

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)

Mã đề thi 436

Họ, tên thí sinh:..... SBD:.....

Câu 1: Cho số thực dương $a > 0$ và khác 1. Hãy rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)}$.

- A. $P = 1 + a$. B. $P = 1$. C. $P = a$. D. $P = 1 - a$.

Câu 2: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 2. B. 6. C. 8. D. 4.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 1$. B. $m \leq -1$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq -1$.

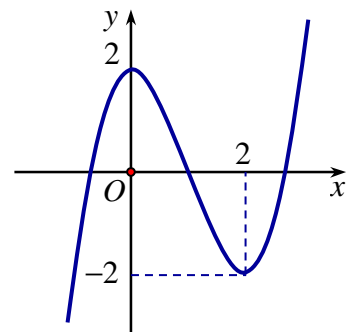
Câu 4: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

- A. -20. B. 7. C. -25. D. 3.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số có ba điểm cực trị.



Câu 6: Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là:

- A. 10. B. 12. C. 14. D. 17.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (-2; 2)$. B. $m \in (-1; 1)$. C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; +\infty)$.

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(x - \frac{2}{x^2} \right)^{21}$, $(x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$.

- A. $2^7 C_{21}^7$. B. $2^8 C_{21}^8$. C. $-2^8 C_{21}^8$. D. $-2^7 C_{21}^7$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

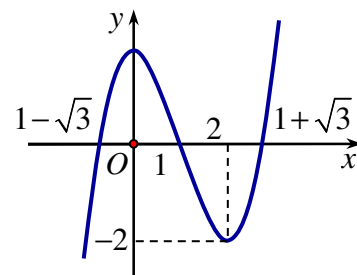
- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là.

- A. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$. B. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$.
C. $(5 - 2\sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{3})$. D. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{3}) \cup (5 + 2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 7. B. 9.
C. 6. D. 5.



Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2 + 4}}$ có hai tiệm cận đứng:

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. D. $m < 1$.

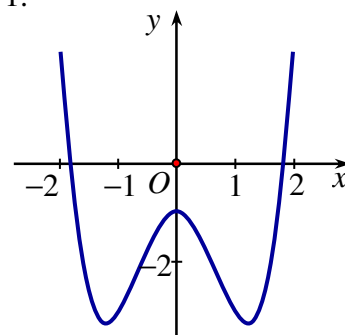
Câu 13: Đồ thị hàm số nào sau đây nằm phía dưới trục hoành?

- A. $y = x^4 + 5x^2 - 1$. B. $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. D. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$.
B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0$.
D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



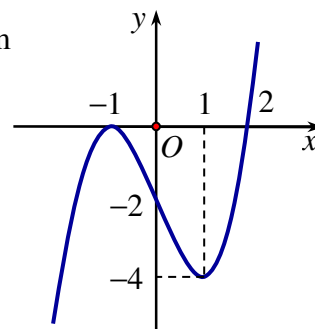
Câu 15: Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$		

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Câu 17: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{cases}$. B. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}$. C. $\begin{cases} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{cases}$. D. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{cases}$.

Câu 18: Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 19: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là:

- A. $(0;+\infty)$. B. $[1;+\infty)$. C. $(1;+\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 20: Tổng $T=C_{2017}^1+C_{2017}^3+C_{2017}^5+\dots+C_{2017}^{2017}$ bằng:

- A. $2^{2017}-1$. B. 2^{2016} . C. 2^{2017} . D. $2^{2016}-1$.

Câu 21: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

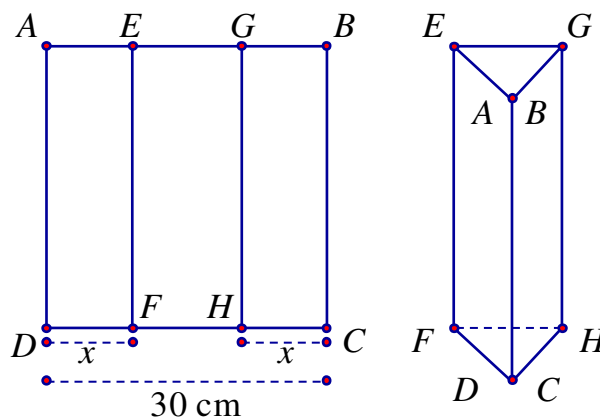
- A. $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. B. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$. C. $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$. D. $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$.

Câu 22: Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{ cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h=7\text{ cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm . Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

- A. $S=56(\text{cm}^2)$. B. $S=55(\text{cm}^2)$. C. $S=53(\text{cm}^2)$. D. $S=46(\text{cm}^2)$.

Câu 23: Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm . Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

- A. $x=5(\text{cm})$. B. $x=9(\text{cm})$.
C. $x=8(\text{cm})$. D. $x=10(\text{cm})$.



Câu 24: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A. $x=8$. B. $x=10$. C. $x=15$. D. $x=7$.

Câu 25: Đặt $\ln 2=a$, $\log_5 4=b$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $\ln 100=\frac{ab+2a}{b}$. B. $\ln 100=\frac{4ab+2a}{b}$. C. $\ln 100=\frac{ab+a}{b}$. D. $\ln 100=\frac{2ab+4a}{b}$.

Câu 26: Số nghiệm thực của phương trình $4^x-2^{x+2}+3=0$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 27: Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 15. B. 4096. C. 360. D. 720.

Câu 28: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h=1$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó là:

- A. $S=9\pi$. B. $S=6\pi$. C. $S=5\pi$. D. $S=27\pi$.

