-16\ge 0\\10-2x<0\end{cases}\\ \begin{cases}10-2x\ge 0\\2(x^2-16)>(10-2x)^2\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>5\\10-\sqrt{34}<x\le 5\end{array}\right.\Leftrightarrow x>10-\sqrt{34}$

VT(*) < 0 (do $x \ge \frac{2}{3}$) nên (*) vô nghiệm.

**Câu 21.** Giải bất phương trình: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \ge 0$ (1)

Ta xét hai trường hợp:

TH 1: $2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$, khi đó bất phương trình luôn đúng.

TH 2: Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-2>0 \\ x^2-3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (2;+\infty) \\ x \in (-\infty;0] \cup [3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup [3;+\infty)..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T=(-\infty;-\frac{1}{2}] \cup \{2\} \cup [3;+\infty)$.

**Câu 22.** Giải bất phương trình: $2x^3 \le (1+2x-3x^2).\sqrt{2x+1}$.

Đặt $y=\sqrt{2x+1} \Rightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2=2x+1 \end{cases}$, ta được bất phương trình

$2x^3 \le \left(y^2-3x^2\right).y \Leftrightarrow 2x^3+3x^2y-y^3 \le 0$ (2)

*__TH1__: Xét y = 0 khi đó $\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ thay vào bất phương trình thỏa mãn $\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ là nghiệm

*__TH2__: Xét y > 0 khi đó Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2-1 \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(2\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \ge 2x$$

suy ra $\sqrt{2x+1} \ge 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ 2x+1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ 2x+1 \ge 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 0<x \le \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

## 10.3. Hệ phương trình đại số

**Câu 1.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\\ \sqrt{x^2+y^2+1}=3+\sqrt{x^2-y^2}\end{cases}$ (x,y$\in\mathbb{R}$ )

Điều kiện: x+y$\geq$0, x-y$\geq$0

Đặt: $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{u}-\sqrt{v}=2\,(u>v)\\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\sqrt{uv}+4\\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\sqrt{uv}+4 \quad (1)\\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2-2uv+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\,(2)\end{cases}$ . Thế (1) vào (2) ta có:

$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3\Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2\Leftrightarrow uv=0$.

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases}uv=0\\ u+v=4\end{cases}\Leftrightarrow u=4, v=0$ (vì u>v).

Từ đó ta có: x =2; y =2.(Thỏa đ/k)

Vậy nghiệm của hệ là: $x=2,\ y=2$.

**Câu 2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1\end{cases}$

Đk: $\begin{cases}xy+x-y^2-y\geq 0\\ 4y^2-x-2\geq 0\\ y-1\geq 0\end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u=\sqrt{x-y}, v=\sqrt{y+1}$ $(u\geq 0, v\geq 0)$

Khi đó (1) trở thành : $u^2+3uv-4v^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u=-4v(vn)\end{array}\right.$

Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

$\Leftrightarrow\sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$

$\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0\Leftrightarrow(y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow y=2$ ( vì $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0 \forall y\geq 1$)

Với $y=2$ thì $x=5$.

Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ phương trình là $x=5,\ y=2.$

**Câu 3.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R}).$$

ĐK: $x\geq -2, y\leq \frac{16}{3}$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3\Leftrightarrow y=x-2$ Thay y=x-2 vào (2) được

$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8\Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)+\frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{-4}{\sqrt{x+2}+2}+(x+2)+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*)\end{array}\right.$$

Xét f(x)=VT(*) trên [-2;21/3],có f'(x)>0 nên hàm số đồng biến. suy ra x=-1 là nghiệm duy nhất của (*)

KL: Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y)=(2;0),\ (x;y)=(-1;-3).$

**Câu 4.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+\sqrt{x+y+3}=(x+y)^2+2\sqrt{x+y}\\ \sqrt{x^2+x+y+2}+\sqrt{x-y}=3\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$$

Giải hệ: $\begin{cases}x+y+\sqrt{x+y+3}=(x+y)^2+2\sqrt{x+y} & (1)\\ \sqrt{x^2+x+y+2}+\sqrt{x-y}=3 & (2)\end{cases}(x,y\in R).$

Điều kiện: $\begin{cases}x+y\geq 0\\ x-y\geq 0\end{cases}$ (*)

Đặt $t=x+y\geq 0$, từ (1) ta có: $t+\sqrt{t+3}=t^2+2\sqrt{t}$

$\Leftrightarrow t-t^2+\sqrt{t+3}-2\sqrt{t}=0$

$\Leftrightarrow t(1-t)+\frac{3(1-t)}{\sqrt{t+3}+2\sqrt{t}}=0\Leftrightarrow (1-t)\left(t+\frac{3}{\sqrt{t+3}+2\sqrt{t}}\right)=0$

$\Leftrightarrow t=1$ (Vì $t+\dfrac{3}{\sqrt{t+3}+2\sqrt{t}}>0,\forall t\ge 0$).

Suy ra $x+y=1\Leftrightarrow y=1-x$ (3).

Thay (3) vào (2) ta có: $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x-1}=3$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3}-2)+(\sqrt{2x-1}-1)=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ (Vì $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}>0, x\ge \dfrac{1}{2}$).

Suy ra (x = 1; y = 0), thoả mãn (*).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=1,\ y=0$.

**Câu 5.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y+2}+x+y=2(x^2+y^2)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{x+y+2}+x+y=2(x^2+y^2)\ (1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\ (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}x+y\ge -2\\ xy\ne 0\end{cases}$.

Ta thấy x + y = 0 không là nghiệm của hpt. Do đó ta có thể xét hai trường hợp sau:

TH1: $-2\le x+y<0$

Từ phương trình (2 ) ta suy ra xy < 0. $pt(2)\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)-2\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}=0\ (3)$.

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm x, y.

Khi đó phương trình (3) có nghiệm $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\Rightarrow 1+8\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}\ge 0\Leftrightarrow xy+8\le 0\Leftrightarrow xy\le -8$.

Khi đó ta có $x^2+y^2\ge 2|xy|\ge 16$.

Đặt $t=\sqrt{x+y+2}\ \Rightarrow 0\le t<\sqrt{2}$.

Từ phương trình (1) ta có $t+t^2-2\ge 32\Leftrightarrow t^2+t-34\ge 0$ điều này vô lí .

Vậy TH1 hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: x + y >0.

Từ (2) suy ra xy > 0, do đó x và y đều dương.

Ta có $(2) \Leftrightarrow (x+y)xy = x^2+y^2$

Do $x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$ và $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ nên ta có

$\frac{(x+y)^2}{2} \le x^2+y^2 = (x+y)xy \le (x+y)\frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow x+y \ge 2$

Đặt $t = \sqrt{x+y+2} \Rightarrow t \ge 2$.

Từ (1) $\Rightarrow t+t^2-2 \ge (t^2-2)^2 \Leftrightarrow t^4-5t^2-t-6 \le 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2-t-3) \le 0$ (4).

Ta có $t^3+2t^2-t-3 > 0 \, \forall t \ge 2$, do đó, từ $(4) \Rightarrow t-2 \le 0 \Leftrightarrow t \le 2$.

Từ đó suy ra: t = 2 $\Rightarrow x+y=2$, thay vào hphương trình ta có xy=1 $\Rightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1,\ y=1$.

**Câu 6.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4} = \sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} \\ x+y+x^2+y^2 = 44 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t}+\sqrt{t+2}+\sqrt{t+4}$ trên $[0;+\infty)$, có

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t+4}} > 0, \ \forall t \in (0;+\infty)$

Nên $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4} = \sqrt{(y-5)+4}+\sqrt{(y-5)+2}+\sqrt{y-5} \Leftrightarrow x = y-5$ (*)

Thay (*) vào (2): $\sqrt{y+3}-\sqrt{y-2}=1$ (3)

Nhân (3) với lượng liên hợp: $5 = \sqrt{y+3}+\sqrt{y-2}$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow \sqrt{y+3}=3 \Leftrightarrow y=6$.

ĐS: $x=1,\ y=6$.

**Câu 7.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 & (1) \\ 2x^3+y^3-x^2y-2xy^2=0 & (2) \end{cases}$

y $\neq 0$. Ta có: $\begin{cases} x^3+y^3=1 & (3) \\ 2\left(\frac{x}{y}\right)^3-\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)+1=0 & (4) \end{cases}$

Đặt : $\frac{x}{y}=t$ (4) có dạng : $2t^3-t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t = \pm 1,\ t = \frac{1}{2}$.

a) Nếu t = 1 ta có hệ $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) Nếu t = -1 ta có hệ $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

Nếu t = $\frac{1}{2}$ ta có hệ $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}, \quad y=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

**Câu 8.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy+2x+5y+3=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y+2}-y\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}+2x-2y-2 \end{cases}$

ĐK : $\begin{cases} y\geq -1 \\ x\geq 1 \end{cases}$

Phương trình đầu của hệ tương đương với $(x+y+1)(2y-x+3)=0 \Leftrightarrow 2y-x+3=0$ (do đk)

Thay vào phương trình thứ hai, được: $(2y+3)\sqrt{2y+2}-y\sqrt{2y+2}=\sqrt{2y+2}+2y+4$

$\Leftrightarrow (y+2)\left(\sqrt{2y+2}-2\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2y+2}-2=0 \Leftrightarrow y=1$ (thỏa đk )

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=5,\ y=1.$

**Câu 9.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7x^3+y^3+3xy(x-y)-12x^2+6x=1 \\ \sqrt[3]{4x+y+1}+\sqrt{3x+2y}=4 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Điều kiện: $3x+2y\geq 0$

$(1) \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3=(x-y)^3 \Leftrightarrow 2x-1=x-y \Leftrightarrow y=1-x$

Thế y = 1− x vào (2) ta được: $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{x+2}=4$

Đặt $a=\sqrt[3]{3x+2}, b=\sqrt{x+2}\ (b\geq 0)$

Ta có hệ $\begin{cases} a+b=4 \\ a^3=3b^2-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3=3(4-a)^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3=3(16-8a+a^2)-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3-3a^2+24a-44=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ (a-2)(a^2-a+22)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2}=2 \\ \sqrt{x+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow$ y = − 1 (thỏa ĐK)

Kết luận: Nghiệm của hệ phương trình là (x; y) = (2;−1).

**Câu 10.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+x^2+1=2x\sqrt{x^2y+2} \\ y^3(x^6-1)+3y(x^2-2)+3y^2+4=0 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$ .

Điều kiện: $x^2y \ge -2$. Gọi hai phương trình lần lượt là (1) và (2)

(2) $\Leftrightarrow x^6y^3+3x^2y = y^3-3y^2+3y-1+3(y-1)$

$\Leftrightarrow (x^2y)^3+3x^2y = (y-1)^3+3(y-1)$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Do đó (3) $\Leftrightarrow f(x^2y)=f(y-1)\Leftrightarrow x^2y=y-1,(y\ge -1).$

Thế vào (1) ta được $x^2y+x^2+1=2x\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x^2(y+1)-2x\sqrt{y+1}+1=0\Leftrightarrow (x\sqrt{y+1}-1)^2=0\Leftrightarrow x\sqrt{y+1}=1$

Do đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x\sqrt{y+1}=1 \\ x^2y=y-1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+x^2=1 \\ x^2y=y-1 \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x^2 \\ x^2(2-x^2)+x^2=1 \quad (4) \\ x>0 \end{cases}$$

(4) $\Leftrightarrow x^4-3x^2+1=0\Leftrightarrow (x^2-1)^2-x^2=0\Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2+x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

. Do x > 0 nên $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Với $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $(x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

**Câu 11.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+x-4y+2=0 \\ x^3+x-3=2\sqrt{x+2}+y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+x-4y+2=0 \quad (1) \\ x^3+x-3=2\sqrt{x+2}+y \quad (2) \end{cases}$ Điều kiện: $x\ge -2$.

(1) $\Leftrightarrow x^3+x+2=y^3-3y^2+4y\Leftrightarrow x^3+x+2=(y-1)^3+(y-1)+2$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$ trên $[-2;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in[-2;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2;+\infty)$.

Do đó: $x=y-1$.

Thay $y=x+1$ và phương trình (2) ta được: $x^3-3=2\sqrt{x+2}+1$

$$\Leftrightarrow x^3-8=2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)=\frac{2(x-2)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+2x+4-\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right]=0$$

- $x-2=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=3$
- $x^2+2x+4-\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=0\Leftrightarrow x^2+2x+4=\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$ (*)

Ta có $VT=x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3; VP=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2}\leq 1, \forall x\in[-2;+\infty)$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2,\ y=3.$

**Câu 12.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy+2=y\sqrt{x^2+2} \\ y^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x. \end{cases} \text{ (với } x;y\in\mathbb{R}\text{)}$$

ĐKXĐ: $x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R}$.

Ta có $xy+2=y\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow y\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=2\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2}+x$ (1). Thế vào phương trình thứ hai trong hệ, ta có :

$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x$

$\Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+2}+2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$.

$\Leftrightarrow (x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right]=(-x)\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right]$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có

$f'(t)=1+\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0, \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, phương trình (*) có dạng $f(x+1)=f(-x)\Leftrightarrow x+1=-x\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Thay $x=-\dfrac{1}{2}$ vào (1) ta tìm được $y=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x=-\dfrac{1}{2},\ y=1.$

**Câu 13.** Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \end{cases}$$ có nghiệm thực.

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ 2y - y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Đặt t = x + 1 $\Rightarrow$ t$\in$[0; 2]; ta có (1) $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2$.

Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên đoạn [0; 2] nên:

(1) $\Leftrightarrow$ y = t $\Leftrightarrow$ y = x + 1 $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0$

Đặt $v = \sqrt{1-x^2}$ $\Rightarrow$ v$\in$[0; 1] $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ đạt $\min\limits_{[0;1]} g(v) = -1$; $\max\limits_{[0;1]} g(v) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 2$.

**Câu 14.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$

*Biến đổi hệ tương đương với $\begin{cases} (x^2 - xy)^2 = 1 - x^3y \\ x^3y - (x^2 - xy) = -1 \end{cases}$

*Đặt ẩn phụ $\begin{cases} x^2 - xy = u \\ x^3y = v \end{cases}$, ta được hệ $\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v - u = -1 \end{cases}$

*Giải hệ trên được nghiệm (u;v) là (1;0) và (-2;-3)

*Từ đó giải được nghiệm $(x;y) = (1;0)$, $(x;y) = (-1;0)$.

**Câu 15.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2+1} = \dfrac{y^4}{x^2+y^2} \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \ (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \ (2) \end{cases}$$

NX: Nếu y=0 thì từ phương trình (1) $\Rightarrow x = 0$. Thay x=0; y=0 vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{5} + \sqrt{8} = 6$ (vô lý). Vậy y=0 không thỏa mãn bài toán

*) $y \neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình (1) cho $y^3$ ta được: $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \frac{x}{y} = y^3 + y\ (*)$

Xét $f(t) = t^3 + t$

Có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0\ \forall t$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên R.

Từ (*)$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2$

Thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy hphương trình có cặp nghiệm duy nhất $x = 1,\ y = 1$.

**Câu 16.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 6xy + 5y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 13y^2} = 2(x+y) & (1) \\ (x+2y)\sqrt{x+2} - 4y^2.\sqrt{y} = 8y^4.\sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

Xét y = 0, hệ vô nghiệm nên y khác 0 . Chia cả 2 vế của (1) cho y ta được:

$$\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 5} + \sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 13} = 2\left(\frac{x}{y} + 1\right)$$

Dat t= $\frac{x}{y} (t > -1)$

$PT: \sqrt{2t^2 - 6t + 5} + \sqrt{2t^2 + 2t + 13} = 2(t+1)$

$\Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (t+1)^2 (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (loai) \\ t = 2 (t/m) \end{array}\right.$

Với t = 2 => x=2y, thế vào (2) ta được:

$4y\sqrt{2y+2} - 4y^2.\sqrt{y} = 8y^4.\sqrt{y} - 2\sqrt{2y+2} \Leftrightarrow 4y\sqrt{2y+2} + 2\sqrt{2y+2} = 8y^4.\sqrt{y} + 4y^2.\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{2}{y}+2} + \frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{y}+2} = 8y^3 + 4y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{y}+2\right)\sqrt{\frac{2}{y}+2} + 2\sqrt{\frac{2}{y}+2} = (2y)^3 + 2.(2y)$ (3)

Xét hàm số f(u)=u$^3$+2u với u>0; có f'(u) = 3u$^2$ +2>0, mọi u>0 => hàm số đồng biến

Từ (3) $\Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{2}{y}+2}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{y}+2} = 2y \Leftrightarrow 4y^3 - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = 2,\ y = 1$.

