



TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN
LỚP TOÁN THẦY DUY
GV: PHẠM LÊ DUY - SĐT: 0704.963.919

TOÁN 12

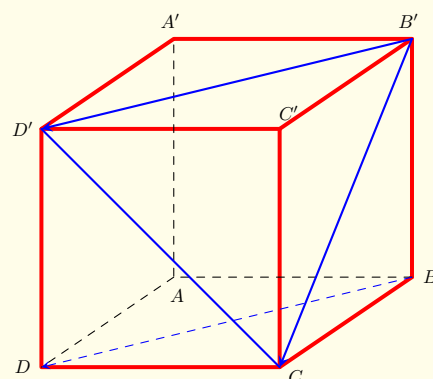
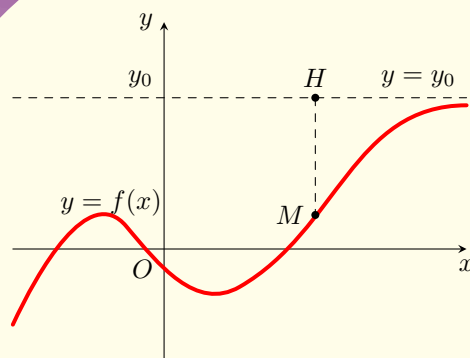
HỌC KÌ 1

Nắm Lý Thuyết **A**

Hiển Ví Dụ **B**

Siêng Luyện Tập **C**

Giải Được Toán **D**



LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	Ứng dụng của đạo hàm	9
1	ĐƠN ĐIỀU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	9
A	Lý thuyết	9
B	Các dạng bài tập	11
Dạng 1.1.	Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức	11
Dạng 1.2.	Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên	13
Dạng 1.3.	Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức	14
Dạng 1.4.	Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị	17
Dạng 1.5.	Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số	19
C	Luyện tập	22
2	Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của hàm số	36
A	Lý thuyết	36
B	Các dạng bài tập	37
Dạng 2.1.	Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn	37
Dạng 2.2.	Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng	37

	Dạng 2.3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất	40
	Dạng 2.4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất	41
	Dạng 2.5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất	43
C	Luyện tập	47
3	Đường Tiệm Cận Của Đồ Thị Hàm Số	53
A	Lý Thuyết	53
B	Các dạng bài tập	54
	Dạng 3.1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị	54
	Dạng 3.2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị	56
	Dạng 3.3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích	57
	Dạng 3.4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận	57
C	Luyện tập	59
4	KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN	66
A	Lý thuyết	66
B	Các dạng bài tập	69
	Dạng 4.1. Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$	69
	Dạng 4.2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất	71

Dạng 4.3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất	73
Dạng 4.4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên	76
Dạng 4.5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số	78
Dạng 4.6. Xác định dấu – giá trị các hệ số	80
Dạng 4.7. Đọc đồ thị của đạo hàm	83
Dạng 4.8. Sự tương giao	85
C Luyện tập	87

CHƯƠNG 2 Véc-tơ và hệ tọa độ **103**

1 Véc-tơ và các phép toán trong không gian	103
A Lý thuyết	103
B Các dạng bài tập	106
Dạng 1.1. Sử dụng các định nghĩa	106
Dạng 1.2. Tổng và hiệu của hai vectơ	108
Dạng 1.3. Tích của một số với một véc-tơ	111
Dạng 1.4. Tích vô hướng của hai véc-tơ	113
C Luyện tập	116

2	TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	125
A	Lý thuyết	125
B	Các dạng bài tập	126
	Dạng 2.1. Tọa độ điểm	126
	Dạng 2.2. Tọa độ vectơ	127
	Dạng 2.3. Bài toán thực tế	129
C	Luyện tập	131
3	BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	139
A	Lý thuyết	139
B	Các dạng bài tập	140
	Dạng 3.1. Tọa độ tổng hiệu vectơ	140
	Dạng 3.2. Tọa độ điểm – vectơ thỏa điều kiện	141
	Dạng 3.3. Độ dài vectơ	142
	Dạng 3.4. Sự cùng phương của hai vectơ	144
	Dạng 3.5. Tích vô hướng và ứng dụng	145
	Dạng 3.6. Tâm tỷ cự	148
C	Luyện tập	151

CHƯƠNG 3 Các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho msl ghép nhóm 155

1	Khoảng biến thiên - Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	155
A	Lý thuyết	155
B	Các dạng bài tập	156
	Dạng 1.1. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm	156
	Dạng 1.2. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán	158
	Dạng 1.3. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán	159
	Dạng 1.4. Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị trong việc đo mức độ phân tán	163
C	Luyện tập	167
2	Phương sai và Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	187
A	Lý thuyết	187
B	Các dạng bài tập	189
	Dạng 2.1. Lập mẫu số liệu ghép nhóm và tính giá trị trung bình	189
	Dạng 2.2. Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm	191
	Dạng 2.3. Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và ý nghĩa	194
	Dạng 2.4. Sử dụng phương sai, độ lệch chuẩn đo độ rủi ro	197

C Luyện tập

200

BÀI 1. ĐƠN ĐIỀU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

0.1 Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

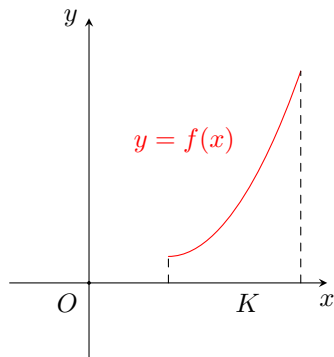
Định nghĩa 1. Kí hiệu $\mathbb{K}$ là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$.

Hàm số $y = f(x)$

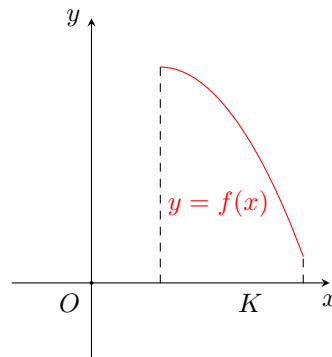
- Gọi là đồng biến trên $\mathbb{K}$ nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Gọi là nghịch biến trên $\mathbb{K}$ nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.



- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$ thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình a).
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$ thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình b).



Hình a)



Hình b)

0.2 Tính đơn điệu của hàm số

Định lý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{K}$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{K}$.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{K}$.



- Định lý vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong $\mathbb{K}$.
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{K}$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $\mathbb{K}$.

0.3 Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .



- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (cực trị) của hàm số.

0.4 Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
y'	+ -		
y			

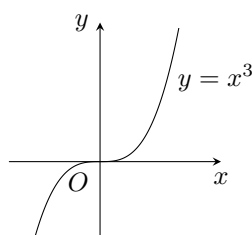
Hàm số f đạt cực đại tại $x = x_0$.

x	a	x_0	b
y'	- +		
y			

Hàm số f đạt cực tiểu tại $x = x_0$.



- Từ định lý trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:
 - **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
 - **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in \mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
 - **Bước 3:** Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.
- Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.
 Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

□ Dạng 1.1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in \mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 12x^2 + 6x - 36.$$

Cho $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	58	$-\frac{111}{4}$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; \frac{3}{2})$.

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \forall x \neq -1.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4}$.

Lời giải

Điều kiện $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{-x^2 + 4}}.$$

Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				2	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \ln 3}.$$

$$\text{Khi đó, } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-		+
y	$+\infty$			$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Dạng 1.2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên

Phương pháp:

- Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên-xuống của đường cong (chiều từ trái sang phải).
- Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên-xuống của mũi tên (chiều từ trái sang phải).
- Với bảng xét dấu, quan sát: dấu âm-dương của $f'(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

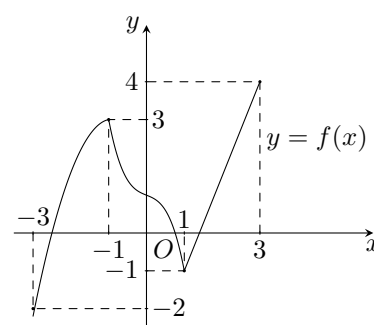
Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta có

- Trong $(0; 1)$ mũ tên “đi xuống” nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- Trong $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$ mũ tên “đi lên” nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.



Lời giải

Từ đồ thị của hàm số, ta có

- Trong $(-3; -1)$ và $(1; 3)$ đồ thị “đi lên” nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.
- Trong $(-1; 1)$ đồ thị “đi xuống” nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Dạng 1.3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in \mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

- Bước 4:** Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x = ?$, $y = ?$ (nếu có).

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = 6x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{CD} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 0$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = -4x^3 + 6x^2 - 2; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{16}. \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	+	0	0	-
y	$-\infty$	$-\frac{5}{16}$	-2	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{CD} = -\frac{5}{16}$.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x+2}{3x-1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = -\frac{7}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{3}.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	-		-
y	$\frac{1}{3}$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $\frac{1}{3}$

Vậy hàm số không có cực trị.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - x}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(1 - x)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$	
y'	-		0	+	+		0	-
y	$+\infty$				$+\infty$			
			4			0		
						$-\infty$		
							$-\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y_{CD} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow y_{CT} = 4$.

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2^{x^2 - 5x}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 2^{x^2 - 5x} (x^2 - 5x)' \ln 2 = 2^{x^2 - 5x} (2x - 5) \ln 2$.

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $2^{-\frac{25}{4}}$		$+\infty$ ↗ $2^{-\frac{25}{4}}$

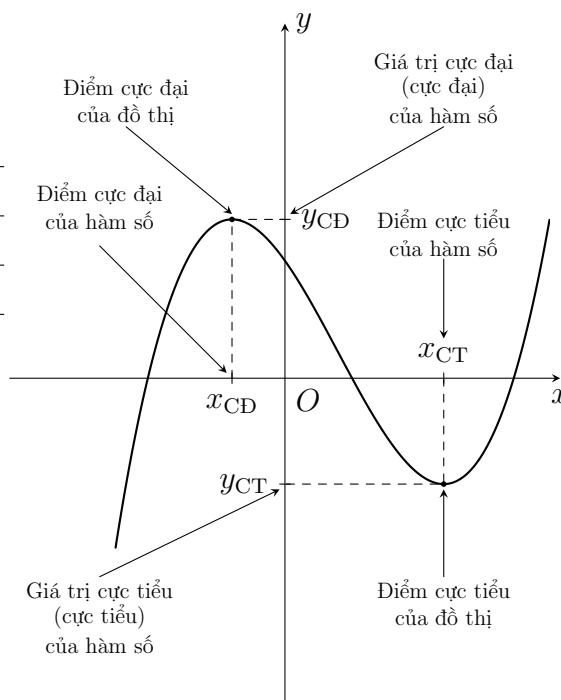
Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{5}{2} \Rightarrow y_{CT} = 2^{-\frac{25}{4}}$.

Dạng 1.4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị

- Nhận xét:** Hàm số $f(x)$

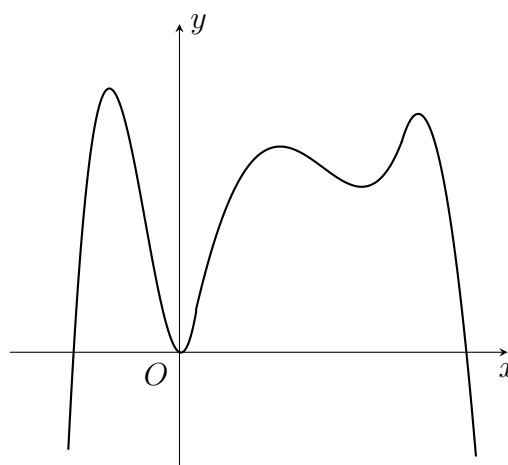
có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần

- Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó đạo hàm triệt tiêu $f'(x_0) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định tại đó.



Ví dụ 1.

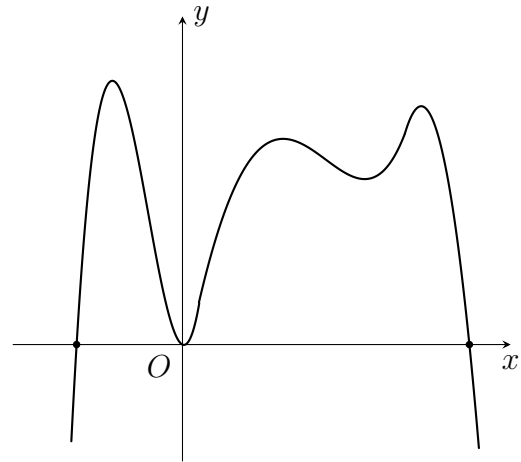
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases}$.

- $f'(x)$ qua x_1 đổi dấu từ “–” sang “+” nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu $x = x_1$.
- $f'(x)$ qua $x = 0$ không đổi dấu nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x = 0$.
- $f'(x)$ qua x_2 đổi dấu từ “+” sang “–” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = x_2$.



Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

- $f'(x)$ qua $x = -1$ đổi dấu từ “+” sang “–” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = -1$.
- $f'(x)$ và $f(x)$ không xác định tại $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x = 0$.
- $f'(x)$ qua $x = 1$ đổi dấu từ “–” sang “+” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hãy thiết lập công thức hàm số $y = f(x)$ đã cho?

Lời giải

Đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(0; 2)$ và $(3; -4)$, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \\ f(3) = -4 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 2 = -4 \\ 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \\ 27a + 9b = -6 \\ 27a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = 2. \end{cases}$$

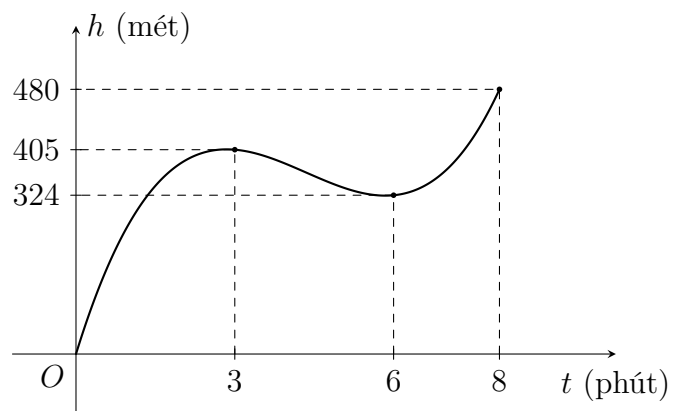
Vậy công thức của hàm số cần tìm có dạng $y = f(x) = \frac{4}{9}x^3 - 2x^2 + 2$.

▢ Dạng 1.5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại t_0 .
- Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $h(t)$, ta nhận xét:

- Trong khoảng thời gian từ 3 phút đến 6 phút thì khinh khí cầu giảm dần độ cao.
- Trong 3 phút đầu tiên và trong khoảng thời gian từ 6 phút đến 8 phút thì khinh khí cầu tăng dần độ cao.

Ví dụ 2. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

Xét hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ trên $[0; +\infty)$.

$v'(t) = 6t - 12$. Cho $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$.

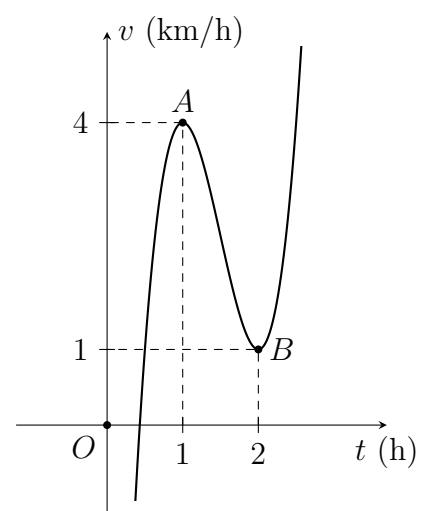
Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	—	0	+
$v(t)$	9	—3	$+\infty$

Vậy trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên thì vận tốc chất điểm giảm dần và sau thời điểm 2 giây thì vận tốc chất điểm tăng dần.

Ví dụ 3.

Một vật chuyển động với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1$ h vật có vận tốc $v_1 = 4$ km/h và tại thời điểm $t_2 = 2$ h vật có vận tốc $v_2 = 1$ km/h. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ h.



Lời giải

Giả sử hàm số vận tốc có dạng $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $t > 0$.

Ta có $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1, t_2 đồ thị hàm vận tốc đi qua các điểm cực trị $A(1; 4), B(2; 1)$.

Khi đó

$$\begin{cases} v(1) = 4 \\ v'(1) = 0 \\ v(2) = 1 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -27 \\ c = 36 \\ d = -11. \end{cases}$$

Suy ra $v(t) = 6t^3 - 27t^2 + 36t - 11$ (km/h).

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ h là

$$v(3) = 6 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 11 = 16 \text{ km/h.}$$

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 2. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 3. Hàm số $y = \frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 -1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

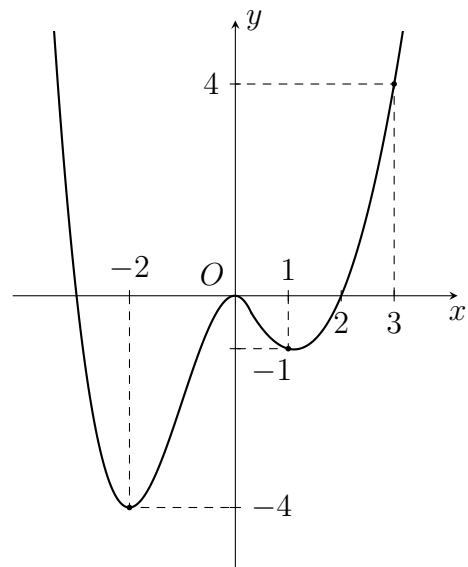
- A. $(-3; 0)$. B. $(-3; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; -3)$.

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(-4; 0)$. B. $(2; 3)$.
C. $(-1; 1)$. D. $(1; 3)$.



Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 8. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

- A. $x = 1$. B. $(3; 1)$. C. $x = 3$. D. $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 9. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

- A. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. B. $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$.
 C. $y = x^2 - 2x + 1$. D. $y = -x^3 + x + 1$.

Câu 10. Hàm số $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		-4		$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0. B. 2. C. -4. D. 3.

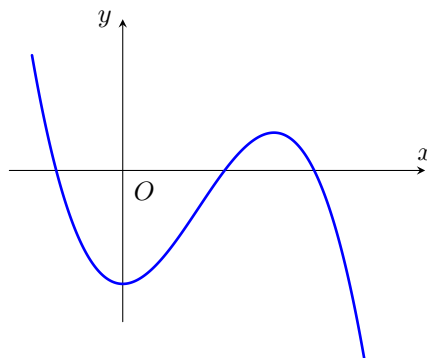
Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		1		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -1$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số này là

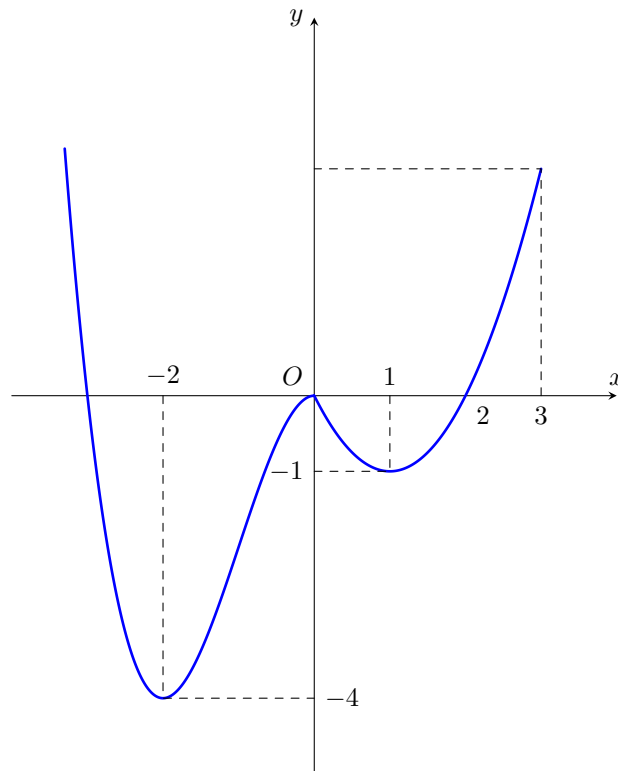


- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 14. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$. B. $y = -x^3 - 3x$. C. $y = x^3 + x$. D. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A. $(-2; 1)$. B. $(-2; -1)$. C. $(0; \frac{1}{2})$. D. $(1; 3)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2(1 - x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 19. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; -\frac{1}{2})$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Câu 20. Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1 - x)^2(x + 1)^3(3 - x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 24. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Trong khoảng thời gian nào khinh khí cầu giảm dần độ cao?

- A. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$. B. $(0; 3)$. C. $(3; 6)$. D. $\left(\frac{7}{2}; 8\right)$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$. Có bao nhiêu khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

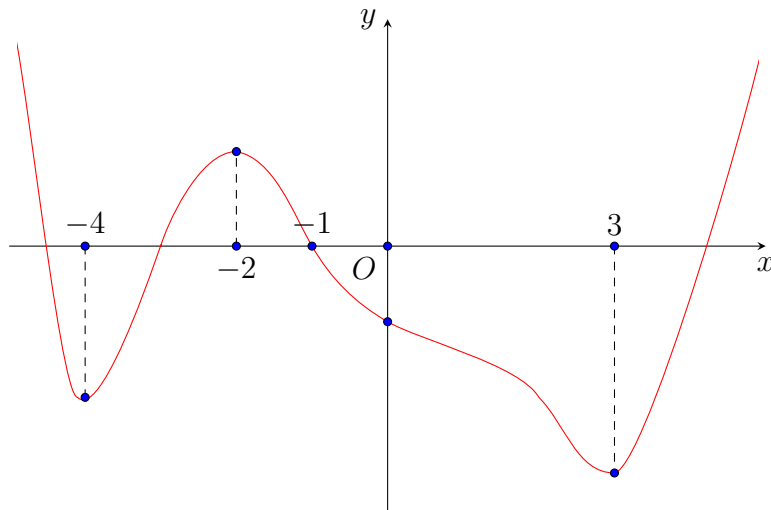
- a) Điểm cực đại của hàm số là $x = -1$.
 b) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 4$.
 c) Giá trị cực đại của hàm số là $y = 14$.
 d) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = -111$.

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 26. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

- A. $x_{CD} = -3, x_{CT} = 1$. B. $x_{CT} = -3, x_{CD} = 1$.
 C. $x_{CD} = -5, x_{CT} = 3$. D. $x_{CT} = -5, x_{CD} = 3$.

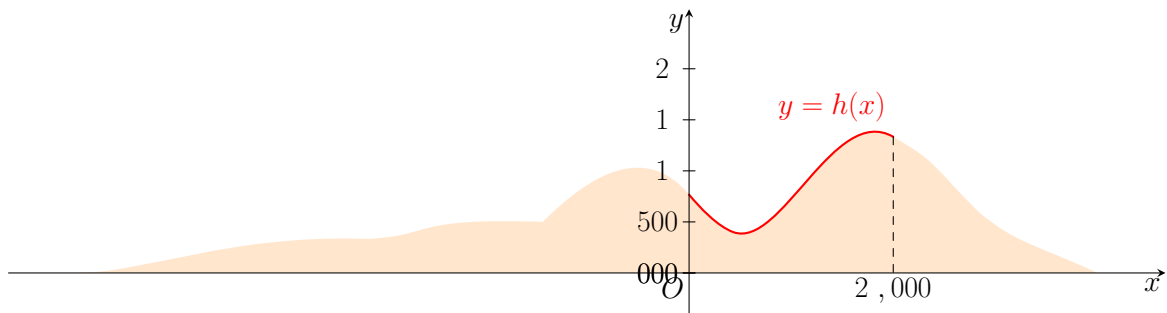
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Điểm cực đại của hàm số là $x = -4$. B. Điểm cực đại của hàm số là $x = -2$.
C. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = -2$. D. Điểm cực đại của hàm số là $x = 3$.