Câu 29: Biết rằng hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức Newton $(2-x)^n$, ($n\in\mathbb{N}^*$) bằng 60. Tìm n .

- A. $n=5$. B. $n=6$. C. $n=7$. D. $n=8$.

- Câu 30:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là:
- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.
- Câu 31:** Cho tập A gồm n điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 điểm thuộc A gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ 2 điểm thuộc A .
- A. $n = 6$. B. $n = 12$. C. $n = 8$. D. $n = 15$.
- Câu 32:** Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \frac{1}{2}$.
- A. $m = e$. B. $m = -e$. C. $m = \frac{1}{e}$. D. $m = \pm\sqrt{e}$.
- Câu 33:** Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- Câu 34:** Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.
- A. $\frac{4615}{5236}$. B. $\frac{4651}{5236}$. C. $\frac{4615}{5263}$. D. $\frac{4610}{5236}$.
- Câu 35:** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.
- A. $0,25^{30} \cdot 0,75^{20}$. B. $0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$. C. $0,25^{30} \cdot 0,75^{20} \cdot C_{50}^{20}$. D. $1 - 0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$.
- Câu 36:** Cho hàm số $y = \frac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H) . Số đường tiệm cận của (H) là?
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 37:** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là?
- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 38:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .
- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.
- Câu 39:** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.
- A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \pi a^3$.

Câu 40: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thể tích là V . Tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$ theo V .

- A. $\frac{V}{6}$. B. $\frac{V}{4}$. C. $\frac{V}{5}$. D. $\frac{V}{3}$.

Câu 41: Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

- A. $\frac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$. B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.
C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{(4a^2+b^2)^3}$. D. $\frac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{(4a^2+3b^2)^3}$.

Câu 42: Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}$ (cm) với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O . Gọi M là điểm thuộc cung $\widehat{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

- A. $V = 3(\text{cm}^3)$. B. $V = 4(\text{cm}^3)$. C. $V = 6(\text{cm}^3)$. D. $V = 7(\text{cm}^3)$.

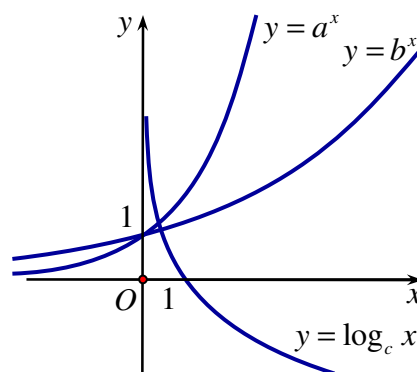
Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. B. $m = 2$. C. $m < 2$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 44: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ (cm), bán kính đáy $r = 25$ (cm). Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12(cm). Tính diện tích của thiết diện đó.

- A. $S = 500(\text{cm}^2)$. B. $S = 400(\text{cm}^2)$. C. $S = 300(\text{cm}^2)$. D. $S = 406(\text{cm}^2)$.

Câu 45: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$. B. $c < b < a$. C. $a < c < b$. D. $c < a < b$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 47: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$; tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 49: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết góc giữa MN và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là

- A. $a\sqrt{\frac{15}{62}}$. B. $a\sqrt{\frac{30}{31}}$. C. $a\sqrt{\frac{15}{68}}$. D. $a\sqrt{\frac{15}{17}}$.

Câu 50: Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a + b + c$ là

- A. 3. B. $3.2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. C. 4. D. 6.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	C	C	C	D	B	D	B	A	A	C	C	B	D	C	B	D	C	B	D	A	D	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	A	B	B	C	D	A	A	C	B	C	B	C	D	B	A	D	A	B	B	A	D	B	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho số thực dương $a > 0$ và khác 1. Hãy rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)}$.

A. $P = 1 + a$.

B. $P = 1$.

C. $P = a$.

D. $P = 1 - a$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} (1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{12}} (1 - a)} = \frac{a^{\frac{5}{6}} (1 + a)}{a^{\frac{5}{6}}} = 1 + a.$$

Câu 2: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2.

B. 6.

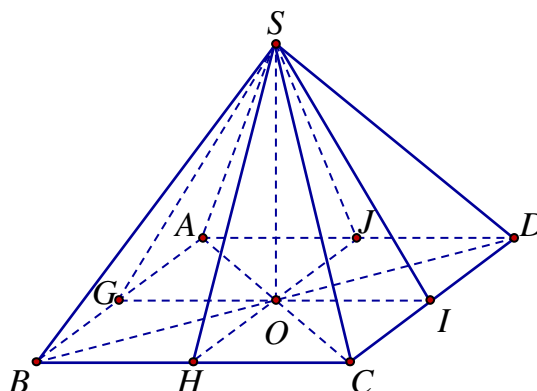
C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Đó là các mặt phẳng (SAC) , (SBD) , (SHJ) , (SGI) với G, H, I, J là các trung điểm của các cạnh AB, CB, CD, AD (hình vẽ bên dưới).



Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = m - \cos x.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 4: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A. -20.

B. 7.

C. -25.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

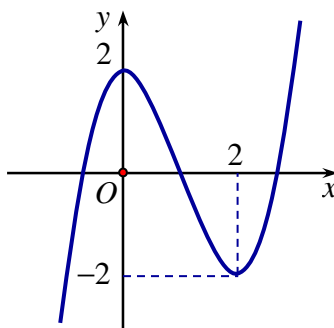
$$y' = 3x^2 - 6x - 9. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		7		-25		$+\infty$

Vậy giá trị cực tiểu là $y_{CT} = -25$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2 .
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C.