**Câu 17.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6 + 3x^2 - 4 = y^3 + 3y^2 + 6y \\ 2y - (x+1)\sqrt{x^2 + y + 8} + 7 = x \end{cases}$

Điều kiện: $x^2 + y + 8 \geq 0$

• PT(1) $\Leftrightarrow x^6 + 3x^2 = (y+1)^3 + 3(x+1) \Leftrightarrow \left(x^2\right)^3 + 3x^2 = (y+1)^3 + 3(y+1)$

$\Leftrightarrow f(x^2) = f(y+1)$ với f(t) = $t^3 + 3t$

- Ta có: f'(t) = $3t^2 + 3 > 0$ $\forall t \in R \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

Do đó: $f(x^2) = f(y+1) \Leftrightarrow x^2 = y+1$

- Với $y = x^2 - 1$ , phương trình (2) trở thành: $2(x^2-1) - (x+1)\sqrt{2x^2+7} - x + 7 = 0$

$$2x^2 + 7 - (x+1)\sqrt{2x^2+7} - x - 2 = 0 (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2+7}, (t \geq \sqrt{7})$ , pt(*) trở thành: $t^2 - (x+1)t - x - 2 = 0$ (**)

Ta có: $\Delta = (x+3)^2$ nên (**) có hai nghiệm: t = x + 2 hoặc t = -1 (loại)

Với t = x + 2 $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2+7 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

- Với $x = 1 \Rightarrow y = 0$ (nhận)
- Với $x = 3 \Rightarrow y = 8$ (nhận)

**Kết luận:** hệ có hai nghiệm $(x;y) = (1;0)$, $(x;y) = (3;8)$.

**Câu 18.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} + \sqrt{3-x-y} = 5 \\ 2\sqrt{3-x-y} - \sqrt{2x+3y+4} = 2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+2y} \\ v = \sqrt{3-x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y = u^2 \\ 3-x-y = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = u^2 + v^2 - 3 \\ x = 6 - u^2 - 2v^2 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y + 4 = u^2 - v^2 + 7$

Kết luận nghiệm là (- 3; 2)

Khi đó hệ ban đầu trở thành: $\begin{cases} 3u + v = 5 \\ 2v - \sqrt{u^2 - v^2 + 7} = 2 \end{cases}$ $(*)$ thế v = 5 – 3u vào phương trình

(*) giải tìm được u = 1, từ đó v = 2

Suy ra $x = -3,\ y = 2.$

**Câu 19.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{x+y+1} = x^3 + 3y(x^2 + xy + y - 1) + 1 \\ y^2 + \sqrt{y - 5x} = 5 \end{cases}$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{x+y+1} = x^3 + 3y(x^2 + xy + y - 1) + 1 \\ y^2 + \sqrt{y - 5x} = 5 \end{cases}$

Điều kiện : $\begin{cases} y > 0 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$ ( vì y=0 không thỏa hpt)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-(x+1)}{\sqrt{y} + \sqrt{x+y+1}} = (x+1)(x^2 - x + 1) + 3y(x+1)(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2 - x + 3xy + 3y^2 - 3y + 1 + \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x+y+1}}]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2 + (3y-1)x + 3y^2 - 3y + 1 + \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x+y+1}}] \quad (3)$$

Xét $A = x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 - 3y + 1$

$\Delta = -3(y - 1)^2 \le 0 \ \forall x \in R \Rightarrow A \ge 0 \ \forall x, y \in R$

(3) $\Leftrightarrow$ x = -1

Thay x = -1 vào (2) ta có : $y^2 + \sqrt{y+5} = 5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} (l) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x = -1,\ y = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

**Câu 20.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$

Điều kiện: x > 0 và y > 0.

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} & (1) \\ 1 + \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{6}{\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$$

(1) + (2): $2 = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}}$ (*)

(2) – (1): $\dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{3}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \dfrac{12}{y+3x} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{9}{y} - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y^2 + 6xy - 27x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x \\ y = -9x \end{array}\right.$

So với điều kiện, nhận y = 3x

(*) $\Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 12 + 6\sqrt{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x = 4 + 2\sqrt{3},\ y = 12 + 6\sqrt{3}$.

**Câu 21.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2+4}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 2 \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3+1} \end{cases} (x; y \in \mathbb{R})$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+4} = \sqrt{(-2y)^2+4} + (-2y)$ (*).

Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}>\dfrac{t+|t|}{\sqrt{t^2+4}}\geq 0.$

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên R. Từ (*) suy ra: $f(x)=f(-2y)\Rightarrow x=-2y$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$3x^2+5x+2=2\sqrt[3]{x^3+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(x^3+1)+2\sqrt[3]{x^3+1}$ (**)

Xét hàm số $g(t)=t^3+2t$ ta thấy g(t) đồng biến trên R nên từ (**) suy ra

$x+1=\sqrt[3]{x^3+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$. Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$, $(x;y)=(0;0)$.

**Câu 22.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^3+y^2+4(x-y-1)=xy^2\\(x^2+1)y^2+x^2(2y+1)=x^2-3x-2\end{cases}$

Biến đổi phương trình ban đầu về dạng $(y-2)(y+2)(y+1-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-2\\y=x-1\end{array}\right.$

TH 1: Với y = 2 thay vào phương trình (2) : $8x^2+3x+6=0$ vô nghiệm

TH 2: Với y = - 2 thay vào (2): $3x+6=0\Rightarrow x=-2$ suy ra nghiệm (x; y) =(-2;-2)

TH 3: Với $y=x-1$ thay vào (2): $x^4+x+3=0\Leftrightarrow(x^2-\dfrac{1}{2})^2+(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{2}=0$ (*vn*)

Kl: hệ phương trình có nghiệm $x=-2,\ y=-2.$

**Câu 23.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3-6y^2+3(x-5y)=14\\\sqrt{3-x}+\sqrt{y+4}=x^3+y^2-5\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$

$\begin{cases}x^3-y^3-6y^2+3(x-5y)=14 & (1)\\\sqrt{3-x}+\sqrt{y+4}=x^3+y^2-5 & (2)\end{cases}$

Đkxđ $\begin{cases}x\leq 3\\y\geq -4\end{cases}$

Từ (1) ta có $x^3+3x=(y+2)^3+3(y+2)\Leftrightarrow(x-y-2)\left[x^2+x(y+2)+(y+2)^2+3\right]=0$

$\Leftrightarrow y=x-2\ (3)$

Thế (3) vào (2) ta được

$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1\Leftrightarrow x^3+x^2-4x-4+2-\sqrt{x+2}+1-\sqrt{3-x}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+1)-\dfrac{x-2}{2+\sqrt{x+2}}+\dfrac{x-2}{1+\sqrt{3-x}}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+2)(x+1)-\dfrac{1}{2+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{3-x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+2)(x+1)+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{3-x}}-\dfrac{1}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left((x+2)(x+1)+\dfrac{x+1}{3\left(2+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}+\dfrac{x+1}{3\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\left((x+2)+\dfrac{1}{3\left(2+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}+\dfrac{1}{3\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}\right)=0$

Vì $y\ge -4\Rightarrow x\ge -2\Rightarrow x+2+\dfrac{x+1}{3\left(2+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}+\dfrac{x+1}{3\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}>0$

Từ đó phương trình trên tương đương với

$(x-2)(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$

Với $x=2\Rightarrow y=0; x=-1\Rightarrow y=-3$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ phương trình. Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là $(x;y)=(-1;-3),\ (x;y)=(2;0)$.

**Câu 24.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-3xy^2-x-1=y^2+2xy-x^2\\y^3-3yx^2+y+1=x^2+2xy-y^2\end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $x^3-3xy^2-x-1-(y^3-3yx^2+y+1)i=y^2+2xy-x^2-(x^2+2xy-y^2)i$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+y^3i^3-(x+yi)-1-i=(1+i)y^2+2xy(1-i)-x^2(1+i)$

$\Leftrightarrow (x+yi)^3-(x+yi)-1-i=(1+i)(y^2-2xyi+i^2x^2)$

$\Leftrightarrow (x+yi)^3-(x+yi)-1-i=(1+i)(y-ix)^2\Leftrightarrow z^3+(1+i)z^2-z-(1+i)=0$

$\Leftrightarrow z=1; z=-1; z=-1-i$.

Do đó $(x;y)=(1;0),\ (x;y)=(-1;0),\ (x;y)=(-1;-1)$.

**Câu 25.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3(x+y) & (1)\\ \sqrt{2x+y+1}+2\sqrt[3]{7x+12y+8}=2xy+y+5 & (2)\end{cases}.$$

Điều kiện: $\begin{cases}5x^2+2xy+2y^2\ge 0\\ 2x^2+2xy+5y^2\ge 0\\ x+2y+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x+2y+1\ge 0$.

Khi hệ có nghiệm $(x;y)\xrightarrow{(1)}x+y\ge 0$

Ta thấy $\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}\ge 2x+y$ $(*)$ dấu bằng khi $x=y$. Thật vậy:

$(*)\Leftrightarrow 5x^2+2xy+2y^2\ge (2x+y)^2\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ luôn đúng với mọi $x,y\in\mathbb{R}$

Tương tự $\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}\ge x+2y$ $(**)$ dấu bằng khi $x=y$

Từ $(*)\&(**)\Rightarrow VT^{(1)}=\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}\ge 3(x+y)=VP^{(1)}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y$ $(3)$

Thế y = x vào (2), ta được: $\sqrt{3x+1}+2.\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$ (3)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-(x+1)+2\left[\sqrt[3]{19x+8}-(x+2)\right]=2x^2-2x$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{-2\left(x^3+6x^2-7x\right)}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}=2x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2\left(x^2-x\right)(x+7)}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}+2(x^2-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\dfrac{2(x+7)}{\sqrt[3]{(19x+8)^2}+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+(x+2)^2}+2=0\ (*)\end{array}\right.$$

Vì x ≥ 0 nên (*) vô nghiệm. Do đó (3) $\Leftrightarrow$ x = 0 hay x = 1.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;0)$, $(x;y)=(1;1)$.

**Câu 26.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2}\\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\end{cases}$

Điều kiện $x\ge -1; y\ge 2$.

Đặt $\sqrt{x+1}=a;\sqrt{y-2}=b$ $(a,b\ge 0)$, từ (1) ta có:

$a+ab+a^2-1+5=2\left(b^2+2\right)+b \Leftrightarrow a-b+ab-b^2+a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(1+2a+b)=0$

$\Leftrightarrow a=b$ (do $a,b\ge 0 \Rightarrow 1+2a+b>0$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=x+3$ .

Thế vào (2) ta được:

$$\frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}\ (*) \end{array}\right.$$

+ $x=8 \Rightarrow y=11$;

+ $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2+3\right] \ (**)$$

Xét hàm số $f(t)=(t+3)\left(t^2+3\right)$ với $t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=3(t+1)^2\ge 0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(**) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x+1=x^2-4x+4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-5x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \ \text{(T/M)}$$

$$x=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\frac{11+\sqrt{13}}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=(8;11)$, $(x;y)=\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$.

**Câu 27.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2) \end{cases}$

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho $x^3$ ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y} \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=7,\ y=\dfrac{111}{98}$.

**Câu 28.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+3y-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \\ 3\left(\sqrt{6-y}+\sqrt{2x+3y-7}\right)=2x+7 \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ 1\le y\le 6 \\ 2x+3y-7\ge 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có :

$$(1)\Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+(y-1-x)(y-1+x)+y(y-1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+y-1+x+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+y-1+x+y=0\ (*) \end{array}\right.$$

+ Với $\begin{cases} x\ge 0 \\ 1\le y\le 6 \end{cases}$, suy ra phương trình (*) vô nghiệm

+ Với $y=x+1$ thay vào (2) ta được $3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4}=2x+7\ (3)$

Điều kiện $\dfrac{4}{5}\le x\le 5$ *ta có*:

$$(3)\Leftrightarrow 7-x-3\sqrt{5-x}+3(x-\sqrt{5x-4})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7-x)^2-9(5-x)}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3\left(x^2-5x+4\right)}{x+\sqrt{5x-4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+4\right)\left(\frac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x+\sqrt{5x-4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x+\sqrt{5x-4}}=0(VN) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(1;2),\ (x;y)=(4;5)$.

**Câu 29.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3+y+4=3x+(x+2)\sqrt{x-2} \\ (x+y-5)\sqrt{x-y}+2y-4=0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=\sqrt{x-y} \end{cases}$. (ĐK: $b\ge 0$).

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$(a-5)b+a-b^2-4=0 \Leftrightarrow (b+1)(a-b-4)=0$$
$$\Leftrightarrow a=b+4$$
$$\Rightarrow x+y=4+\sqrt{x-y} \quad (3)$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^3+y=(\sqrt{x-2}+1)^3+(\sqrt{x-2}+1)$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó ta có: $y=\sqrt{x-2}+1$ (4)

Từ (3) và (4) ta được:

$$\begin{cases} x+y=4+\sqrt{x-y} \\ y-1=\sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2+y=2+\sqrt{x-2+2-y} \\ \sqrt{x-2}=y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2+y=2+\sqrt{(y-1)^2+2-y} \\ \sqrt{x-2}=y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y-1=\sqrt{y^2-3y+3} \\ \sqrt{x-2}=y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được: $x=3,\ y=2$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

**Câu 30.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+5x^2-2y^2+10x-3y+6=0 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y \end{cases}$

Điều kiện $x \ge -2;\ y \le 4$

$(1) \Leftrightarrow x^3+5x^2+10x+6=y^3+2y^2+3y$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)^2+3(x+1)=y^3+2y^2+3y$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t^2+3t, \quad f'(t)=3t^2+4t+3>0 \ \forall t \in R$

Suy ra f(x+1) = f(y) => y= x+1 thay và phương trình (2) ta được

Phương trình : $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)-3=x^3+x^2-4x-4 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}-2\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3}=(x+1)\left(x^2-4\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2[(x+2)(3-x)-4]}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}=(x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2+x+2)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}-(x+2)\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left[x+2+\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}\right]=0$$

$$>0 \quad (vi \ \ x\geq -2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;3),\ (x;y)=(-1;0)$.

**Câu 31.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x^2-xy}=\sqrt{2x^2-3x-4xy} \\ x^2y\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}=x^2y-x \end{cases} (x,y\in R)$

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x^2-xy}=\sqrt{2x^2-3x-4xy} \ \ (1) \\ x^2y\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}=x^2y-x \ \ (2) \end{cases} (x,y\in R)$$

$$pt(2)\Leftrightarrow x^2y\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)=\sqrt{1+x^2}-x \Leftrightarrow y\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x^2}$$

Suy ra đk y > 0 , kết hợp phương trình (1) suy ra đk x > 0 (x = 0 ko là nghiệm phương trình (2)

$$y\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x^2} \Leftrightarrow y\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)=\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right),$$

Xét hàm $f(t)=t\sqrt{1+t^2}-t,\ t>0$ , $f'(t)=\frac{2t^2+1-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}>0$ …. Suy ra $pt(2)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$

Thế vào pt(1) :

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2-3x-4} \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x^2-x\right)(x+1)}=x^2-x-3(x+1)$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-x} \\ v=\sqrt{x+1} \end{cases}$ giải được u = - v ( vô nghiệm ) , u = 3v

u = 3v giải được nghiệm $x=5-\sqrt{34},\ y=\frac{1}{5+\sqrt{34}}$.

**Câu 32.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+y-x-9=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+5x+y-8} \\ x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ y \le 12 \\ y\left(12-x^2\right) \ge 0 \\ x^2+5x+y-8 \ge 0 \end{cases}$ $(*)$

Ta có

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y\left(12-x^2\right)} = 12 - x\sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} \le 12 \\ 12x^2 - 24x\sqrt{12-y} + 12(12-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} \le 12 \\ \left(x-\sqrt{12-y}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12-x^2 \\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 2\sqrt{3};\ 0 \le y \le 12 \end{cases}$

Thay vào phương trình $(1)$ ta được: $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right) + \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right) + \left(x+2-\sqrt{5x+4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3 + \dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. Khi đó ta được nghiệm $(x;y) = (0;12),\ (x;y) = (1;11).$

**Câu 33.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y} + y = \sqrt{x^4+x^3} + x \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

Đk: $x \ge 1; y \ge 0$

Phương trình (1)
$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) + y - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + y - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + 1 = 0 (\text{VN}(\text{VT} > 0 \forall\ x \ge 1)) \end{array}\right.$$

+ Với y = x thề vào (2) ta được: $x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \dfrac{9}{2} (*)$

Đặt ẩn phụ:

$t=\sqrt{x}+\sqrt{x-1},(t\ge 0)$

$\Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x(x-1)}-1$

$\Rightarrow x+\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{t^2+1}{2}$

Từ (*) ta có: $\dfrac{t^2+1}{2}+t=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-4(loai)\end{array}\right.$

+ Với $t=2\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{5}{2}-x\Leftrightarrow x=\dfrac{25}{16},y=\dfrac{25}{16}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{25}{16},\ y=\dfrac{25}{16}$.

**Câu 34.** Giải hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{l}(xy-3)\sqrt{y+2}+\sqrt{x}=\sqrt{x^5}+(y-3x)\sqrt{y+2}\\\sqrt{9x^2+16}-2\sqrt{2y+8}=4\sqrt{2-x}\end{array}\right. \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

Đk: $\left\{\begin{array}{l}0\le x\le 2\\y\ge -2\end{array}\right.$ (*). Với đk(*) ta có

$(1)\Leftrightarrow(x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2}-(x+1)\sqrt{x}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(y+3)\sqrt{y+2}=(x+1)\sqrt{x}\end{array}\right.$ (3)

Với x = 1 thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1\Leftrightarrow y=-\dfrac{31}{8}(loai)$. Ta có:

$(3)\Leftrightarrow\left(\sqrt{y+2}\right)^3+\sqrt{y+2}=(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t)=t^3+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0;\forall t\Rightarrow$ Hàm số f(t) là hs đồng biến, do đó:

$(4)\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x})\Leftrightarrow\sqrt{y+2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow y=x-2$ thay vào pt(2) ta được:

$4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x+4}=\sqrt{9x^2+16}$

$\Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0$

Đặt: $t=\sqrt{2(4-x^2)}$ $(t\ge 0)$; phương trình trở thành:

$4t^2+16t-(x^2+8x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x}{2} \\ t=-\dfrac{x}{2}-4<0(loai) \end{array}\right.$

Hay $\sqrt{2(4-x^2)}=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x^2=\dfrac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{4\sqrt{2}-6}{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\ y=\dfrac{4\sqrt{2}-6}{3}$.

**Câu 35.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (4y-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2y+1 \\ x^4+x^2y+y^2=1 \end{cases}$.

Xét phương trình: $(4y-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2y+1$

Đặt: $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1$, ta được pt: $2t^2-(4y-1)t+2y-1=0$

Giải ra được: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}<1(loai) \\ t=2y-1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} y\ge 1 \\ x^2=4y^2-4y \end{cases}$ thay vào phương trình (2) ta được: $16y^2(y-1)^2+4y^2(y-1)+y^2-1=0$

$\Leftrightarrow$ y = 1(do $y\ge 1$) $\Rightarrow$ x=0

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0,\ y=1$.

**Câu 36.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy(1) \\ 2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2(2) \end{cases}$

ĐK $x^2-2y-1\ge 0$

Từ (1) ta có x=y hoặc $x^2=2y$ (Loại)

x = y, thay vào phương trình ta có: $2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}-(x-2)=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}\left(1+\dfrac{3\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt[3]{(x^3-14)^2}+\sqrt[3]{x^3-14}(x-2)+(x-2)^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$, $(x;y)=\left(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$.

**Câu 37.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ y\geq -1 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}\Leftrightarrow \dfrac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+2)\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được $3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1}$.

$\Leftrightarrow(2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq\dfrac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$

Ta có $y=\dfrac{x^2}{x+1}-1$. Với $x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9}\Rightarrow y=-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm.

$(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(x;y)=\left(\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9};-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$.