Câu 28. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số $y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840$ với $0 \leq x \leq 2000$. Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.



- A. $\left(1800; \frac{7365}{16}\right)$ và $\left(450; \frac{15315}{11}\right)$. B. $\left(480; \frac{1515}{16}\right)$ và $\left(450; \frac{7365}{16}\right)$.
C. $\left(480; \frac{1515}{16}\right)$ và $\left(1750; \frac{7561}{16}\right)$. D. $\left(1800; \frac{15315}{11}\right)$ và $\left(450; \frac{7365}{16}\right)$.

Câu 29. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$.

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 2)$.

Câu 30. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $v(t) = x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t . Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

- A. $t \in (0; 2)$. B. $t \in (0; 3)$. C. $t = 2$. D. $t \in (2; +\infty)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x^2 + 4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $-\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Vậy hộ này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét để thu được lợi nhuận tối đa?

- A. 6 mét. B. 10 mét. C. 18 mét. D. 12 mét.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(2; 3)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(3; 4)$.

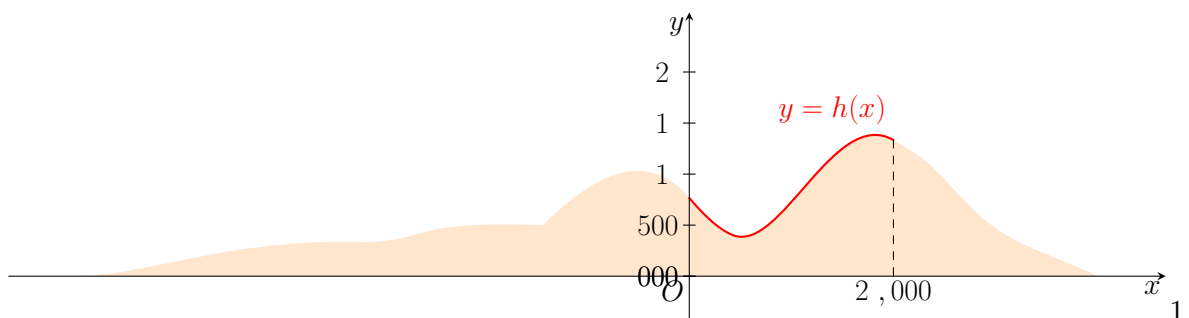
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.



Hàm số $y = f(2 - 3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; 3)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; 3)$.

1. B	2. C	3. C	4. A	5. B	6. D	7. C	8. B	9. B	10. B
11. C	12. A	13. B	14. C	15. C	16. C	17. C	18. D	19. C	20. B
21. A	22. C	23. A	24. C	25. C	26. A	27. B	28. D	29. C	30. A
31. A	32. B	33. D	34. C	35. A					

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	0	5	$-\infty$	

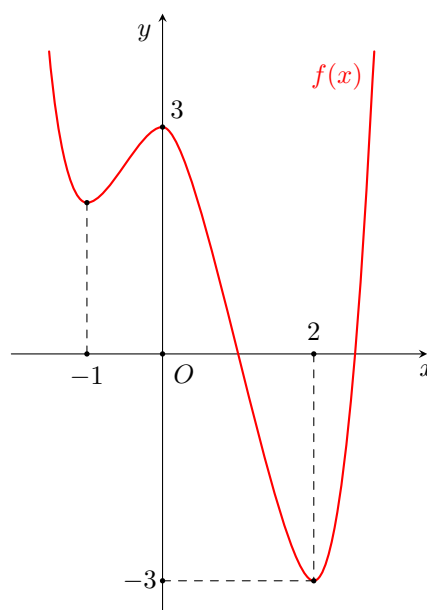
- a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

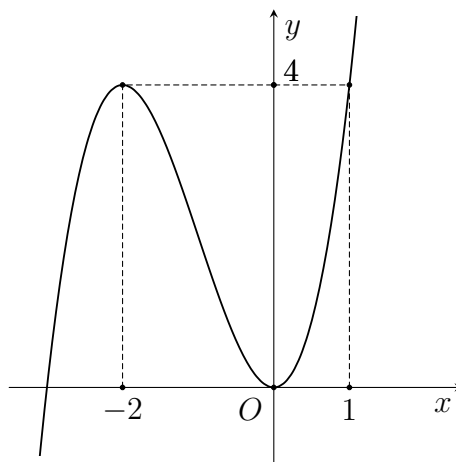


- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$.
- c) Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- d) Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

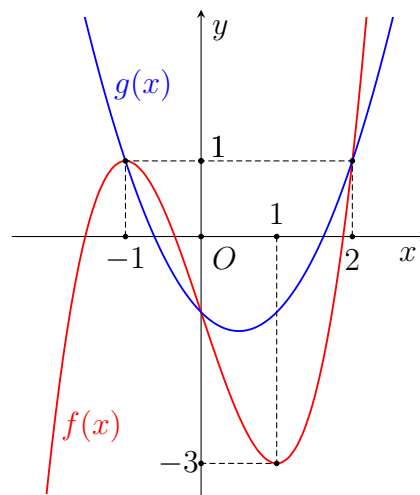
- a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
- c) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.
- d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



- a) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.
- c) Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$.
- d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị là các đường cong như trong hình dưới đây.



- a) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 > 1$.

- b) Hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 1$.
- d) Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $y_0 = 1$.

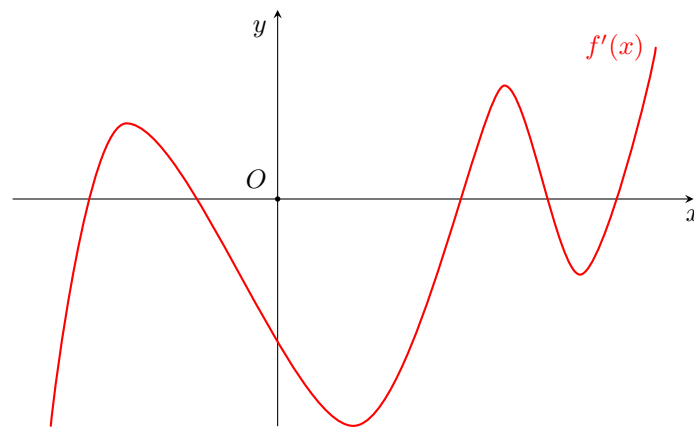
Câu 7. Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- a) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.
- c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
- d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
- b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $x = 3$.
- c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x = 1$.
- d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



- a) Hàm số $y = f(x)$ đã cho có 4 điểm cực trị.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực đại.
- d) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.

Câu 10. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(a; b)$ lần lượt là m và M . Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

- a) $m < M$.
- b) $f(a) = m$.
- c) Với mọi $x \in (a; b)$ ta có $f(x) > m$.

d) Với mọi $x \in (a; b)$ ta có $m \leq f(x) < M$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

- a) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm.
- b) Phương trình $f(x) = C$ vô nghiệm với $m \leq C \leq M$.
- c) Bất phương trình $f(x) > M$ vô nghiệm.
- d) Bất phương trình $f(x) > m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

- a) $\min_{[0;1]} y = 0$.
- b) $\min_{[0;2]} y = y(0)$.
- c) $\min_{[-1;0]} y + \max_{[0;1]} y = 4$.
- d) $\min_{[-\frac{3}{2};0]} \frac{1}{y} = \frac{8}{25}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = 2 \sin x - 1$. Khi đó

- a) $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.
- b) $\min_{\mathbb{R}} y = -3$.
- c) $\max_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- d) $\min_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	0	1	3
y'	+	0	-
y	8	9	5

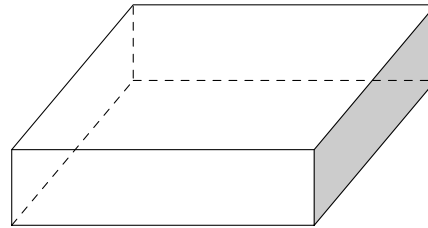
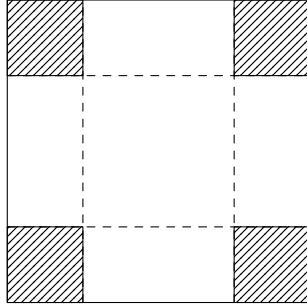
- a) Có 7 số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$.
- b) Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 7.
- c) Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 3.
- d) Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 45.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$. Khi đó

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là 1.
- b) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $(0; \pi)$.

- c) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 d) Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Câu 16. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



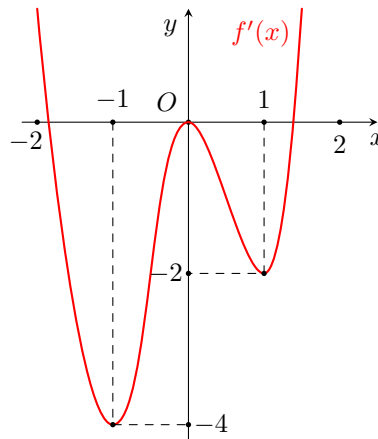
- a) Ta có $0 < x < \frac{a}{2}$.
 b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a - 2x)^2$ ($0 < x < \frac{a}{2}$).
 c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{9}$.
 d) Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\frac{a}{6}$.

1. a Đ b S c Đ d Đ	2. a S b Đ c S d S	3. a Đ b S c Đ d S
4. a Đ b Đ c Đ d S	5. a Đ b Đ c S d S	6. a S b S c S d Đ
7. a S b Đ c S d S	8. a Đ b S c S d S	9. a S b Đ c S d Đ
10. a S b S c S d S	11. a Đ b S c Đ d S	12. a Đ b S c Đ d S
13. a Đ b Đ c Đ d Đ	14. a S b S c S d Đ	15. a Đ b Đ c Đ d Đ
16. a Đ b Đ c S d Đ		

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Hãy xác định số khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$. KQ:

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới.



Giả sử hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Trong khoảng $(a; b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2024? KQ:

Câu 3. Cho hàm số $f'(x) = x(x^2 - 1)(x + 1)^3$. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại? KQ:

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị? KQ:

1. 2. 3. 4.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$ nếu $\begin{cases} f(x) \leq M; \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}: f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ hoặc $M = \max_{\mathcal{D}} f(x)$.
- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$ nếu $\begin{cases} f(x) \geq m; \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}: f(x_0) = m \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ hoặc $m = \min_{\mathcal{D}} f(x)$.



- Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét “trên tập $\mathcal{D}$ ”) thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập $\mathcal{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập $\mathcal{D}$ để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn

 Cách tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

- Bước 1:** Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- Bước 2:** Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.
- Bước 3:** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M = \max_{[a; b]} f(x)$ và $m = \min_{[a; b]} f(x)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

□ Dạng 2.1. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên đoạn

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- **Bước 2:** Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.
- **Bước 3:** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
Khi đó $M = \max_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -1(n) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-2) = -1; f(-1) = 3; f(1) = -1; f(2) = 3$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;2]} f(x) = 3 \text{ khi } \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ và } \min_{[-2;2]} f(x) = -1 \text{ khi } \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{2}}{2}(n) \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}(n). \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-1) = 0; f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-1}{2}; f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}; f(1) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;1]} f(x) = \frac{1}{2} \text{ khi } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \min_{[-1;1]} f(x) = \frac{-1}{2} \text{ khi } x = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

□ Dạng 2.2. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = f(x)$.
– $f(x)$ không liên tục trên $(a; b) \Rightarrow$ Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

– $f(x)$ liên tục trên $(a; b) \Rightarrow$ Bước tiếp theo.

- Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
- Bước 3: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$, hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ cho trước.
- Bước 5: Xác định điểm “cao nhất” và điểm “thấp nhất” của đồ thị hàm số trên $(a; b)$.
- Bước 6: Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

Nhận xét. • Nếu đề bài không cho sẵn $(a; b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.

- Đây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 4$ trên khoảng $(0; 3)$.

Lời giải

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $(0; 3)$.

Ta có $y' = -2x + 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1(n)$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	1	3
y'	+	0	–
y	4	5	1

Từ bảng biến thiên, ta có $\max_{(0;3)} y = 5$ tại $x = 1$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 4$ trên $[-3; 2)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -1(n) \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-3	-1	1	2	
y'	+	0	-	0	+
y	-22 -2 -6 -2				

Vậy $\max_{[-3;2)} f(x) = -2$ khi $x = -1$ và $\min_{[-3;2)} f(x) = -22$ khi $x = -3$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện $x \neq 0$.

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (0; +\infty) \\ x = -2 \notin (0; +\infty). \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = y(2) = 4$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ trên $(-1; -\infty)$.

Lời giải

Điều kiện $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0(n)$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	-
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	0

Vậy hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

□ Dạng 2.3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Sử dụng bất đẳng thức thường xuyên

- Bất đẳng thức Cô-si:

- Với hai số thực không âm $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow a = b$.
- Với ba số thực không âm: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
- Với n thực không âm: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 \dots = a_n$.

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki

- Dạng cơ bản: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- Dạng tổng quát:
Với hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Ví dụ 1. Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = 2 + 3 \sin x$. Tính $M + m$.

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \leq 2 + 3 \sin x \leq 5$.

$M = 5$, đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$m = -3$, đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $M + m = 4$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{386x}{x^2 + 2x + 5}$.

Lời giải

T heo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\begin{aligned} x + \frac{5}{x} &\geq 2\sqrt{5} \Rightarrow x + \frac{5}{x} + 2 \geq 2\sqrt{5} + 2 \\ &\Rightarrow \frac{386}{x + \frac{5}{x} + 2} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2} \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{386x}{x^2 + 2x + 5} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$. (vì $x > 0$)

□ Dạng 2.4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

• Bài toán bất phương trình

- Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x) - g(x) \geq 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình.
- Đặt hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x)$, xét tính đơn điệu của $y = h(x)$ trên điều kiện xác định.
- Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

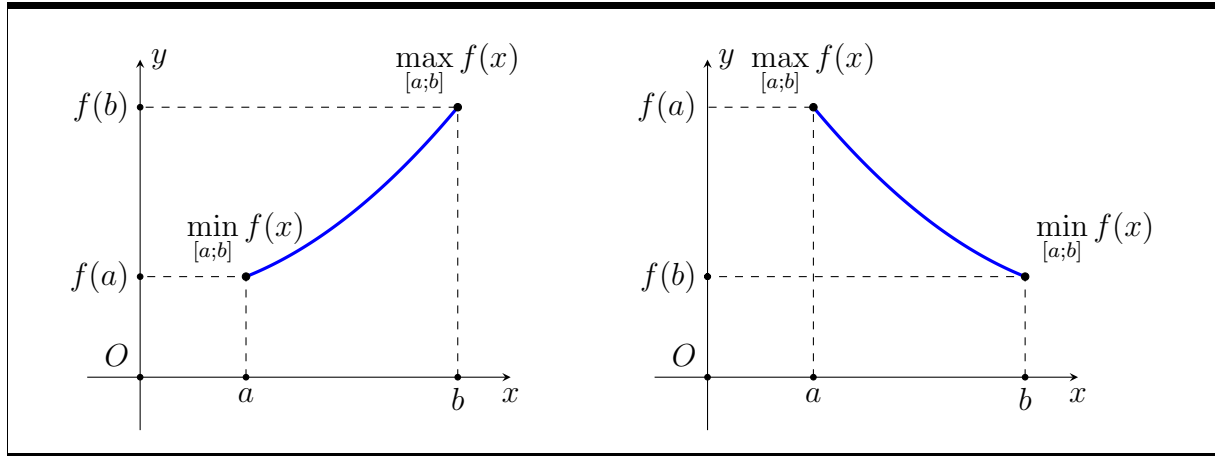
• Bài toán bất phương trình chứa tham số

Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau

- Nếu $m \geq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $m \geq \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- Nếu $m \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $m \leq \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- Nếu $m \geq f(x)$ có nghiệm $x \in \mathcal{D}$ thì $m \geq \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- Nếu $m \leq f(x)$ có nghiệm $x \in \mathcal{D}$ thì $m \leq \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

• Nhận xét

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(b) \\ \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(a) \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(a) \\ \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(b) \end{cases}$.



Ví dụ 1. Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$. Ta có

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} - 4 \geq 0.$$

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} - 4$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}} > 0, \forall x > \frac{1}{5}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

x	$\frac{1}{5}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	0	$+\infty$

Mặt khác: $f(1) = 0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 0$.

Vậy nghiệm bất phương trình là: $x \geq 1$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện $-2 \leq x \leq 4$.

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} - 2\sqrt{3}$ trên $[-2; 4]$.

Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2; 4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$.

x	2	1	4
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$f(2)$	0	$f(4)$

Mặt khác, $f(1) = 0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$.
 So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $[1; 4]$.

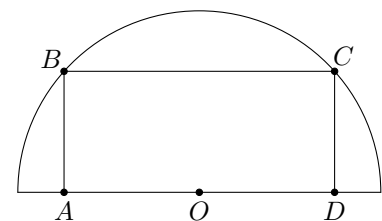
Dạng 2.5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất

Phương pháp

- *Bước 1:* Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
- *Bước 2:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- *Bước 3:* Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
- *Bước 4:* Kết luận.

Ví dụ 1.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Gọi chiều dài $AD = 2x$ với $0 < x < 6$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.

Xét $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ với $0 < x < 6$

$$\text{Ta có } f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \in (0; 6) \\ x = 3\sqrt{2} \notin (0; 6) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$3\sqrt{2}$	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	36	0

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36 cm^2 .

Ví dụ 2. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B . Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

Theo giả thiết

- Thời gian làm việc của máy A là x ngày;
- Thời gian làm việc của máy B là y ngày.

$$\text{Ta có } x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (*)$$

$$\text{Vì } 0 < y \leq 6 \Rightarrow 4 \leq x < 10.$$

$$\text{Số tiền lãi } x^3 + 2x + 326y - 27y^3.$$

Thay (*) vào ta được

$$x^3 + 2x + 326(10 - x) - 27(10 - x)^3 = 28x^3 - 810x^2 + 7776x - 23740.$$

$$\text{Đặt } f(x) = 28x^3 - 810x^2 + 7776x - 23740 \text{ với } x \in [4; 10).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 84x^2 - 1620x + 7776.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 84x^2 - 1620x + 7776 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \in [4; 10) \\ x = \frac{72}{7} \notin [4; 10) \end{cases}.$$

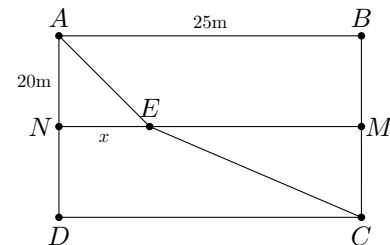
Bảng biến thiên

x	4	9	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(4)$	$f(9)$	$f(10)$

Từ bảng biến thiên ta có $x = 9$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25$ m, chiều rộng $AD = 20$ m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chẵn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chẵn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15 m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30 m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .



Lời giải

Cách 1.

Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm.

Với $NE = x$ m (với $0 \leq x \leq 25$)

$\Rightarrow EM = 25 - x$ (m).

$$\text{Ta được } \begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25 - x)^2} \end{cases}$$

Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là

$$\frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30}.$$

$$\text{Đặt } t(x) = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30} \text{ (với } 0 \leq x \leq 25\text{)}.$$

$$t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}.$$

Xét

$$\begin{aligned}
 t'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30\sqrt{(25-x)^2+100}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100} &= (25-x)\sqrt{100+x^2} \\
 \Leftrightarrow 4x^2((25-x)^2+100) &= (25-x)^2(100+x^2) \\
 \Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2 + 400x^2 - 100(25-x)^2 - (25-x)^2x^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4(25-x)^2(x^2-25) + x^2(20^2 - (25-x)^2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-5)(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 5.
 \end{aligned}$$

Ta được
$$\begin{cases} t(0) = \frac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25) = \frac{1+\sqrt{29}}{3}. \end{cases}$$

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

Cách 2.

Đặt $t(x) = \frac{\sqrt{10^2+x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$

$$\Leftrightarrow t(x) = \frac{\sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30} \quad (\text{với } 0 \leq x \leq 25).$$

Lại có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2} &\geq \sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2} &\geq \sqrt{5(x-5)^2+2000}.
 \end{aligned}$$

Do đó $t(x) \geq \frac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30} \geq \frac{\sqrt{2000}}{30} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

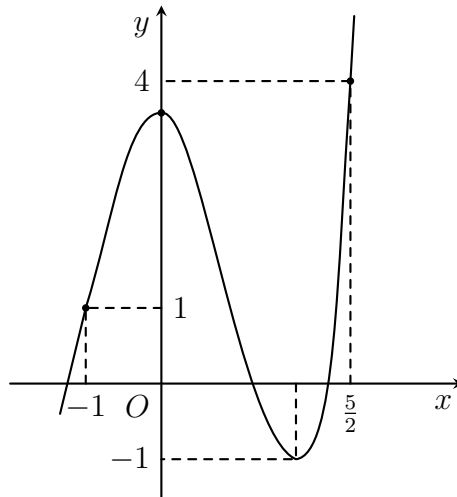
Vậy $t(x)_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h) khi và chỉ khi $x = 5$ (m).

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là

- A. $M = 4, m = 1$. B. $M = 4, m = -1$.
C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$. D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	0	-
y			3		5			
	$-\infty$			1				$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3; 7]$. Ta có giá trị của $M + 2m$ là

- A. $M + 2m = 1$. B. $M + 2m = 7$. C. $M + 2m = 3$. D. $M + 2m = 4$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

x	-3	-1	0	1	2			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$								
			3		2			
	-2			0			1	

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-3	-1	0	1	2					
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-		
$f(x)$										
	-2		↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$. B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$.
C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$. D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 1$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $M = 5$. B. $M = -5$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = -\frac{1}{3}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	3	-1	1	

- A. $\max_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}$. B. $\max_{\mathbb{R}} = -1$. C. $\max_{\mathbb{R}} = 1$. D. $\max_{\mathbb{R}} = 3$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$.

- A. $\min_{[-4; -2)} y = 4$. B. $\min_{[-4; -2)} y = 7$. C. $\min_{[-4; -2)} y = 5$. D. $\min_{[-4; -2)} y = \frac{15}{2}$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

- A. 11. B. 0. C. 5. D. 2.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. B. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.
C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M = \max_{x \in [0;2]} f(x)$, $m = \min_{x \in [0;2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. $-\frac{4}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ đạt được tại x_0 . Giá trị x_0 bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\max_{x \in (0;+\infty)} f(x) = f(1)$. B. $\max_{x \in (-1;1]} f(x) = f(0)$.
C. $\min_{x \in (-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. D. $\min_{x \in (-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5	1	7	
y'		$-$	0	$+$
y	0	2	9	

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{x \in [-5;7]} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7]$.

- B. $\max_{x \in [-5;7]} f(x) = 6$ và $\min_{x \in [-5;7]} f(x) = 2$.
 C. $\max_{x \in [-5;7]} f(x) = 9$ và $\min_{x \in [-5;7]} f(x) = 2$.
 D. $\max_{x \in [-5;7]} f(x) = 9$ và $\min_{x \in [-5;7]} f(x) = 6$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1}$ trên đoạn $[0; 10]$.
 A. 3. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{114}{11}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \cos x - \frac{4}{3} \cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.
 A. $\max_{x \in [0; \pi]} y = \frac{2}{3}$. B. $\max_{x \in [0; \pi]} y = \frac{10}{3}$. C. $\max_{x \in [0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\max_{x \in [0; \pi]} y = 0$.

Câu 16. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?
 A. $x = 8$. B. $x = 10$. C. $x = 15$. D. $x = 7$.

Câu 17. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau thời gian t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?
 A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. B. Sau 0,5 giờ.
 C. Sau 2 giờ. D. Sau 1 giờ.

Câu 18. Một sợi dây kim loại dài 120 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

- A. 504. B. 462. C. 426. D. 498.