Câu 6: Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là:

- A.** 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 16x, \text{ cho } y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1; 1] \\ x = 2 \notin [-1; 1] \\ x = 0 \in [-1; 1] \end{cases}.$$

Khi đó: $f(-1) = 10$, $f(1) = 10$, $f(0) = 17$.

Vậy $\max_{[-1;1]} y = f(0) = 17$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A.** $m \in (-2; 2)$. **B.** $m \in (-1; 1)$.
C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **D.** $m \in (-2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $x^3 - 3x + 2m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = 2m$ (*)

Xét hàm số $y = -x^3 + 3x$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y = 2m$.

Số nghiệm của phương trình (*) phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$

-2 $-\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi $-2 < 2m < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}$, ($x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$).

A. $2^7 C_{21}^7$.

B. $2^8 C_{21}^8$.

C. $-2^8 C_{21}^8$.

D. $-2^7 C_{21}^7$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $C_n^k a^{n-k} b^k = C_{21}^k x^{21-k} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = (-2)^k C_{21}^k x^{21-3k}$.

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 21 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 7$. Vậy hệ số cần tìm là $-2^7 C_{21}^7$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B.

Trường hợp $m = -1$, suy ra $y = 2x^2 + 1 \Rightarrow$ Hàm số có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại nên loại $m = -1$.

Trường hợp $m \neq -1$

Ta có: $y' = 4(m+1)x^3 - 2(m-1)x = 2x[2(m+1)x^2 - (m-1)]$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2(m+1)x^2 - (m-1) = 0(*) \end{cases}$

Vì hàm trùng phương luôn đạt cực trị tại điểm $x = 0$ nên để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\begin{cases} m+1 < 0 \\ -m+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$, suy ra không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là.

A. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$

B. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$

C. $(5 - 2\sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{3})$

D. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{3}) \cup (5 + 2\sqrt{3}; +\infty)$

Lời giải

Chọn A.

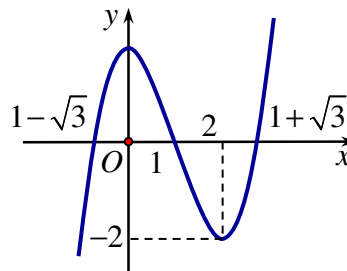
Điều kiện $x \neq 2$

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0 (*)$.

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - 4 \cdot 2(2m+1) > 0 \\ 8 - 2(m+3) + 2m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 1 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 5 - 2\sqrt{6} \text{ hoặc } m > 5 + 2\sqrt{6}.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 7.

B. 9.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2$ (*) thì (1) trở thành $t^3 - 3t^2 + 2 = 0$ (2)

Theo đồ thị ta có (2) có ba nghiệm phân biệt $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 - \sqrt{3} \\ t = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số ta có

+ $t = 1 \in (-2; 2)$ (*) có ba nghiệm phân biệt

+ $t = 1 - \sqrt{3} \in (-2; 2)$ nên (*) có ba nghiệm phân biệt (khác ba nghiệm khi $t = 1$)

+ $t = 1 + \sqrt{3} > 2$ nên (*) có đúng một nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt

Nhận xét: Với mỗi giá trị t , học sinh có thể sử dụng máy tính bỏ túi để thử nghiệm

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2 + 4}}$ có hai tiệm cận đứng:

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $g(x) = m(x-1)^2 + 4 = mx^2 - 2mx + 4 + m$.

Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng thì cần tìm m để phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\text{ĐK: } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - m(4+m) > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Câu 13: Đồ thị hàm số nào sau đây nằm phía dưới trục hoành?

A. $y = x^4 + 5x^2 - 1$.

B. $y = -x^3 - 7x^2 - x - 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

D. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$.

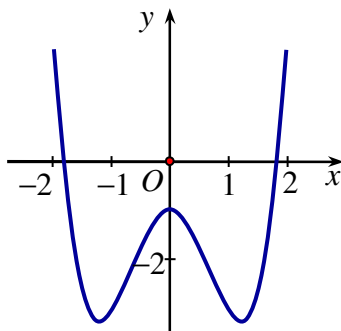
Lời giải

Chọn C.

Ta có $y = -(x^2 - 1)^2 - 1 \leq -1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó đồ thị của hàm số này nằm dưới Ox .

Nhận xét có thể lập bảng biến thiên và kết luận.

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn B.

Do đồ thị cắt Oy tại $M(0; c)$ nằm dưới trục Ox nên $c < 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Câu 15: Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$		

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải

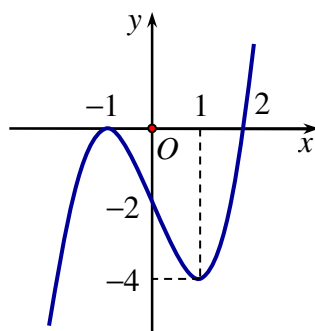
Chọn D.

Xét $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Khi $x = 0 \Rightarrow y = 2$; $x = 2 \Rightarrow y = -2$

Hàm số này thỏa mãn các tính chất trên bảng biến thiên.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Xét $g(x) = f(x^2 - 2)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$g'(x) = 2xf'(t)$ với $t = x^2 - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = x^2 - 2 = -1 \\ t = x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Có $f'(t) > 0 \Leftrightarrow t = x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
y							

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$. Vậy C sai.