**Câu 38.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+2y=2y^2+2x\ (1) \\ y\sqrt{x-y+1}+x=2. \qquad (2) \end{cases}$.

ĐK: $x-y+1\geq 0$.

$(1)\Leftrightarrow x^2-y^2+xy-y^2+2y-2x=0\Leftrightarrow(x-y)(x+2y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y \qquad (3) \\ x=2-2y\ (4) \end{array}\right.$

- Từ (3) & (2) ta có x=y=1.

- Từ (4) & (2) ta có $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y\sqrt{3-3y} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} y = 0; x = 2 \\ y = -\dfrac{1}{3}; x = \dfrac{8}{3}. \end{array} \right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(x;y) = (1;1),\ (x;y) = (2;0),\ (x;y) = \left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{1}{3}\right).$

**Câu 39.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \ (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \quad (2) \end{cases}$

ĐK: $x + y > 0.$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} - 2xy = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 - 2xy.\dfrac{x+y-1}{x+y} = 0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(x+y+1-\dfrac{2xy}{x+y}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ll} x = 1 - y & (3) \\ \dfrac{x^2+y^2+x+y}{x+y} = 0 & (4) \end{array} \right.$

Vì $x + y > 0$ nên phương trình (4) vô nghiệm.

Từ (3) và (2) ta có $y^2 - 3y = 0 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} y = 0; x = 1 \\ y = 3; x = -2 \end{array} \right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y) = (1;0),\ (x;y) = (-2;3).$

**Câu 40.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}(1 + \dfrac{1}{x+y}) = 2 \quad (1) \\ \sqrt{7y}(1 - \dfrac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2} \ (2) \end{cases}$

ĐK $x \geq 0; y \geq 0.$

Dễ thấy x = 0 hoặc y = 0 không thõa mãn hệ.

Với x >0, y >0 ta có

$\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1 - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{8}{7y}$ ( nhân vế với vế)

$\Rightarrow 21xy = (7y - 24x)(x+y) \Rightarrow 24x^2 + 38xy - 7y^2 = 0 \Rightarrow y = 6x$ (vì x, y dương).

Thay vào phương trình (1) ta được $\dfrac{1}{7x} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 7\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \pm \dfrac{2}{\sqrt{21}}\right).$

Từ đó suy ra $x$ và $y$.

**Câu 41.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^3+x=2x^2y+y \\ \sqrt{x^2+12x+12\sqrt{y}+3}=3y-2\sqrt{x}-1 \end{cases}(x,y\in\mathbb{R}).$

ĐK: $x\ge 0; y\ge 0$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow x\left(2x^2+1\right)=y\left(2x^2+1\right)\Leftrightarrow (x-y)\left(2x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=y$

(Vì $2x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Thế vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt{x^2+12x+12\sqrt{x}+3}=3x-2\sqrt{x}-1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}=3x-\left(2\sqrt{x}+1\right)$$

Đặt $a=2\sqrt{x}+1,\ a\ge 1$, ta có phương trình $\sqrt{x^2+3a^2}=3x-a\Rightarrow x^2+3a^2=9x^2-6ax+a^2$

$\Rightarrow x^2+3a^2=9x^2-6ax+a^2\Leftrightarrow 8x^2-6ax-2a^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=x \\ a=-4x\,(L)\end{array}\right.$

Khi $a=x$, ta có $x=2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1+\sqrt{2}\\ \sqrt{x}=1-\sqrt{2}\,(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow y=3+2\sqrt{2}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(3+2\sqrt{2};3+2\sqrt{2}\right)$.

**Câu 42.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y=x^2-x+y+1 \\ x^3-9y^2+6(x-3y)-15=3\sqrt[3]{6x^2+2}\end{cases}.$

$(1)\Leftrightarrow x^3-x^2y=x^2-x+y+1\Leftrightarrow x^2(x-y)+(x-y)=x^2+1\Leftrightarrow(x-y)\left(x^2+1\right)=x^2+1$

$\Leftrightarrow x-y-1=0$ (vì $x^2+1>0,\forall x$)

Thế vào phương trình (2) ta có $x^3-9x^2+6x-6=3\sqrt[3]{6x^2+2}$

$(x-1)^3+3(x-1)=\left(6x^2+2\right)+3\sqrt[3]{6x^2+2}\,(3)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t\Rightarrow f'(t)=3t^2+3>0(\forall t\in\mathbb{R})\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt[3]{6x^2+2}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{6x^2+2}$.

$\Leftrightarrow x^3-9x^2+3x-3=0\Leftrightarrow(x+1)^3=2(x-1)^3$.

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2}(x-1)\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}\Rightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1};\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}\right)$.

**Câu 43.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2-(x+y)}=\dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}}\\ 2\left(x^2+y^2\right)-3\sqrt{2x-1}=11\end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}\sqrt{x^2-(x+y)}\sqrt[3]{x-y}=y(1)\\ 2\left(x^2+y^2\right)-3\sqrt{2x-1}=11(2)\end{cases}$

Từ (1) suy ra $y\ge 0$, vì nếu y<0 thì x-y>0, do đó VT(1) > VP( 1)

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-(x+y)}\left(\sqrt[3]{x-y}-1\right)+\left(\sqrt{x^2-(x+y)}-y\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-(x+y)}\dfrac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\dfrac{x^2-x-y-y^2}{\sqrt{x^2-x-y}+y}=0$

$\Leftrightarrow(x-y-1)\left[\dfrac{\sqrt{x^2-(x+y)}}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}+y}\right]=0\Leftrightarrow x-y-1=0$

Thế $y=x-1$ vào phương trình (2) ta được:

$4x^3-4x+2-3\sqrt{2x-1}=11\Leftrightarrow(2x-1)^2-3\sqrt{2x-1}-10=0$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}, t\ge 0$, ta có $t^4-3t-10=0\Leftrightarrow(t-2)\left(t^3+2t^2+4t+5\right)=0\Leftrightarrow t=2$

Khi đó $\sqrt{2x-1}=2\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

**Câu 44.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y & (1)\\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 & (2)\end{cases}$

Nhận thấy y=0 không thỏa mãn hệ.

Với y khác không, chia cả hai vế của (1) và (2) cho y ta được: $\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\ (x+y)^2=2\dfrac{x^2+1}{y}+7\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=x+y\\ b=\dfrac{x^2+1}{y}\end{cases}$ ta có

$\begin{cases} a+b=4 \\ a^2=2b+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^2=2(4-a)+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^2+2a-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-5, b=9 \\ a=3, b=1 \end{array}\right.$.

Từ đây ta tìm được $(x;y)=(1;2),\ (x;y)=(-2;5)$.

**Câu 45.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x^2+y=a \\ xy=b \end{cases}$, ta được hệ mới $\begin{cases} a+ab+b=-\dfrac{5}{4} \\ a^2+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \\ a-\dfrac{5}{4}a-a^3-\dfrac{5}{4}-a^2=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+a^2+\dfrac{a}{4}=0 \\ b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0;\ b=-\dfrac{5}{4} \\ a=-\dfrac{1}{2};\ b=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được $(x;y)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right),\ (x;y)=\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$.

**Câu 46.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=3\sqrt{y^2+9}+3y \\ (3x-1)\sqrt{x^2y+xy-5}-4x^3+3x^3y-7x=0 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R}).$$

ĐK: $x^2y+xy\ge 5$

Xét phương trình (1) $3\sqrt{y^2+9}+3y>3|y|+3y\ge 0,\ \forall y$;

$y^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\ge 0,\ \forall x;y \Rightarrow x>0$

Mà $x^2y+xy\ge 5 \Leftrightarrow y\left(x^2+x\right)>5 \Rightarrow y>0$.

Khi đó ta có: $x\sqrt{x^2+1}+x=\dfrac{3}{y}\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{y}\right)^2}+\dfrac{3}{y}\quad (1a)$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+t,\ t\in(0;+\infty) \Rightarrow f'(t)=\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{3}{y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$.

Thay $y = \frac{3}{x}$ vào phương trình (2) ta có

$(3x-1)\sqrt{3x-2} - 4x^3 + 9x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow (3x-1)\left(\sqrt{3x-2} - x\right) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$\Leftrightarrow (3x-1)\frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{3x-2}+x} = 4x^3 - 12x^2 + 8x \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)\left(x + \frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}+x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ ( Vì $x + \frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}+x} > 0, \ \forall x \ge \frac{2}{3}$)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (1;3), \ (x;y) = \left(2;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 47.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3x-5)\left(x^2-1\right) = y\left(x^2+3x-y-6\right) \\ \sqrt[4]{-y^2-2y+1} = y-3x+4 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{x; y} \in \text{R}).$$

Điều kiện : $-y^2 - 2y + 1 \ge 0$

$(3x-5)(x^2-1) = y\left[(x^2-1) + (3x-5) - y\right]$

$\Leftrightarrow (3x-5-y)(x^2-1-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x-5 \\ y = x^2-1 \end{array}\right.$

Với y = 3x - 5 thay vào (2) ta được $\sqrt[4]{-y^2-2y+1} = -1 < 0$ vô nghiệm

Với $y = x^2 - 1$ thay vào (2) ta được $\sqrt[4]{2-x^4} = x^2 - 3x + 3$ (*)

Điều kiện $-\sqrt[4]{2} \le x \le \sqrt[4]{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có 1.1.1.$\sqrt[4]{2-x^4} \le \frac{5-x^4}{4}$

Từ (3) ta có: $x^2 - 3x + 3 \le \frac{5-x^4}{4} \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 12x + 7 \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+2x+7\right) \le 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại x = 1 thỏa mãn (*). Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x = 1, \ y = 0$.

**Câu 48.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(x^2-y^2\right) + x^2 = 2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} \\ 76x^2 - 20y^2 + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \end{cases}$.

Điều kiện: $x \ge y^2$

Phương trình $\Leftrightarrow x\left(x-y^2\right) + x^3 - 2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} = 0$

$\Leftrightarrow x\left[x^2-\left(x-y^2\right)\right]+2\left(x-y^2\right)\left(x-\sqrt{x-y^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-y^2}\right)\left[x\left(x+\sqrt{x-y^2}\right)+2\left(x-y^2\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{x-y^2} \Leftrightarrow y^2=x-x^2$

Khi đó phương trình (2) trở thành: $96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(8x-1)^2+\frac{8x+\frac{8x+1}{2}+1}{3}=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$$

Sử dụng BĐT Cô si cho 3 số ta tìm được nghiệm duy nhất của phương trình $x=\frac{1}{8}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{8};\frac{\sqrt{7}}{8}\right)$, $(x;y)=\left(\frac{1}{8};\frac{-\sqrt{7}}{8}\right)$.

**Câu 49.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\left(5x^2+y\right)=\left(x^2+y\right)\sqrt{x^2+y} \\ y^3-9x^4-6x^2+1=0 \end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow 5x^3+xy-\left(x^2+y\right)\sqrt{x^2+y}=0\Leftrightarrow 4x^3+x\left(x^2+y\right)-2\left(\sqrt{x^2+y}\right)^3=0$

$\Leftrightarrow 2x=\sqrt{x^2+y}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ y=3x^2 \end{cases}$ ( Vì x =y =0 không là nghiệm của hệ )

Thế vào phương trình (2) ta có $y^3-y^2-2y+1=0\,(*)$

Ta giải phương trình (*) trên tập $\mathbb{R}$.

Thật vậy: xét $y\in(-2;2)$, Đặt $y=2\sin t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

Pt(*) trở thành: $8\sin^3 t-4\sin^2 t-2\sin t+1=0$

$\Leftrightarrow 4\sin t\left(1-2\sin^2 t\right)=1-4\sin^2 t\Leftrightarrow 4\sin t.\cos 2t=4\cos^2 t-3$

$\Leftrightarrow \sin 4t=c\cos 3t$ ( Do $\cos t=0$ không là nghiệm của pt)

$$\Leftrightarrow \sin 4t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \\ t=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{R}\right)$$

Vì $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in\left\{\frac{\pi}{14};\frac{5\pi}{14};-\frac{3\pi}{14}\right\}\Rightarrow y\in\left\{2\sin\frac{\pi}{14};2\sin\frac{5\pi}{14};-2\sin\frac{3\pi}{14}\right\}$

Mà phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm nên pt(*) có 3 nghiệm như trên

Kết hợp với điều kiện $y \ge 0$ ta có $\left[\begin{array}{l} y = 2\sin\dfrac{\pi}{14} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{14}}{3}} \\ y = 2\sin\dfrac{5\pi}{14} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{2\sin\dfrac{3\pi}{14}}{3}} \end{array}\right.$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ phương trình.

$(x;y) = \left(\sqrt{\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{14}}{3}}; 2\sin\dfrac{\pi}{14}\right)$, $(x;y) = \left(\sqrt{\dfrac{2\sin\dfrac{3\pi}{14}}{3}}; 2\sin\dfrac{5\pi}{14}\right)$.

**Câu 50.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x+4} - \sqrt{3y+4} + x^3 - x^2 y = 0 \\ x^3 - 3y + 1 = \sqrt{8-3x^2} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$.

ĐK $-\dfrac{4}{3} \le x \le \sqrt{\dfrac{8}{3}}$; $y \ge -\dfrac{4}{3}$.

Nhận xét: $(x;y) = \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$ không là nghiệm của hệ. Do đó $x \ne -\dfrac{3}{4}$ hoặc $y \ne -\dfrac{3}{4}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{3(x-y)}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{3y+4}} + x^2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{3y+4}} + x^2\right) = 0$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta có.

$x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8-3x^2} \Leftrightarrow (x^3 - 2x - 1) + (2-x) - \sqrt{8-3x^2} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left(x + 1 + \dfrac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}\right) = 0$, Vì $(1)\dfrac{3}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{3y+4}} + x^2 > 0$,

Ta có

$x + 1 + \dfrac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}} = \dfrac{-x^2 + x + 6 + (x+1)\sqrt{8-3x^2}}{2 - x + \sqrt{8-3x^2}}$

$= \dfrac{(x+1)^2 + 2(x+1)\sqrt{8-3x^2} + (8-3x^2) + 3}{2\left(2 - x + \sqrt{8-3x^2}\right)} = \dfrac{\left(x+1+\sqrt{8-3x^2}\right)^2 + 3}{2\left(2 - x + \sqrt{8-3x^2}\right)} > 0$, với $-\dfrac{4}{3} \le x \le \sqrt{\dfrac{8}{3}}$

Do đó ta có $\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\ (x;y)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

**Câu 51.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \\ \sqrt{-14x+2y+48}+5=x+\sqrt{x-3} \end{cases}(x,y\in\mathbb{R}).$

ĐK $x\ge 3;\ y\ge 0;\ -14x+2y+48\ge 0.$

Ta có: $x+\sqrt{x-3}=(x-3)+\sqrt{x-3}-2=\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+2\right)\ge 0\Rightarrow \sqrt{x-3}\ge 1\Rightarrow x\ge 4$

Mà $-14x+2y+48\ge 0\Rightarrow 2y\ge 14x-48\ge 8\Rightarrow y\ge 4$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt{y+3}\right)^3-3\sqrt{y+3}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t,\ t\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(t)=3t^2-3>0\ \forall t\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Khi đó phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3}$

Thế vào phương trình (2) ta có

$\sqrt{2x^2-18x+44}+5=x+\sqrt{x-3}\Leftrightarrow\sqrt{2(x-5)^2+2(x-3)}=(x-5)+\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow\left[(x-5)-\sqrt{x-3}\right]^2=0\Leftrightarrow x-5=\sqrt{x-3}\Leftrightarrow x=7$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=7,\ y=33.$

**Câu 52.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (1) \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} & (2) \end{cases}$$

**Điều kiện**: $\begin{cases}2x+y\geq 0\\ x+4y\geq 0\end{cases}$ (*)

Biến đổi phương trình (1) về dạng tích số. Xem (1) là một phương trình bậc hai theo ẩn y, phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử. Ta được

$$(1)\Leftrightarrow y^2-\left(3x+2\right)y+2x^2+3x+1=0\Leftrightarrow\left[y-\left(x+1\right)\right]\left[y-\left(2x+1\right)\right]=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y=x+1\\ y=2x+1\end{bmatrix}$$

(các hệ thức đơn giản chứa x, y)

Thế $y=x+1$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn:

$$3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4} \qquad (3)$$

Do phương trình (3) có hai nghiệm $x=0$ và $x=1$ nên ta định hướng phân tích (3) thành dạng

$$x^2-x\,.f\left(x\right)=0$$

(biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp).

$3\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$ (Tách thành các biểu thức liên hợp)

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}=0 \qquad \text{(Nhân liên hợp)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x\underbrace{\left(3+\frac{2}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+5}}\right)}_{>0}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\ x=1\end{bmatrix}$$

Với $x=0\Rightarrow y=1$ [thỏa (*)]

Với $x=1\Rightarrow y=2$ [thỏa (*)

Thế $y=2x+1$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn: $3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$ (4) Do phương trình (4) có hai nghiệm $x=0$ nên ta định hướng phân tích (4) thành dạng $x.f\left(x\right)=0$ (biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp).

$4 \Leftrightarrow 3x+\sqrt{4x+1}-1+\sqrt{9x+4}-2=0$ (Tách thành các biểu thức liên hợp)

$\Leftrightarrow 3x+\dfrac{4x}{\sqrt{4x+1}+1}+\dfrac{9x}{\sqrt{9x+4}+2}=0$ (Nhân liên hợp)

$\Leftrightarrow x\underbrace{\left(3+\dfrac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\dfrac{9}{\sqrt{9x+4}+2}\right)}_{>0}=0$

$\Leftrightarrow x=0$ [thỏa (*)]

Với $x=0\Rightarrow y=1$ [thỏa (*)]

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;1),\ (x;y)=(1;2)$.