1. B	2. B	3. A	4. C	5. C	6. D	7. B	8. D	9. A	10. B
11. A	12. A	13. A	14. A	15. C	16. B	17. D	18. A		

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ lần lượt là m và M . Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

- a) $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$. b) $m \leq M$.
c) Với mọi $x \in [a; b]$ ta có $f(x) \geq m$. d) Với mọi $x \in [a; b]$ ta có $f(x) < M$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		0		-1		$+\infty$

- a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
d) Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	0	+		-	
$f(x)$	$+\infty$		-3				2		-4

Khi đó

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

1. a Đ b Đ c Đ d S

2. a S b S c Đ d S

3. a Đ b S c Đ d Đ

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trên đoạn $[-1; 2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu? KQ:

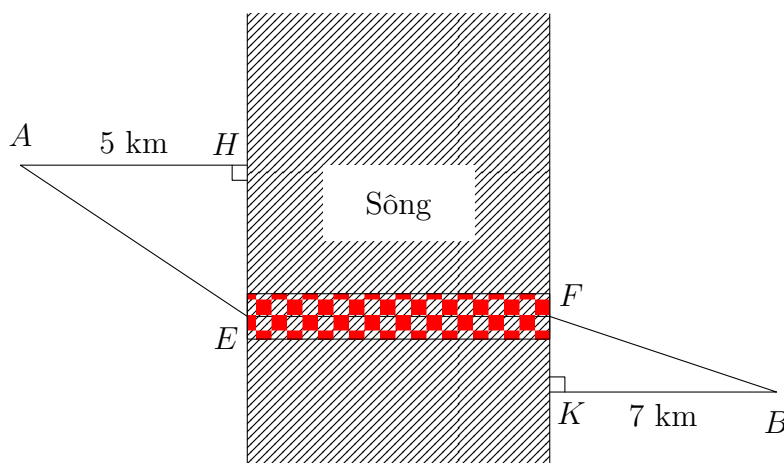
Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng KQ:

Câu 3. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng KQ:

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x - 2}$ trên khoảng $(0; 1)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục). KQ:

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 2}}$. KQ:

Câu 6. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến km).



KQ:

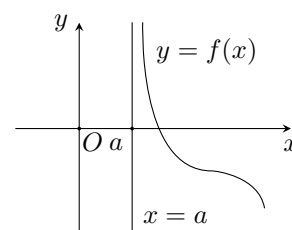
1.	0	2.	5	3.	1	4.	5,5	5.	3
6.	16								

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

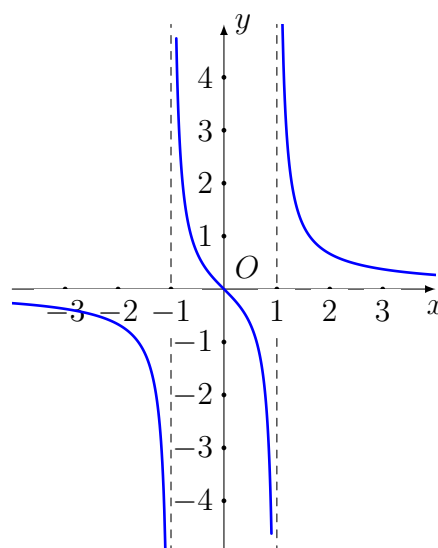
1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa 1. Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:



- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

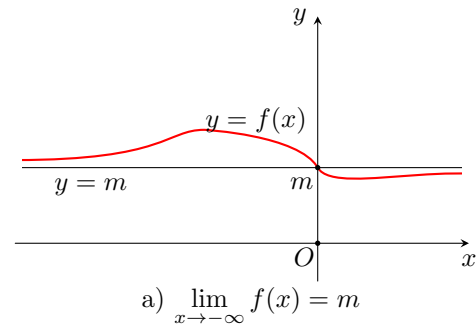
Δ Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$



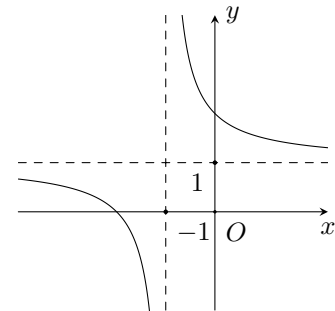
2. Tiệm cận ngang

Định nghĩa 2. Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$.



! Đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -1$.

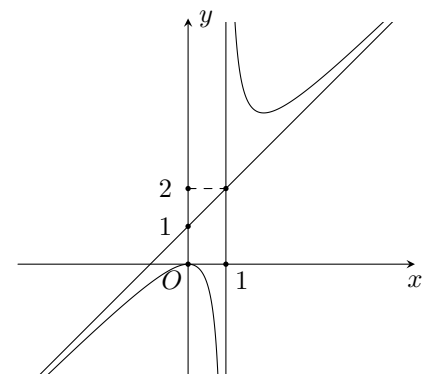


3. Tiệm cận xiên

Định nghĩa 3. Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

! Đồ thị hàm số $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ cùng tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x + 1$.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

□ Dạng 3.1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

- Bước 1: Tìm Tập xác định của hàm số. Giả sử $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{x_0\}$.
- Bước 2: Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (ax + b)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (ax + b)] = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- $\triangle$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_2 \Rightarrow y = y_1; y = y_2$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Tập xác định không có chứa $+\infty; -\infty$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.
- Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

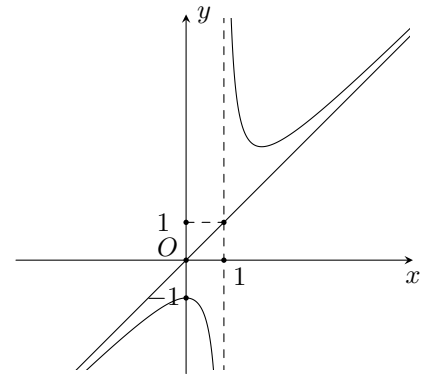
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	0	+
$f(x)$	1 ↘ $+\infty$	2 ↘ -3	↗ 3	

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 2.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	5	3		$+\infty$	1	-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là bao nhiêu?

□ Dạng 3.2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

- Bước 1: Tìm Tập xác định của hàm số. Giả sử $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{x_0\}$.
- Bước 2: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Bước 3: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x)$.
- Bước 3: Tìm tiệm cận xiên (dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc) bằng một trong hai cách sau:
 - Cách 1: Nếu biểu diễn $f(x) = ax + b + g(x)$ thì tính

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (ax + b)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (ax + b)] = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ax + b$$
 - Cách 2: Xác định đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ bằng cách xác định hệ số a, b :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ với } a \neq 0.$$

$$\text{Khi đó tương ứng ta có } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$



- Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.
- Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.
- Hàm số hằng $y = b$ có đồ thị nhận $y = b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị nhận chính nó $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

Câu 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Câu 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Câu 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$

Dạng 3.3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích

- Bước 1: Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Bước 2: Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích, ... để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-x}{x-1}$ có đồ thị (C) .

- Tính khoảng cách từ $M(2; 1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) .
- Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A, B . Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{4x+4}{3-x}$ có đồ thị là (C) . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) .

Dạng 3.4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

- Bước 1: Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.
- Bước 2: Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.

c) Bước 3: Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận.

Câu 1. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$ (triệu đồng), $0 \leq x < 100$. Hãy cho biết

- a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- b) Có thể loại bỏ được 10% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Câu 2. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right)$, trong đó $x \geq 1$.

- a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 3. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

- a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.
- b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

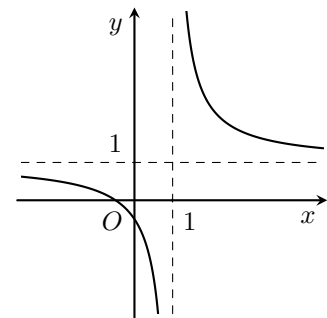
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	—	—	0	+
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

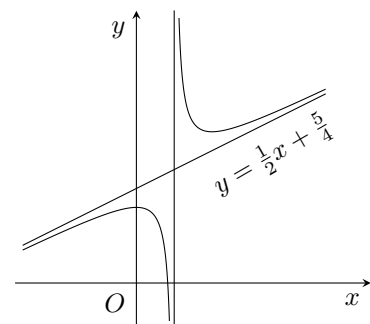
Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $y = 1$. D. $y = 2$.



Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $y = 2x - 1$.
C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$. D. $x = 1$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $y = -2$. B. $y = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là

- A. $y = \frac{1}{4}$. B. $y = 4$. C. $y = 1$. D. $y = -1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

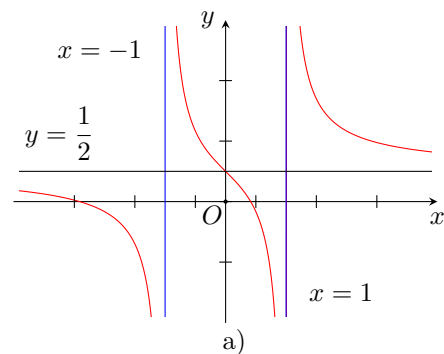
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+			-
y	2	$+\infty$	0	-2

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.



Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $y = 1$. B. $y = -2$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2024}{x-1}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 11. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x+1}$ là

- A. $y = \frac{1}{2}$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = x + 2$.

Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$ là

- A. $y = 2x + 5$. B. $y = x + 5$. C. $y = x - 5$. D. $y = 2x - 5$.

Câu 13. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận đứng bằng

- A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 3.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	-		+	-
y	$+\infty$	1	$-\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 16. Đồ thị hàm số nào sau đây có một tiệm cận?

- A. $y = \frac{x+3}{2x-1}$. B. $y = \frac{x^2+3x-2}{x+3}$.
C. $y = \frac{4}{x-1}$. D. $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

Câu 17. Đường thẳng $2y+1=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$. B. $y = \frac{x^2+x+1}{1-2x}$.
C. $y = \frac{2x+1}{1-x}$. D. $y = \frac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$.

Câu 18. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$. B. $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.
C. $y = \frac{x+1}{x^2+4x+3}$. D. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{x^2-2x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Góc tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) với trục hoành bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 120° . D. 135° .

Câu 20. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

- A. 3. B. 6. C. 1. D. 2.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

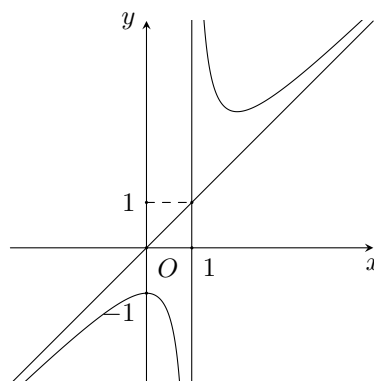
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	1		$-\sqrt{2}$		$+\infty$		$-\infty$
							-1

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có tổng cộng 3 đường tiệm cận.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị và đường tiệm cận xiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có hệ số góc là một số âm.
- D. Hàm số không có cực trị.



- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D | 2. A | 3. C | 4. D | 5. B | 6. B | 7. C | 8. B | 9. A | 10. C |
| 11. D | 12. C | 13. B | 14. B | 15. D | 16. D | 17. D | 18. B | 19. A | 20. D |
| 21. D | 22. A | | | | | | | | |

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-
$f(x)$	$+\infty$		5	
	4	$-\infty$	3	

Khi đó

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là $x = -2$.
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình là $x = 3$ và $x = 4$.
- Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

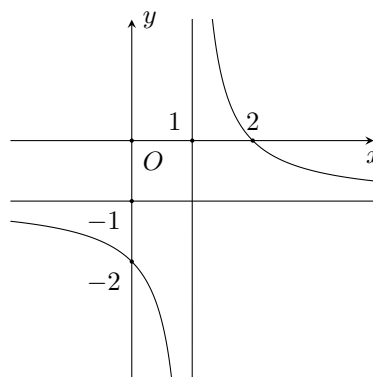
Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x - 1}$. Khi đó

- Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{5x + 1 - \sqrt{x + 1}}{x^2 - 2x}$. Khi đó

- Đường thẳng $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x + b}{cx + d}$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = -1$.
- d) Tổng $b + c + d = 5$.

Câu 5. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$.

- a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{3}$.
- d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
- b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.
- c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.
- d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$.

1. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	2. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	3. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
4. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	5. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	6. ☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Tính giá trị $a + b$. KQ:

Câu 2. Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận? KQ:

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ có đồ thị (C) . Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta: y = ax + b$. Tính $a + b$. KQ:

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S . Tính S . KQ:

1. 2 2. 2 3. -1 4. 6

BÀI 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Định nghĩa 1. a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Xét sự biến thiên của hàm số:

- Tìm y' , xét dấu y' , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Vẽ đồ thị của hàm số:

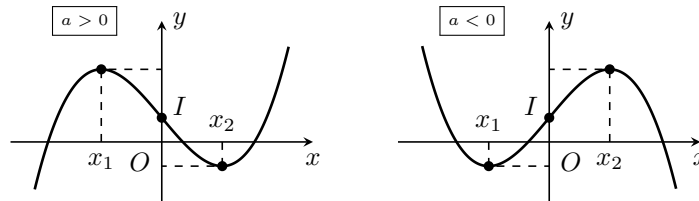
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Vẽ đồ thị hàm số.

 Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

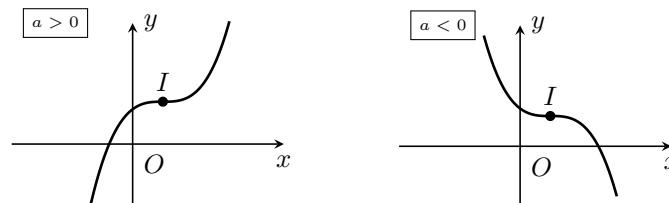
2. Khảo sát hàm số

- Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

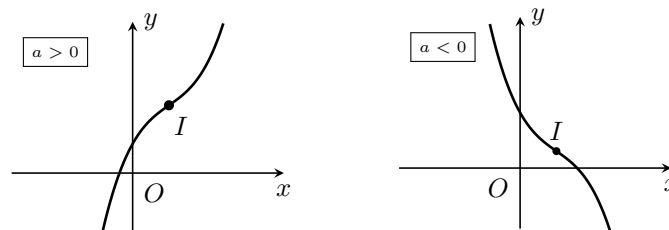
☑ TH1. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 ($b^2 - 3ac > 0$).



☑ TH2. Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 ($b^2 - 3ac = 0$).

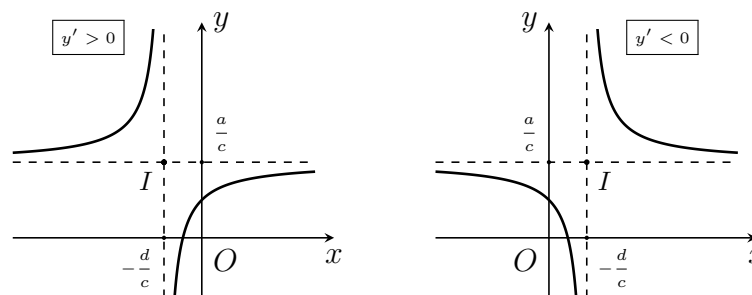


☑ TH3. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm ($b^2 - 3ac < 0$).



⚠ Trường hợp: $y' = 0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 điểm hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên).

- Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$).



– Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

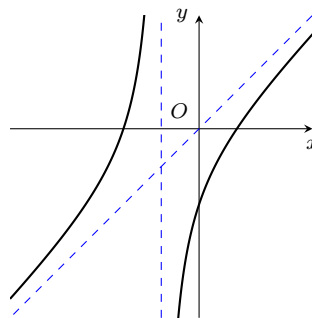
– Các điểm đặc biệt:

Giao điểm với Ox : $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, giao điểm với Oy : $B\left(0; \frac{b}{d}\right)$.

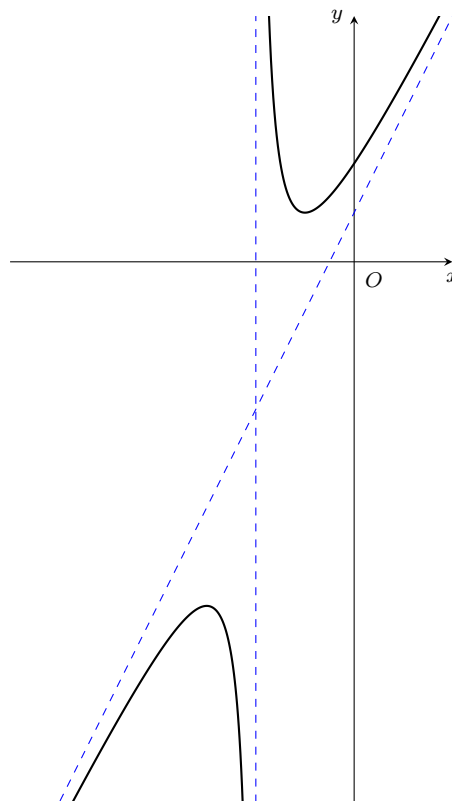
Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng.

• Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ ($ad \neq 0$).

– $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép



– $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt



- Ta luôn tách được $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{a}{d}x + f + \frac{m}{dx + e}$.
- Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{e}{d}$. Tiệm cận xiên $y = \frac{a}{d}x + f$.



- Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$):
 - * Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
 - * Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ ($ad \neq 0$):
 - * Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
 - * Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

□ Dạng 4.1. Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$

Bước 1: Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Đạo hàm và cực trị: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.

Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số:

- Không có tiệm cận.

- Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{3a}$.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$.

Bảng biến thiên

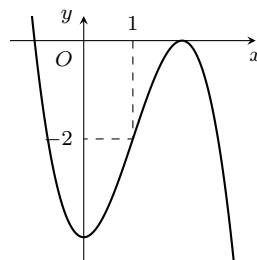
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$			0		$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		
			-4			

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

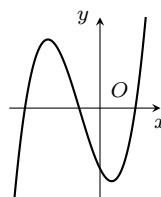
Hàm số đạt giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$ tại $x_{CT} = 0$.

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 0$ tại $x_{CD} = 2$.

Đồ thị có tâm đối xứng là $I(1; -2)$.



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy xác định dấu của các hệ số a , b , c và d .



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty \Rightarrow a > 0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1 < 0, x_2 > 0$.

$$\text{Mặt khác } y' = 3ax^2 + 2bx + c, y' = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c < 0. \end{cases}$$

Vậy $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Dạng 4.2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ với } x \neq -\frac{d}{c}$$

Bước 1: Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Giới hạn và đường tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{a}{c}$ suy ra $y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty,$$

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = +\infty$ suy ra $x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Đạo hàm và cực trị: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

– Nếu $ad - bc > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

– Nếu $ad - bc < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số luôn nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right) = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

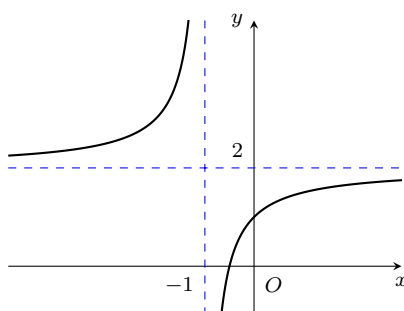
$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right) = +\infty$ suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$.

Đồ thị đi qua điểm $(0; 1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1; 2)$.



Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right) = 1$ suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

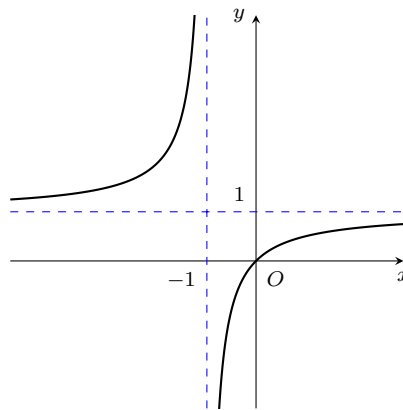
$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{x}{x+1} \right) = +\infty$ suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$.

Đồ thị đi qua điểm $(0; 1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1; 1)$.



Dạng 4.3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \text{ với } ad \neq 0; x \neq -\frac{e}{d}$$

Tử và mẫu không có nghiệm chung. Viết hàm số dưới dạng (bằng cách chia đa thức)

Bước 1: Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{e}{d}\right\}$.

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Giới hạn:

- Giới hạn và đường tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (\alpha x + \beta)] = 0$ suy ra $y = \alpha x + \beta$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow (-\frac{e}{d})^\pm} y = \pm\infty$ suy ra $x = -\frac{e}{d}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Đạo hàm và cực trị: $y' = \frac{\alpha(dx + e)^2 - \gamma d}{(dx + e)^2}$.

Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x) = \alpha(dx + e)^2 - \gamma d$.

- Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.

– Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

Bảng biến thiên.

Đồ thị hàm số:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
- Đồ thị hàm số luôn nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Nhận xét. Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.

Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y = \frac{2ax + b}{d}$.

Mọi tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$ cắt hai đường tiệm cận tại A, B thì M là trung điểm AB .

Diện tích tam giác IAB không đổi.

Mọi điểm $M \in (C)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số.

Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của (C) thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với (C) .

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} = 2x + 1 + \frac{2}{x + 2}$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = -\infty$ nên $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (2x + 1)] = 0$ nên $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = 2 - \frac{2}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x + 2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

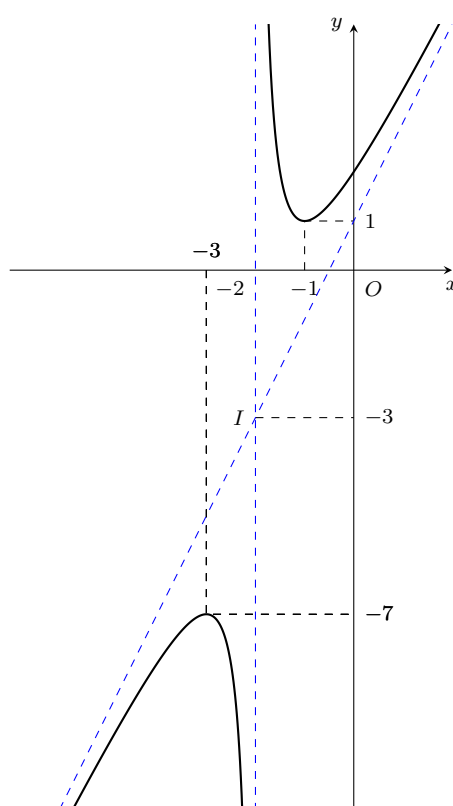
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
y'	+ 0 -			- 0 +	
y	$-\infty$	-7	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $A(0; 2)$.

Giao điểm với trục hoành: không có.



Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = x - \frac{2}{x + 1}$.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên:

Ta có $y' = 1 + \frac{2}{(x + 1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn và đường tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$ nên $x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = 0$ nên $y = x$ là đường tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

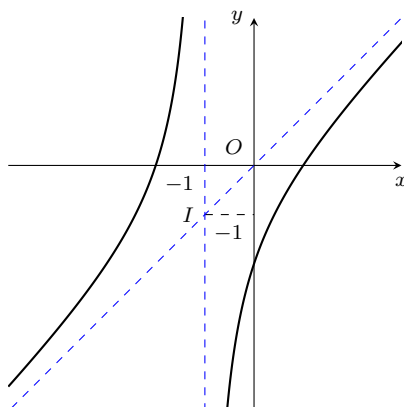
Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $(0; -2)$.

Giao điểm với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

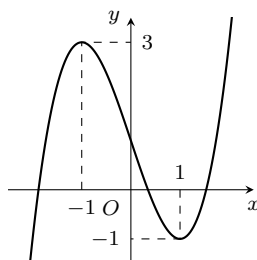
Nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Dạng 4.4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

Ta thấy đồ thị có hai cực trị, nên hàm số của đồ thị đã cho có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Mà đồ thị giao với trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $d = 1$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì đồ thị có 2 điểm cực trị nên $y' = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$ nên

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0.$$

Theo Viet thì $1 \cdot (-1) = \frac{c}{3a} \Leftrightarrow c = -3a$.

Suy ra hàm số có dạng $y = ax^3 - 3ax + 1$.