Câu 17: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{cases}$

B. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}$

C. $\begin{cases} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{cases}$

D. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{cases}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > a^0 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < a^0 = 1 \end{cases}$. Vậy Chọn B.

Câu 18: Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x} \right)} = 5$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $x > 0$.

PT: $\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right)} = 5 \quad (1)$.

Đặt $t = \frac{2x^2 + 1}{2x} = x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt{2}$

PT trở thành $\log_2 t + 2^t = 5 \quad (2)$.

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + 2^t \quad (t \geq \sqrt{2})$ là hàm đồng biến nên:

$(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2) \Leftrightarrow t = 2 \quad (t/m)$.

Với $t = 2$ thì $\frac{2x^2 + 1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (t/m)$. Vậy $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ (theo Viet).

Câu 19: Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{5}}$ là:

A. $(0; +\infty)$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số xác định khi: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Câu 20: Tổng $T = C_{2017}^1 + C_{2017}^3 + C_{2017}^5 + \dots + C_{2017}^{2017}$ bằng:

A. $2^{2017} - 1$.

B. 2^{2016} .

C. 2^{2017} .

D. $2^{2016} - 1$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hai khai triển:

$+2^{2017} = (1+1)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \dots + C_{2017}^{2017} \quad (1)$.

$+0 = (1-1)^{2017} = C_{2017}^0 - C_{2017}^1 + C_{2017}^2 - C_{2017}^3 + \dots - C_{2017}^{2017} \quad (2)$

Lấy $(1) - (2)$ theo vế ta được: $2^{2017} = 2(C_{2017}^1 + C_{2017}^3 + C_{2017}^5 + \dots + C_{2017}^{2017}) \Rightarrow T = 2^{2016}$.

Câu 21: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

C. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2 + 1)$.

D. $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ có TXĐ $D = (0; +\infty)$ nên không thỏa mãn.

Do $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $0 < \frac{2}{e} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2 + 1)$ có $y' = \frac{4x}{(2x^2 + 1) \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ đổi dấu khi x đi qua 0 nên không nghịch

biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 22: Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7$ cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S = 56(\text{cm}^2)$.

B. $S = 55(\text{cm}^2)$.

C. $S = 53(\text{cm}^2)$.

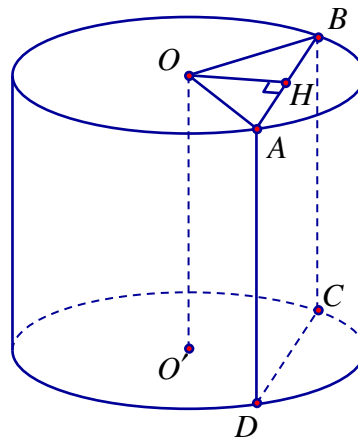
D. $S = 46(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi O, O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3 cm.

Mp (P) cắt hai hình tròn đáy $(O), (O')$ theo hai dây cung lần lượt là AB, CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD, BC . Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



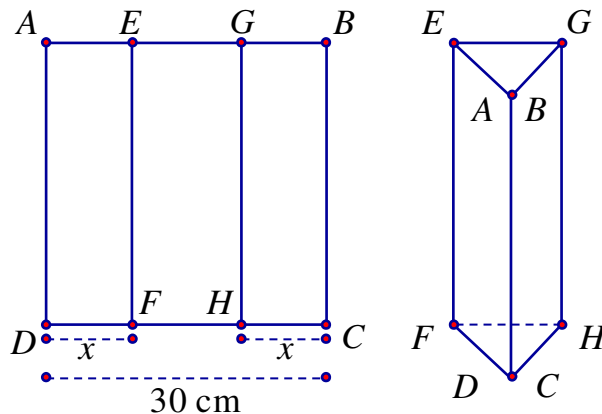
Gọi H là trung điểm của AB . Ta có $OH \perp AB; OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow d(OO', (P)) = d(O, (ABCD)) = OH = 3 \text{ cm}.$$

Khi đó: $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$; $AD = OO' = h = 7 \text{ cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 56(\text{cm}^2)$.

Câu 23: Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

A. $x = 5(\text{cm})$.

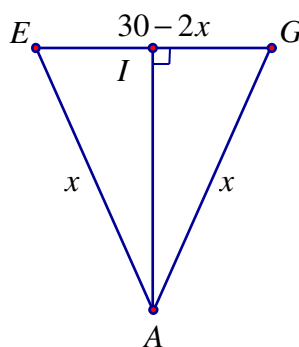
B. $x = 9(\text{cm})$.

C. $x = 8(\text{cm})$.

D. $x = 10(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn D.



Đường cao lăng trụ là $AD = AB = 30\text{cm}$ không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$ trong tam giác AEG .

Khi đó $IG = 15 - x$, $(0 < x < 15)$

$$\text{Có } AI = \sqrt{x^2 - \left(\frac{30-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - (15-x)^2} = \sqrt{30x - 225}, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right).$$

$$S_{\Delta AEG} = \frac{1}{2} AI \cdot EG = \frac{1}{2} (30-2x) \sqrt{30x-225} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$ để $f(x) = (15-x)^2 (2x-15)$ lớn nhất.

$$f'(x) = -2(15-x)(2x-15) + 2(15-x)^2 = 2(15-x)(30-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ x=10 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{15}{2}$	10	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	125	0

Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$.

Cách khác (trắc nghiệm): Học sinh có thể thay giá trị của từng đáp án vào hàm số $f(x) = (15-x)^2 (2x-15)$ để có kết quả.