**Câu 53.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1-y\sqrt{x-y}+x=2+x-y-1\sqrt{y} & (1)\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} & (2)\end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} y\ge 0\\ x\ge 2y\\ 4x\ge 5y+3\end{cases}$ (*)

Biến đổi phương trình (1) về dạng tích số. Do $y=1$ luôn thỏa (1) nên định hướng phân tích theo nhân tử $y-1$

hoặc $1-y$. Ta được:

$1\Leftrightarrow 1-y\sqrt{x-y}-1+x-y-1\ 1-\sqrt{y}=0$

$\Leftrightarrow 1-y\ x-y-1\underbrace{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-y}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{y}}\right)}_{>0}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=1\\ y=x-1\end{bmatrix}$

Thế $y=1$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn: $9-3x=0\Leftrightarrow x=3$ [thỏa (*)]

Thế $y=x-1$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn: $2x^2-x-3=\sqrt{2-x}$ (3)

Điều kiện: $1\le x\le 2$

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-3\geq 0 \\ 2x^2-x-3\ ^2=2-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1\vee x\geq \dfrac{3}{2} \\ 4x^4-4x^3-11x^2+7x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1\vee x\geq \dfrac{3}{2} \\ x^2-x-1\ \ 4x^2-7\ =0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1\vee x\geq \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$ . So với điều kiện (*) ta chỉ nhận $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ [thỏa (*)]

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $x;y\ =\ 3;1$ , $x;y\ =\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

**Câu 54.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y+1\ ^2+\sqrt{-3x-2\ ^3}=1+y\sqrt{-3x-2}-3xy & (1) \\ x^3+3x^2+12x-\ 3x-1\ y+6=0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện : $x\leq -\dfrac{2}{3}$ (*)

Biến đổi phương trình (1) về dạng tích số.

$$(1)\ \Leftrightarrow\ y^2+2y+1-\ 3x+2\ \sqrt{-3x-2}=1+y\sqrt{-3x-2}-3xy$$

$$\Leftrightarrow\ \ y\ \ y+3x+2\ -\ \ y+3x+2\ \sqrt{-3x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ \ y+3x+2\ \ \ y-\sqrt{-3x-2}\ \ =0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3x-1 \\ y=\sqrt{-3x-2} \end{array}\right.$$

**Thế** $y=-3x-2$ , thay vào (2) ta được phương trình một ẩn:

$$x^3+12x^2+15x+4=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ \ x+1\ \ \ x^2+11x+4\ \ =0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=\dfrac{-11\pm\sqrt{105}}{2} \end{bmatrix}$$

So với điều kiện (*) ta chọn $x=-1; x=\dfrac{-11-\sqrt{105}}{2}$

Với $x=-1\Rightarrow y=1$

Với $x=\dfrac{-11-\sqrt{105}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{29+3\sqrt{105}}{2}$

**Thế** $y=\sqrt{-3x-2}$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn:

$$x^3+3x^2+12x-\ 3x-1\ \sqrt{-3x-2}+6=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-3x-2\ \sqrt{-3x-2}-3\ -3x-2\ +3\sqrt{-3x-1}-1=-x^3-3x^2-3x-1$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{-3x-2}-1^{\ 3}=\ -x-1^{\ 3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{-3x-2}-1=-x-1\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=-2 \end{bmatrix}$$

Với $x=-1\Rightarrow y=1$

Với $x=-2\Rightarrow y=2$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $x;y\ =\ -1;1$ , $x;y\ =\ -2;2$

$x;y\ =\left(\dfrac{-111-\sqrt{105}}{2};\dfrac{-11+3\sqrt{105}}{2}\right).$

**Câu 55.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-y\sqrt{2-x}+2y^2=2 & (1) \\ 2\ \sqrt{x+2}-4y\ +8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y}=34-15x & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$ và $y \ge 0$

Biến đổi phương trình (1) về dạng tích số. Xem (1) là một phương trình bậc hai theo ẩn $\sqrt{2-x}$ , phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử. Ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (2-\mathrm{x})+\sqrt{2-\mathrm{x}}.\mathrm{y}-2\mathrm{y}^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2-\mathrm{x}}=\mathrm{y}\\ \sqrt{2-\mathrm{x}}=-2\mathrm{y}\end{array}\right.$$

**Thế** $y=\sqrt{2-x}$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn:

$$2\left(\sqrt{\mathrm{x}+2}-4\sqrt{2-\mathrm{x}}\right)+8\sqrt{4-\mathrm{x}^2}=34-15\mathrm{x} \qquad (3)$$

Đặt t = $\sqrt{\mathrm{x}+2}-4\sqrt{2-\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{t}^2=34-15\mathrm{x}-8\sqrt{4-\mathrm{x}^2}$.

Do đó: (3) $\Leftrightarrow 2\mathrm{t}=\mathrm{t}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{t}=0\\ \mathrm{t}=2\end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{\mathrm{x}+2}-4\sqrt{2-\mathrm{x}}=0\\ \sqrt{\mathrm{x}+2}-4\sqrt{2-\mathrm{x}}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\sqrt{2-\mathrm{x}}=\sqrt{\mathrm{x}+2}\\ 4\sqrt{2-\mathrm{x}}+2=\sqrt{\mathrm{x}+2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16(2-\mathrm{x})=\mathrm{x}+2\\ 16(2-\mathrm{x})+4+16\sqrt{2-\mathrm{x}}=\mathrm{x}+2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}17\mathrm{x}=30\\ 16\sqrt{2-\mathrm{x}}=17(\mathrm{x}-2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{x}=\dfrac{30}{17}\\ \mathrm{x}=2\end{array}\right.$$

Khi x = $\frac{30}{17} \Rightarrow$ y = $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ và khi x = 2 $\Rightarrow$ y = 0.

Với $\sqrt{2-\mathrm{x}}=-2\mathrm{y} \le 0$ mà $\mathrm{y} \ge 0 \Rightarrow$ y = 0 và x = 2. Thử lại ta có x = 2, y = 0 là nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;0)$, $(x;y)=\left(\dfrac{30}{17};\dfrac{2\sqrt{17}}{17}\right)$.

**Câu 56.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2-\ y^2-y+1\ \sqrt{x^2+2}-y^3-y=0 & (1)\\ 2x+xy+2+\ x+2\ \sqrt{y^2+4x+4}=0 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $y^2+4x+4\ge 0$

Biến đổi phương trình (1) về dạng tích số. Xem (1) là một phương trình bậc hai theo ẩn $\sqrt{x^2+2}$, phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử. Ta được:

$$1 \Leftrightarrow x^2+2-\ y^2-y+1\ \sqrt{x^2+2}-y^3-y=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}-y\ \ \sqrt{x^2+2}+y^2+1\ =0$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2} \quad (\text{vì } \sqrt{x^2+2}+y^2+1>0)$$

**Thế** $y=\sqrt{x^2+2}$, thay vào (2) ta được phương trình một ẩn:

$$2x+x\sqrt{x^2+2}+2+\ x+2\ \sqrt{x^2+4x+6}=0$$

$$\Leftrightarrow x+x\sqrt{x^2+2}+x+2+\ x+2\ \sqrt{x+2\ ^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ x+2\ +\ x+2\ \sqrt{x+2\ ^2+2}=\ -x\ +\ -x\ \sqrt{-x\ ^2+2} \qquad (3)$$

**Xét hàm đặc trưng** $f\ t\ =t+t\sqrt{t^2+2}$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có: $f'\ t\ =1+\sqrt{t^2+2}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0,\forall t\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên: $3\ \Leftrightarrow f\ \ x+2\ =f\ \ -x\ \Leftrightarrow x+2=-x\Leftrightarrow x=-1$

Với $x=5\ \Rightarrow\ y=\sqrt{3}$ (thỏa điều kiện (*))

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x=5,\ y=\sqrt{3}$.

**Câu 57.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{1-y}-\sqrt{1-x}=0 & (1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2} & (2)\end{cases}$

Điều kiện $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{y}-\sqrt{1-y}$ (a)

**Xét hàm đặc trưng:** $f(t)=\sqrt{t}-\sqrt{1-t}$ với $t\in[0;1]$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{1-t}}>0\ \ \forall t\in(0;1)$ và f liên tục trên đoạn $[0;1]$

Suy ra: $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$

Do đó: $(a)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x+1-x+2\sqrt{x(1-x)}=2\Leftrightarrow 2\sqrt{x(1-x)}=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$.

**Câu 58.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8x^3-y^3+6y^2-6x-9y+2=0 & (1)\\ 4x^2+\sqrt{1-4x^2}-3\sqrt{(y-1)(3-y)}+1=0 & (2)\end{cases}$

Điều kiện $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},1\le y\le 3$

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 8x^3-6x=y^3-6y^2+9y-2\Leftrightarrow(2x)^3-3(2x)=(y-2)^3-3(y-2)$ (a)

Do $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$ nên $-1\le 2x\le 1$ và $1\le y\le 3$ nên $-1\le y-2\le 1$.

**Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t^3-3t$, với $t\in[-1;1]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3=3(t^2-1)\le 0$, với mọi $t\in[-1;1]$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

Do đó: $(a)\Leftrightarrow f(2x)=f(y-2)\Leftrightarrow 2x=y-2\Leftrightarrow y=2x+2$.

Thay $y=2x+2$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$4x^2-2\sqrt{1-4x^2}+1=0\Leftrightarrow 4x^2+1=2\sqrt{1-4x^2}\Leftrightarrow 16x^4+24x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$(x;y)=\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2};2+\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$, $(x;y)=\left(-\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2};2-\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$.

**Câu 59.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(6x+5)\sqrt{2x+1}-2y-3y^3=0 & (1)\\ y+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2+4x-23} & (2)\end{cases}$

- Điều kiện $\begin{cases}2x+1\ge 0\\ x\ge 0\\ 2x^2+4x-23\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{-2+5\sqrt{2}}{2}$
- Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}\left[2+3(2x+1)\right]=y\left(2+3y^2\right)$ (a)
- **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t\left(2+3t^2\right)=3t^3+2t$, với $t\in[0;+\infty)$.

  Ta có $f'(t)=9t^2+2>0$, với mọi $t\in[0;+\infty)$.

  Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.
- Do đó: $(a)\Leftrightarrow f(\sqrt{2x+1})=f(y)\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=y$.
- Thay $y=\sqrt{2x+1}$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2+4x-23}\Leftrightarrow 3x+1+2\sqrt{2x^2+x}=2x^2+4x-23$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+x-2\sqrt{2x^2+x}-24=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{2x^2+x}=6\\ \sqrt{2x^2+x}=-4\end{bmatrix}\Leftrightarrow 2x^2+x-36=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=4\\ x=-\frac{9}{2}\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=4$$

- Với $x=4\Rightarrow y=3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=4,\ y=3$.

**Câu 60.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$ (1)

- Điều kiện $x\le\frac{3}{4},y\le\frac{5}{2}$
- Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\left(4x^2+1\right).2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}$ (a)

- **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=\left(t^2+1\right)t=t^3+t$, với $t\in\mathbb{R}$.

  Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$, với mọi $t\in\mathbb{R}$.

  Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Do đó: $(a)\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}$.

- Thay $y=\dfrac{5-4x^2}{2}$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0 \qquad \text{(b)}$$

- Nhận thấy $x=0$ và $x=\dfrac{3}{4}$ không là nghiệm của phương trình (b)

- Xét hàm số $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ với $x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$, khi đó:

$$(b)\Leftrightarrow g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (3)$$

- Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

  Ta có: $g'(x)=8x-8x\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x\left(4x^2-3\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0 \quad \forall x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

  Do đó $f$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

- Suy ra: $(3)\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

- Với $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=\dfrac{1}{2},\ y=2.$

**Câu 61.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\left(x^2+y^2\right)=y^4\left(y^2+1\right) & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$

- Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{4}$
- Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ
- Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\dfrac{x}{y}=y^3+y$ (a)
- **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t^3+t$, với $t\in\mathbb{R}$.

  Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$, với mọi $t\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Do đó: $(a) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$.
- Thay $x = y^2$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{(4x+5)(x+8)} = 23 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{23}{5} \\ 4(4x+5)(x+8) = (23-5x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{23}{5} \\ x^2 - 42x + 41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} \le x \le \frac{23}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 41 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

- Với $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (1;-1),\ (x;y) = (1;1)$.

**Câu 62.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + 12y^2 + 25y + 18 = (2x+9)\sqrt{x+4} & (1) \\ \sqrt{3x+1} + 3x^2 - 14x - 8 = \sqrt{6 - 4y - y^2} & (2) \end{cases}$

**Điều kiện:** $\begin{cases} x \ge -\frac{1}{3} \\ 6 - 4y - y^2 \ge 0 \end{cases}$ (*)

Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của** $x$ **và** $y$ (sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

$$2y^3 + 12y^2 + 25y + 18 = (2x+9)\sqrt{x+4} \Leftrightarrow (2(y+2)^3 + (y+2) = 2(\sqrt{x+4})^3 + \sqrt{x+4} \quad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Nên:

$$(3) \Leftrightarrow f(y+2) = f(\sqrt{x+4}) \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -2 \\ (y+2)^2 = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -2 \\ x = 4y + y^2 \end{cases} \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (5)$$

Phương trình (5) có một nghiệm là $x = 5$ nên có thể biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 4 - (\sqrt{6-x} - 1) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \quad \text{[Tại sao ?]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left[\underbrace{\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1)}_{>0}\right] = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Với $x=5 \Rightarrow y=1$ (thỏa điều kiện (*))

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=5,\ y=1$.

**Câu 63.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3+17x-32y=6x^2-9y^2-24 & (1) \\ y+2\sqrt{x+4}+x+9\sqrt{2y-x+9}=x^2+9y+1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x\geq -4 \\ 2y-x+9\geq 0 \end{cases}$ (*)

Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của $x$ và $y$

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u)=f(v)$)

$$x^3-y^3+17x-32y=6x^2-9y^2-24 \Leftrightarrow x^3-6x^2+17x-18=y^3-9y^2+32y-42$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3+5(x-2)=(y-2)^3+5(y-2) \quad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+5t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t)=3t^2+5>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f(x-2)=f(y-3) \Leftrightarrow x-2=y-3 \Leftrightarrow y=x+1$ (4)

Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$x+3\sqrt{x+4}+x+9\sqrt{x+11}=x^2+9x+10 \quad (5)$$

Phương trình (5) có một nghiệm là $x=5$ nên có thể biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.

$$(5) \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x+4}-3)+(x+9)(\sqrt{x+11}-4)=x^2+2x-35$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}+(x+9)\cdot\frac{x-5}{\sqrt{x+11}+4}=(x-5)(x+7)$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left[\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}+\frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}-(x+7)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}+\dfrac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}-(x+7)=0 \quad (6) \end{array}\right.$$

Chứng minh (6) vô nghiệm

$$(6) \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-\frac{x+5}{2}+\frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}-\frac{x+9}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}-\frac{1}{2}\right)}_{<0}+\underbrace{(x+9)\left(\frac{1}{\sqrt{x+11}+4}-\frac{1}{2}\right)}_{<0}\underbrace{-\frac{2}{\sqrt{x+4}+3}}_{<0}=0:$$

phương trình VN

Với $x=5 \Rightarrow y=6$ (thỏa điều kiện (*))

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=5,\ y=6.$

**Câu 64.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y & (1)\\ x^2+2x\ y-2\ +y^2-8y+4=0 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $x\geq 2$ (*)

Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của $x$ và $y$

$$\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-2\ +5}=y+\sqrt{y^4+5} \quad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f\ t\ =t+\sqrt{t^4+5}$ trên nữa khoảng $0;+\infty$ .

$f$ liên tục trên $0;+\infty$ và $f'\ t\ =1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}}>0,\forall t\in 0;+\infty \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $0;+\infty$

Do $\sqrt[4]{x-2}\geq 0$ và $4y=\ x+y-2\ ^2\Rightarrow y\geq 0$ nên

$$3\Leftrightarrow f\ \sqrt[4]{x-2}\ =f\ \ y\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}=y\Leftrightarrow x=y^4+2 \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$4y=\ y^4+y\ ^2$$

$$\Leftrightarrow y\ \ y^7+2y^4+y-4\ =0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y=0\\ y^7+2y^4+y-4=0\end{bmatrix} \quad (5)$$

Giải phương trình (5) bằng phương pháp hàm số

Xét hàm số $g\ \ y\ =y^7+2y^4+y-4$ trên nữa khoảng $0;+\infty$ .

Do $g$ liên tục trên $0;+\infty$ và $g'\ \ y\ =7y^6+8y^3+1>0,\forall y\in 0;+\infty \Rightarrow g\ \ y$ đồng biến trên $0;+\infty$

Nên: $5\Leftrightarrow g\ \ y\ =g\ \ 1\ \Leftrightarrow y=1$

Với $y=0\Rightarrow x=2$ [thỏa (*)]

Với $y=1\Rightarrow x=3$ [thỏa (*)]

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;0),\ (x;y)=(3;1).$

**Câu 65.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-3x-y^3-6y^2-9y-2+\ln\dfrac{x-1}{y+1}=0 & (1)\\ y\left[\log_2(x-3)+\log_3 y\right]=x+1 & (2)\end{cases}$.

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{x-1}{y+1}>0\\ x-3>0\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\ y>0\end{cases}$

Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của $x$ và $y$

$1 \Leftrightarrow (x-1)^3+3(x-1)^2+\ln(x-1)=(y+1)^3+3(y+1)^2+\ln(x+1)$ (3)

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+3t^2+\ln t$ trên khoảng $(0;+\infty)$

$$f'(t)=3t^2+6t+\frac{1}{t}>0\ \forall t>0 \Rightarrow\ f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0;+\infty)$$

Do $x-1>0$ và $y+1>0$ nên

$$(3)\Leftrightarrow f(x-1)=f(y+1)\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow y=x-2 \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(x-2)\left[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)\right]=x+1 \quad (5)$$

Giải phương trình (5) bằng phương pháp hàm số

$$5 \Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)=\frac{x+1}{x-2}\Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)-\frac{x+1}{x-2}=0 \quad (6)$$

Xét hàm số $g(x)=\log_2(x-3)+\log_3(x-2)-\frac{x+1}{x-2}$ trên khoảng $(3;+\infty)$

$$g'(x)=\frac{1}{(x-3)\ln 2}+\frac{1}{(x-2)\ln 3}+\frac{3}{(x-2)^2}>0\ \forall x>3$$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ .

Nên $(6)\Leftrightarrow g(x)=g(5)\Leftrightarrow x=5\xrightarrow{(4)} y=3$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=5,\ y=3.$

**Câu 66.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x^2+3y^2+8=(y-x)\left(y^2+xy+x^2+6\right) & (1)\\ (x+y-13)\left(\sqrt{3y-14}-\sqrt{x+1}\right)=5 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ 3y-14\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge\frac{14}{3}\end{cases}$ (*)

Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của $x$ và $y$

$$(1)\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=(y-1)^3+3(y-1) \quad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3+3t\ ,t\in\mathbb{R}$

$$f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Do $x+1>0$ và $y-1>0$ nên

$$(3)\Leftrightarrow\ f(x+1)=f(y-1)\Leftrightarrow x+1=y-1\Leftrightarrow x+2=y \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(2x-11)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)=5 \quad (5)$$

Giải phương trình (5) bằng phương pháp hàm số

Ta nhận thấy $x=\frac{11}{2}$ không là nghiệm của phương trình $(5)$ nên

$$(5)\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{2x-11}=0. \qquad (6)$$

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{2x-11}, x\in\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{(2x-11)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}}+\frac{10}{(2x-11)^2}>0\ \forall x\in\left(\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)\&\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)\&\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$

Trên khoảng $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ thì $g(x)$ đồng biến, $3\in\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right), g(3)=0$ nên

$6 \Leftrightarrow g(x)=g(3)\Leftrightarrow x=3\xrightarrow{(4)}y=5$ thoả mãn (*)

Trên khoảng $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$ thì $g(x)$ đồng biến, $8\in\left(\frac{11}{2};+\infty\right), g(8)=0$ nên

$6 \Leftrightarrow g(x)=g(8)\Leftrightarrow x=8\xrightarrow{(4)}y=10$ thoả mãn (*)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(3;5),\ (x;y)=(8;10).$

**Câu 67.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1)\\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}x\le 1\\ -\frac{3}{2}\le y\le\frac{3}{2}\end{cases}$ (*)

Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của $x$ và $y$ (sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u)=f(v)$)

$$2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}\Leftrightarrow 2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y^3+y=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x} \qquad (3)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$f'(t)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Nên: $3\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ y^2=1-x\end{cases}$ (4)

Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1 \qquad (5)$$

Giải phương trình (5) bằng phương pháp đặt ẩn phụ chuyển về hệ đối xứng loại II

- Phương trình (5) viết lại thành: $2x-3^{2}=2\sqrt{4x+5}+11$

  Điều kiện

  Đặt $\sqrt{4x+5}=2t-3\ \left(t\geq\frac{3}{2}\right)$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-3^{2}=4t+5 & (6)\\ 2t-3^{2}=4x+5 & (7)\end{cases}$$

- Trừ theo từng vế của (6) và (7) ta được:

$$4\ x+t-3\ \ x-t\ =4t-4x\ \Leftrightarrow\ \ x-t\ \ x+t-2\ =0$$

+ Khi $x=t$, thay vào (7) ta được:

$$4x^{2}-12x+9=4x+5\Leftrightarrow x^{2}-4x+1=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$$

So với điều kiện của $x$ và $t$ ta chọn $x=2+\sqrt{3}$. [không thỏa (*)]

+ Khi $x+t-2=0\Leftrightarrow t=2-x$, thay vào (7) ta được:

$$1-2x^{2}=4x+5\Leftrightarrow x^{2}-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}\ \ \text{(loại)}$$

So với điều kiện của $x$ và $t$ ta chọn $x=1-\sqrt{2}$.

Với $x=1-\sqrt{2}\Rightarrow\ y=\pm\sqrt[4]{2}$. [thỏa (*)]

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\ 1-\sqrt{2};-\sqrt[4]{2}$ , $(x;y)=\ 1-\sqrt{2};\sqrt[4]{2}$ .

**Câu 68.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{8xy}{x^{2}+y^{2}+6xy}+\dfrac{17}{8}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{21}{4} & (1)\\ \sqrt{x-16}+\sqrt{y-9}=7 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 16\\ y\geq 9\end{cases}$

Đánh giá phương trình (1) để tìm hệ thức đơn giản liên hệ giữa x và y.

Ta có: $1\ \Leftrightarrow\frac{8}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+6}+\frac{17}{8}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{4}=6$

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}=2\quad t=2\Leftrightarrow x=y$ và sử dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{8}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+6}+\frac{17}{8}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{4}=\frac{8}{t+6}+\frac{17}{8}t+\frac{3}{4}=\frac{8}{t+6}+\frac{1}{8}\ t+6\ +2t\geq 2+2.2=6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{8}{t+6}=\frac{1}{8}\ t+6\ \Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=y$

Thế y = x vào (2), ta được: $\sqrt{x-16}+\sqrt{x+9}=7$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-16\ \ x-9}=37-x$$

$$\Leftrightarrow x=25$$

- Với $x=25\ \Rightarrow\ y=25$ [thỏa (*)]

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=25,\ y=25.$

**Câu 69.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y\ \ x+y\ =4y & (1) \\ x^2+1\ \ x+y-2\ =y & (2) \end{cases}$ (*)

Biến đổi sao cho hai phương trình của hệ xuất hiện hai biểu thức giống nhau

Do $y=0$ không thỏa mãn hệ trên nên

$$*\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y}+\ x+y\ =4 \\ \frac{x^2+1}{y}\ x+y-2\ =1 \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $u=\frac{x^2+1}{y}$ và $v=x+y-2$ , hệ trở thành $\begin{cases} u+v=2 \\ u.v=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-1=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\vee\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2),\ (x;y)=(-2;5).$

**Câu 70.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 & (1) \\ x+y-1\ ^2-\frac{4}{x-y\ ^2}=3 & (2) \end{cases}$ (*)

Điều kiện: $x-y\neq 0$

Biến đổi hệ phương trình thành dạng có chứa hai biểu thức $x+y$ và $x-y$

$$\begin{cases} x+y\ \ x-y\ =6 \\ x+y-1\ ^2-\frac{4}{x-y\ ^2}=3 \end{cases}$$

Đặt $u=x+y$ và $v=x-y$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} uv=6 \\ u-1^{2}-\dfrac{4}{v^{2}}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{6}{u} \\ u^{2}-2u+1-\dfrac{u^{2}}{9}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{6}{u} \\ 8u^{2}-18u-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3;\mathrm{v}=2 \\ u=-\dfrac{3}{4};\mathrm{v}=-8 \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{4} \\ x-y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{35}{8} \\ y=\dfrac{29}{8} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$; $(x;y)=\left(-\frac{35}{8};\frac{29}{8}\right)$.

**Câu 71.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy\left(1+\sqrt{1+x^{2}}\right)\left(\sqrt{4+y}-\sqrt{y}\right)=8 \\ -3x^{4}y+2x^{2}y+26x=2\sqrt[3]{x^{3}-14} \end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases} xy\left(1+\sqrt{1+x^{2}}\right)\left(\sqrt{4+y}-\sqrt{y}\right)=8(1) \\ -3x^{4}y+2x^{2}y+26x=2\sqrt[3]{x^{3}-14}(2) \end{cases}$$

ĐK: $y\geq 0$

Ta có $\sqrt{4+y}-\sqrt{y}>\sqrt{y}-\sqrt{y}=0$ do đó từ phương trình (1) suy ra x>0; y>0

$$(1)\Leftrightarrow xy\left(1+\sqrt{1+x^{2}}\right)\left(\sqrt{4+y}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{4+y}+\sqrt{y}\right)=8\left(\sqrt{4+y}+\sqrt{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(1+\sqrt{1+x^{2}}\right)=2\left(\sqrt{4+y}+\sqrt{y}\right)\Leftrightarrow x+x\sqrt{1+x^{2}}=\frac{2}{\sqrt{y}}+\frac{2}{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{4}{y}+1}$$

$$\Leftrightarrow x+x\sqrt{1+x^{2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^{2}}\ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{1+t^{2}}$ trên $(0;+\infty)$. Có $f'(t)=1+\sqrt{1+t^{2}}+\dfrac{t^{2}}{\sqrt{1+t^{2}}}>0\forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà phương trình (3) có dạng $f(x)=f\left(\dfrac{2}{\sqrt{y}}\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{x^{2}}$

Thay $y=\dfrac{4}{x^{2}}$ vào phương trình (2) ta có

$$-12x^{2}+26x+8=2\sqrt[3]{x^{3}-14}\Leftrightarrow -6x^{2}+13x+4=\sqrt[3]{x^{3}-14}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^{3}+(x-2)=\left(x^{3}-14\right)+\sqrt[3]{x^{3}-14}(4)$$

Xét hàm số $g(u)=u^{3}+u$ trên R

Có $g'(u)=3u^{2}+1>0\forall u\in R$

Suy ra hàm số g(u) đồng biến trên R mà phương trình (4) có dạng:

$g(x-2)=g\left(\sqrt[3]{x^3-14}\right)\Leftrightarrow x-2=\sqrt[3]{x^3-14}\Leftrightarrow -6x^2+12x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2}\,(nhận) \\ x=1-\sqrt{2}\,(loại)\end{array}\right.$

=> $y=12-8\sqrt{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{2},\ y=12-8\sqrt{2}.$

**Câu 72.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} \\ 6x-y-11+\sqrt{10-4x-2x^2}=0\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} y^2+4y+2\ge 0 \\ -2x^2-4x+10\ge 0\end{cases}$ phương trình

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$y-6x+11=\sqrt{10-4x-x^2}=\dfrac{\sqrt{4(10-4x-2x^2)}}{2}\le \dfrac{14-4x-2x^2}{4}$

Rút gọn ta được: $4(y-6x+11)\le 14-4x-2x^2\Leftrightarrow x^2-10x+2y+15\le 0$ (3)

Tương tự phương trình (1)

$x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2}\le \dfrac{-y^2-4y-2}{2}\Leftrightarrow 2x^2+4x+y^2+4y-3\le 0$ (4)

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta được:

$3x^2-6x+y^2+6y+12\le 0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+(y+3)^2\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện đề bài, suy ra nghiệm hệ phương trình là $x=1,\ y=-3.$

**Câu 73.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+4\ x^2+5xy-6y^2\ =\sqrt{3x^2-2xy-y^2} \\ 3x^2+10xy+34y^2=47\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R}).$$

ĐK: $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2\ge 0 \\ 4x^2+3xy-7y^2\ge 0\end{cases}$

Chuyển vế nhân liên hợp ở phương trình $1$ , ta được:

$$x^2+5xy-6y^2\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+\sqrt{3x^2-2xy-y^2}}+4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-6y\end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào $2$ , ta được: $x^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=-1\Rightarrow y=-1\end{array}\right.$

Với $x=-6y$ thay vào $2$ , ta được: $82y^2=47\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{\dfrac{47}{82}}\Rightarrow x=-6\sqrt{\dfrac{47}{82}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{47}{82}}\Rightarrow x=6\sqrt{\dfrac{47}{82}}\end{array}\right.;$

KL: $S=\left\{ 1;1\ ,\ -1;-1\ ,\ \left(\sqrt{\frac{47}{82}};-6\sqrt{\frac{47}{82}}\right);\ \left(-\sqrt{\frac{47}{82}};6\sqrt{\frac{47}{82}}\right)\right\}$.

**Câu 74.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y\\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x}\end{cases}$

Đk: $-1\le x\le 1$

Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}2y^3+y=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}\\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{1-x}\quad(1),y\ge 0\\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x}\quad(2)\end{cases}$ (Do hàm $f(t)=2t^3+t$ luôn đồng biến)

Ta có (2) $\Leftrightarrow\sqrt{1-x}+1=2x^2+2x\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}-1=0$

Đặt $x=\cos t$ với $t\in[0;\pi]$

Ta có $x=\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}\ \Rightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

Nên phương trình (2) trở thành $2\cos^2 t+2\cos t\sin t-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}-1=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{\pi}{3}+\frac{k4\pi}{3}\\ t=\frac{\pi}{5}+\frac{k4\pi}{5}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{5}\in[0;\pi]\\ t=\pi\ (l)\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=\cos\frac{\pi}{5}\\ y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{10}\end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.

**Câu 75.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+12y^2+x+2=8y^3+8y\\ \sqrt{x^2+8y^3}+2y=5x\end{cases}$

$\begin{cases}x^3+12y^2+x+2=8y^3+8y(1)\\ \sqrt{x^2+8y^3}+2y=5x(2)\end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^3+x=(2y-1)^3+(2y-1)(*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R},f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số f(t) đồng biến trên R.

Từ (*) ta có: $f(x)=f(2y-1)\Leftrightarrow x=2y-1$

Thế x=2y-1 vào (2) giải ra được y=1 hoặc y=6 thoả mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1),\ (x;y)=(11;6)$.

**Câu 76.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 \end{cases}$

Điều kiện xác định: $x\ge -\frac{1}{2}, y\ge 2$

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t \quad t\in(0;+\infty)$

Suy ra $f'(t)=6t^2+1>0$ nên đây là hàm số đồng biến

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $f(2x+1)=f(\sqrt{y-2})\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{y-2}$

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}=6 \quad (*)$

Xét hàm số $g(y)=\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}-6,\ \ y\in(2;+\infty)$

$g'(y)=\frac{1}{\sqrt[4]{4y-8}}+\frac{1}{\sqrt{2y+4}}>0 \ \ \forall y\in(2;+\infty)$ nên g(y) đồng biến

Hơn nữa g(6) = 0 nên (*) có duy nhất 1 nghiệm là y = 6

Với y = 6 ta có $x=\frac{1}{2}$

**Câu 77.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$

ĐK: x, y> 0.

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy} \\ \sqrt{xy}(x+y)=78 \end{cases}$.

Đặt $t=\sqrt{xy}$. (ĐK: t>0)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7+t \\ t(x+y)=78 \end{cases} \Rightarrow t^2+7t-78=0. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-13 & (l) \\ t=6 & (n) \end{array}\right.$

t=6 $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$ v $\begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x;y)=(4;9),\ (x;y)=(9;4)$.

**Câu 78.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1-y)(x-3y+3)-x^2=\sqrt{(y-1)^3}.\sqrt{x} \\ \sqrt{x^2-y}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(y-2) \end{cases} (x,y\in R)$.

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-y\ge 0 \\ x\ge 0, y\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge y \\ x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$

Nhận xét $x \ge 1, y = 1$ không là nghiệm của hệ. Xét $y > 1$ thì phương trình (1) của hệ (I)

$x^2 + x(y-1) - 3(y-1)^2 + (y-1)\sqrt{x(y-1)} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y-1}\right)^2 + \frac{x}{y-1} - 3 + \sqrt{\frac{x}{y-1}} = 0$

$t = \sqrt{\frac{x}{y-1}}, t > 0$ . Khi đó, phương trình (1) trở thành

$t^4 + t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^3 + t^2 + 2t + 3\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Với t = 1, thì $\sqrt{\frac{x}{y-1}} = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$ , thế vào pt(2), ta được

$\sqrt{x^2 - x - 1} + 2\sqrt[3]{x^3 - 4} = 2(x-1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} + 2\left[\sqrt[3]{x^3 - 4} - (x-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} + 6\left[\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 4\right)^2} + +(x-1)\sqrt[3]{x^3 - 4} + (x-1)^2}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1}\left(1 + \frac{6\sqrt{x^2 - x - 1}}{\sqrt[3]{\left(x^3 - 4\right)^2} + +(x-1)\sqrt[3]{x^3 - 4} + (x-1)^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (x \ge 1).$

Với $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Đối chiếu ĐK, hệ phương có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

# PHẦN 11. BÀI TOÁN TỔNG HỢP

## 11.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**Câu 1.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \ge y \ge z$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y$.

Ta có $\frac{x}{z}+xz \ge 2x, \quad \frac{z}{y}+yz \ge 2z$ .

Từ đó suy ra $P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y \ge 2x-xz+2z-yz+3y$

$=2(x+z)+y(x+y+z)-xz-yz=2(x+z)+y^2+x(y-z)$

Do $x>0$ và $y \ge z$ nên $x(y-z) \ge 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$P=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+3y \ge 2(x+z)+y^2=2(3-y)+y^2=(y-1)^2+5 \ge 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi x=y=z=1

**Câu 2.** Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xy}$.

Ta có : $P=\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}$ (*)

Nhận thấy : $x^2+y^2-xy \ge xy \quad \forall x, y \in R$

Do đó : $x^3+y^3 \ge xy(x+y) \quad \forall x, y>0$ hay $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \ge x+y \quad \forall x, y>0$

Tương tự, ta có : $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y} \ge y+z \quad \forall y, z>0$

$\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{z} \ge z+x \quad \forall x, z>0$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức vừa nhận được ở trên, kết hợp với (*), ta được:

$P \ge 2(x+y+z)=2 \quad \forall x, y, z>0$ và $x+y+z=1$

Hơn nữa, ta lại có P = 2 khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Vì vậy, minP = 2.

**Câu 3.** Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{4^a+9^b+16^c}+\sqrt{9^a+16^b+4^c}+\sqrt{16^a+4^b+9^c}$.

+ Đặt $\vec{u}=\left(2^a;3^b;4^c\right), \vec{v}=\left(2^c;3^a;4^b\right), \vec{w}=\left(2^b;3^c;4^a\right) \Rightarrow M=|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|$

$M \ge |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=\sqrt{\left(2^a+2^b+2^c\right)^2+\left(3^a+3^b+3^c\right)^2+\left(4^a+4^b+4^c\right)^2}$

+ Theo cô – si có $2^2+2^b+2^c \ge 3\sqrt[3]{2^{a+b+c}} = 6$. Tương tự …

+ Vậy $M \ge 3\sqrt{29}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

**Câu 4.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn : $x+y+z=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}-\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$.

Áp dụng bđt Cauchy cho các số dương: $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y+2}{27}+\frac{y^2-2y+4}{27} \ge 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{729}} = \frac{x}{3}$

Tương tự, thu được : $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}+\frac{x^2+y^2+z^2+15}{27} \ge 1$

$\Rightarrow P \ge \frac{4}{9}-\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{27} = \frac{4}{9}-\frac{(x+y+z)^2}{27} = \frac{1}{9}$

$P=\frac{1}{9}$ khi và chỉ khi $x=y=z=1 \Rightarrow \min P = \frac{1}{9}$

**Câu 5.** Cho các số thực dương $x, y, z$ thỏa $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2+\frac{xy+yz+zx}{x^2y+y^2z+z^2x}$.