Mặt khác đồ thị đi qua điểm $(1; -1)$ nên

$$y(1) = -1 \Leftrightarrow a - 3a + 1 = -1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow c = -3.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x + 1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{ax - 1}{2x + b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	-1	$+\infty$	-1

Lời giải

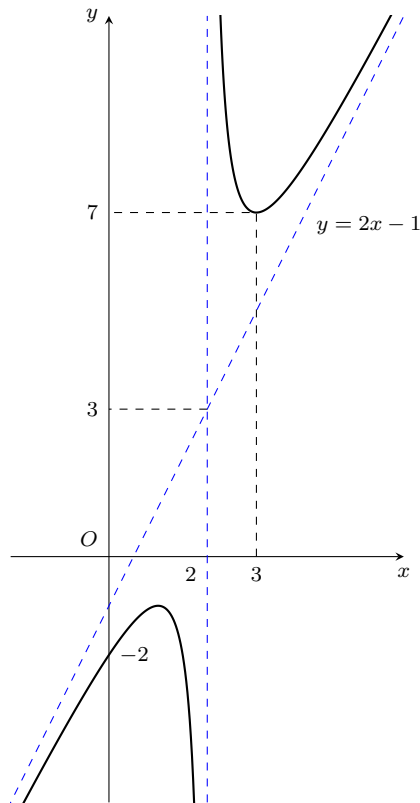
Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = -1$ nên $x = -1$ là nghiệm của $2x + b = 0$.

Suy ra $2(-1) + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Mặt khác đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -1$ nên $\frac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy hàm số đã cho có $a = -2, b = 2$.

Ví dụ 3. Cho hàm số hữu tỉ $y = \frac{2x^2 + ax + b}{cx - 2}$ có đồ thị như hình bên. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$ nên $x = 2$ là nghiệm của

$$cx - 2 = 0 \Leftrightarrow c \cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Suy ra hàm số có dạng $y = \frac{2x^2 + ax + b}{x - 2}$. Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; -1)$ và $(3; 7)$ nên

$$\begin{cases} y(1) = -1 \\ y(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 + a + b}{1 - 2} = -1 \\ \frac{18 + 3a + b}{3 - 2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$.

Dạng 4.5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

- **Bước 1:** Tập xác định.
- **Bước 2:** Sự biến thiên
 - Chiều biến thiên.

- Cực trị.
- Đường tiệm cận.
- Điểm đi qua.

• **Bước 3:** Kết luận đồ thị.

Ví dụ 1. Xác định bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 9$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

Cực trị

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{\text{CD}} = -4$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$ và $y_{\text{CT}} = -36$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			-4	
		-36			$-\infty$

Ví dụ 2. Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + 3}{x + 1} = x - 1 + \frac{4}{x + 1}.$$

$$\text{Đạo hàm } y' = 1 - \frac{4}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-3; -1)$ và $(-1; 1)$.

Cực trị

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{\text{CD}} = -6$.

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 2$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

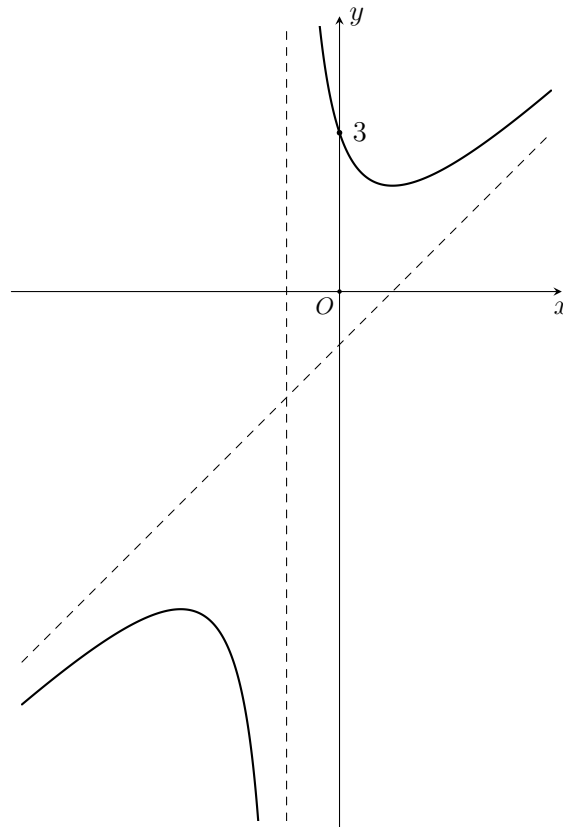
Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 1)] = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 1)] = 0$.

$\Rightarrow$ Đồ thị có đường tiệm cận xiên là $y = x - 1$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty$.

$\Rightarrow$ Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Vẽ đồ thị



Dạng 4.6. Xác định dấu – giá trị các hệ số

a) **Loại 1:** Hàm đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

- Bước 1:** Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a .
- Bước 2:** Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d .
- Bước 3:** Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có). Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.
 - Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$.

– Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:

Các điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases} \text{ (Vi-ét).}$$

Dựa vào vị trí của x_1, x_2 để suy luận các phép tính $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ mang dấu gì.

Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1, x_2 .

- **Bước 4:** Xác định tọa độ các điểm đã cho.
- **Bước 5:** Dựa vào điểm uốn U - Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
 - x_U là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.
 - Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

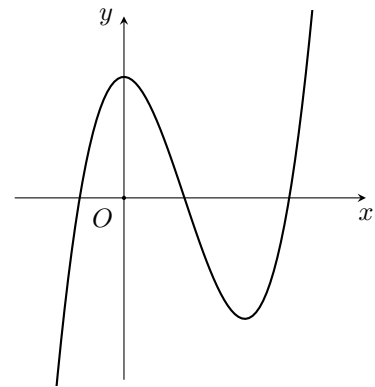
Nhận xét: Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số. Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

b) **Loại 2:** Hàm phân thức $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ và $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

- **Bước 1:** Xác định các đường tiệm cận. Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.
Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
- **Bước 2:** Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.
- **Bước 3:** Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/ngịch biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.

Ví dụ 1.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



Lời giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị có nhánh cuối cùng đi lên nên $a > 0$.

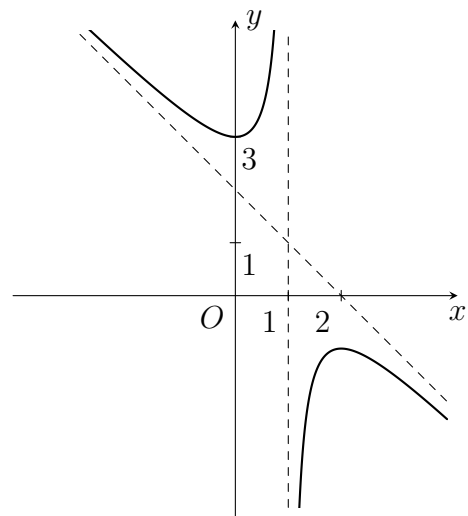
Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ lớn hơn 0 nên $d > 0$.

Từ đồ thị ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị bằng 0 nên $c = 0$ và một điểm cực trị dương nên $-\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy trong các hệ số a, b, c, d có 2 giá trị dương là a và d .

Ví dụ 2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên. Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

Ta có $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$.

Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1; 1)$ suy ra $1 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \frac{b}{x-1}$.

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 3)$ nên $-0 + 2 + \frac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

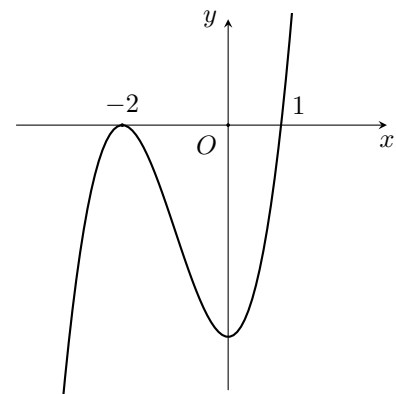
Dạng 4.7. Đọc đồ thị của đạo hàm

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$, $g(x) = f(u(x))$, $g(x) = g(f(x))$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ hoặc $y = f'(u(x))$.

- **Bước 1:** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$).
- **Bước 2:** Giải $g'(x) = 0$ ta được $x_1; x_2; \dots; x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x) = 0$ hoặc $g'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Lập bảng xét dấu của $g'(x)$ lập được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$. Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max...

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y = f'(x)$?



Lời giải

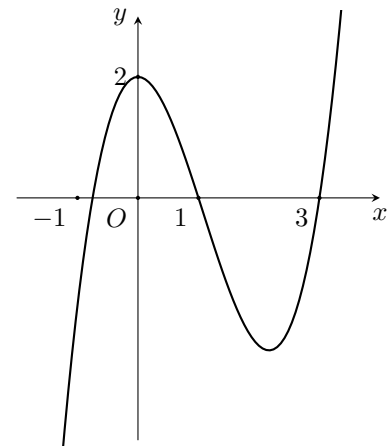
Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1. \end{cases}$

Bảng xét dấu của $y = f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ví dụ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho



Lời giải

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ với $(x_1 < 0)$.

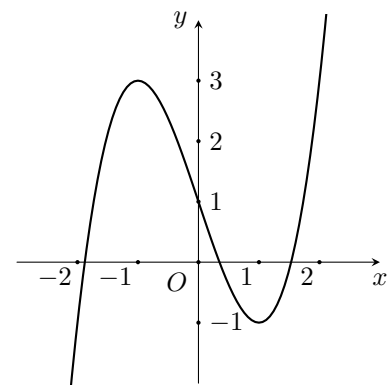
Bảng biến thiên của $y = f(x)$.

x	$-\infty$	x_1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0
$f(x)$	$+\infty$			f_{CD}			$+\infty$
		f_{CT}				f_{CT}	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ 3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x - 1) - 2x + 1$ trên $[0; 1]$.



Lời giải

Ta có $g'(x) = 2f'(2x - 1) - 2$.

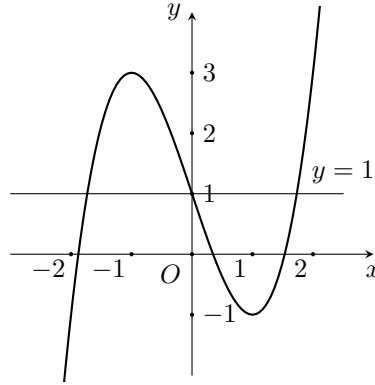
Cho $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2f'(2x - 1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f'(2x - 1) \geq 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy trên $[0; 1]$.

Đường thẳng $y = 1$ cắt $y = f'(x)$ tại $x = 0$.

Ta nhận thấy

- Đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía trên $y = 1$ khi $x < 0$.
- Đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía dưới $y = 1$ khi $x > 0$.



Do đó $f'(2x - 1) \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$f\left(\frac{1}{2}\right)$	

Từ bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ là $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Dạng 4.8. Sự tương giao

Các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường (C_1) , (C_2) , khi đó:

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị (C_1) , (C_2) .
- Số giao điểm của các đường (C_1) , (C_2) chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m - 1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m - 1)$ với trục hoành là

$$3x^3 - 9x + 3(m - 1) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = m - 1(1).$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ (C) có $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	$-\infty$	

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $f(x) = -x^3 + 3x$ (C) giao $y = m - 1$ tại hai điểm phân biệt. Do đó $m = 3$ hoặc $m = -1$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C. LUYỆN TẬP

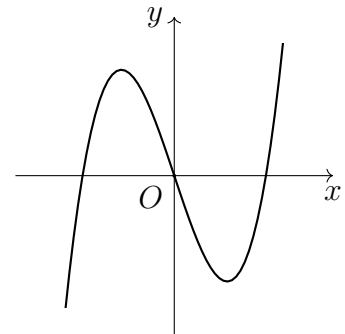
PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; 4)$. D. $(4; +\infty)$.

Câu 2.

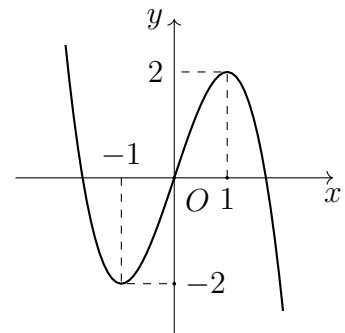
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = -x^3 + 3x$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 3.

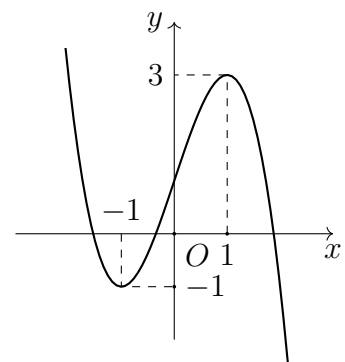
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 4.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

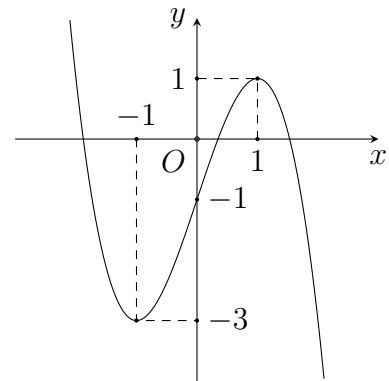


- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 5.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.



Câu 6. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $y = -1$. B. $y = 4$. C. $y = 1$. D. $y = 0$.

Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x + 1}{x - 1}$ là

- A. $y = -\frac{1}{5}$. B. $y = 5$. C. $y = 1$. D. $y = 0$.

Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n - 3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

- A. 0. B. -3. C. 3. D. 6.

Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 2}$ là

- A. $x = 1$. B. $x = \frac{1}{2}$.
C. $x = 2$. D. Không có tiệm cận đứng.

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 3. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 12. Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 10$. B. $y_0 = 13$. C. $y_0 = 11$. D. $y_0 = 12$.

Câu 13.

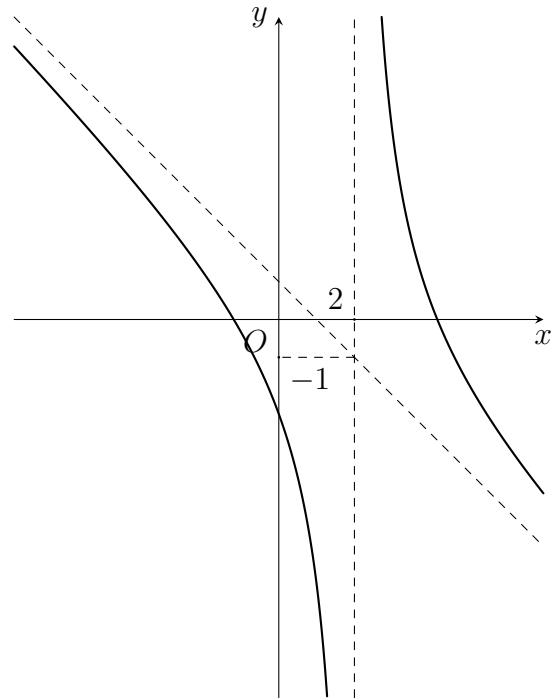
Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên

Xét các mệnh đề sau:

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.
- Hệ số a và m trái dấu.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



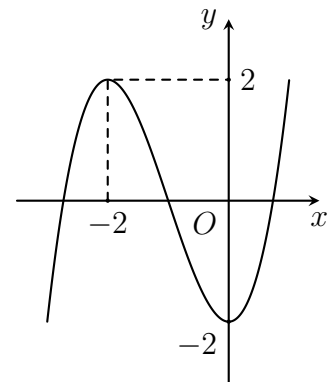
Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 15.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.



Câu 16. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

- A. $x_I = 2$. B. $x_I = 1$. C. $x_I = -5$. D. $x_I = -\frac{5}{2}$.

Câu 17. Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x + 5}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

- A. -1. B. 3. C. 2. D. 1.

»

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

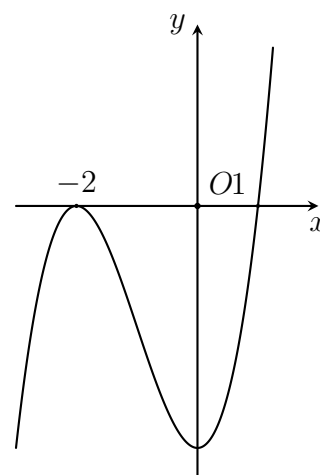
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-4; -2)$.
C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

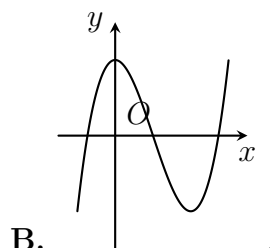
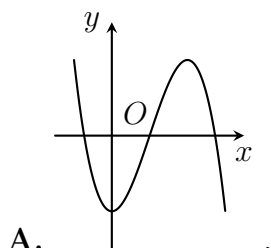


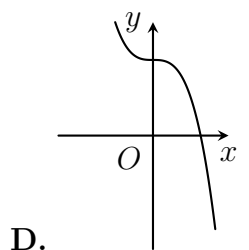
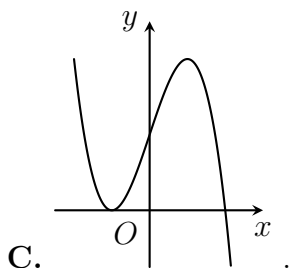
Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
$f(t)$	-2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ -2	

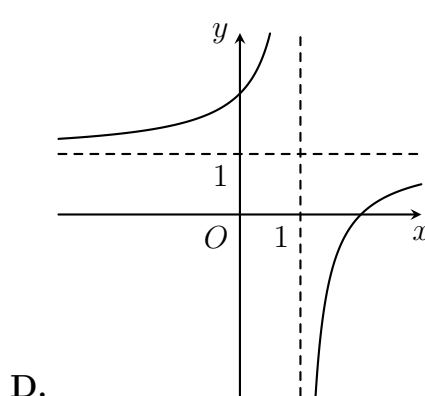
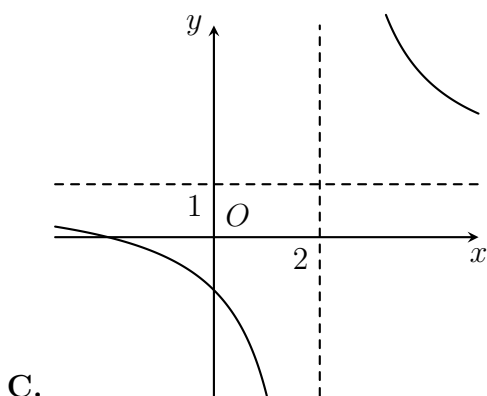
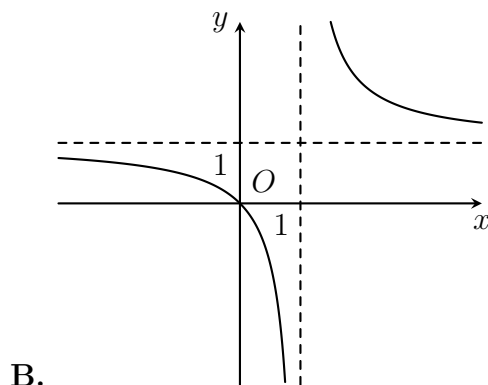
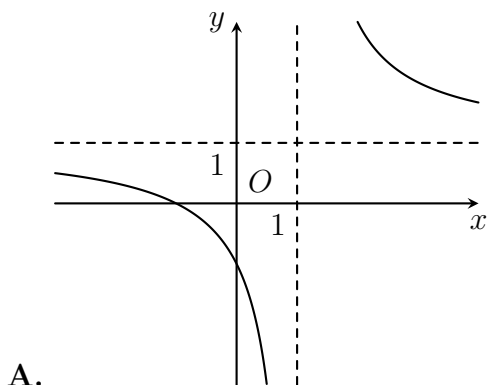
- A. $y = \frac{x-1}{x-1}$. B. $y = \frac{-2x}{x-1}$. C. $y = \frac{-2+x}{x+1}$. D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

Câu 21. Hình nào dưới đây là dạng đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$?





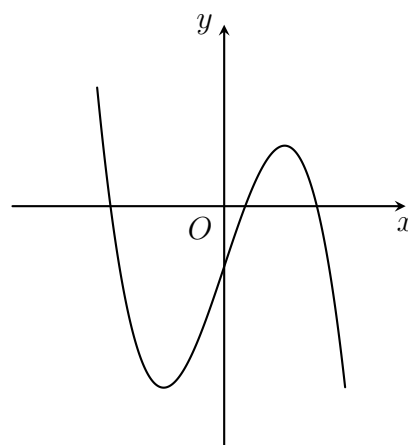
Câu 22. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$?



Câu 23.

Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, d > 0$. B. $a < 0, d > 0$.
C. $a > 0, d < 0$. D. $a < 0, d < 0$.



Câu 24. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 2.

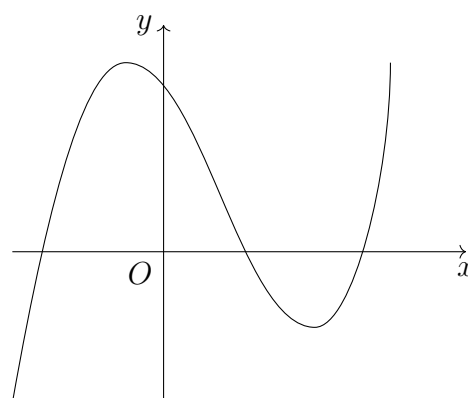
B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 25.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d .



A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$.

B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 26.

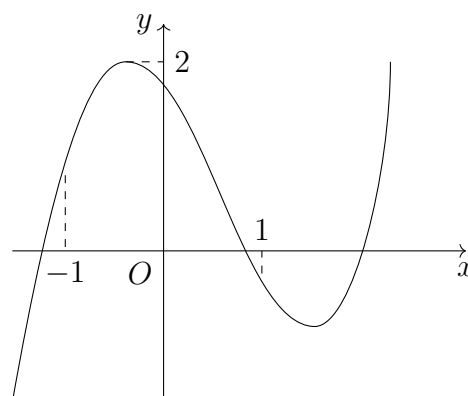
Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
				$-$	0
					$+$
y	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
				$\frac{27}{4}$	

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $0 < m < \frac{27}{4}$. D. $m > \frac{27}{4}$.

Câu 28. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

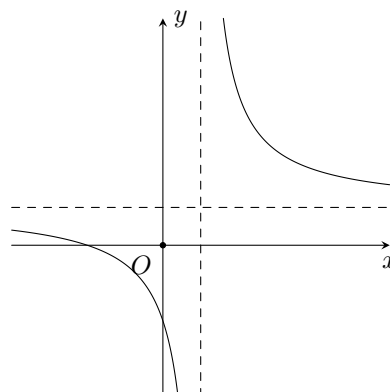
Câu 29. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có tiệm cận xiên là

- A. $y = x$. B. $y = -x$. C. $y = x + 1$. D. $y = -x + 1$.

Câu 30.

Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

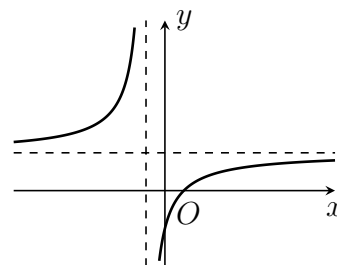
- A. $a > 1, b > 0, c < 1$. B. $a > 1, b < 0, c > 1$.
C. $a < 1, b > 0, c < 1$. D. $a > 1, b > 0, c > 1$.



Câu 31.

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

- A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



Câu 32. Tính tổng các hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{4-x}$ và $y = 6-x$.

- A. 12. B. 27. C. -12. D. -27.

Câu 33. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12 cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24 cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. 600. B. $843\sqrt{3}$. C. $384\sqrt{3}$. D. $348\sqrt{3}$.

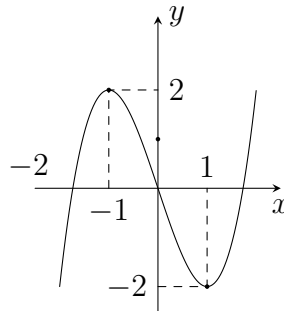
Câu 34. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv3t$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

- A. 9 km/h. B. 8 km/h. C. 10 km/h. D. 12 km/h.