Câu 24: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A. $x = 8$. B. $x = 10$. C. $x = 15$. D. $x = 7$.

Lời giải

Chọn B.

Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$\text{Có } G'(x) = 0,035[2x(15-x) - x^2] = 0,105x(10-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$G(0) = 0; G(10) = \frac{35}{2}; G(15) = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	15
$G'(x)$		+	-
$G(x)$	0	$\frac{35}{2}$	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.

Câu 25: Đặt $\ln 2 = a$, $\log_5 4 = b$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $\ln 100 = \frac{ab+2a}{b}$. B. $\ln 100 = \frac{4ab+2a}{b}$. C. $\ln 100 = \frac{ab+a}{b}$. D. $\ln 100 = \frac{2ab+4a}{b}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Có } \log_5 4 = b \Leftrightarrow \frac{2 \ln 2}{\ln 5} = b \Leftrightarrow \ln 5 = \frac{2a}{b}.$$

$$\text{Khi đó: } \ln 100 = 2 \ln 10 = 2(\ln 2 + \ln 5) = 2\left(a + \frac{2a}{b}\right) = \frac{2ab+4a}{b}.$$

Câu 26: Số nghiệm thực của phương trình $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0 \text{ ta được phương trình } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và với } 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$$

Câu 27: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 15. B. 4096. C. 360. D. 720.

Lời giải

Chọn C.

Để được một số có 4 chữ số theo yêu cầu đề bài, ta chọn 4 chữ số trong 6 chữ số đã cho và xếp theo một thứ tự nào đó, nghĩa là ta được một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.

Vậy số các số cần thành lập là $A_6^4 = 360$.

Câu 28: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$ và chiều cao $h=1$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó là:

A. $S = 9\pi$.

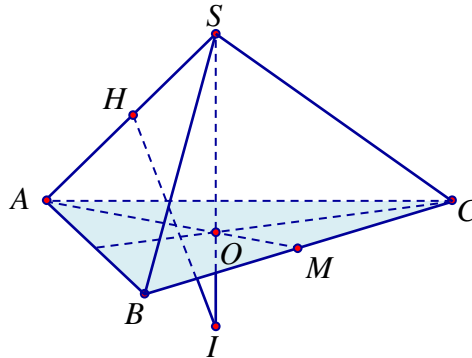
B. $S = 6\pi$.

C. $S = 5\pi$.

D. $S = 27\pi$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi O là tâm của ΔABC suy ra $SO \perp (ABC)$ và $SO = h = 1$; $OA = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAO , ta có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.

Trong mặt phẳng (SAO) kẻ trung trực của đoạn SA cắt SO tại I , suy ra $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi H là trung điểm của SA , ta có ΔSHI đồng dạng với ΔSOA nên

$$R = IS = \frac{SH \cdot SA}{SO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{1} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy diện tích mặt cầu } S_{mc} = 4\pi R^2 = 9\pi.$$

Câu 29: Biết rằng hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức Newton $(2-x)^n, (n \in \mathbb{N}^*)$ bằng 60. Tìm n .

A. $n = 5$.

B. $n = 6$.

C. $n = 7$.

D. $n = 8$.

Lời giải

Chọn B.

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức Newton $(2-x)^n, (n \in \mathbb{N}^*)$ là

$C_n^k 2^{n-k} (-1)^k x^k$, với $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$, suy ra hệ số của x^4 là $C_n^4 2^{n-4}$. Theo đề bài suy ra

$$C_n^4 2^{n-4} = 60 \Leftrightarrow C_n^4 2^n = 960 (*).$$

Tới đây ta dùng phương pháp thử trực tiếp đáp án và chỉ có $n = 6$ thỏa phương trình (*).

Câu 30: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

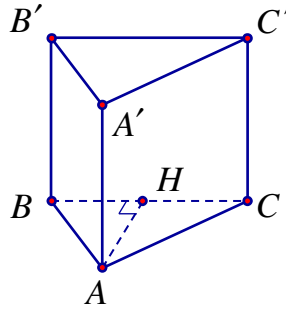
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $AA' \parallel (BCC'B')$ nên khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ cũng chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$. Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{BC^2 - AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31: Cho tập A gồm n điểm phân biệt trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác có 3 đỉnh lấy từ 3 điểm thuộc A gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ 2 điểm thuộc A .

A. $n = 6$.

B. $n = 12$.

C. $n = 8$.

D. $n = 15$.

Lời giải

Chọn C.

Theo đề bài: $C_n^3 = 2C_n^2$ (1) (với $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 2 \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{n-2} \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 32: Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \frac{1}{2}$.

A. $m = e$.

B. $m = -e$.

C. $m = \frac{1}{e}$.

D. $m = \pm\sqrt{e}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } y' = \frac{e^x}{e^x + m^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{e}{e + m^2}.$$

$$\text{Khi đó } y'(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{e + m^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e = e + m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e}.$$

Câu 33: Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} > 0, \forall x \in (5; +\infty).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 34: Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

- A. $\frac{4615}{5236}$. B. $\frac{4651}{5236}$. C. $\frac{4615}{5263}$. D. $\frac{4610}{5236}$.

Lời giải

Chọn A.

Số cách chọn 4 học sinh lên bảng: $n(\Omega) = C_{35}^4$.

Số cách chọn 4 học sinh chỉ có nam hoặc chỉ có nữ: $C_{20}^4 + C_{15}^4$.

Xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ: $1 - \frac{C_{20}^4 + C_{15}^4}{C_{35}^4} = \frac{4615}{5236}$

Câu 35: Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

- A. $0,25^{30} \cdot 0,75^{20}$. B. $0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$. C. $0,25^{30} \cdot 0,75^{20} \cdot C_{50}^{20}$. D. $1 - 0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$.

Lời giải

Chọn C.

Xác suất để chọn được câu trả lời đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất để chọn được câu trả lời sai là $\frac{3}{4}$.

Để được 6 điểm thì thí sinh đó phải trả lời đúng 30 câu và trả lời sai 20 câu.

Xác suất để thí sinh đó được 6 điểm là $C_{50}^{20} \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \left(\frac{1}{4}\right)^{30} = 0,25^{30} \cdot 0,75^{20} \cdot C_{50}^{20}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H) . Số đường tiệm cận của (H) là?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng là $x = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2017}{x-2} = 0 \Rightarrow (H)$ có tiệm cận ngang là $y = 0$.

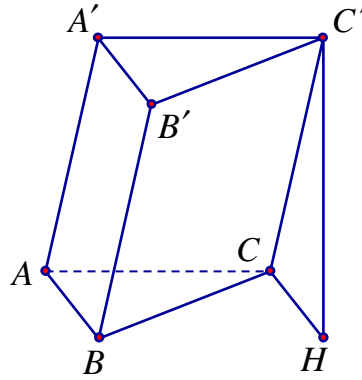
Vậy số đường tiệm cận của (H) là 2

Câu 37: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C.



Kẻ $C'H \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(CC'; (ABC))} = \widehat{C'CH}$.

Bài ra $\widehat{(CC'; (ABC))} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C'CH} = 30^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{C'H}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow C'H = \frac{1}{2} CC' = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{ABC} = C'H \cdot \frac{1}{2} AB.AC.\sin 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .

A. $2\sqrt{3}a^3$.

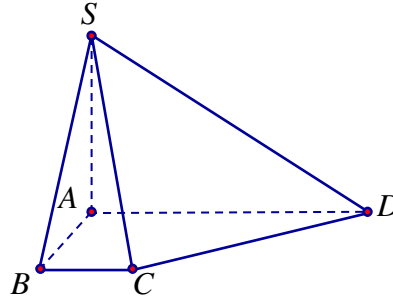
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SA.S_{BCD}$.

Lại có $S_{BCD} = S_{ABCD} - S_{ABD} = \frac{1}{2} AB.(AD + BC) - \frac{1}{2} AB.AD = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{1}{2} a^2$.

Mà $SA = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.BCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Nếu đề bài bỏ giả thiết $AD = 3a$ thì sẽ giải như sau:

Ta có $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SA.S_{BCD} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} d(D, BC).BC = \frac{1}{6} SA.AB.BC = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 39: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$.

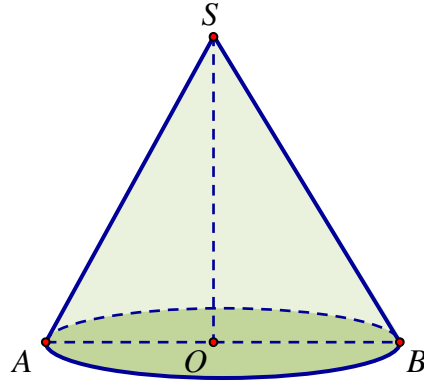
B. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $V = 3\pi a^3$.

D. $V = \pi a^3$.

Lời giải

Chọn C.



$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO.$$

$$\text{Ta có } \widehat{ASB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot OA \sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$$

$$\Rightarrow OA \sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 6a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 6a^2 \Rightarrow OA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = 3a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3.$$

Câu 40: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thể tích là V . Tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$ theo V .

A. $\frac{V}{6}$.

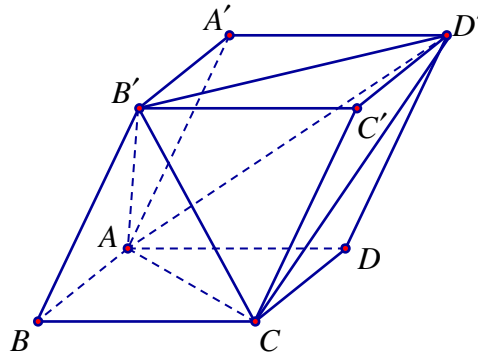
B. $\frac{V}{4}$.

C. $\frac{V}{5}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



$$\text{Ta có ngay kết quả sau } V_{ACB'D'} = V - (V_{B'.ABC} + V_{C.B'C'D'} + V_{D'.ACD} + V_{A.A'B'D'}).$$

$$\text{Lưu ý } V_{B'.ABC} = V_{C.B'C'D'} = V_{D'.ACD} = V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{2} \Rightarrow V_{ACB'D'} = V - 4 \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{3}.$$

Câu 41: Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

A. $\frac{1}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.

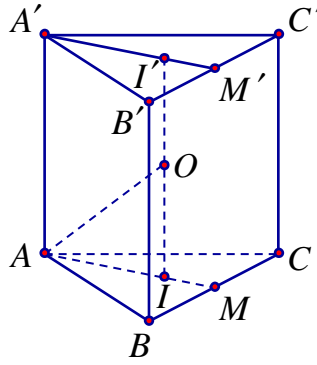
B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.

C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + b^2)^3}$.