Áp dụng BĐT TBC-TBN cho hai số dương, ta có

$x^3+xy^2 \ge 2x^2y, y^3+yz^2 \ge 2y^2z, z^3+zx^2 \ge 2z^2x.$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \ge 2(x^2y+y^2z+z^2x)-(xy^2+yz^2+zx^2) \quad (1)$

Mặt khác, do $x+y+z=3$ nên

$3(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$

$=x^3+y^3+z^3+(x^2y+y^2z+z^2x)+(xy^2+yz^2+zx^2) \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có $x^2+y^2+z^2 \ge x^2y+y^2z+z^2x$.

Do đó $P \ge x^2+y^2+z^2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$

Ta có $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

Đặt $t=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow xy+yz+zx=\frac{9-t}{2}$.

Do $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow t \ge 3$

Khi đó $P \ge t+\frac{9-t}{2t}, t \ge 3 \Leftrightarrow P \ge \frac{2t^2-t+9}{2t}, t \ge 3$

Xét hàm số $f(t)=\frac{2t^2-t+9}{2t}$, trên $[3;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên, ta có hàm f đồng biến trên $[3;+\infty)$.

$\Rightarrow P \ge \min_{t\ge 3} f(t) = f(3) = 4$.

Kết luận được : $\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

**Câu 6.** Cho x,y ∈ R và x, y > 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{\left(x^3 + y^3\right) - \left(x^2 + y^2\right)}{(x-1)(y-1)}$

Đặt t = x + y ; t > 2. Áp dụng BĐT $4xy \le (x + y)^2$ ta có $xy \le \dfrac{t^2}{4}$

$P = \dfrac{t^3 - t^2 - xy(3t-2)}{xy - t + 1}$. Do 3t - 2 > 0 và $-xy \ge -\dfrac{t^2}{4}$ nên ta có

$$P \ge \frac{t^3 - t^2 - \dfrac{t^2(3t-2)}{4}}{\dfrac{t^2}{4} - t + 1} = \frac{t^2}{t-2}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t-2}$; $f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t}{(t-2)^2}$; f'(t) = 0 ⇔ t = 0 v t = 4.

| t | 2 | | 4 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(t) | \|\| | - | 0 | + | |
| f(t) | \|\| + ∞ | ↘ | 8 | ↗ | +∞ |

Do đó min P = $\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)$ = f(4) = 8 đạt được khi $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

**Câu 7.** Cho x, y, z $\ge 0$ thoả mãn x+y+z > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^3 + y^3 + 16z^3}{\left(x + y + z\right)^3}$

Trước hết ta có: $x^3 + y^3 \ge \dfrac{(x+y)^3}{4}$ (biến đổi tương đương) $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \ge 0$

Đặt x + y + z = a. Khi đó $4P \ge \dfrac{(x+y)^3 + 64z^3}{a^3} = \dfrac{(a-z)^3 + 64z^3}{a^3} = (1-t)^3 + 64t^3$

(với t = $\dfrac{z}{a}$, $0 \le t \le 1$)

Xét hàm số $f(t) = (1 - t)^3 + 64t^3$ với $t \in [0;1]$. Có

$f'(t) = 3\left[64t^2 - (1-t)^2\right]$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{9} \in [0;1]$

Lập bảng biến thiên

$\Rightarrow \underset{t\in[0;1]}{Minf}(t)=\frac{64}{81}\Rightarrow$ GTNN của P là $\frac{16}{81}$ đạt được khi x = y = 4z > 0

**Câu 8.** Cho các số thực không âm a,b,c thõa mãn a+b+c =1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Đặt t=ab+bc+ca ( $t\geq 0$ ),ta có

$a^2+b^2+c^2\geq$ ab+bc+ca

=>$1=(a+b+c)^2= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)=3t$

=> $a^2+b^2+c^2=1-2t$ với $t\leq\frac{1}{3}$

Theo bất đẳng thức Cô-si

$T^2=(ab+bc+ca)^2\leq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Do đó $M\geq t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$

Xét hàm số $f(t)= t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$ trên tập $D=\left[0;\frac{1}{3}\right]$,

$f'(t)=2t+3-\frac{2}{\sqrt{1-2t}}$

$f''(t)=2-\frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}}\leq 0\forall t\in D$

=>f'(t) nghịch biến trên D

=>$f'(t) \geq f'(1/3)=\frac{11}{3}-2\sqrt{3}$ => f(t)đồng biến trên D

=>$f(t) \geq f(0)=2$

Vậy minM =2 đạt được khi t=0,tức là với a,b,c không âm thõa mãn

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab=bc=ca \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$$

<=>a,b,c là một trong các bộ số (0;0;1),(0;1;0),(1;0;0)

**Câu 9 .** Cho các số thực $x;y$ thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+|y-2|$.

Xét các điểm M(x−1; −y) , N(x+1; y). Ta có OM + ON ≥ MN

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq\sqrt{4+4y^2} \Rightarrow P\geq 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|=f(y)$

**TH1: y ≤ 2**: $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y \Rightarrow f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$

$f'(y)=0\Leftrightarrow 2y=\sqrt{1+y^2}\Leftrightarrow\begin{cases} y\geq 0 \\ 3y^2=1 \end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lập bảng biến thiên f(y) $\Rightarrow \min\limits_{x\in(-\infty.2]} f(y) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2+\sqrt{3}$

**TH2: y ≥ 2**: $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{5} > 2+\sqrt{3}$

Vậy $P \geq 2+\sqrt{3}\ \ \forall x; y$ .

Do đó $MinP = 2+\sqrt{3}$ khi x = 0 ; y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Câu 10.** Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}, y > 0, z > 0$ và $x+y+z = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{8-(y+z)^2}$.

Ta có $P = \frac{1}{(-1-z)^2} + \frac{1}{(-1-y)^2} + \frac{1}{8-(-1-x)^2} = \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{8-(1+x)^2}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz}$

Thật vậy: $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \Leftrightarrow (1+yz)[(1+z)^2 + (1+y)^2] \geq [(1+z)(1+y)]^2$.

$\Leftrightarrow (1+yz)(2+2z+2y+z^2+y^2) \geq (1+zy+z+y)^2$

$\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy) + 2(1+yz) + (1+zy)(y-z)^2 + 2zy(1+yz)$

$\geq (1+zy)^2 + 2(z+y)(1+zy) + (z+y)^2$

$\Leftrightarrow (1+zy)(y-z)^2 + 2 + 4yz + 2y^2z^2 - (1+yz)^2 - (y-z)^2 - 4yz \geq 0$

$\Leftrightarrow yz(y-z)^2 + (1-yz)^2 \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $y = z = 1$.

Ta lại có $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \Rightarrow yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{(-1-x)^2}{4} = \frac{(1+x)^2}{4}$

Do đó $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \geq \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{4}} = \frac{4}{4+(1+x)^2}$

$\Rightarrow P \geq \frac{4}{4+(1+x)^2} + \frac{1}{8-(x+1)^2}$

Do $-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}$ nên $(x+1)^2 \in [0;8)$.

Đặt $t = (1+x)^2 \Rightarrow t \in [0;8)$ và $P \geq \frac{4}{4+t} + \frac{1}{8-t}$

Xét $f(t) = \frac{4}{4+t} + \frac{1}{8-t}$ với $t \in [0;8)$. $f'(t) = -\frac{4}{(4+t)^2} + \frac{1}{(8-t)^2} = \frac{-3t^2+72t-240}{(4+t)^2(8-t)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 72t - 240 = 0 \Leftrightarrow t = 4; t = 20$ (loại)

Bảng biến thiên

| T | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | | | |
| f'(t) | | - | 0 | + |
| f(t) | $\frac{9}{8}$ | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ↗ |
| | $+\infty$ | | | |

Do đó $P \ge f(t) \ge \frac{3}{4}$ và $P = \frac{3}{4}$ khi $\begin{cases} (1+x)^2 = 4 \\ y = z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = z = 1 \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{3}{4}$ khi $x = -3, y = z = 1$

**Câu 11**. Cho các số thực dương a,b,c thỏa a + b + c =3. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + bc}{b + ca} + \frac{b^2 + ca}{c + ab} + \frac{c^2 + ab}{a + bc}$

Xét $\frac{1}{3}P = \frac{a^2 + bc}{3b + 3ca} + \frac{b^2 + ca}{3c + 3ab} + \frac{c^2 + ab}{3a + 3bc}$

Ta có $3b + 3ca = b(a + b + c) + 3ca = b(a + b + c) + ca + 2ca$ mà $a^2 + c^2 \ge 2ac$

nên $3b + 3ca \le ab + b^2 + bc + ca + a^2 + c^2$

Chứng minh tương tự ta có: $3c + 3ab \le ac + c^2 + bc + ab + a^2 + b^2$

$3a + 3bc \le a^2 + ab + ac + bc + c^2 + b^2$

Khi đó $\frac{1}{3}P \ge \frac{a^2 + bc + b^2 + ca + c^2 + ab}{ab + b^2 + bc + ca + a^2 + c^2} = 1 \Leftrightarrow P \ge 3$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy $\text{Min}P = 3$ khi a = b = c = 1.

**Câu 12.** Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $(x + y)^3 + 4xy \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^2 + y^2)^2 - 2(x + y)^2 - xy(3xy - 4) + 2015$.

Với mọi số thực x, y ta luôn có $(x + y)^2 \ge 4xy$, nên từ điều kiện suy ra

$(x + y)^3 + (x + y)^2 \ge (x + y)^3 + 4xy \ge 2 \Rightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 - 2 \ge 0 \Rightarrow x + y \ge 1$

Ta biến đổi P như sau $P=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2+2xy)-xy(3xy-4)+2015$

$=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+2015$ (3)

Do $x^4+y^4\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ nên từ (3) suy ra $P\ge\frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+2015$

Đặt $x^2+y^2=t$ thì $t\ge\frac{1}{2}$ (do $x+y\ge 1$).

Xét hàm số $f(t)=\frac{9}{4}t^2-2t+2015$ với $t\ge\frac{1}{2}$, có $f'(t)=\frac{9}{2}t-2>0$, với $t\ge\frac{1}{2}$ nên hàm số f(t) đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)}f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{32233}{16}$.

Do đó GTNN của P bằng $\frac{32233}{16}$, đạt được khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

**Câu 13.** Cho $x,y,z\in[0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2}+\frac{1}{z^2+x^2+2}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$

Ta có $x^2+y^2+2=(x^2+1)+(y^2+1)\ge 2(x+y),\ldots;\ \sqrt{xy}\le\frac{xy+1}{2},\ldots$

Nên $P\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+xy+yz+zx+3\right]$.

Ta có $(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 9xyz$

$\Rightarrow(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\ge\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\le\frac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

$$=\frac{27}{8(xy+yz+zx)}+\frac{3}{8}$$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}\left[\frac{27}{8(xy+yz+zx)}+xy+yz+zx+\frac{27}{8}\right]$

Đặt $t=xy+yz+zx$.

Do $x,y,z\in[0;2]\Rightarrow(2-x)(2-y)(2-z)\ge 0\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge\dfrac{4+xyz}{2}\ge 2\Rightarrow t\ge 2$

Mặt khác: $xy+yz+zx\le\dfrac{1}{3}(x+y+z)^2=3\Rightarrow t\le 3$.

Vậy $t\in[2;3]$

Ta có $P\le\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{27}{8t}+t+\dfrac{27}{8}\right]=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t\in[0;2]$ ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2}\left[t-\dfrac{27}{8t^2}\right]=\dfrac{8t^3-27}{16t^2}>0\ \forall t\in[2;3]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;3]$. $\Rightarrow f(t)\le f(3)=\dfrac{15}{4}$.

Do $P\le f(t)\Rightarrow P\le\dfrac{15}{4}$. Có $P=\dfrac{15}{4}$ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{15}{4}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

**Câu 14.** Cho $a,b,c$ là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}.$$

Đặt $\begin{cases}x=a+2b+c\\y=a+b+2c\\z=a+b+3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+5y-3z\\b=x-2y+z\\c=-y+z\end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$P=\dfrac{-x+2y}{x}+\dfrac{4x-8y+4z}{y}-\dfrac{-8y+8z}{z}=\left(\dfrac{4x}{y}+\dfrac{2y}{x}\right)+\left(\dfrac{8y}{z}+\dfrac{4z}{y}\right)-17$

$P\ge 2\sqrt{\dfrac{4x}{y}.\dfrac{2y}{x}}+2\sqrt{\dfrac{8y}{z}.\dfrac{4z}{y}}-17=12\sqrt{2}-17;$

Đẳng thức xảy ra khi $b=\left(1+\sqrt{2}\right)a, c=\left(4+3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của $P$ là $12\sqrt{2}-17$.

**Câu 15.** Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$.

Ta có $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32\Leftrightarrow(x+y)^2-8(x+y)\le 0\Leftrightarrow 0\le x+y\le 8$

$A=(x+y)^3-3(x+y)-6xy+6\ge(x+y)^3-\dfrac{3}{2}(x+y)^2-3(x+y)+6.$

Xét hàm số: $f(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2-3t+6$ trên đoạn $[0;8]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3t-3,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Ta có $f(0)=6, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{17-5\sqrt{5}}{4}, f(8)=398$. Suy ra $A\geq\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Khi $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

**Câu 16.** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+2b=12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}+\frac{5}{8(a-b)^2}$

Từ giả thiết và bất đẳng thức CôSi ta có:

$a^2+2b=12\Leftrightarrow a^2+4+2b=16\Leftrightarrow 4a+2b\leq 16\Leftrightarrow 2\sqrt{4a.2b}\leq 16\Leftrightarrow 0<ab\leq 8$

Do đó $P\geq\frac{a^2b^2}{64}\left(\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}\right)+\frac{ab}{8}.\frac{5}{8(a-b)^2}=\frac{1}{16}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{5}{64}.\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}(t>2)$, ta có $P\geq\frac{1}{16}t^2+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}-\frac{1}{8}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{16}t^2+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}-\frac{1}{8}$ trên $(2;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{8}t-\frac{5}{64}.\frac{1}{(t-2)^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

| $t$ | $2$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{27}{64}$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có

$\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{27}{64}$

Suy ra $P\geq\frac{27}{64}$, dấu bằng xảy ra khi $a=2, b=4.$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{27}{64}$ khi $a=2, b=4.$

**Câu 17.** Cho các số thực dương $a, b, c$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$.

Đặt $A=P^3$

Ta có: $A=\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)=\frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân có :

$$1-ab \ge 1-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4}=\frac{\left[(1+a)+(1+b)\right](1+c)}{4}$$
$$\ge \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$$

Tương tự có: $1-bc \ge \frac{(1+a)\sqrt{(1+c)(1+b)}}{2}$

$$1-ca \ge \frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$$

Do đó $A \ge \frac{1}{8}\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)^2$

Mà: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \ge \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \ge 4^3$

Do đó min P = 8 đạt được khi a = b = c = $\frac{1}{3}$

**Câu 18.** Cho ba số thực dương $a,b,c$ và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}$.

Trước tiên ta chứng minh BĐT : $\frac{x^3+1}{x+2} \ge \frac{7}{18}x^2+\frac{5}{18}(x>0)$ (*)

$(*) \Leftrightarrow 18(x^3+1) \ge (x+2)(7x^2+5)$ luôn đúng với mọi x>0, dấu "=" xảy ra khi x=1

$\Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8) \ge 0$

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a}$

$\frac{a^3+b^3}{a+2b} \ge \frac{7a^2}{18}+\frac{5b^2}{18}$; $\frac{b^3+c^3}{b+2c} \ge \frac{7b^2}{18}+\frac{5c^2}{18}$; $\frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge \frac{7c^2}{18}+\frac{5a^2}{18}$;

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \ge \frac{12\left(a^2+b^2+c^2\right)}{18}=2$

Vậy MinS =2 khi a=b=c=1.

**Câu 19.** Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2 \le \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=8xyz+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$.

Ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$ , đặt t = $\sqrt[3]{xyz}>0$

Mà $\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\le\frac{1}{4}\Rightarrow 0<t\le\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ P $\ge 8t^3+\frac{3}{t^2}$. Xét hàm số $f(t)=8t^3+\frac{3}{t^2}$.

Ta có $\forall t\ne 0$, f'(t) $=24t^2-\frac{6}{t^3}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$.

Ta có bảng:

| t | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$ |
|---|---|---|---|
| f'(t) | \|\| | – | 0 |
| f(t) | | 13 | |

Từ bảng ta có f(t) $\ge$ 13 với mọi giá trị t thỏa mãn $0<t\le\frac{1}{2}$

Suy ra P $\ge$ 13. Dấu bằng xảy ra khi t = $\frac{1}{2}$ hay x = y = z = $\frac{1}{2}$ Kl: MinP = 13.

**Câu 20.** Cho $a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{a+c-b}+\frac{5}{a+b-c}$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y},x>0,y>0.$

$S=\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$

suy ra $S\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}.$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=a,$ nên $\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}=2\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}\right)=2\left(a+\frac{3}{a}\right)\ge 4\sqrt{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S$ bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}.$

**Câu 21.** Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}2y\ge x^2\\ y\le -2x^2+3x\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=x^4+y^4+\frac{2}{(x+y)^2}$

Từ giả thiết ta có $y \ge 0$ và $\frac{x^2}{2} \le -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 \le x \le \frac{6}{5}$ và

$x^2 + y^2 \le x^2 + \left(-2x^2 + 3x\right)^2 = 2x^2\left(2x^2 - 6x + 5\right)$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2\left(2x^2 - 6x + 5\right); x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta được $\underset{\left[0;\frac{6}{5}\right]}{Max}$ f(x) = 2

$\Rightarrow x^2 + y^2 \le 2$

$P = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{\left(x+y\right)^2} \ge \left(x^2 + y^2\right)^2 - \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{2} + \frac{2}{x^2 + y^2}$

Đặt $t = x^2 + y^2 \Rightarrow P \ge \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}$ , $0 < t \le 2$

Xét hàm số:

$g(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, t \in (0; 2], \quad g'(t) = t - \frac{2}{t^2} = \frac{t^3 - 2}{t^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$

Lập bảng biến thiên ta có Min $P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ *khi* $x = y = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$

**Câu 22.** Cho $a, b, c$ là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \le 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\left(a+1\right)^2} + \frac{4b^2}{\left(1+2b\right)^2} + \frac{8}{\left(c+3\right)^2}$

- Ta có: $P = \frac{1}{\left(a+1\right)^2} + \frac{4b^2}{\left(1+2b\right)^2} + \frac{8}{\left(c+3\right)^2} = \frac{1}{\left(a+1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b}+1\right)^2} + \frac{8}{\left(c+3\right)^2}$

- Đặt $d = \frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \le 3b$ trở thành $a^2 + c^2 + d^2 \le 3d$

Mặt khác: $P = \frac{1}{\left(a+1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{\left(c+3\right)^2} \ge \frac{8}{\left(a+\frac{d}{2}+2\right)^2} + \frac{8}{\left(c+3\right)^2}$

$\ge \frac{64}{\left(a+\frac{d}{2}+c+5\right)^2} = \frac{256}{\left(2a+d+2c+10\right)^2}$

- Mà: $2a + 4d + 2c \le a^2 + 1 + d^2 + 4 + c^2 + 1 = a^2 + d^2 + c^2 + 6 \le 3d + 6$

Suy ra: $2a+d+2c\le 6$

- Do đó: $P\ge 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a=1,c=1,b=\frac{1}{2}$

**Câu 23:** Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x+3y\le 7$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2xy+y+\sqrt{5(x^2+y^2)}-24\sqrt[3]{8(x+y)-(x^2+y^2+3)}$

Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\le\left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2\le 36\Rightarrow x+y+xy\le 5$.