1. A	2. A	3. D	4. B	5. C	6. B	7. B	8. A	9. D	10. C
11. A	12. B	13. B	14. A	15. B	16. B	17. C	18. D	19. C	20. D
21. A	22. D	23. D	24. A	25. D	26. D	27. D	28. D	29. A	30. D
31. C	32. A	33. C	34. A						

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho đồ thị hàm số bậc ba như hình bên dưới.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **ĐÚNG**? Khẳng định nào **SAI**?

- a) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 2)$.
- b) Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O .

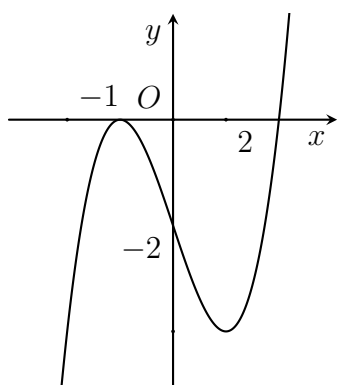
Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Các mệnh đề sau, **ĐÚNG** hay **SAI**.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1); (-1; 0)$.
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox .
- d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$.

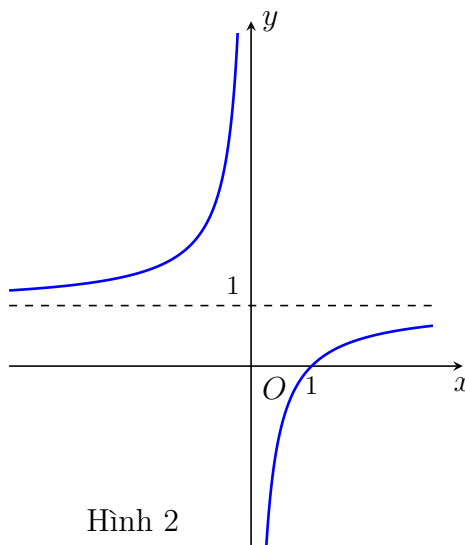
Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C) . Những mệnh đề sau **Đúng** hay **Sai**?

- a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.
- b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.
- c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d) Đồ thị không cắt trục Ox .

Câu 4. Cho ba dạng đồ thị hàm số.



Hình 1



Hình 2

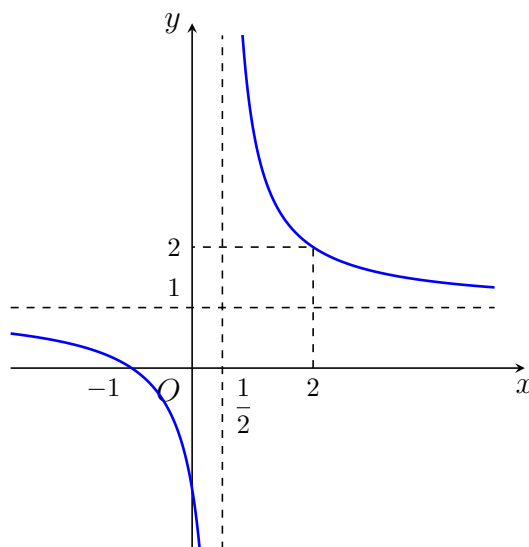
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$

Hình 3

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **ĐÚNG**? Khẳng định nào **SAI**?

- a) Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0$ và $d = -2$.
- b) Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thỏa $a = c$, với $a \neq 0$, $c \neq 0$.
- c) Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ với $a \neq 0$, $m \neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2; 3)$.
- d) Hình 3 có $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 5. Cho hai đồ thị hàm số hình 1 là $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ và hình 2 là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Hình 1

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		3		$-\infty$
		-1			

Hình 2

Xét tính **ĐÚNG**, **SAI** các mệnh đề sau

- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $a+2d=0$.
- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b-4c-2d=0$.
- Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
- Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a+b+c+d < 0$.

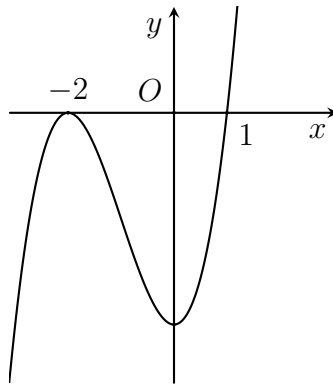
Câu 6. Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$.

- Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$.

- Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.
- Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

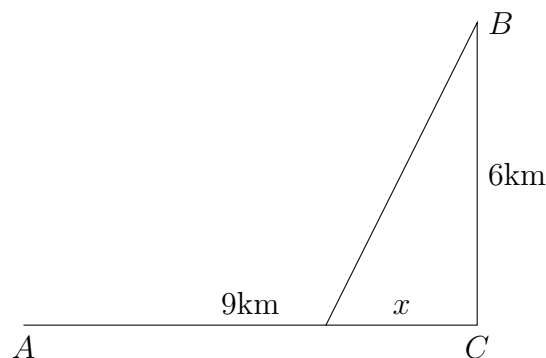
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và xét tính **ĐÚNG**, **SAI** của các mệnh đề sau.

- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.
- c) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- d) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 8. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km và 130 000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Xét tính **ĐÚNG**, **SAI** các mệnh đề dưới đây.

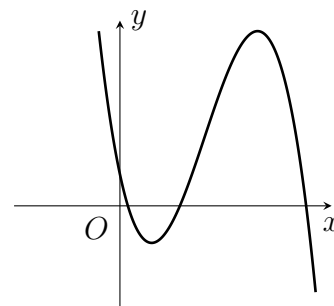
- a) Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1 230 000 USD.
- b) Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1 400 000 USD.
- c) Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1 200 000 USD.
- d) Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1 170 000 USD.

1. a Đ b S c Đ d Đ	2. a Đ b Đ c S d S	3. a Đ b Đ c Đ d S
4. a Đ b Đ c Đ d S	5. a Đ b Đ c Đ d S	6. a S b Đ c S d Đ
7. a S b S c S d S	8. a Đ b S c Đ d Đ	

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



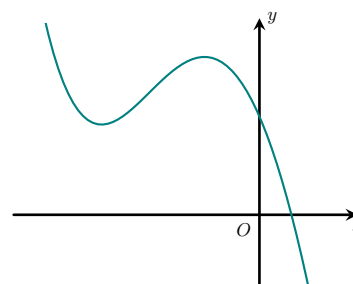
KQ:

Câu 2. Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

KQ:

Câu 3.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



KQ:

Câu 4. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10 000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí xuất bản (đơn vị: vạn đồng), biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30 000 cuốn.

KQ:

Câu 5. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm

chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Tìm lợi nhuận tối đa mà hộ làm nghề dệt này có thể thu được mỗi ngày (đơn vị: nghìn đồng). KQ:

- | | | | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|---|----|-----|----|------|
| 1. | 2 | 2. | 25 | 3. | 1 | 4. | 2,2 | 5. | 1200 |
|----|---|----|----|----|---|----|-----|----|------|

BÀI 1. VÉC-TƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

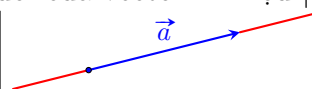
A. LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không

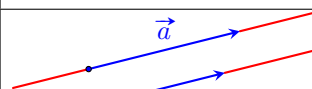
Định nghĩa 1.

- **Vectơ trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng.
- **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu $|\vec{a}|$.

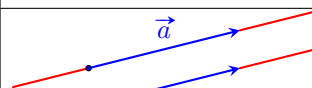
• **Giá** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



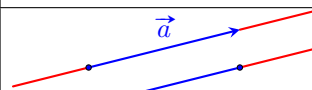
• Hai vectơ **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



• Hai vectơ **bằng nhau** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.



• Hai vectơ **đối nhau** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.



- **Vectơ-không** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Qui ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

⚠ Chú ý

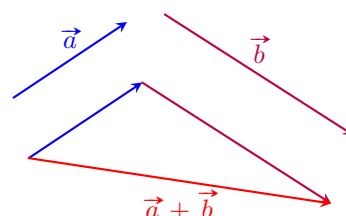
- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.
- Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa 2 (Tổng hai vectơ).

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$, $\vec{b}$.
- Ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.



Nhận xét. Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.

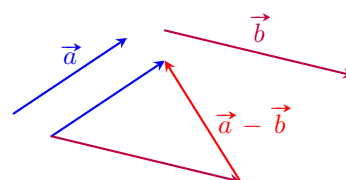
⚠ (Chú ý) Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Định nghĩa 3 (Hiệu hai vectơ).

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

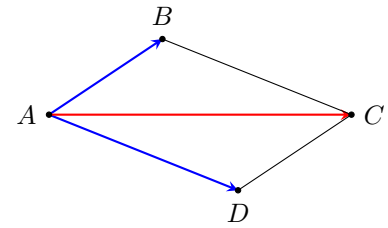
- Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$.
- Ký hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là phép trừ vectơ.



Các quy tắc

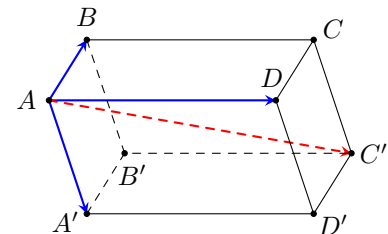
Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

• Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



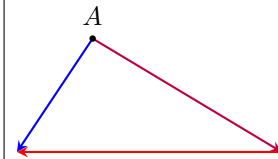
Quy tắc hình hộp:

• Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



Quy tắc hiệu:

• Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa 4. Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.
 - Ký hiệu là $k\vec{a}$.
 - Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.
- $\gg$ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
 $\gg$ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
 $\gg$ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

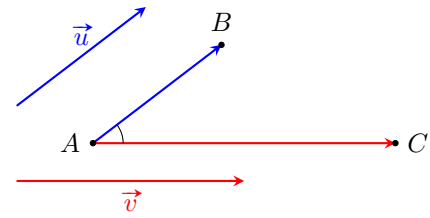
Định nghĩa 5 (Góc giữa hai vectơ trong không gian).

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

- Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Định nghĩa 6 (Tích vô hướng hai vectơ).

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số.
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

⚠ (Chú ý) • Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

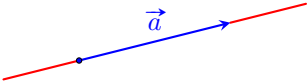
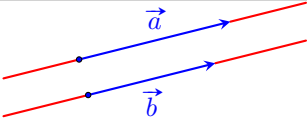
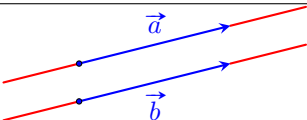
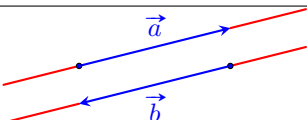
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$; $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

☐ Dạng 1.1. Sử dụng các định nghĩa

Phương pháp

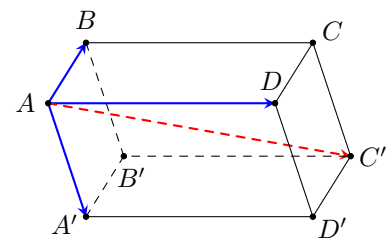
- **Vectơ trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng.
- **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu $|\vec{a}|$.

• Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
• Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
• Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.	
• Hai vectơ đối nhau nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

Ví dụ 1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ:

- (1) cùng phương với vectơ $\vec{AB}$;
- (2) bằng vectơ $\vec{AB}$;
- (3) ngược hướng với vectơ $\vec{AA'}$.

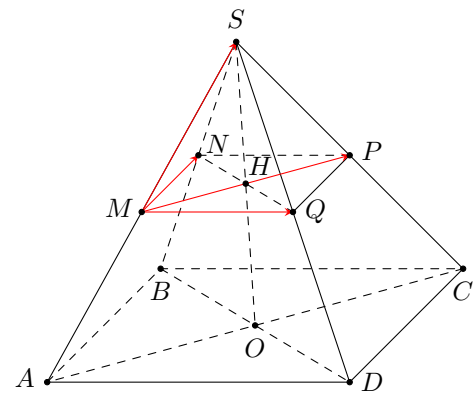


Lời giải

- (1) Cùng phương với vectơ $\vec{AB}$
Các vectơ cùng phương với $\vec{AB}$ là $\vec{BA}$, $\vec{CD}$, $\vec{DC}$, $\vec{A'B'}$, $\vec{B'A'}$, $\vec{C'D'}$, $\vec{D'C'}$.
- (2) Bằng vectơ $\vec{AB}$
Các vectơ bằng với $\vec{AB}$ là $\vec{DC}$, $\vec{A'B'}$, $\vec{D'C'}$.
- (3) Ngược hướng với vectơ $\vec{AA'}$
Các vectơ ngược hướng với $\vec{AA'}$ là $\vec{A'A}$, $\vec{B'B}$, $\vec{C'C}$, $\vec{D'D}$.

Ví dụ 2.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và O, H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, MNPQ$. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MS}$ theo a và h .



Lời giải

Ta có

$$|\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2};$$

$$|\overrightarrow{MP}| = MP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = AO.$$

$$\text{Tính } SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}.$$

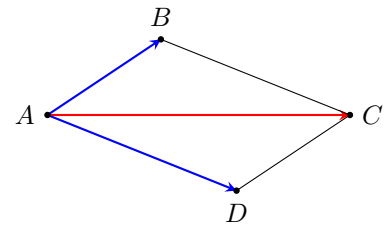
$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MS}| = MS = \frac{SA}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}.$$

□ Dạng 1.2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Phương pháp

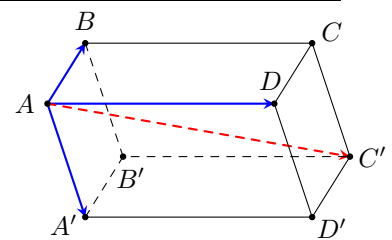
Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

• Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



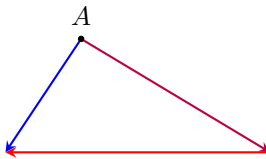
Quy tắc hình hộp:

• Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



Quy tắc hiệu:

• Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

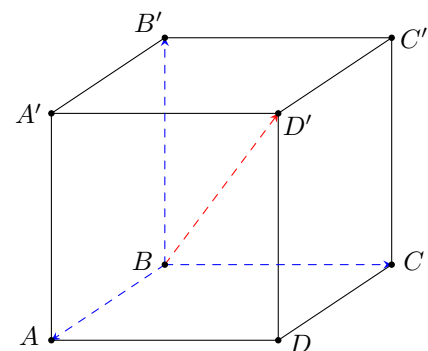
$$(1) \vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'};$$

$$(2) \vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}; \\ \vec{a} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'} \\ \Rightarrow |\vec{a}| &= |\overrightarrow{BD'}| = BD' = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

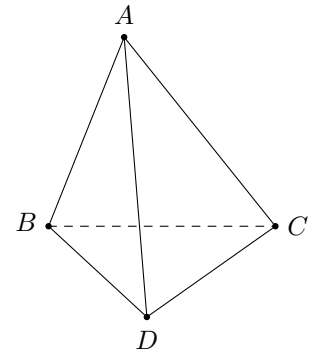
$$\begin{aligned} (2) \vec{b} &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C} \\ \Rightarrow |\vec{b}| &= |\overrightarrow{C'C}| = C'C = 2. \end{aligned}$$



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{DD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$



Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng

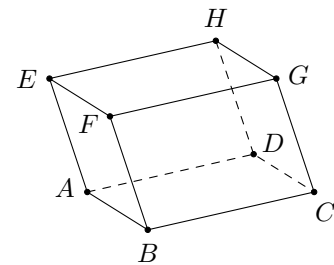
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

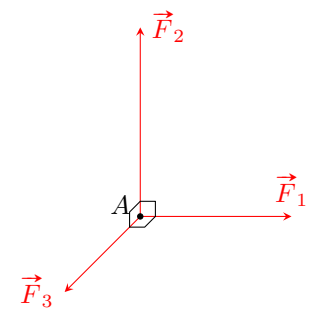
Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$



Ví dụ 4.

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là 10 N, 8 N và 5 N. Xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

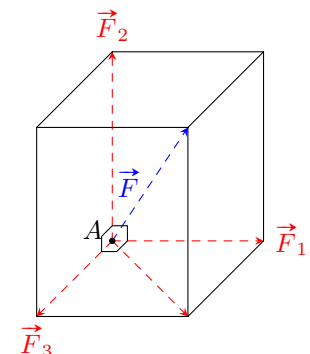


Lời giải

Tổng hợp lực của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là lực $\vec{F}$ được dựng theo qui tắc hình hộp chữ nhật.

Vậy cường độ tổng hợp lực là

$$|\vec{F}| = \sqrt{10^2 + 8^2 + 5^2} = 3\sqrt{21} \approx 14 \text{ (N)}.$$



Dạng 1.3. Tích của một số với một véc-tơ

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của số k với véc-tơ $\vec{a}$ là một véc-tơ, ký hiệu là $k\vec{a}$, có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$ và

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Với hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$.
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.
- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

Hệ quả:

- I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$, với mọi điểm O .
- G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, với mọi điểm O .

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG . Chứng minh rằng

- $3\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.
- $3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 6\vec{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải

- Vì G là trọng tâm của $\triangle BCD$ nên $3\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$.
Vì O là trung điểm đoạn thẳng AG nên $\vec{OA} + \vec{OG} = \vec{0}$.

$$\text{Do đó } 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG}) = \vec{0}.$$

2) Theo quy tắc ba điểm, ta có

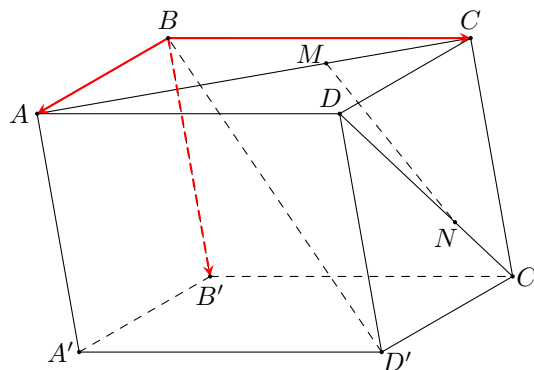
$$\begin{aligned} & 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ &= 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \\ &= 6\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC , điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$.

1) Biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.

2) Tìm x và y sao cho $MN \parallel BD'$, khi đó tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải



1) Ta có $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.

Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$.

Từ $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$, ta có $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BD})$, suy ra $\overrightarrow{BN} - (\vec{a} + \vec{b}) = y(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b})$.

Lại có $\overrightarrow{BN} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$.

Vậy $\overrightarrow{BM} - \vec{a} = x(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1 - x)\vec{a} + x\vec{b}$.

Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = (1 - y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c} - (1 - x)\vec{a} - x\vec{b} \\ &= (x - y)\vec{a} + (1 - x)\vec{b} + y\vec{c}. \end{aligned}$$

2) Điều kiện để $MN \parallel BD'$ là $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$ hay

$$(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \Leftrightarrow (x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}. \quad (*)$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} k = x - y \\ k = 1 - x \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; k) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

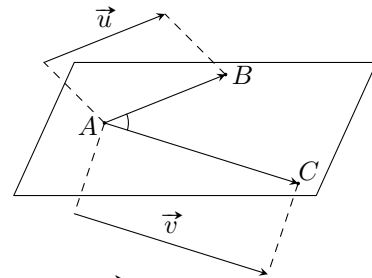
Vậy M và N được xác định bởi

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'} \text{ và } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}.$$

Lúc này $\frac{MN}{BD'} = |k| = \frac{1}{3}.$

▢ Dạng 1.4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Định nghĩa 7. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



Định nghĩa 8. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, ký hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.



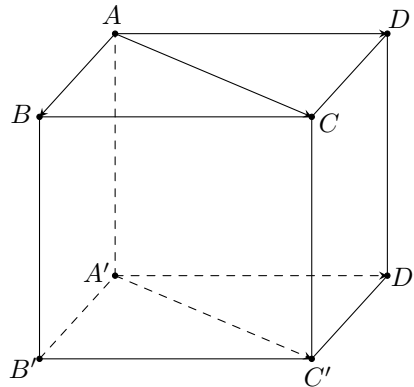
• $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, ký hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$.
- Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc

- 1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$.
- 2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.
- 3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'})$.
- 4) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'})$.

Lời giải



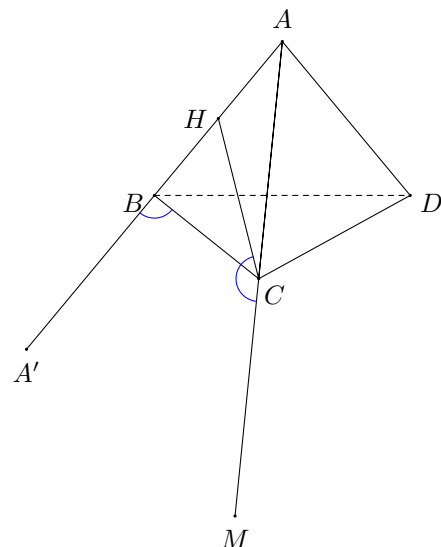
- 1) Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{BAD} = 90^\circ$.
- 2) Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$.
- 3) Ta có $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = 0^\circ$.
- 4) Ta có $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, suy ra $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) = 180^\circ$ (do $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ đối nhau nên ngược hướng).

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB . Hãy tính góc giữa các cặp véc-tơ

- 1) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.
- 2) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

- 1) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B .
 $\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CBA'}$.
 Ta có $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A'BC} = 120^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.
- 2) Gọi M là điểm đối xứng với C qua A .
 $\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CH}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CH}) = \widehat{MCH}$.
 Ta có $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{ACH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCH} = 150^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CH}) = 150^\circ$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD . Chứng minh rằng $IJ \perp AB$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Và J là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$.

Ta lại có

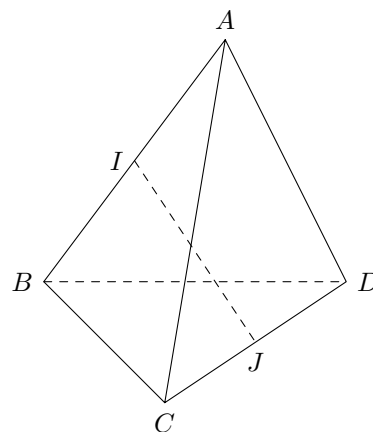
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}.$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ}.$$

Suy ra $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ hay $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Do đó, $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$ hay $IJ \perp AB$.



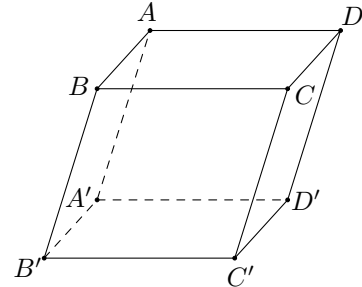
C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Véc-tơ nào sau đây cùng phương với $\overrightarrow{BC'}$?

- A. $\overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{DA}$. C. $\overrightarrow{BB'}$. D. $\overrightarrow{C'C}$.



Câu 2. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào sau đây có điểm đầu là A, điểm cuối là B?

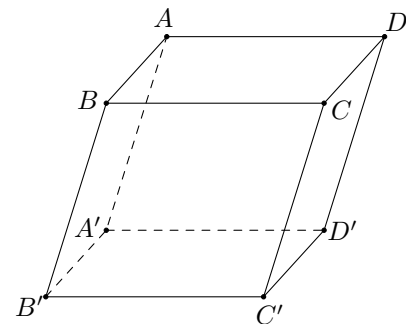
- A. $\overrightarrow{AA}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{BB}$.

Câu 3. Trong không gian cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Véc-tơ nào trong các véc-tơ sau đây là véc-tơ-không?

- A. $\overrightarrow{BB}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{CA}$.

Câu 4.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ bằng với véc-tơ nào sau đây?