D. $\frac{\pi}{18\sqrt{2}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi I, I' lần lượt là tâm hai đáy, O là trung điểm của II' . Khi đó ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Ta có: $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}, IO = \frac{b}{2}$ suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{4a^2 + 3b^2}$$

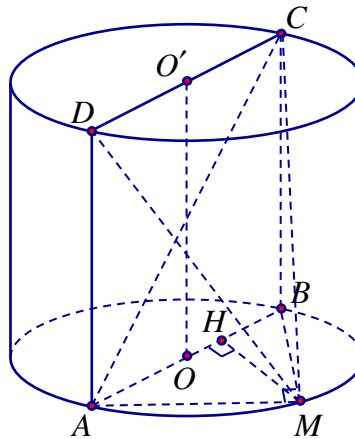
$$\text{Vậy } V_{(O;R)} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}.$$

Câu 42: Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}(\text{cm})$ với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O . Gọi M là điểm thuộc cung $\widehat{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

A. $V = 3(\text{cm}^3)$. **B.** $V = 4(\text{cm}^3)$. **C.** $V = 6(\text{cm}^3)$. **D.** $V = 7(\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có: $\triangle MAB$ vuông tại M có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $MB = \sqrt{3}; MA = 3$.

Gọi H là hình chiếu của M lên AB , suy ra $MH \perp (ACD)$ và $MH = \frac{MB \cdot MA}{AB} = \frac{3}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{M.ACD} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 = 3(\text{cm}^3).$$

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $m = 2$.

C. $m < 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $x^2 - 2mx + 4 > 0$ (*)

Để (*) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 44: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20(\text{cm})$, bán kính đáy $r = 25(\text{cm})$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12(\text{cm})$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 500(\text{cm}^2)$.

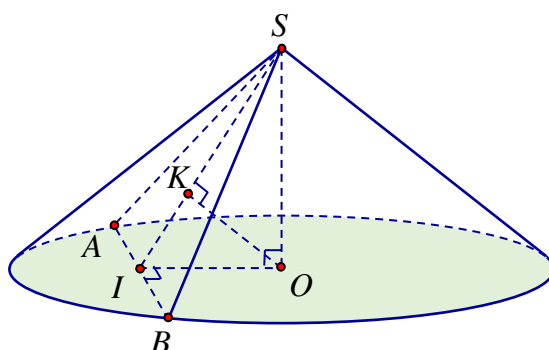
B. $S = 400(\text{cm}^2)$.

C. $S = 300(\text{cm}^2)$.

D. $S = 406(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A.

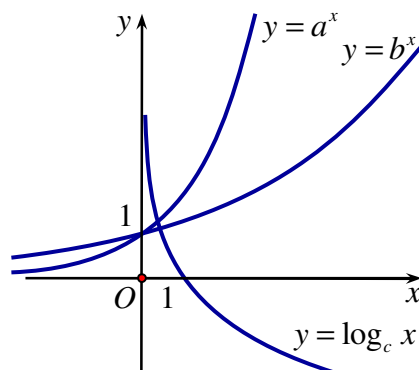


Theo bài ra ta có $AO = r = 25$; $SO = h = 20$; $OK = 12$ (Hình vẽ).

Lại có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OI = 15(\text{cm})$

$AB = 2AI = \sqrt{25^2 - 15^2} = 40(\text{cm})$; $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25(\text{cm}) \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 40 = 500(\text{cm}^2)$.

Câu 45: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < b < c$.

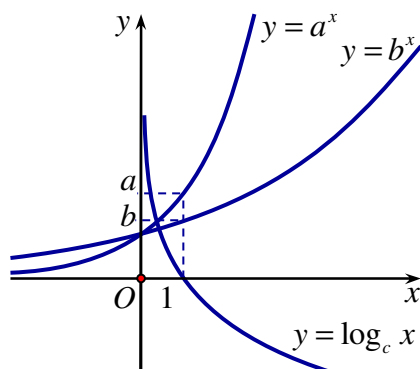
B. $c < b < a$.

C. $a < c < b$.

D. $c < a < b$.

Lời giải

Chọn B.



Vì hàm số $y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$, các hàm số $y = a^x, y = b^x$ đồng biến nên $a > 1; b > 1$ nên c là số nhỏ nhất trong ba số.

Đường thẳng $x = 1$ cắt hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ tại các điểm có tung độ lần lượt là a và b , dễ thấy $a > b$ (hình vẽ). Vậy $c < b < a$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

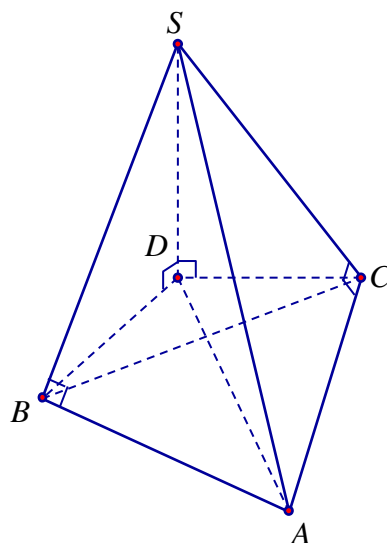
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.

Chọn B.



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt), suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C .

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC , nên cũng là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{DAC} = 30^\circ$, suy ra $DC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là

$$\widehat{SBD} = 60^\circ, \text{ suy ra } \tan \widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \widehat{SBD} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

Câu 47: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải.

Chọn A.