Ta có $5(x^2+y^2)\ge(2x+y)^2\Rightarrow\sqrt{5(x^2+y^2)}\ge 2x+y$ và

$(x+y-3)^2=x^2+y^2+9+2xy-6x-6y\ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3)\ge 8(x+y)-(x^2+y^2+3)$

Suy ra $P\ge 2(xy+x+y)-24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t=x+y+xy,\ t\in(0;5]$ , $P\ge f(t)=2t-24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t)=2-\frac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}}=2\frac{\sqrt[3]{(2t+6)^2}-8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}}<0,\forall t\in(0;5]$

$\Rightarrow$ hàm số f(t) nghịch biến trên nữa khoảng $(0;5]$.

Suy ra $\min f(t)=f(5)=10-48\sqrt[3]{2}$

Vậy $\min P=10-48\sqrt[3]{2},khi\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

**Câu 24.** Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}}-\frac{4}{8+a+2b+3c}+\frac{1}{4+b+2c}$.

Ta có $2\sqrt{2bc}\le b+2c\Rightarrow\frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}}\ge\frac{1}{4a+4b+4c}$

và $\frac{-4}{8+a+2b+3c}\ge\frac{-1}{4+a+b+c}+\frac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P\ge\frac{1}{4(a+b+c)}+\frac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t=a+b+c,\ t>0$

xét $f(t)=\frac{1}{4t}+\frac{-1}{4+t},\quad t>0,\qquad f'(t)=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{(4+t)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$.

| t | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | - | 0 | + | |
| f | | ↘ | $-\frac{1}{16}$ | ↗ | |

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b=2c \\ a+b+c=b+2c \\ a+b+c=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=c=1 \\ b=2 \end{cases}$.

**Câu 25.** Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}+\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}+\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$

Ta có $x+y+z=1\Rightarrow x+y=1-z$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}=\frac{1-z}{\sqrt{xy+1-x-y}}=\frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$$

$$\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}=\frac{1-x}{\sqrt{yz+1-y-z}}=\frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}$$

$$\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}=\frac{1-y}{\sqrt{zx+1-x-z}}=\frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$$

Khi đó $P=\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}}+\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}}+\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}=\frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}+\frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}+\frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1-z}{(1-x)(1-y)}.\frac{1-x}{(1-y)(1-z)}.\frac{1-y}{(1-x)(1-z)}}=3.$$

Vậy $MinP=3$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

## 11.2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

**Câu 1.** Cho $a,b,c$ là các số dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$

Vì a + b + c = 3 ta có $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$

Vì theo BĐT Cô-Si: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\ge\frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ b = c

Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}\right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right)$

Suy ra $P\le\frac{bc+ca}{2(a+b)}+\frac{ab+bc}{2(c+a)}+\frac{ab+ca}{2(b+c)}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$,

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1. Vậy max P = $\frac{3}{2}$ khi a = b = c = 1.

**Câu 2.** Cho các số thực dương a,b,c đôi một khác nhau thỏa mãn $2a\le c$ và $ab+bc=2c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}$.

Theo giả thiết: $2a\le c$ nên $\frac{a}{c}\le\frac{1}{2}$; $ab+bc=2c^2\Leftrightarrow\frac{a}{c}.\frac{b}{c}+\frac{b}{c}=2\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{2c}{b}-1$

Vì $\frac{a}{c}\le\frac{1}{2}$ nên $\frac{b}{c}\ge\frac{4}{3}$

Đặt $t=\frac{c}{b}$ thì $0<t\le\frac{3}{4}$

$P=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}}+\frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}-1}+\frac{1}{1-\frac{a}{c}}=\frac{2t^2-t}{2t^2-t-1}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2(1-t)}=1-\frac{2}{2t+1}+\frac{7}{6(1-t)}$

Xét hàm số $f(t)=1-\frac{2}{2t+1}+\frac{7}{6(1-t)},t\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$. Ta có:

$f'(t)>0,\forall t\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$, do đó $f(t)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{3}{4}\right]$

Do đó GTLN của hàm số đạt tại $t=\frac{3}{4}$, suy ra $\max P=\frac{27}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}ab+bc=2c^2\\2a=c\end{cases}\Leftrightarrow 8a=3b=4c$,

chẳng hạn chọn được (a,b,c)=(3,8,6).

**Câu 3.** Cho $x, y, z$ là ba số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}$.

+ Áp dụng BĐT AM-GM, ta có

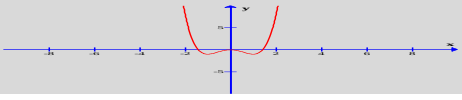
$$\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}} \le \frac{1-x+\frac{2}{3}}{2} = \frac{5-3x}{6}$$

+ Tương tự, ta thu được

$$\sqrt{(1-x).\frac{2}{3}} + \sqrt{(1-y).\frac{2}{3}} + \sqrt{(1-z).\frac{2}{3}} \le \frac{5-3x}{6} + \frac{5-3y}{6} + \frac{5-3z}{6} = 2$$

+ Suy ra $P \le \sqrt{6}$

+ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

**Câu 4.** Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

Đặt $t = x + y \Rightarrow xy = 3 - t;\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = t^2 - 2(3-t) = t^2 + 2t - 6$

Ta có $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow 3 - t \le \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow t \ge 2$

Suy ra $P = \frac{3(x^2+y^2)+3(x+y)}{xy+x+y+1} + \frac{xy}{x+y} - (x^2+y^2) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2}$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2}$ với $t \ge 2$

Ta có $f'(t) = -2t + 1 - \frac{2}{t^2} < 0,\ \forall t \ge 2$. Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến với $t \ge 2$

$$\Rightarrow P \le f(t) \le f(2) = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = 1$.

**Câu 5.** Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3}$

Ta có $a^2+b^2 \ge 2ab$, $b^2 + 1 \ge 2b \Rightarrow \frac{1}{a^2+2b^2+3} = \frac{1}{a^2+b^2+b^2+1+2} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{ab+b+1}$

Tương tự $\frac{1}{b^2+2c^2+3} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{bc+c+1}$, $\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{ca+a+1}$

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{1+ab+b}\right)=\frac{1}{2}$$

$P=\frac{1}{2}$ khi a = b = c = 1. Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi a = b = c = 1

**Câu 6.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}$.

Đặt $a=\sqrt{\frac{yz}{x}}, b=\sqrt{\frac{zx}{y}}, c=\sqrt{\frac{xy}{z}}$. Ta có : a, b, c > 0 vµ $a^2+b^2+c^2=1$. Ta có:

$A=\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}+\frac{1}{1-ab}=3+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}+\frac{ab}{1-ab}$. Ta có:

$$\frac{bc}{1-bc} \le \frac{\frac{(b+c)^2}{4}}{1-\frac{b^2+c^2}{2}}=\frac{1}{2}\frac{(b+c)^2}{b^2+a^2+c^2+a^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$$

Tương tự có: $\frac{ca}{1-ca} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)$ vµ $\frac{ab}{1-ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$

Từ đó: A $\le 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi x = y = z =1/3.

**Câu 7.** Cho $a,b,c$ là các số thực dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Áp dụng Bất đẳng thức: $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$, $\forall x,y,z \in \Re$ ta có:

$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)=9abc>0 \Rightarrow ab+bc+ca \ge 3\sqrt{abc}$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \ge (1+\sqrt[3]{abc})^3, \forall a,b,c>0$. Thật vậy:

$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc=(1+\sqrt[3]{abc})^3$

Khi đó: $P \le \frac{2}{3(1+\sqrt{abc})}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q$ (1).

Đặt $\sqrt[6]{abc}=t$; vì a, b, c > 0 nên $0<abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$

Xét hàm số $Q=\frac{2}{3(1+t^3)}+\frac{t^2}{1+t^2}, t\in(0;1] \Rightarrow Q'(t)=\frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} \ge 0, \forall t \in (0;1]$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1] \Rightarrow Q = Q(t) \le Q(1) = \frac{1}{6}$ (2). Từ (1) và (2): $P \le \frac{1}{6}$.

Vậy maxP = $\frac{1}{6}$, đạt được khi và và chi khi : $a = b = c = 1$.

**Câu 8.** Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a^4 + b^4 + c^4$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2005 số 1 và 4 số $a^{2009}$ ta có:

$$\underbrace{1+1+...+1}_{2005} + a^{2009} + a^{2009} + a^{2009} + a^{2009} \ge 2009.\sqrt[2009]{a^{2009}.a^{2009}.a^{2009}.a^{2009}} = 2009.a^4 \ (1)$$

Tương tự: $\underbrace{1+1+...+1}_{2005} + b^{2009} + b^{2009} + b^{2009} + b^{2009} \ge 2009.\sqrt[2009]{b^{2009}.b^{2009}.b^{2009}.b^{2009}} = 2009.b^4 \ (2)$

$$\underbrace{1+1+...+1}_{2005} + c^{2009} + c^{2009} + c^{2009} + c^{2009} \ge 2009.\sqrt[2009]{c^{2009}.c^{2009}.c^{2009}.c^{2009}} = 2009.c^4 \ (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được: $6015 + 4(a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}) \ge 2009(a^4 + b^4 + c^4)$

$\Leftrightarrow 6027 \ge 2009(a^4 + b^4 + c^4)$. Từ đó suy ra $P = a^4 + b^4 + c^4 \le 3$

Mặt khác tại a = b = c = 1 thì P = 3 nên giá trị lớn nhất của P = 3.

**Câu 9.** Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$.

Theo giả thiết ta có

$5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5(x + y + z)^2 = 9(xy + 2yz + zx) + 10(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 5(x + y + z)^2 = 19x(y + z) + 28yz \le 19x(y + z) + 7(y + z)^2$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y + z} + 1\right) \le \frac{19x}{y + z} + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{y + z} \le 2 \Leftrightarrow x \le 2(y + z)$

Mặt khác ta có $(y + z)^2 \le 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow y^2 + z^2 \ge \frac{1}{2}(y + z)^2$

Vì vậy $P \le \frac{2(y + z)}{\frac{1}{2}(y + z)^2} - \frac{1}{\left(2(y + z) + y + z\right)^3} = \frac{4}{y + z} - \frac{1}{27(y + z)^3}$

Đặt $t = y + z > 0 \Rightarrow P \le \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} = -\frac{(6t - 1)^2(2t + 1)}{27t^3} + 16 \le 16$

Vậy $\min P = 16$; dấu bằng đạt tại $\begin{cases} x = 2(y + z) \\ y = z \\ y + z = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = z = \frac{1}{12} \end{cases}$

**Câu 10.** Cho các số thực dương $x, y$ thỏa mãn $3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{3x}{y(x+1)}+\frac{3y}{x(y+1)}+\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}.$

Từ giả thiết ta suy ra $\ln(x+y+1)+3(x+y+1)=\ln(3xy)+3.3xy$. Xét hàm số $g(t)=\ln t+3t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $g'(t)=\frac{1}{t}+3>0$ với $\forall t>0$, suy ra $g(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, từ đó $g(x+y+1)=g(3xy)\Leftrightarrow x+y+1=3xy$ (*)

Theo (*) ta có $3xy-1=x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Đặt $t=xy\Rightarrow 3t-2\sqrt{t}-1\geq 0\Rightarrow t\geq 1.$

$\frac{3x}{y(x+1)}+\frac{3y}{x(y+1)}=\frac{3x^2(y+1)+3y^2(x+1)}{xy(xy+x+y+1)}=\frac{36t^2-27t+3}{4t^2}.$ (2)

$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=-\frac{(3t-1)^2-2t}{t^2}=\frac{-36t^2+32t-4}{4t^2}$ (3)

Theo Cô si $\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{2\sqrt{xy}}\leq\frac{1}{2}$ (4). Từ (2), (3), (4) ta có $M\leq\frac{5t-1}{4t^2}+\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{5t-1}{4t^2}$ trên $[1;+\infty)$, ta có

$f'(t)=\frac{5.4t^2-(5t-1)8t}{16t^4}=\frac{2-5t}{4t^3}<0\forall t\geq 1$, suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$, bởi vậy

$M_{\max}=\max_{[1;+\infty)}f(t)=f(1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=y=1.$

**Câu 11.** Cho ba số thực không âm $x, y, z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\frac{4}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}-\frac{5}{(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}}.$$

Với mọi số thực không âm x, y, z Ta có:

$\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\leq\frac{x+y+4z}{2}\Rightarrow(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}\leq(x+y)\frac{x+y+4z}{2}$

Mặt khác ta có: $(x+y)\frac{x+y+4z}{2}=\frac{x^2+y^2+2xy+4yz+4zx}{2}\leq 2(x^2+y^2+z^2)(1)$

Vì $2xy\leq x^2+y^2;\ 4yz\leq 2(y^2+z^2);\ 4zx\leq 2(z^2+x^2)$

Tương tự ta có $(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}\leq(y+z)\frac{y+z+4x}{2}\leq 2(x^2+y^2+z^2)$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $P\leq\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}}-\frac{4}{2(x^2+y^2+z^2)}-\frac{5}{2(x^2+y^2+z^2)}$

Hay $P \le \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{9}{2(x^2+y^2+z^2)}$ .Đặt $t = \sqrt{x^2+y^2+z^2+4}$ , $t > 2$

Khi đó $P \le \frac{4}{t} - \frac{9}{2t^2-4}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2t^2-4}$, $t > 2$

$f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{9t}{(t^2-4)^2} = \frac{(4-t)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

(do t > 2 nên $4t^3+7t^2-4t-16 = 4(t^3-4)+t(7t-4) > 0$

Lập bảng biến thiên của hàm số f(t). Dựa vào bảng biến thiên ta có

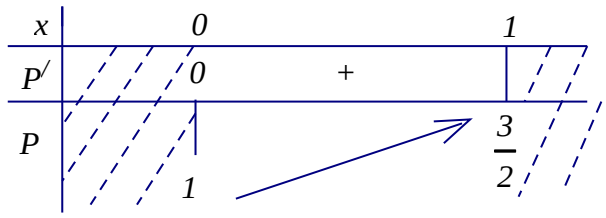
$MaxP = \frac{5}{8}$ khi $x = y = z = 2$

**Câu 12.** Cho $x \ge 0$ và $y \ge 0$ thỏa điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + \frac{1}{xy+1}$

Ta có $0 \le xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$

Đặt $t = xy$, điều kiện $0 \le t \le 1$

$P = t + \frac{1}{t+1} \Rightarrow P' = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$




Vậy GTLN $P = \frac{3}{2}$ Khi $x = 1;\ y = 1$

**Câu 13.** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $xy + 1 \le y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} + \frac{2y-x}{6(x+y)}$.

Do $x > 0, y > 0, xy \le y - 1$ nên $0 < \frac{x}{y} \le \frac{y-1}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$.

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow 0 < t \le \frac{1}{4}$. Khi đó $P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} - \frac{t-2}{6t+6} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2(t+1)}$.

Ta có $P'(t) = \frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$.

Vì $0<t\le\frac{1}{4}\Rightarrow t^2-t+3=t(t-1)+3<3;7-3t>6;t+1>1$, do đó

$\frac{7-3t}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}>\frac{7-3t}{6\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{2(t+1)^2}>-\frac{1}{2}\Rightarrow P'(t)>\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}>0$.

Vậy $P(t)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{4}\right]$, suy ra $P(t)\le P\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$.

Khi $x=\frac{1}{2};y=2$ thì ta có $P=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}\Rightarrow MaxP=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};y=2.$

**Câu 14**. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $8(a^2+b^2+c^2)=3(a+b+c)^2$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a(1 – a^3) + b(1 – b^3) + c$.

+) Từ giả thiết ta có: $5c^2 – 6(a+b)c + (a+b)^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(a+b)\le c\le a+b$.

+) Ta có $a^4+b^4\ge\frac{1}{8}(a+b)^4\forall a,b$ => $P \le 2(a+b)-\frac{1}{8}(a+b)^4$

+) Xét $f(t)=2t-\frac{t^4}{8}$ $(t\ge 0)$, $f'(t)=2-\frac{t^3}{2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{4}$

+) BBT:…

| t | 0 $\quad\quad\quad\quad$ $\sqrt[3]{4}$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| f'(t) | + $\quad\quad$ 0 $\quad\quad$ - |
| f(t) | ↗ $\quad$ $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ $\quad$ ↘ |

+) MaxP = $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\\ c=\sqrt[3]{4}\end{cases}$.