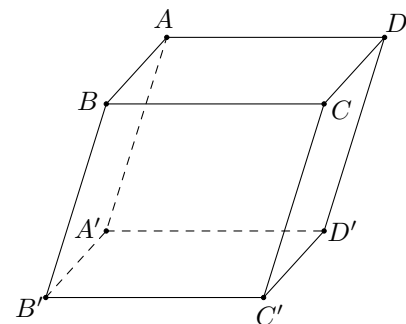
- A. $\overrightarrow{A'B'}$. B. $\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm véc-tơ tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{BS}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{SB}$. D. $\overrightarrow{SC}$.

Câu 6.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm véc-tơ tổng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$.

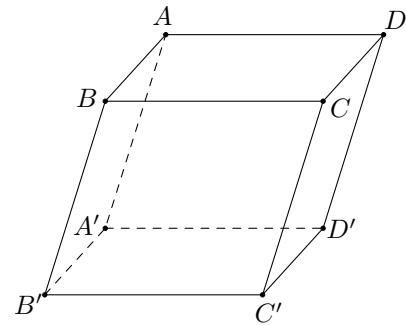


- A. $\overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{CA}$.

Câu 7.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
- B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}$.
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.
- D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}$.



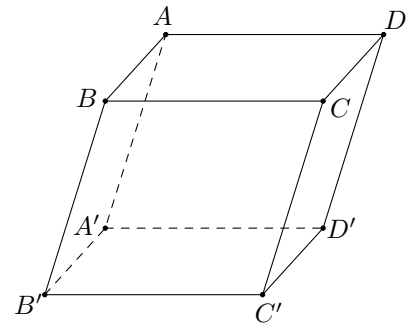
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}$.
- B. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB}$.
- C. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA}$.
- D. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$.

Câu 9.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AC}$.
- B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{BD}$.
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AC'}$.
- D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{CA}$.



Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Tính tổng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.

- A. $2\overrightarrow{SO}$.
- B. $4\overrightarrow{SO}$.
- C. $3\overrightarrow{SO}$.
- D. $\vec{0}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ bằng

- A. $\vec{0}$.
- B. $2\overrightarrow{AD}$.
- C. $2\overrightarrow{NM}$.
- D. $2\overrightarrow{MN}$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'C'}$.

- A. $2\overrightarrow{AA'}$.
- B. $\vec{0}$.
- C. $2\overrightarrow{AC}$.
- D. $2\overrightarrow{C'A'}$.

Câu 13. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ là

- A. 90° .
- B. 60° .
- C. 45° .
- D. 30° .

Câu 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác ABC vuông tại B . Khi đó góc giữa véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ và véc-tơ $\overrightarrow{B'C'}$ bằng bao nhiêu?

- A. 45° .
- B. 120° .
- C. 90° .
- D. 30° .

Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là véc-tơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{D'C'}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{B'A'}$.

Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các đẳng thức véc-tơ sau đây, đẳng thức nào đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. B. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$.

- A. $k = 4$. B. $k = 1$. C. $k = 0$. D. $k = 2$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$. D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. B. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.
C. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. D. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

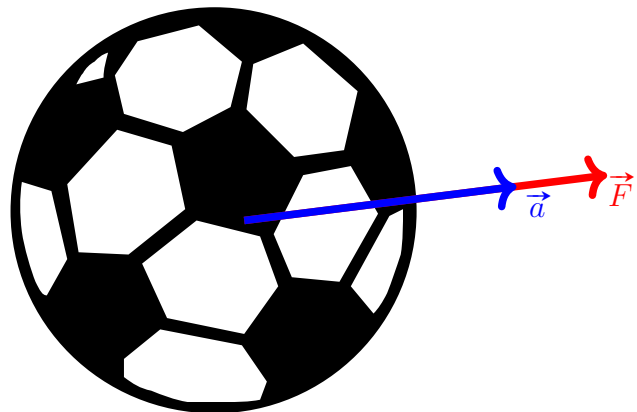
- A. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'D'}) = 90^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = 45^\circ$.
C. $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}) = 90^\circ$. D. $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{CB'}) = 45^\circ$.

Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.
C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 120^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ$.

Câu 22.

Theo định luật II Newton: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là véc-tơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là véc-tơ lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 20 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



- A. 100 (N). B. 20 (N). C. 25 (N). D. 10 (N).

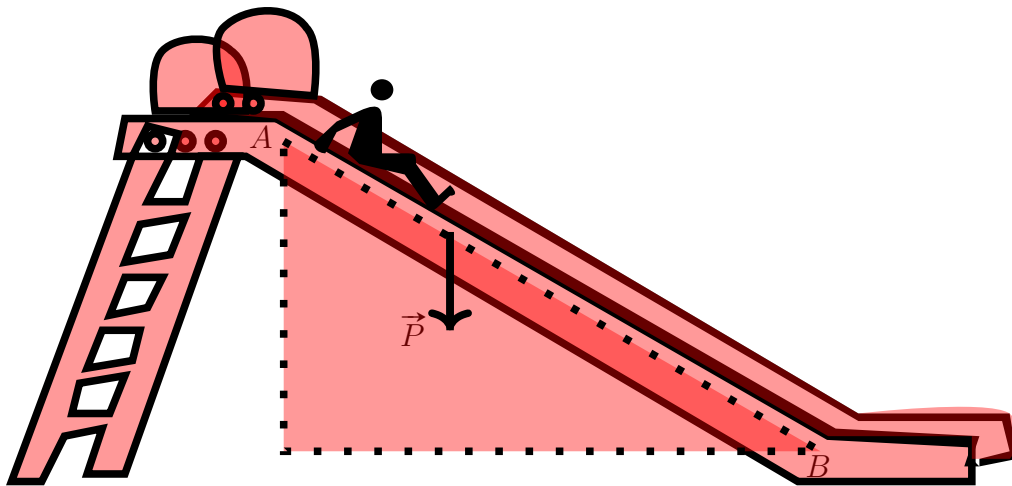
Câu 23. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25$ cm, $AD = 12$ cm và $AA' = 12$ cm. Tính $|\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}|$.

- A. 12 (cm). B. $\sqrt{469}$ (cm). C. $\sqrt{613}$ (cm). D. 25 (cm).

Câu 24. Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ (kg) trượt trên cầu trượt dài 3,5 (m) (như trong hình dưới đây). Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° . Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- a) Với gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8$ (m/s²) thì độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ có độ lớn là 245 (N).
- b) Góc giữa độ dịch chuyển $\vec{d}$ so với trọng lực $\vec{P}$ là 30° .
- c) Công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}; \vec{d})$ thì công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là 428,75 (J).

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.



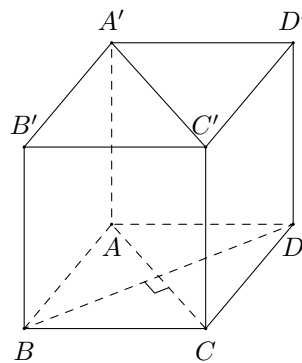
1. B	2. C	3. A	4. B	5. C	6. C	7. A	8. C	9. A	10. B
11. D	12. C	13. A	14. C	15. A	16. D	17. B	18. C	19. A	20. D
21. B	22. D	23. C	24. A						

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$, $A'A = 4$. Khi đó

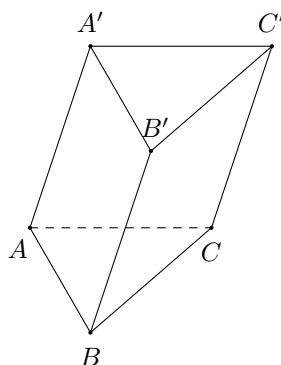
- a) véc-tơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng véc-tơ $\overrightarrow{CD'}$.
- b) $|\overrightarrow{BA'}| = |\overrightarrow{A'D}| = |\overrightarrow{DB}|$.
- c) Số các véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2 .
- d) Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



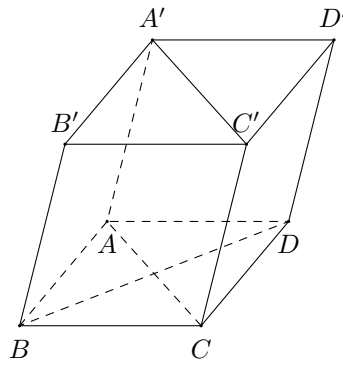
- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}$.
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'A}$.
- c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'B'}$.
- d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' và G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó



- a) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.
- b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$.
- c) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$.
- d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

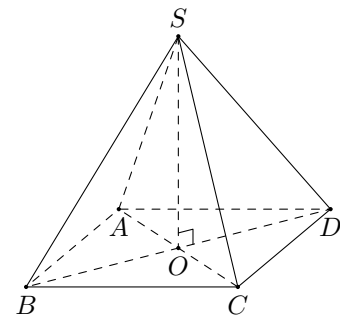
Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



- a) Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ bằng nhau.
- b) Hai véc-tơ $\overrightarrow{A'D'}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau.
- c) Hai véc-tơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương với nhau.
- d) Có 3 véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ bằng véc-tơ $\overrightarrow{BC}$.

Câu 5.

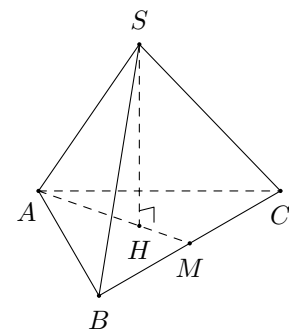
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy $ABCD$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên). Khi đó



- a) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là 0° .
- b) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là 180° .
- c) Cosin của góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CS}$ bằng $\frac{1}{4}$.
- d) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng 60° .

Câu 6.

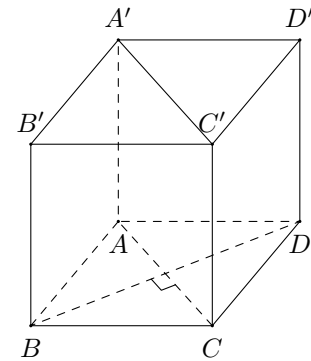
Cho tứ diện đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a , M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó



- a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$.
- b) $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.
- c) Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 90° .
- d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

Câu 7.

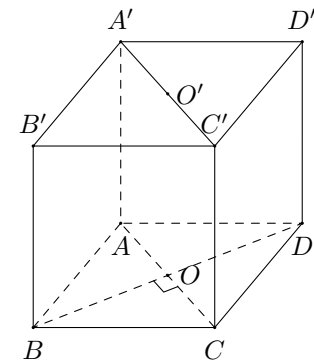
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó



- a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}) = (AC, C'A')$.
- b) Gọi $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$. Ta có $(\vec{u}; \vec{v}) = 60^\circ$.
- c) Gọi $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $\vec{y} = \overrightarrow{A'C'}$. Ta có $(\vec{x}; \vec{y}) = 90^\circ$.
- d) $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}) = 90^\circ$.

Câu 8.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC'} = \frac{a^2}{2}$.
- b) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = -\frac{a^2}{2}$.
- c) $|\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{AB}| = a\sqrt{3}$.
- d) $|\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}| = 4a$.

1. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	2. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	3. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
4. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	5. ☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	6. ☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
7. ☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	8. ☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d S	

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, từ các đỉnh của hình hộp đã cho, có bao nhiêu véc-tơ đối (khác véc-tơ không) của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$? KQ:

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Biết rằng $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng KQ:

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Giá trị tan của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm). KQ:

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° , đồng thời $|\vec{a}| = 2$ và $|\vec{b}| = 5$. Đặt $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Để $\vec{u} \perp \vec{v}$ thì giá trị của k là KQ:

Câu 5. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = \vec{a} + 4\vec{b} + m\vec{c}$. Giá trị của m để các vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng bằng KQ:

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Đặt một vật tại đỉnh A , khi đó tác động vào vật bởi những lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có giá lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD, AA' và $|\vec{F}_1| = 2N, |\vec{F}_2| = 3N, |\vec{F}_3| = 4N$. Hãy xác định độ lớn của hợp lực $\vec{F}$ tác động lên vật (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). KQ:

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$ gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AG} = k \cdot (\vec{c} + \vec{b} + \vec{a})$ (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm). KQ:

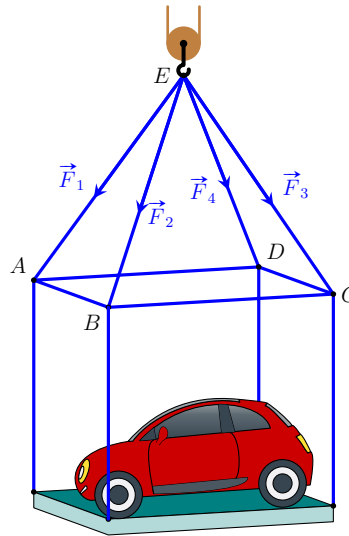
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{DG}$ KQ:

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$ (đơn vị: độ). KQ:

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Xác định số đo của góc (MN, SC) (đơn vị: độ). KQ:

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB (đơn vị: độ). KQ:

Câu 12. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lực của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $2700N$ và trọng lực của khung sắt là $1500N$.



KQ:

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\vec{IJ}$ và $\vec{CD}$ (đơn vị: độ).

KQ:

1.	4	2.	0,5	3.	1,73	4.	-7,5	5.	1
6.	5,39	7.	0,33	8.	3	9.	90	10.	90
11.	90	12.	7853	13.	90				

BÀI 2. TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

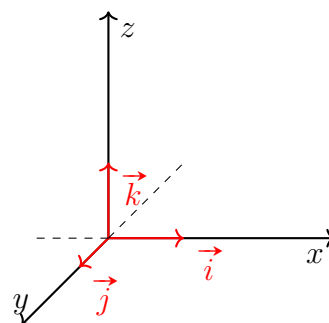
1. Hệ tọa độ trong không gian

Định nghĩa 1.

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản hệ tọa độ $Oxyz$.



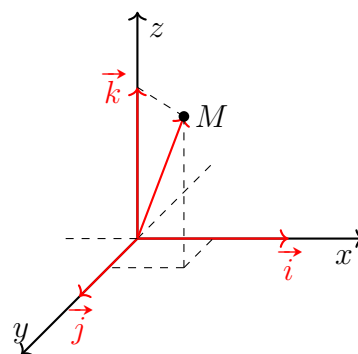
2. Tọa độ điểm của vectơ

2.1 Tọa độ điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M .

Nếu $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; Trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M .



2.2 Tọa độ vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$.

Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$.

Viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Trong đó a_1 là hoành độ, a_2 là tung độ, a_3 là cao độ của vectơ $\vec{a}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

□ Dạng 2.1. Tọa độ điểm

Phương pháp Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Nếu $\vec{OM} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\vec{OM} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(m_1; m_2; m_3)$.

Nếu $\vec{MO} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\vec{MO} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(-m_1; -m_2; -m_3)$.

M thuộc các trục tọa độ $\begin{cases} M \in Ox \rightarrow M(x; 0; 0) \\ M \in Oy \rightarrow M(0; y; 0) \\ M \in Oz \rightarrow M(0; 0; z). \end{cases}$

M thuộc các mặt phẳng tọa độ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \rightarrow M(x; y; 0) \\ M \in (Oxz) \rightarrow M(x; 0; z) \\ M \in (Oyz) \rightarrow M(0; y; z). \end{cases}$

Ví dụ 1. Xác định tọa độ điểm M trong các trường hợp sau

- $\vec{MO} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$
- $\vec{OM} = 2\vec{OA} + \vec{i}$ với $A(2; -3; 1)$

Lời giải

- $\vec{MO} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$
Ta có $\vec{OM} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$. Do đó $M(-2; 0; 3)$.
- $\vec{OM} = 2\vec{OA} + \vec{i}$ với $A(2; -3; 1)$
Ta có $\vec{OM} = 2(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) + \vec{i} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$. Vậy $M(5; -6; 2)$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{OM}, \vec{ON}$.

Lời giải

Ta có: $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$.

Do đó, $\vec{OM} = (-4; 3; -1); \vec{ON} = (2; -1; -3)$.

Ví dụ 3. Cho điểm $M(-2; 5; 3)$. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục tọa độ.

Lời giải

Gọi:

$M'(x'; y'; z')$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox .

$M''(x''; y''; z'')$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy .

$M'''(x'''; y'''; z''')$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oz .

Khi đó $M'(-2; 0; 0)$; $M''(0; 5; 0)$; $M'''(0; 0; 3)$.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và vectơ $\vec{u} = (3; -4; 2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

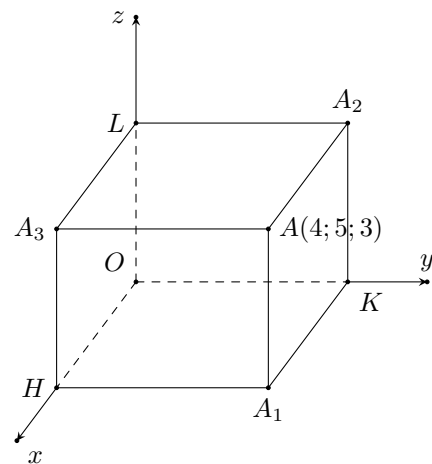
- $\vec{OA}$.
- $\vec{u}$.

Lời giải

- $\vec{OA}$
 Vì điểm A có tọa độ là $A(1; 2; -3)$ nên $\vec{OA} = (1; 2; -3)$
 Do đó, $\vec{OA} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + (-3)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.
- $\vec{u}$
 Vì $\vec{u} = (3; -4; 2)$ nên $\vec{u} = 3\vec{i} + (-4)\vec{j} + 2\vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

Ví dụ 5.

Trong không gian $Oxyz$, cho tọa độ $A(4; 5; 3)$ và vị trí các điểm $L; K; H; A_1; A_2; A_3$ như hình vẽ bên. Xác định tọa độ của các vectơ $\vec{A_1A}$, $\vec{A_2A}$



Lời giải

Từ hình vẽ, ta có

$$\vec{A_1A} = \vec{OL}; \vec{A_2A} = \vec{OH}$$

Mà $L(0; 0; 3) \Rightarrow \vec{OL} = (0; 0; 3)$ và $H(4; 0; 0) \Rightarrow \vec{OH} = (4; 0; 0)$.

Do đó, $\vec{A_1A} = (0; 0; 3)$ và $\vec{A_2A} = (4; 0; 0)$.

□ Dạng 2.2. Tọa độ vectơ

Phương pháp: Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
- $ABCD$ là hình bình hành $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

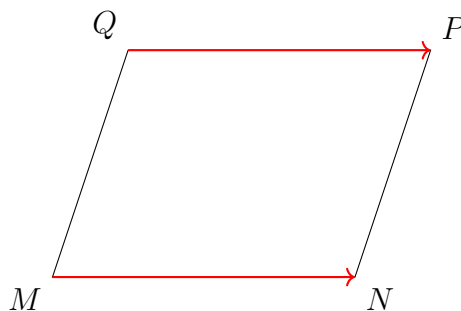
- a) Xác định tọa độ vectơ $\vec{a}$.
- b) Tìm $x; y; z$ để $\vec{b} = (x + 2y - z - 1; x - y + 3z + 1; 3x - y - z - 6)$ bằng $\vec{a}$.

Lời giải

- a) Ta có $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (3; 2; -1)$.
- b) Ta có $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 3 \\ x - y + 3z + 1 = 2 \\ 3x - y - z - 6 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1; 1; 1)$, $N(2; 3; 4)$, $P(7; 7; 5)$.
 Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải



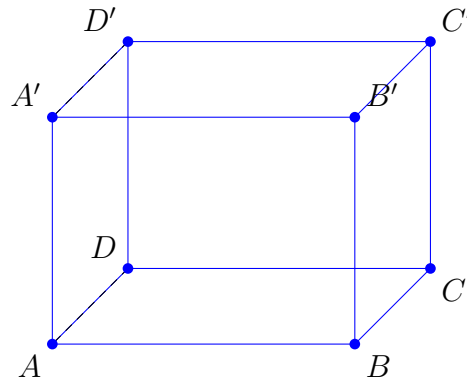
Ta có $\overrightarrow{MN} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{QP} = (7 - x_Q; 7 - y_Q; 5 - z_Q)$.

Vì $MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7 - x_Q \\ 2 = 7 - y_Q \\ 3 = 5 - z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 6 \\ y_Q = 5 \\ z_Q = 2 \end{cases}$.

Vậy $Q(6; 5; 2)$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 4)$, $D(5; 2; 4)$, $D'(4; 1; 2)$. Tìm tọa độ đỉnh C' .

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 3 = 4 \\ y_C + 2 = -1 \\ z_C - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 7 \\ y_C = -3 \\ z_C = 10 \end{cases} \Rightarrow C(7; -3; 10).$$

Ta có $\begin{cases} CC' \parallel DD' \\ \overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{DD'} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} - 7 = -1 \\ y_{C'} + 3 = -1 \\ z_{C'} - 10 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = 6 \\ y_{C'} = -4 \\ z_{C'} = 8 \end{cases} \Rightarrow C'(6; -4; 8).$$

Dạng 2.3. Bài toán thực tế

Ví dụ 1. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình bên dưới với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1 m. Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

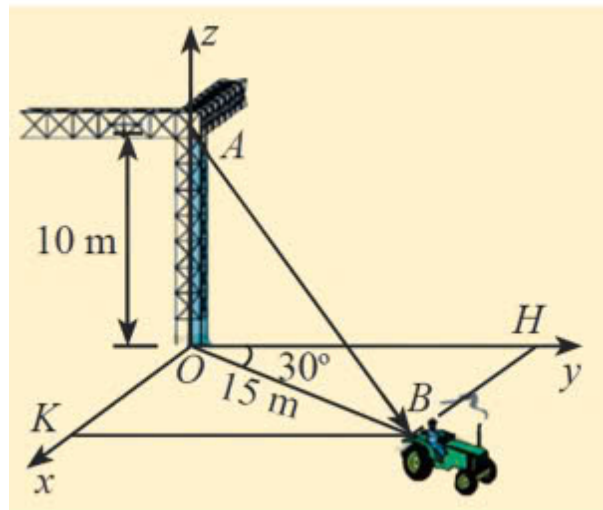
Xét $\triangle OBH$ vuông tại H , có $\widehat{HOB} = 30^\circ$.

- $OB = 15 \Rightarrow OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

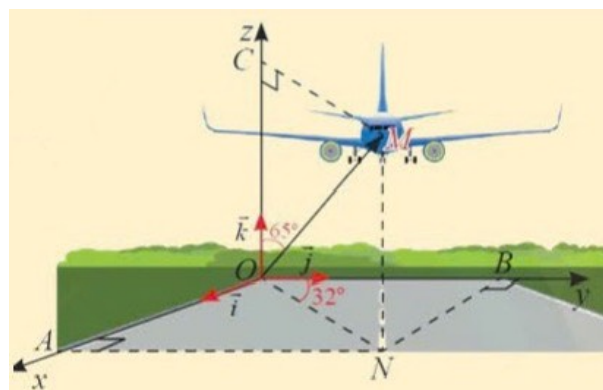
- $BH = OB \cdot \sin 30^\circ = \frac{15}{2} \Rightarrow OK = \frac{15}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = 10\vec{k}$, $\overrightarrow{OH} = \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{15}{2}\vec{i}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \frac{15}{2}\vec{i} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j} - 10\vec{k}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$.



Ví dụ 2. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tìm toạ độ điểm M .



Lời giải

Ta có $ON = CM$, $AN = OB$.

Xét $\triangle KCM$ vuông tại C có:

$$OC = OM \cdot \cos 65^\circ = 14 \cdot \cos 65^\circ \approx 5,9 \text{ và } CM = OM \cdot \sin 65^\circ = 14 \cdot \sin 65^\circ \approx 12,7.$$

Xét $\triangle OAN$ vuông tại A có:

$$OA = ON \cdot \cos 58^\circ = 12,7 \cdot \cos 58^\circ \approx 6,7 \text{ và } AN = ON \cdot \sin 58^\circ = 12,7 \cdot \sin 58^\circ \approx 10,8.$$

$$\overrightarrow{OM} = OA \cdot \vec{i} + OB \cdot \vec{j} + OC \cdot \vec{k} = 12,7 \cdot \vec{i} + 10,8 \cdot \vec{j} + 5,9 \cdot \vec{k}$$

Vậy $M(12,7; 10,8; 5,9)$.