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - (m+2)x + 9 = 0 \end{cases}.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực lớn hơn 1 thì điều kiện sau thỏa mãn.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 < x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 32 > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -8 \\ m > 4 \\ m > 0 \\ 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{5, 6, 7\}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$; tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

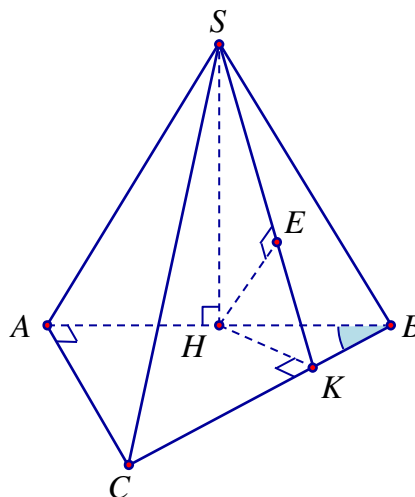
B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Chọn D.



Ta có tam giác ABC vuông tại A góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a$, suy ra $AC = \frac{a}{2}$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ CA \perp AB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$, suy ra tam giác SAC vuông tại A .

$$\text{Suy ra } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác SAB có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SB = a$. Từ đó sử dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{SAB} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2AB}{3}$.

Suy ra $d(H, (SBC)) = \frac{2}{3}d(A, (SBC))$. Từ H kẻ $HK \perp BC$.

Kẻ $HE \perp SK \Rightarrow HE \perp (SBC)$. Ta dễ tính được $HK = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow d(H, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{9}$.

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{3}{2}d(H, (SBC)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{9} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 49: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết góc giữa MN và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là

A. $a\sqrt{\frac{15}{62}}$.

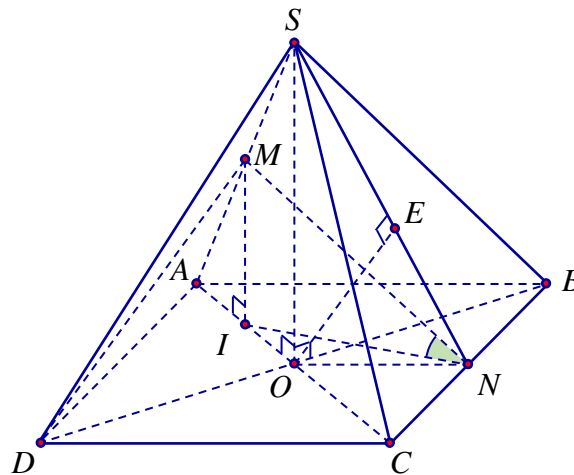
B. $a\sqrt{\frac{30}{31}}$.

C. $a\sqrt{\frac{15}{68}}$.

D. $a\sqrt{\frac{15}{17}}$.

Lời giải.

Chọn B.



Gọi I là trung điểm OA . Vì $IM \parallel SO \Rightarrow IM \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của MN lên $(ABCD)$ là IN . Suy ra $\widehat{MNI} = 60^\circ$

Áp dụng định lí cô sin trong $\triangle CIN$, ta có

$$IN = \sqrt{CI^2 + CN^2 - 2CI \cdot CN \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

Trong tam giác vuông MIN ta có.

$$\tan 60^\circ = \frac{MI}{IN} \Rightarrow MI = IN \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

Ta có $d(BC, DM) = d(BC, (SAD)) = d(N, (SAD)) = 2d(O, (SAD)) = 2d(O, (SBC))$.

Kẻ $OE \perp SN \Rightarrow OE \perp (SBC)$.

$$\text{Ta có } d(O, (SBC)) = OE \text{ mà } \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{4}{30a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{62}{15a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{62}}.$$

$$\text{Vậy } d(BC, DM) = 2OE = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{62}} = \sqrt{\frac{30}{31}}a.$$

Câu 50: Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a + b + c$ là

A. 3.

B. $3.2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

C. 4.

D. 6.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt $x = \log_2 a; y = \log_2 b; z = \log_2 c$. Vì $a, b, c \in [1; 2]$ nên $x, y, z \in [0; 1]$.

$$\begin{aligned} P &= a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3(a \log_2 a + b \log_2 b + c \log_2 c). \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3(ax + by + cz). \end{aligned}$$

Ta chứng minh $a^3 - 3ax \leq x^3 + 1$. Thật vậy:

$$\text{Xét hàm số } f(a) = a - \log_2 a, a \in [1; 2] \Rightarrow f'(a) = 1 - \frac{1}{a \ln 2} \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\text{Trên đoạn } [1; 2] \text{ ta có } f(a) \leq \max \left\{ f(1), f(2), f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \right\} = 1 \Rightarrow a - \log_2 a \leq 1.$$

hay $a - x \leq 1 \Leftrightarrow a - x - 1 \leq 0$. Do đó.

$$\text{Xét: } a^3 - 3ax - x^3 - 1 = (a - x - 1)(a^2 + x^2 + 1 + a + ax - x) \leq 0.$$

(Vì theo trên ta có $a - x - 1 \leq 0$ và $a^2 + (x^2 - x + 1) + a + ax > 0, \forall a \in [1; 2], \forall x \in [0; 1]$).

Vậy $a^3 - 3ax - x^3 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow a^3 - 3ax \leq x^3 + 1$. Tương tự $b^3 - 3by \leq y^3 + 1; c^3 - 3cz \leq z^3 + 1$.

$$\text{Do đó } P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(ax + by + cz) \leq x^3 + y^3 + z^3 + 3 \leq 1 + 3 = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0, z = 1$ và các hoán vị, tức là $a = b = 1, c = 2$ và các hoán vị. Khi đó $a + b + c = 4$.