**Câu 15.** Cho 3 số thực không âm x, y, z thoả $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = xy + yz + zx + \frac{5}{x+y+z}$

Đặt t= x+y+z ĐK t > 0

→ $xy+yz+zx=\frac{t^2-3}{2}$

Ta có $0\le xy\le\frac{x^2+y^2}{2};0\le xz\le\frac{x^2+z^2}{2};0\le zy\le\frac{z^2+y^2}{2}$

Suy ra $0 \le xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2$

$\rightarrow 0 \le \frac{t^2 - 3}{2} \le 3 \rightarrow \sqrt{3} \le t \le 3$

Ta có M=$\frac{t^2 - 3}{2} + \frac{5}{t}$

Xét hàm số f(t) = $\frac{t^2 - 3}{2} + \frac{5}{t}$ với $\sqrt{3} \le t \le 3$

f'(t) = $\frac{t^3 - 5}{t^2}$ >0 ; $\sqrt{3} \le t \le 3$

f($\sqrt{3}$)= 5/$\sqrt{3}$ ; f(3)=14/3

Vậy Max f(t) = 14/3 với $\sqrt{3} \le t \le 3$

Dấu "=" xảy ra khi x=y=z=1

Vậy Max A = 14/3 khi x=y=z =1 .

**Câu 16.** Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn:

$$\frac{2}{3x+2y+z+1} + \frac{2}{3x+2z+y+1} = (x+y)(x+z).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x+3)^2 + y^2 + z^2 - 16}{2x^2 + y^2 + z^2}$.

Ta có: $(x+y)(x+z) \le \frac{(x+y+x+z)^2}{4} = \frac{(2x+y+z)^2}{4}$

$$2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1} + \frac{1}{3x+2z+y+1}\right) \ge \frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết suy ra: $\frac{8}{3(2x+y+z)+2} \le \frac{(2x+y+z)^2}{4}$

Đặt $2x+y+z = t \ (t>0) \Rightarrow \frac{8}{3t+2} \le \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)(3t^2+8t+16) \ge 0$

$\Leftrightarrow t \ge 2 \Rightarrow 2x+y+z \ge 2$

Mà: $4 \le (2x+y+z)^2 \le (2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge \frac{2}{3}$.

Ta có: $P = \frac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2} = 1 + \frac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2}$

$$\le 1 + \frac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$$

Xét hàm số: $f(x) = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$ với $x > 0.$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \ (\text{loại})\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow f\left(\dfrac{2}{3}\right)=10$

Bảng biến thiên:

| x | $0$ $+\infty$ | $\frac{2}{3}$ |
|---|---|---|
| y' | + | 0 – |
| y | 2 1 | 10 |

Suy ra: $f(x)\le 10\Rightarrow P\le 10.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu "=" xảy ra khi: $x=\dfrac{2}{3},y=z=\dfrac{1}{3}.$

**Câu 17**. Cho $x,y,z$ là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)$

Đặt $f(x)=2x^3-yx^2-z^2x+2(y^3+z^3)-y^2z$.Ta có:

$f'(x)=6x^2-2yx-z^2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_1=\dfrac{1}{6}(y-\sqrt{y^2+6z^2});x=x_2=\dfrac{1}{6}(y+\sqrt{y^2+6z^2})$ Nhận xét: $x_1\notin(0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2\in(0;1)$ hay $x_2\notin(0;1)$ thì

$\underset{x\in[0;1]}{Max}\,f(x)=Max\{f(0);f(1)\}$.

Mà $f(0)=2(y^3+z^3)-y^2z\le 2(y^3+z^3)-y^2z+(2-y-z^2)=f(1)$

$\Rightarrow\quad f(x)\le f(1)=2y^3-zy^2\text{-}y+2z^3-z^2+2\qquad(1)$

Lại đặt $g(y)=2y^3-zy^2\text{-}y+2z^3-z^2+2$,

$g'(y)=6y^2-2zy-1;\ g'(y)=0\Leftrightarrow y=y_1=\dfrac{1}{6}(z-\sqrt{z^2+6});y=y_2=\dfrac{1}{6}(z+\sqrt{z^2+6})$

Nhận xét tương tự suy ra $\underset{y\in[0;1]}{Max}\,g(y)=Max\{g(0);g(1)\}$.

Lại có $g(0)=2z^3+2-z^2\le 2z^3+2-z^2+(1-z)=g(1)$. Suy ra

$g(y)\le g(1)=2z^3+2-z^2+(1-z)=2z^3-z^2-z+3\qquad(2)$

Cuối cùng đặt $h(z)=2z^3-z^2-z+3$ với $z\in[0;1]$, $h'(z)=6z^2-2z-1.$

$h'(z)=0\Leftrightarrow z_1=\dfrac{1-\sqrt{7}}{6};z_2=\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}$. Lập bảng biến thiên suy ra: $\underset{z\in[0;1]}{Max}\,h(z)=h(1)=3\quad(3)$

Dấu bằng xảy ra ở (1), (2), (3) khi x = y = z = 1. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi x = y = z = 1.

## 11.3. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức

**Câu 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số
$f(x)=\sqrt{5x^2-8x+32}-\sqrt{-3x^2+24x}+\sqrt{3x^2-12x+16}$

Ta có TXĐ: $D=[0;8]$

Đặt : $g(x)=\sqrt{5x^2-8x+32}, h(x)=\sqrt{3x^2-12x+16}$

Ta dễ dàng xác định được $\forall x\in[0;8]$, thì

$6=g(2)\le g(x)\le g(8)=12\sqrt{2},\ 2=h(2)\le h(x)\le h(8)=4\sqrt{7}$

và $\sqrt{-3x^2+24x}\ge 0$ $(\sqrt{-3x^2+24x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=8\end{array}\right.)$.

Do đó $f(x)=\dfrac{8(x-2)^2}{\sqrt{5x^2-8x+32}+\sqrt{-3x^2+24x}}+\sqrt{3x^2-12x+16}\ge 0+h(x)\ge 2\ \forall x\in[0;8]$.

Đẳng thức xảy khi và chỉ khi x = 2 $\Rightarrow \min f(x)=2$ khi x= 2.

Ta có

$f(x)=\sqrt{5x^2-8x+32}-\sqrt{-3x^2+24x}+\sqrt{3x^2-12x+16}\le g(x)+h(x)\le 12\sqrt{2}+4\sqrt{7}\ \forall x\in[0;8].$

Đẳng thức xảy khi và chỉ khi x = 8 $\Rightarrow \max f(x)=12\sqrt{2}+4\sqrt{7}$ khi x= 8.

Vậy $\min f(x)=2$ khi x= 2 và $\max f(x)=12\sqrt{2}+4\sqrt{7}$ khi x= 8.

**Câu 2.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\left(x^2+y^2+1\right)^2+3x^2y^2+1=4x^2+5y^2$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P=\dfrac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}$.

* Từ giả thiết ta có: $\left(x^2+y^2\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)+2=-x^2-3x^2y^2$

* Mà $-x^2-3x^2y^2\le 0\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)+2\le 0$;

* Đặt $t=x^2+y^2\Rightarrow t^2-3t+2\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 2$.

*Ta được

$$P=\frac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-x^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)+2}{x^2+y^2+1}=\frac{t^2-t+2}{t+1},t\in[1;2]$$

- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t+1},t\in[1;2]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{[1;2]} f(t)=f(1)=1\\ \max\limits_{[1;2]} f(t)=f(2)=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{\mathbb{R}} P=1, khi\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=\pm1\end{array}\right.\\ \max\limits_{\mathbb{R}} P=\dfrac{4}{3}, khi\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$

**Câu 3:** Cho x,y là 2 số thực thỏa mãn $x^4+16y^4+\left(2xy+1\right)^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau : $P=x\left(x^2+3\right)+2y\left(4y^2+3\right)$

Theo đề bài : $(1)\Leftrightarrow\left[x^2+(2y)^2\right]=(1-2xy)^2\Rightarrow x^2+(2y)^2=1-2xy\Leftrightarrow(x+2y)^2=1+2xy$

$\Rightarrow(x+2y)^2\le 1+\dfrac{(x+2y)^2}{4}\Rightarrow(x+2y)^2\le\dfrac{4}{3}$

( vì từ (1) $\Rightarrow 2\ge x^4+16y^4\ge 2\sqrt{16x^4y^4}\Rightarrow xy\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow 1-2xy\ge 0$ )

Đặt t = x+2y : 2xy = $t^2$ -1 : $|t|\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ : $P=f(t)=t^3-3(t^2-1)t+3t=-2t^3+6t:|t|\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$MaxP=Maxf(t)=f(1)=4(t=1khi(x,y)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)hay(x,y)=(1,0))$

$MinP=Minf(t)=f(-1)=-4(t=-1khi(x,y)=\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)hay(x,y)=(-1,0))$

**Câu 4.** Cho ba số thực $x,y,z$ thoả mãn: $x^2+y^2+z^2\le 2x-4y-1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2(x+z)-y$.

$x^2+y^2+z^2\le 2x-4y-1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2+z^2\le 4$ (1)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Xét mặt cầu:
$(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$. Có tâm $I(1;-2;0)$,bán kính $R=2$.

Xét mp $(\alpha):2x-y+2z-T=0$
G/s $M(x;y;z)$. Từ (1) có điểm $M$ nằm bên trong $(S)$ và kể cả trên mặt cầu $(S)$

$\Rightarrow d(I,(\alpha))\le R\Leftrightarrow\dfrac{|4-T|}{3}\le 2\Leftrightarrow -2\le T\le 10$

- Với $T=-2$ thì $M$ là giao điểm của mp$(\beta)$: $2x-y+2z+2=0$

Và đường thẳng $\Delta$ đi qua $I$ và $\perp(\beta)$.

$$\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=2t\end{cases}\qquad\Rightarrow M\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

Với $T=10$. Tương tự $M\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

Vậy $\min T=-2$ khi $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=z=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$ $\max T=10$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=-\dfrac{8}{3}\\z=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

## 11.4. Chứng minh bất đẳng thức

**Câu 1.** Cho $a,b,c$ là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+1}{4b^2}+\frac{b^2+1}{4c^2}+\frac{c^2+1}{4a^2}\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Ta có:

$$VT=\left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{1}{4b^2}\right)+\left(\frac{b^2}{4c^2}+\frac{1}{4c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}\right)$$

$$\ge\frac{a}{2b^2}+\frac{b}{2c^2}+\frac{c}{2a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)$$

Mặt khác: $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge\frac{2}{b};\quad \frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c};\quad \frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Suy ra:

$$VT\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{4}\left[\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right]=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$

**Câu 2.** Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge3\sqrt{2}.$$

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ ta chọn $\vec{u}\left(a;\frac{1}{b}\right)$, $\vec{v}\left(b;\frac{1}{c}\right)$, $\vec{w}\left(c;\frac{1}{a}\right)$.

Từ bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$ suy ra

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2}}\ge\sqrt{\frac{\left(6\sqrt[6]{abc\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}\right)^2}{2}}=3\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Câu 3.** Cho $a,b,c$ là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3.$ Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}.$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}\Rightarrow abc\le 1.$

Suy ra: $1+a^2(b+c)\ge abc+a^2(b+c)=a(ab+bc+ca)=3a\Rightarrow\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{3a}$ (1).

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\le\frac{1}{3b}$ (2), $\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3c}$ (3).

Cộng (1), (2) và (3) theo vế với vế ta có:

$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3}(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\frac{ab+bc+ca}{3abc}=\frac{1}{abc}\square.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $abc=1, ab+bc+ca=3\Rightarrow a=b=c=1, (a,b,c>0).$

**Câu 4**. Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thỏa mãn x + y + z = 3.

Chứng minh rằng với $\forall a\ge 1$ ta luôn có : $\frac{1}{a^x}+\frac{1}{a^y}+\frac{1}{a^z}\ge\frac{x}{a^x}+\frac{y}{a^y}+\frac{z}{a^z}.$

* Vì a = 1 ta thấy BĐT đúng .

* Ta xét khi a > 1.

Hàm số y= $y=\frac{1}{a^t}=\left(\frac{1}{a}\right)^t$ nghịch biến với $\forall t\in R$, khi a > 1.

Khi đó ta có

Ta có : $(x-y)(\frac{1}{a^x}-\frac{1}{a^y})\le 0,\ \forall x,y\in R.$ Suy ra $\frac{x}{a^x}+\frac{y}{a^y}\le\frac{x}{a^y}+\frac{y}{a^x}$ (1)

Chứng minh tương tự $\frac{y}{a^y}+\frac{z}{a^z}\le\frac{z}{a^y}+\frac{y}{a^z}$ (2) $\frac{z}{a^z}+\frac{x}{a^x}\le\frac{x}{a^z}+\frac{z}{a^x}$ (3)

Cộng vế với vế (1) ,(2) vµ (3) ta được $2(\frac{x}{a^x}+\frac{y}{a^y}+\frac{z}{a^z})\le\frac{y+z}{a^x}+\frac{z+x}{a^y}+\frac{x+y}{a^z}$ (4)

Cộng 2 vế của (4) với biểu thức $\frac{x}{a^x}+\frac{y}{a^y}+\frac{z}{a^z}$ ta được

$$3(\frac{x}{a^x}+\frac{y}{a^y}+\frac{z}{a^z})\le\frac{x+y+z}{a^x}+\frac{x+y+z}{a^y}+\frac{x+y+z}{a^z}=(x+y+z)(\frac{1}{a^x}+\frac{1}{a^y}+\frac{1}{a^z})$$

Suy ra $\frac{1}{a^x}+\frac{1}{a^y}+\frac{1}{a^z}\ge\frac{x}{a^x}+\frac{y}{a^y}+\frac{z}{a^z}.$ ( do x + y + z = 3 )

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1. (đpcm)

**Câu 5.** Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab+c}}+\frac{b+c}{\sqrt{bc+a}}+\frac{c+a}{\sqrt{ca+b}}\geq 3$$

*Biến đổi $\frac{a+b}{\sqrt{ab+c}}=\frac{1-c}{\sqrt{ab+1-b-a}}=\frac{1-c}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}$

*Từ đó $VT=\frac{1-c}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}+\frac{1-b}{\sqrt{(1-c)(1-a)}}+\frac{1-a}{\sqrt{(1-c)(1-b)}}$

Do a,b,c dương và a+b+c=1 nên a,b,c thuộc khoảng (0;1) => 1-a,1-b,1-c dương

*áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta được

$VT\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1-c}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}.\frac{1-b}{\sqrt{(1-c)(1-a)}}.\frac{1-a}{\sqrt{(1-c)(1-b)}}}$ =3 (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

**Câu 6.** Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn xy + yz + zx = 3xyz.

Chứng minh rằng : $\frac{xy}{x^3+y^3+x^2z+y^2z}+\frac{yz}{y^3+z^3+y^2x+z^2x}+\frac{zx}{z^3+x^3+z^2y+x^2y}\leq\frac{3}{4}$

Ta có : xy + yz + zx = 3xyz $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$

Với x >0; y > 0; z > 0 ta có $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ ; $\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ ; $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$$\frac{xy}{x^3+y^3+x^2z+y^2z}\leq\frac{xy}{xy(x+y)+(x^2+y^2)z}\leq\frac{xy}{4}\left[\frac{1}{xy(x+y)}+\frac{1}{(x^2+y^2)z}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{xy}{x^3+y^3+x^2z+y^2z}\leq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)}+\frac{xy}{(x^2+y^2)z}\right]\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+y)}+\frac{1}{2z}\right)$$

$$\leq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{2z}\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{8z}\ (1)$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{yz}{y^3+z^3+y^2x+z^2x}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{8x}\ (2)$$

$$\frac{zx}{z^3+x^3+z^2y+x^2y}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{8y}\ (3)$$

Công (1) ; (2); (3) theo vế ta được đpcm

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1

**Câu 7.** Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a+b}+\frac{a}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c}+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b}<2.$$

+) Vì a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên ta có: $a+b>c; b+c>a; c+a>b$.

+) Đặt $x=\frac{a+b}{2}; y=\frac{c+a}{2}; z=a\ (x,y,z>0)$. Ta có: $x+y>z; y+z>x; z+x>y$.

$$\text{VT}=\frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c}=\frac{2x}{2y+2z}+\frac{2y}{2z+2x}+\frac{2z}{2x+2y}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ (1).$$

Lại có: $x+y>z\Leftrightarrow z(x+y+z)<2z(x+y)\Leftrightarrow\frac{2z}{x+y+z}>\frac{z}{x+y}$.

CM tương tự ta có: $\frac{x}{y+z}<\frac{2x}{x+y+z}\ (2); \frac{y}{z+x}<\frac{2y}{x+y+z}\ (3).$

Từ (1),(2) và (3) ta có $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}<\frac{2x+2y+2z}{x+y+z}=2\Rightarrow$ (đpcm).

**Câu 8.** Cho các số thực dương $a,b,c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{a+2}+\frac{3b}{b+3}+\frac{c}{c+1}\le\frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a+2}{4}-\frac{2a}{a+2}\right)+\left(\frac{b+3}{4}-\frac{3b}{b+3}\right)+\left(\frac{c+1}{4}-\frac{c}{c+1}\right)\ge\frac{a+b+c+6}{4}-\frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)^2}{4(a+2)}+\frac{(b-3)^2}{4(b+3)}+\frac{(c-1)^2}{4(c+1)}\ge\frac{(a+b+c-6)^2}{4(a+b+c+6)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-2)^2}{a+2}+\frac{(b-3)^2}{b+3}+\frac{(c-1)^2}{c+1}\ge\frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6}\qquad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$VT(2)\ge\frac{\left[(a-2)+(b-3)+(c-1)\right]^2}{(a+2)+(b+3)+(c+1)}=\frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6}=VP(2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=3; c=1$.

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

**Câu 9.** Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn [0; 1]. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le1$$

Do vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a \le b \le c$, khi đó:

Đặt $S = a + b + c + 1 \Rightarrow b + c + 1 = S - a \ge S - c$

$a + c + 1 \ge S - c;$

$a + b + 1 \ge S - c$ .

Ta có $(1 - a)(1 - b)(1 + a + b) \le 1$ (*)

$\Leftrightarrow (1 - a - b + ab)(1 + a + b) - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow -a^2 - b^2 - ab + a^2b + ab^2 \le 0$

$\Leftrightarrow b(a + b)(a - 1) - a^2 \le 0$ đúng do $a, b \in [0; 1]$. Vậy (*) đúng.

Mà (*) $\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(S - c) \le 1$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b) \le \frac{1}{S - c} \Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) \le \frac{1 - c}{S - c}$$

Do đó:

$$\frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{a + c + 1} + \frac{c}{a + b + 1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

$$\le \frac{a}{S - c} + \frac{b}{S - c} + \frac{c}{S - c} + \frac{1 - c}{S - c} \le \frac{S - c}{S - c} = 1$$

**đpcm**.