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ giả sử $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ điểm M là

- A. $(-2; 3; 1)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(2; 3; -1)$. D. $(2; 3; 1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(-3; 2; -1)$. D. $(2; -1; -3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oy ?

- A. $M(0; 5; 0)$. B. $N(4; 0; 0)$. C. $P(0; 0; 6)$. D. $Q(4; 5; 0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $N(0; 4; -1)$. B. $P(-2; 0; 3)$. C. $M(3; 4; 0)$. D. $Q(2; 0; 0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

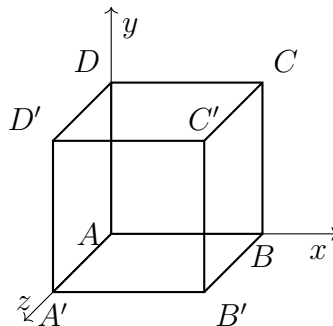
Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(1; -2; 3)$. C. $(-1; -2; 3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ và $B(2; 1; 4)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BA}$ là

- A. $(0; -4; 0)$. B. $(4; -2; 8)$. C. $(-1; -1; 2)$. D. $(-2; -2; 4)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1 như hình vẽ. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là



- A. $(1; 1; 0)$. B. $(0; 1; 1)$. C. $(1; 0; 1)$. D. $(1; 1; 1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(2; 1; 4)$ lên trục Ox là
 A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(0; 0; 4)$. D. $(0; 1; 4)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(-2; 1; 4)$ lên (Oyz) là
 A. $(-2; 0; 0)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(0; 0; 4)$. D. $(0; 1; 4)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$.
 Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 A. $D(-2; 8; -3)$. B. $D(-2; 2; 5)$. C. $D(-4; 8; -5)$. D. $D(-4; 8; -3)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$,
 $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.
 A. $A'(3; 4; -6)$. B. $A'(4; 6; -5)$. C. $A'(2; 0; 2)$. D. $A'(3; 5; -6)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MO} = 3\vec{k} - 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Tọa độ
 điểm M là
 A. $(3; -2; 4)$. B. $(-2; 4; 3)$. C. $(2; -4; -3)$. D. $(3; 2; 4)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = (2x - 4)\vec{i} - 4\vec{j} + (y - 1)\vec{k}$.
 Khi điểm $M \in Oy$ thì giá trị $x + 2y$ bằng
 A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{AO} = 4\vec{k} - 2\vec{j}$ và $B(1; 2; -1)$. Tọa
 độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là
 A. $(1; 0; 3)$. B. $(0; 2; 4)$. C. $(0; -2; -4)$. D. $(-1; 0; -3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -2; 1)$ và $\vec{b} = (x - 1)\vec{i} + (x^2 - 3)\vec{j} + y\vec{j}$.
 Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì giá trị $x - y$ bằng
 A. 0. B. 2. C. 1. D. -1.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{b} = 4\vec{j} - \vec{i}$. Tọa độ $\vec{b}$ bằng
 A. $(-1; 4; 0)$. B. $(1; 4; 0)$. C. $(0; -1; 4)$. D. $(4; -1; 0)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $M(x - 1; 2y - 2; 7)$. Gọi M'
 là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxy) . Khi tứ giác $OBM'A$ là hình bình hành thì
 giá trị $x + y$ bằng
 A. 4. B. 2. C. 1. D. -1.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt
 phẳng (Oxz) là
 A. $P(0; 2; 3)$. B. $M(1; 0; 3)$. C. $N(0; 2; 0)$. D. $Q(1; 2; 0)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$. Điểm đối xứng với A qua trục Oz có
 tọa độ là
 A. $(1; 2; -3)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(0; 0; 3)$. D. $(-1; 2; 3)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

- A. $D(-4; -2; 9)$. B. $D(4; 2; 9)$. C. $D(6; 2; -3)$. D. $D(-2; 4; 5)$.

Dùng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi 22, 23, 24.

Cần trục chân đế là kiểu cột quay được sử dụng để phục vụ công việc xếp dỡ hàng hóa chủ yếu ngoài các cảng bến, bãi (hình ảnh minh họa). Ta chọn hệ trục $Oxyz$ thỏa trục Ox trùng với trục chân đế, trục Oy vuông góc với trục Ox và trục Oz trùng với trục cần cẩu (theo đơn vị mét, như hình vẽ). Gọi M là vị trí tại đỉnh cần cẩu, H là hình chiếu của M lên (Oxy) . Biết tay cần KM của cần trục dài 50 m, trục cần OK dài 50 m, $(\vec{k}; \overrightarrow{KM}) = 60^\circ$, $(\vec{i}; \overrightarrow{OH}) = 45^\circ$.



Câu 22. Điểm M có cao độ z_M là bao nhiêu

- A. $\frac{100\sqrt{3}}{2}$. B. 93,3. C. 75. D. 60.

Câu 23. Điểm H có tọa độ là bao nhiêu

- A. $(25\sqrt{2}; 25\sqrt{2}; 0)$. B. $(25; 25; 0)$.
C. $\left(\frac{25\sqrt{6}}{2}; \frac{25\sqrt{6}}{2}; 0\right)$. D. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Câu 24. Vectơ $\overrightarrow{KM}$ có tọa độ là bao nhiêu

- A. $(25\sqrt{2}; 25\sqrt{2}; 25)$. B. $(25; 25; 25)$.
C. $\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}; \frac{25\sqrt{2}}{2}; 25\right)$. D. $\left(\frac{25\sqrt{6}}{2}; \frac{25\sqrt{6}}{2}; 25\right)$.

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|-------|
| 1. C | 2. A | 3. C | 4. A | 5. B | 6. A | 7. A | 8. A | 9. A | 10. D |
| 11. D | 12. D | 13. C | 14. B | | | | | | |

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 4; 6)$ và $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

- a) Tọa độ điểm $N(2; 1; 0)$.
- b) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $M'(0; 0; 6)$.
- c) Hình chiếu vuông góc của M trên mặt (Oxy) là điểm $N(2; 4; 0)$.
- d) Đối xứng với điểm M qua mặt (Oyz) là điểm $K(-2; 0; 0)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OABC$ với $A(1; 2; 3)$, $B(5; 0; -1)$ và $C(a; b; c)$.

- a) Tọa độ điểm $O(0; 0; 1)$.
- b) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA} = (1; 2; 3)$.
- c) $\overrightarrow{OB} = 5 \cdot \vec{i} - \vec{k}$.
- d) Nếu $OABC$ hình bình hành thì $a + b + c = 2$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$ và $D'(0; 3; 3)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$.
- b) $A'(0; 0; 3)$.
- c) M là trung điểm DD' . Khi đó tọa độ điểm $M(0; 3; -3)$.
- d) Tọa độ điểm $C'(3; 3; 0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

- a) Tọa độ của điểm M là $(2; 1; 1)$.
- b) Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là $(2; 1; 0)$.
- c) Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là $(0; 1; 0)$.
- d) Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy là $(2; 0; 1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4, đỉnh A trùng với gốc O , các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz .

- a) Tọa độ của điểm D là $(4; 0; 0)$.
- b) Tọa độ của điểm C là $(0; 4; 0)$.
- c) Tọa độ của điểm A' là $(0; 0; 4)$.
- d) Tọa độ của điểm C' là $(4; 4; 4)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 3, AC = 5, AA' = 6$.

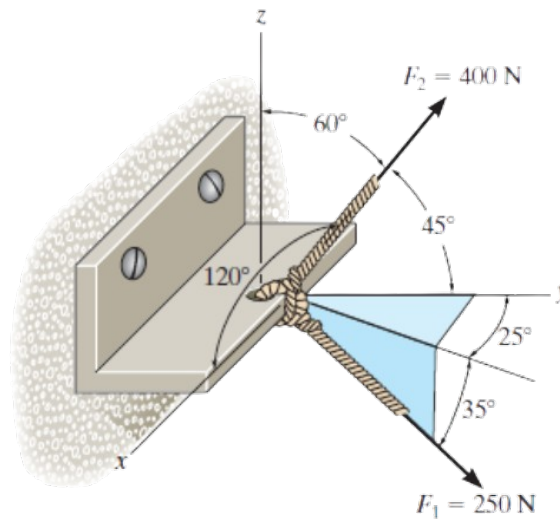
- a) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(3; 0; 0)$.
- b) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là $(3; 4; 6)$.
- c) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC'}$ là $(3; -4; 6)$.

- d) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AM}$ là $\left(\frac{3}{2}; 4; 6\right)$, với M là trung điểm của $C'D'$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $D'(3; 4; -6)$.

- a) Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.
 b) Tọa độ $C(2; 1; 2)$.
 c) Tọa độ $A'(3; 5; -6)$.
 d) Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(3; 4; -3)$.

Câu 8. Dưới đây là một giá đỡ chịu hai lực. Biểu diễn từng lực dưới dạng vectơ Descartes.



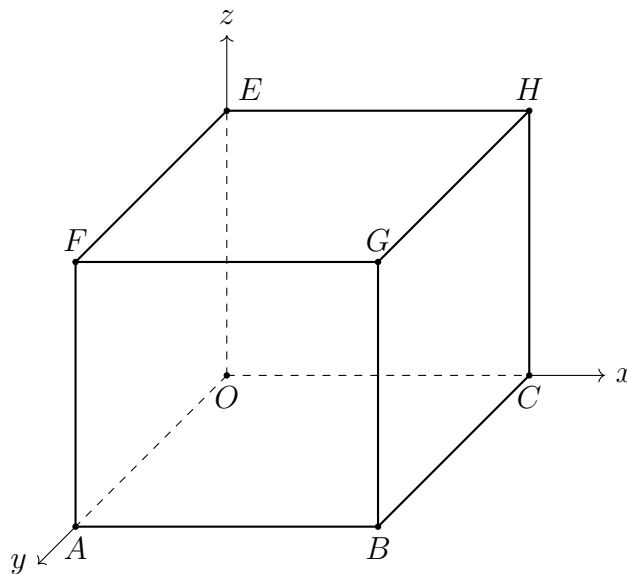
- a) $\vec{F}_2 = -200\vec{i} + 281\vec{j} + 200\vec{k}$.
 b) $\vec{F}_1 = 86,547\vec{i} + 185,601\vec{j} - 143,394\vec{k}$.
 c) Độ lớn lực tổng hợp lên giá đỡ bằng $485,297N$.
 d) Góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục Oy là $16,145^\circ$.

1. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	2. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	3. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
4. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	5. ☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	6. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
7. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	8. ☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d S	

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ điểm $A(x; y; z)$. Giá trị biểu thức $S = 100x + 1000y + 10z$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.EFGH$ có các cạnh $OA = 5$, $OC = 8$, $OE = 7$ (xem hình vẽ dưới đây). Tọa độ $H(x; y; z)$. Tính giá trị biểu thức $P = 50x + 75y + 1000z$.



KQ:

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Gọi M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\vec{AM} = 2\vec{MB}$. Tìm độ dài vectơ $\vec{OM}$. KQ:

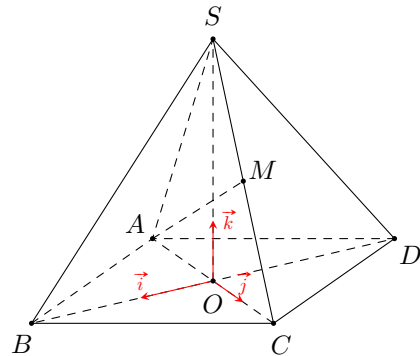
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; 2; -1)$, $B(-1; 0; 5)$. Điểm $M(a; b; c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ khi $|\vec{MA} + \vec{MB}|$ nhỏ nhất. KQ:

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 2)$, $C(3; 1; 1)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S = 2\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + 3\vec{MC} \cdot \vec{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tính giá trị $T = 6a - 5b + 3c$. KQ:

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ và tọa độ vectơ $\vec{AG} = (a; b; c)$. Tính $S = a + b + c$. KQ:

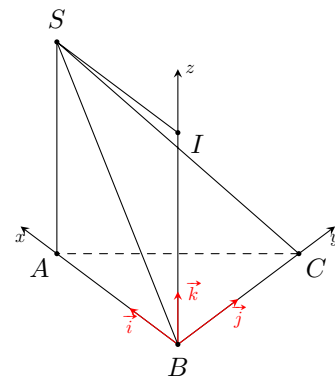
Câu 7.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O . Các vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $OA = OS = 4$ như hình vẽ. Toạ độ vectơ $\overrightarrow{AM} = (a; b; c)$ với M là trung điểm của cạnh SC , khi đó, tính $a + b + c$. KQ:



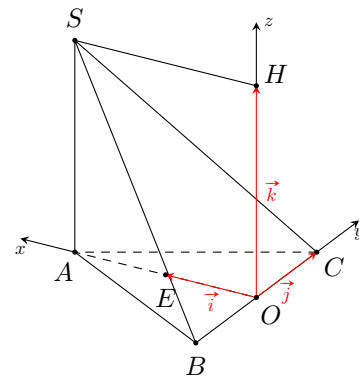
Câu 8.

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Điểm $D(a; b; c)$ sao cho $SBCD$ là hình bình hành. Khi đó, tính $a + b + c$. KQ:



Câu 9.

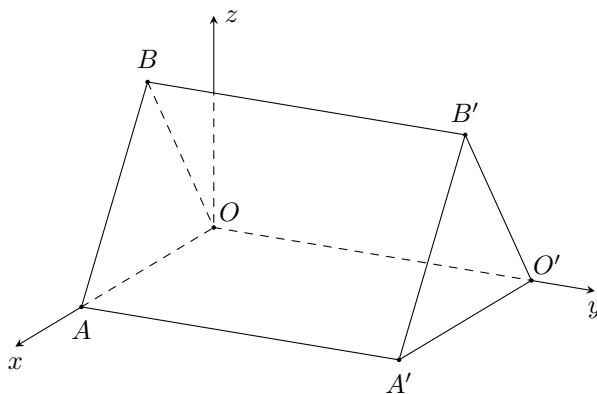
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1. Thiết lập hệ trục tọa độ như hình vẽ, toạ độ điểm $S(a; \sqrt{b}; c)$. Khi đó, tính $a + b + c$. KQ:



Câu 10. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Tính $x + y + z$. KQ:

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ và $O'(1; -2; 2)$. Vectơ $\vec{d} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ có toạ độ là $(a; b; c)$. Tính $a + b + c$. KQ:

Câu 12. Những căn nhà gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

1. 4250	2. 7600	3. 3	4. 2	5. 12
6. 1	7. 8	8. 8	9. 4	10. 1594
11. 33	12. 1013			

BÀI 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. LÝ THUYẾT

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Định nghĩa 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 \\ a_2 = k \cdot b_2 \\ a_3 = k \cdot b_3. \end{cases}$

 Từ nay, các bài tập liên quan đến tọa độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định nghĩa 2. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

3. Vận dụng

- Tọa độ điểm đầu cuối:
Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Tọa độ trung điểm đoạn thẳng:
Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Tọa độ trọng tâm tam giác:
Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.
Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

□ Dạng 3.1. Tọa độ tổng hiệu vector

Phương pháp:

Trong không gian $Oxyz$, hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực k .

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).$$

$$(3) k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

$$(4) \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương khi và chỉ khi } \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 5)$ và $\vec{b} = (0; -2; -4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $5\vec{a}$, $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Ta có

$$\bullet \vec{a} + \vec{b} = (2 + 0; (-1) + (-2); 5 + (-4)) = (2; -3; 1).$$

$$\bullet \vec{a} - \vec{b} = (2 - 0; (-1) - (-2); 5 - (-4)) = (2; 1; 9).$$

$$\bullet 5\vec{a} = (5 \cdot 2; 5 \cdot (-1); 5 \cdot 5) = (10; -5; 25).$$

$$\bullet 2\vec{a} = (4; -2; 10), \frac{1}{2}\vec{b} = (0; -1; -2).$$

$$\text{Do đó } 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = (4; -1; 12).$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -3; -2)$, $B(2; 3; 4)$ và $C(3; 5; 7)$. Chứng minh rằng ba điểm A , B , C tạo thành tam giác.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 6; 6)$; $\overrightarrow{AC} = (4; 8; 9)$.

Vì $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \neq \frac{6}{9}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy ba điểm A , B , C tạo thành tam giác.

Dạng 3.2. Tọa độ điểm – vector thỏa điều kiện

Phương pháp:

(1) Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

(2) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(3) I là trung điểm AB :

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

Ta có $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ suy ra $\forall M: \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

(4) G là trọng tâm $\triangle ABC$:

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

Ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ suy ra $\forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

(5) G là trọng tâm hình chóp $ABCD$:

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right).$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ và $C(1; 2; -1)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = \vec{BC} - 3\vec{AO}$.

Lời giải

Ta có $\vec{BC} = (0; 3; -3)$, $\vec{AO} = (-3; -2; -1)$.

Do đó $\vec{u} = \vec{BC} - 3\vec{AO} = (0 - 3 \cdot (-3); 3 - 3 \cdot (-2); -3 - 3 \cdot (-1)) = (9; 9; 0)$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ và $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\vec{AB} = 2\vec{DC}$.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Ta có $\vec{AB} = (1; -3; 4)$, $\vec{DC} = (-3 - x; 5 - y; 1 - z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\vec{AB} = 2\vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2(-3 - x) \\ -3 = 2(5 - y) \\ 4 = 2(1 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{13}{2} \\ z = -1. \end{cases}$$

Vậy $D\left(-\frac{7}{2}; \frac{13}{2}; -1\right)$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AB và CD . Xác định Tọa độ trung điểm I của MN .

Lời giải

Ta có M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M(1; 1; 0)$.

Và N là trung điểm $CD \Rightarrow N\left(\frac{0+2}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow N(1; 1; 2)$.

Vậy I là trung điểm $MN \Rightarrow I\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow I(1; 1; 1)$.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(0; -2; 3)$. Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB .

Lời giải

Gọi $K(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Ta có $\overrightarrow{AK} = (x-1; y-2; z+1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; -4; 4)$.

Vì A, K, B thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k \cdot (-1) \\ y-2 = k \cdot (-4) \\ z+1 = k \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k+1 \\ y = -4k+2 \\ z = 4k-1. \end{cases}$$

Suy ra $K(-k+1; -4k+2; 4k-1) \Rightarrow \overrightarrow{OK} = (-k+1; -4k+2; 4k-1)$.

Vì $OK \perp AB$ nên $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-k+1) \cdot (-1) + (-4k+2) \cdot (-4) + (4k-1) \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{13}{33}$.

Vậy $K\left(\frac{20}{33}; \frac{14}{33}; \frac{19}{33}\right)$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2; 4; -3)$ có trọng tâm $G(2; 1; 0)$. Khi đó xác định tọa độ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm đoạn BC , G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ (quy tắc hình bình hành) và $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG} = 3(0; -3; 3) = (0; -9; 9)$.

□ Dạng 3.3. Độ dài vector

$$(1) \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

$$\text{Suy ra } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$(2) \text{ Độ dài vectơ } \vec{a}: |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \rightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2.$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$ và $B(0; 3; 1)$ Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$. Tìm chu vi của $\triangle ABC$.

Lời giải

Theo công thức tính độ dài ta được

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{10};$$

$$AC = \sqrt{0+4+16} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Chu vi của } \triangle ABC \text{ là } P = \sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$, $B(0; 3; 1)$, $C(3; 2; 0)$. Tính diện tích $\triangle ABC$ (nếu có).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; 0; 1)$ không cùng phương nên ba điểm A ; B ; C lập thành tam giác.

Và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow AB \perp AC$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A .

$$\text{Mặt khác } AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{ và } AC = \sqrt{2^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM .

Lời giải

$$\text{Giả sử } M(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (a; b-3; c-1) \text{ và } \overrightarrow{BC} = (-3; 3; 3)$$

Điểm $M \in BC$ sao cho $MC = 2MB$.

Suy ra

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \cdot (-3) \\ b - 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \\ c - 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 2. \end{cases}$$

Khi đó $M(-1; 4; 2)$.

Vậy $AM = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$.

☐ Dạng 3.4. Sự cùng phương của hai vectơ

Phương pháp

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có

$$(1) \text{ Hai vectơ bằng nhau: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$$

$$(2) \text{ Vectơ } \vec{a} \text{ cùng phương vectơ } \vec{b}: \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 \\ a_2 = k \cdot b_2 \\ a_3 = k \cdot b_3. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$; $\vec{b} = (1; -2; -1)$; $\vec{c} = (8; 2; -4)$; $\vec{d} = (-4; -1; 2)$. Vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$ cùng phương với vectơ nào đã cho?

Lời giải

$$\text{Xét } \begin{cases} \vec{a} = (4; 1; -2) \\ \vec{b} = (1; -2; -1) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{-1} \text{ nên } \vec{a} \text{ không cùng phương } \vec{b}.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} \vec{a} = (4; 1; -2) \\ \vec{c} = (8; 2; -4) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \text{ nên } \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{c}.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} \vec{a} = (4; 1; -2) \\ \vec{d} = (-4; -1; 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{-4} = \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} \text{ nên } \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{d}.$$

Vậy vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; 5)$ và $\vec{b} = (m+1; 2n; 10)$ Tìm m, n để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k(m+1) \\ 1 = k(2n) \\ 5 = k \cdot 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = 1. \end{cases}$$

Vậy $m = 1; n = 1$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (3; -4; 2)$, $\vec{AM} = (x-2; y+1; -4)$.

A, B, M thẳng hàng. tương đương $\vec{AB}, \vec{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 7. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

Lời giải

Ta có $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$; $\vec{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\vec{AM} = (x+2; -3; z-1)$.

Vì A, B, M thẳng hàng nên $\vec{AM} = k \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0)$.

Khi đó $\vec{BM} = (-14; -6; -2)$, $\vec{AM} = (-7; -3; -1)$ và $AM = \sqrt{59}$, $BM = 2\sqrt{59}$.

Vậy $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

Dạng 3.5. Tích vô hướng và ứng dụng

Phương pháp

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có

$$(1) \text{ Tích vô hướng hai vectơ: } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \end{cases}$$

Góc giữa 2 vectơ:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}.$$



- Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn.
- Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

(2) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

Bài toán liên quan giữa độ dài và tích vô hướng:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = m$; $|\vec{v}| = n$ và tạo với nhau một góc α . Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$ hoặc $|\vec{u} - \vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Biến đổi $(|\vec{u} + \vec{v}|)^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.
- **Bước 2:** Áp dụng:
$$\begin{cases} \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}). \end{cases}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Tính cosin của góc giữa $\vec{a}; \vec{b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = -\frac{3}{13}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của $\widehat{BAC}$ bằng

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 5; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 4; -1)$.

$$\text{Khi đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Tìm tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

Ta có
$$\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} = (2; 2 - 3m\sqrt{2}; -4 + 3m\sqrt{2}) \\ \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} = (2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4m + (2 - 3m\sqrt{2})(m + \sqrt{2}) + (-4 + 3m\sqrt{2})(-2m - \sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2} - 6m - 6\sqrt{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \cos 45^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow 1 - 2m &= \sqrt{3 + 3m^2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ (1 - 2m)^2 = 3 + 3m^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m = 2 \pm \sqrt{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow m &= 2 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 & |\vec{u} + \vec{v}|^2 \\
 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\
 &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\
 &= |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \\
 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 = 19.
 \end{aligned}$$

Suy ra $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$.

☐ Dạng 3.6. Tâm tỷ cự

Bài toán cực trị độ dài vectơ:

Cho n điểm $A_1; a_2; \dots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho $\left| k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

• **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

• **Bước 2:** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\left| k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n} \right| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \overrightarrow{MI}| = |k| \cdot |\overrightarrow{MI}|.$$

• **Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vectơ đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

Bài toán cực trị độ dài bình phương vectơ:

Cho đa giác $a_1 a_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho tổng

$$S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

• **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

• **Bước 2:** Thấy rằng

$$MA_1^2 = |\overrightarrow{MA_1}|^2 = (\overrightarrow{MA_1})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 = (\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2$$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2 \\ &= k_1 \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2 \right] + \dots \\ &\quad + k_n \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) + (\overrightarrow{IA_n})^2 \right] \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) + \dots \\ &\quad + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{IA_1} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}} \right) \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) \end{aligned}$$

• **Bước 3:** Do $k > 0$, để $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

! Cho đa giác $a_1a_2 \dots a_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7)$, $B(0; 4; 1)$, $C(3; 0; 5)$ và $D(3; 3; 3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó xác định tọa độ điểm M .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$. Suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2; 1; 4)$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0; 1; 4)$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $B(2; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1.

Do $M \in Oy$, nên $M(0; y; 0)$.

Tính $MA^2 + MB^2 = 2y^2 - 6y + 20 = f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y = \frac{3}{2}$.

Vậy $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Cách 2.

Ta có $A(1; 1; -3)$. Gọi I là trung điểm của AB . Suy ra $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -1\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 9. \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất.

Điều đó xảy ra khi M là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

Vậy $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

C. LUYỆN TẬP**PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 5; 0)$ và $\vec{v} = (1; -5; -3)$, tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A. $(2; -10; 3)$. B. $(2; 10; 3)$. C. $(0; 0; -3)$. D. $(2; 0; 3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 5; 2)$ và $\vec{b} = (1; -3; -1)$, vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; -2; 3)$. B. $(-3; 8; 3)$. C. $(-1; 2; 1)$. D. $(3; -8; -3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-2; 6; 2)$, vectơ $\frac{3}{2}\vec{a}$ có tọa độ là

- A. $(-6; 9; 6)$. B. $(-3; 9; 3)$. C. $(6; 9; 6)$. D. $(-3; 6; 3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$, $\vec{c} = (-2; -4; -3)$, tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ là

- A. $(5; 3; -9)$. B. $(-5; -3; 9)$. C. $(-3; -7; -9)$. D. $(3; 7; 9)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$?

- A. $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. B. $\vec{b} = (-2; 1; -1)$. C. $\vec{b} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{b} = (1; 2; 1)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 2)$ và $N(1; 0; 4)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

- A. $(1; -1; 3)$. B. $(0; 2; 2)$. C. $(2; -2; 6)$. D. $(1; 0; 3)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -1; -3)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(3; 3; -1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 2)$ và $B(3; -1; 4)$. Tọa độ vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}$ là

- A. $\vec{u} = (-7; 7; -8)$. B. $\vec{u} = (-7; 3; -8)$. C. $\vec{u} = (-7; 5; -8)$. D. $\vec{u} = (-7; 9; -8)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; 1)$ và $B(3; -2; 1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 5. B. 3. C. 25. D. 9.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $MNPQ$ có $M(-4; 3; 3)$, $N(4; -4; 2)$ và $P(3; 6; -1)$. Biết chu vi của hình bình hành $MNPQ$ bằng $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $a > b$. Tính $a - b$.

- A. 4. B. 8. C. 16. D. 32.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; -2; 3)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với vectơ $\vec{u}$?

- A. $\vec{a} = (2; 4; 6)$. B. $\vec{b} = (-3; 6; -9)$.
C. $\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; -2; \frac{3}{2}\right)$. D. $\vec{d} = (-1; 2; -3)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 3; -1)$ và $B(-1; -6; 2)$. Tìm giao điểm C của đường thẳng AB và trục Ox

- A. $C\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. B. $C\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. C. $C(3; 0; 0)$. D. $C(-3; 0; 0)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 4; 1)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tính $\vec{IA} \cdot \vec{BA}$.

- A. 4. B. 6. C. -4. D. -6.

1. C	2. B	3. B	4. A	5. C	6. B	7. A	8. C	9. D	10. D
11. A	12. C	13. D	14. A	15. B					

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$.

- a) $\vec{a} + \vec{b} = (-3; 6; -1)$. b) $\vec{a} - \vec{b} = (3; -6; 1)$.
c) $3\vec{b} = (-3; 15; 6)$. d) $2\vec{a} - \vec{b} = (5; -7; 4)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; -2)$, $\vec{c} = (m; -2; 4)$.

- a) $-2\vec{a} + \vec{b} = (-5; -2; -2)$. b) $\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow m = 8$.
c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$. d) $|\vec{c}| = 2|\vec{a}| \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$, biết $A(-1; 0; 3)$, $B(4; 2; 0)$, $C(3; 1; -3)$.

- a) $G(2; 1; 0)$ là trọng tâm tam giác ABC .
b) $D(-2; -1; 0)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$.
c) $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CB}$. Khi đó $a + b + c = -13$.
d) $M(a; b; c) \in Ox$ sao cho BM vuông góc với đường thẳng AC .
Khi đó $4a^2 + b^2 + c^2 = 162$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 5; 4)$, $C(0; 2; 0)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

- a) Khi vectơ $\vec{v} = (1; 3; -2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là $-\frac{1}{2}$.
b) Khi $ABCD$ là hình bình hành thì điểm $D(-1; -1; -1)$.
c) Với điểm $E(x; y; -2)$ để B, C, E thẳng hàng thì $x + y = -\frac{1}{2}$.
d) Điểm $M \in (Oxy)$ sao cho A, B, M thẳng hàng có tọa độ là $M(-2; 7; 0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-1; 3; -1)$, $C(5; -3; 4)$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

- a) Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52 .
b) Góc $\widehat{ABC}$ là góc tù.
c) Côsin giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng $\frac{-23}{\sqrt{638}}$.
d) Điểm $D(1; 2; x)$ với $\triangle ABD$ vuông tại B thì giá trị $x = -6$.

1. a S b Đ c Đ d Đ	2. a Đ b S c S d Đ	3. a S b S c S d S
4. a Đ b Đ c Đ d S	5. a Đ b S c Đ d Đ	

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1; 2; -1), C(3; -4; 1), B'(2; -1; 3), D'(0; 3; 5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x; y; z)$ thì $x+y+z$ là bao nhiêu? KQ:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1; 2; -3)$ và $C(7; 4; -2)$. Gọi $E(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ khi đó $x+y+z$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn AM (Kết quả được làm tròn ở chữ số thập phân thứ nhất). KQ:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1), N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right), E(2; 2; 3)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN . Tính độ dài IE . KQ:

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$. KQ:

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 45° . Số phần tử của S là bao nhiêu? KQ:

1.	7	2.	3	3.	5,4	4.	3	5.	0,5
6.	1								

BÀI 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN - KHOẢNG TỬ PHÂN
VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. LÝ THUYẾT

1. Khoảng biến thiên

Định nghĩa 1. Khoảng biến thiên, kí hiệu R , của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Ý nghĩa

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\cdots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Bảng 1

Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn *lớn hơn* hoặc *bằng* khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu.
- Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

2. Khoảng tứ phân vị

Định nghĩa 2. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, kí hiệu Δ_Q , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Ý nghĩa

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Ý nghĩa

- Tứ phân vị thứ i , kí hiệu là Q_i , với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau $Q_i = u_m + \frac{\frac{in}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m)$. Trong đó:
 - $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.
 - $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
 - n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
 - $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1.1. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
------	--------------	--------------	---------	------------------

Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k
--------	-------	-------	---------	-------

- Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R = u_{k+1} - u_1$.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ví dụ 1. Dữ liệu về tốc độ của 100 xe ô tô lưu thông trên một đoạn đường cao tốc vào giờ cao điểm, được trích xuất từ camera của cơ quan cảnh sát giao thông. Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (bảng số liệu hình bên dưới).

Tốc độ (km/h)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)
Số xe	10	20	20	35	15

Lời giải

Ta có $u_{k+1} = 110$ và $u_1 = 60$.

Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1 = 110 - 60 = 50$ km/h.

Ví dụ 2. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra của các bạn trong lớp 12A được cho bằng bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	4	2

- Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút. Hãy so sánh khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm và mẫu số liệu gốc.

Lời giải

- Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.
Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1 = 45 - 25 = 20$ phút.
- Hãy so sánh khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm và mẫu số liệu gốc.
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là $43 - 27 = 16$ phút.
Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Dạng 1.2. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán

Phương pháp:

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu.
- Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ 1. Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, anh Sơn đã tiến hành điều tra tuổi thọ của máy chạy bộ (đơn vị: năm) do hai hãng X, Y sản xuất. Bảng biểu thị hai mẫu số liệu mà anh thu thập được qua Internet.

Tuổi thọ	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số máy của hãng X	7	20	36	20	17
Số máy của hãng Y	0	20	35	35	10

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nào lớn hơn? Từ đó có thể nói là máy chạy bộ do hãng nào sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn?

Lời giải

Khoảng biến thiên của tuổi thọ máy chạy bộ do hãng X : $R_X = 12 - 2 = 10$.

Khoảng biến thiên của tuổi thọ máy chạy bộ do hãng Y : $R_Y = 12 - 4 = 8$.

Vì $R_X > R_Y$ nên có thể nói là máy do hãng X sản xuất có tuổi thọ phân tán hơn so với máy của hãng Y .

Ví dụ 2. Người ta tiến hành phỏng vấn hai nhóm khán giả về một bộ phim mới công chiếu. Nhóm A gồm những khán giả thuộc lứa tuổi 20 – 30, nhóm B thuộc lứa tuổi trên 30. Người được hỏi ý kiến phải đánh giá bộ phim bằng cách cho điểm theo một tiêu chí nêu trong phiếu điều tra và sau đó lấy tổng số điểm (thang điểm 100). Bảng dưới đây trình bày kết quả điều tra hai nhóm khán giả:

Tuổi thọ	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số người của nhóm A	7	20	36	20	17
Số người của nhóm B	0	20	35	35	10

Ý kiến đánh giá của nhóm khán giả nào phân tán hơn?

Lời giải

Khoảng biến thiên của điểm trong phiếu điều tra của số người nhóm A: $R_A = 100 - 50 = 50$.

Khoảng biến thiên của điểm trong phiếu điều tra của số người nhóm B: $R_B = 90 - 60 = 30$. Vì $R_A > R_B$ nên có thể nói là số điểm đánh giá theo một tiêu chí của nhóm A phân tán hơn so với nhóm B.

Ví dụ 3. Bảng dưới biểu thị kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet hằng ngày của một số người.

Thời gian (phút)	30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)	[150; 180)
Số người	2	4	10	5	3

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

Lời giải

Đầu mút phải của nhóm ghép cuối cùng là 180,

Đầu mút trái của nhóm ghép đầu tiên là 30.

Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 180 - 30 = 150$.

Kết quả này cho biết thời gian sử dụng Internet hằng ngày của các thành viên thuộc nhóm người được điều tra chênh lệch nhau nhiều nhất là 150 phút.

☐ Dạng 1.3. Ý nghĩa của khoảng biến thiên trong việc đo mức độ phân tán

Phương pháp:

- Tứ phân vị thứ k , kí hiệu là Q_k , với $k = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm

được xác định như sau $Q_k = u_m + \frac{\frac{kn}{4} - C}{n_m}(u_{m+1} - u_m)$. Trong đó:

- * $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.
- * $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
- * n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
- * $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm có kí hiệu Δ_Q , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.
- Bước 1: Xác định cỡ mẫu, tính tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.
- Bước 2: Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 1. Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t < 4$	$4 \leq t < 5$
Số cuộc gọi	8	17	25	20	10

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Thời gian t (phút)	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 5)$
Số cuộc gọi	8	17	25	20	10

Cỡ mẫu $n = 80$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_{80}$ là thời gian đàm thoại của 80 cuộc gọi và giả sử dãy số liệu gốc này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có $x_1, x_2, \dots, x_8 \in [0; 1)$, $x_9, x_{10}, \dots, x_{25} \in [1; 2)$, $x_{26}, x_{27}, \dots, x_{50} \in [2; 3)$, $x_{51}, x_{52}, \dots, x_{70} \in [3; 4)$, $x_{71}, x_{72}, \dots, x_{80} \in [4; 5)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\frac{x_{20} + x_{21}}{2}$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[1; 2)$ và tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = 1 + \frac{\frac{80}{4} - 8}{17} \cdot 1 = \frac{29}{17}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\frac{x_{60} + x_{61}}{2}$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm $[3; 4)$ và tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = 3 + \frac{\frac{3 \cdot 80}{4} - (8 + 17 + 25)}{20} \cdot 1 = 3,5$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $3,5 - \frac{29}{17} = \frac{61}{34}$.

Ví dụ 2. Bạn An rất thích chạy bộ. Thời gian chạy bộ mỗi ngày trong thời gian gần đây

của bạn An được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian t (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Hãy tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trong bảng trên.

Lời giải

Cỡ mẫu $n = 18$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{18}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian của 18 ngày chạy bộ của bạn An được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \dots, x_6 \in [20; 25)$; $x_7, \dots, x_{12} \in [25; 30)$; $x_{13}, \dots, x_{16} \in [30; 35)$; $x_{17} \in [35; 40)$; $x_{18} \in [40; 45)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_5 \in [20; 25)$.

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_1 = 20 + \frac{\frac{18}{4} - 0}{6} \cdot (25 - 20) = 23,75.$$

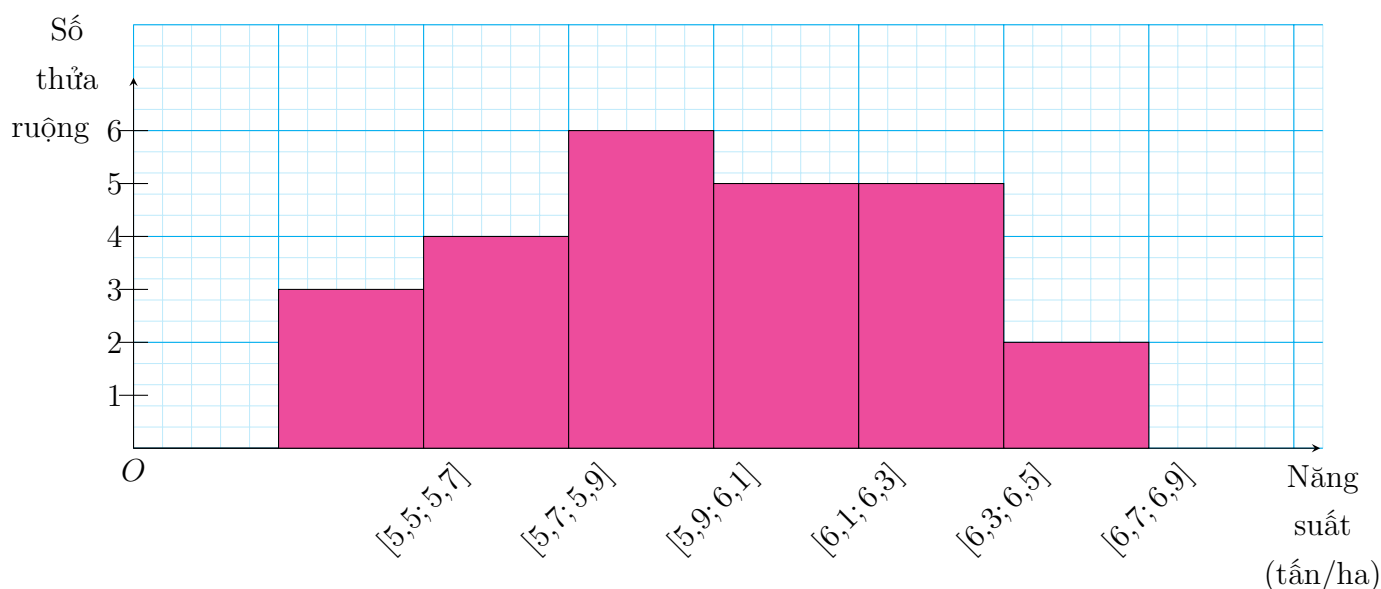
Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{14} \in [30; 35)$.

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 30 + \frac{\frac{3 \cdot 18}{4} - (6 + 6)}{4} \cdot (35 - 30) = 31,875.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = 31,875 - 23,75 = 8,125$.

Ví dụ 3. Khảo sát năng suất của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau:



- a) Có bao nhiêu thửa ruộng được khảo sát?
- b) Lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên.
- c) Hãy xác định khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải

- a) Có tất cả $n = 3 + 4 + 6 + 5 + 5 + 2 = 25$ thửa ruộng được khảo sát.
- b) Bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên.

Năng suất (tấn/ha)	[5,5; 5,7)	[5,7; 5,9)	[5,9; 6,1)	[6,1; 6,3)	[6,3; 6,5)	[6,5; 6,7)
Số thửa ruộng	3	4	6	5	5	2
Tần số tương đối	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là: $6,7 - 5,5 = 1,2$.

Cỡ mẫu $n = 25$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{25}$ là mẫu số liệu gốc gồm năng suất của 25 thửa ruộng được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, x_3 \in [5,5; 5,7)$; $x_4, \dots, x_7 \in [5,7; 5,9)$; $x_8, \dots, x_{13} \in [5,9; 6,1)$; $x_{14}, \dots, x_{18} \in [6,1; 6,3)$; $x_{19}, \dots, x_{23} \in [6,3; 6,5)$; $x_{24}, x_{25} \in [6,5; 6,7)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_6 + x_7) \in [5,7; 5,9)$.

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_1 = 5,7 + \frac{\frac{25}{4} - 3}{4}(5,9 - 5,7) = 5,8625.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{19} + x_{20}) \in [6,3; 6,5)$.

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 6,3 + \frac{\frac{3 \cdot 25}{4} - (3 + 4 + 6 + 5)}{5}(6,5 - 6,3) = 6,33.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = 6,33 - 5,8625 = 0,4675$.

Dạng 1.4. Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị trong việc đo mức độ phân tán

Phương pháp

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Ví dụ 1. Kết quả đo chiều cao của 100 cây dừa trồng sau 10 năm tại một vườn trái cây ở Bến Tre cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Trong 100 cây dừa trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi chiều cao của cây dừa này có phải là giá trị ngoại lệ không?

Lời giải

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 9,4 - 8,4 = 1$.

Ta có cỡ mẫu là $n = 100$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ là mẫu số liệu gồm chiều cao của 100 cây dừa.

Ta có

$x_1, \dots, x_5 \in [8,4; 8,6); x_6, \dots, x_{17} \in [8,6; 8,8); x_{18}, \dots, x_{42} \in [8,8; 9,0);$

$x_{43}, \dots, x_{86} \in [9,0; 9,2); x_{87}, \dots, x_{100} \in [9,2; 9,4).$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\frac{x_{25} + x_{26}}{2} \in [8,8; 9,0).$

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 8,8 + \frac{\frac{100}{4} - (5 + 12)}{25} \cdot (9,0 - 8,8) = 8,864$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\frac{x_{75} + x_{76}}{2} \in [9,0; 9,2).$

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

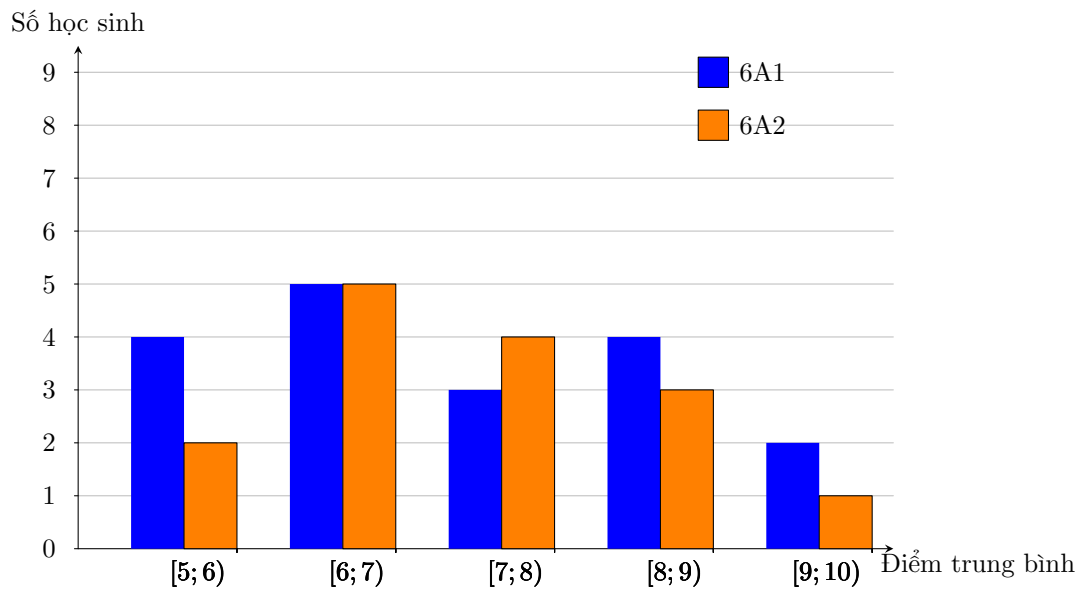
$$Q_3 = 9,0 + \frac{\frac{3 \cdot 100}{4} - (5 + 12 + 25)}{44} \cdot (9,2 - 9,0) = 9,15$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 0,286$.

- b) Hỏi chiều cao của cây dừa này có phải là giá trị ngoại lệ không?

Vì $Q_1 - 1,5\Delta_Q = 8,435$ và $Q_3 + 1,5\Delta_Q = 9,579$ nên cây dừa có chiều cao 8,4 m là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm.

Ví dụ 2. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B



- a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.
- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đều hơn?

Lời giải

- a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

Ta có

Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Học sinh trường A	4	5	3	4	2
Học sinh trường B	2	5	4	3	1

- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường nào có điểm trung bình đều hơn?

- Xét mẫu số liệu trường A.

Cỡ mẫu $n = 18$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{18}$ là mẫu số liệu gốc gồm điểm trung bình của 18 học sinh trường A được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, \dots, x_4 \in [5; 6)$; $x_5, \dots, x_9 \in [6; 7)$; $x_{10}, x_{11}, x_{12} \in [7; 8)$; $x_{13}, \dots, x_{16} \in [8; 9)$; $x_{17}, x_{18} \in [9; 10)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_5 \in [6; 7)$.

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 6 + \frac{\frac{18}{4} - 4}{5}(7 - 6) = 6,1$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{14} \in [8; 9)$.

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 8 + \frac{\frac{3 \cdot 18}{4} - (4 + 5 + 3)}{4}(9 - 8) = 8,375$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_{Q(A)} = 8,375 - 6,1 = 2,275$.

• Xét mẫu số liệu ở trường B .

Cỡ mẫu $n = 15$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{15}$ là mẫu số liệu gốc gồm điểm trung bình của 15 học sinh trường B được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, x_2 \in [5; 6)$; $x_3, \dots, x_7 \in [6; 7)$; $x_8, \dots, x_{11} \in [7; 8)$; $x_{12}, x_{13}, x_{14} \in [8; 9)$; $x_{15} \in [9; 10)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_4 \in [6; 7)$.

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 6 + \frac{\frac{15}{4} - 2}{5}(7 - 6) = 6,35$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{12} \in [8; 9)$.

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 8 + \frac{\frac{3 \cdot 15}{4} - (2 + 5 + 4)}{3}(9 - 8) = \frac{97}{12}$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_{Q(B)} = \frac{97}{12} - 6,35 = \frac{26}{15} \approx 1,73$.

Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bảng sau thống kê khối lượng một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng.

Khối lượng (gam)	[80; 82)	[82; 84)	[84; 86)	[86; 88)	[88; 90)
Số quả	17	20	25	16	12

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 10 gam. B. 12 gam. C. 2 gam. D. 20 gam.

Câu 2. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau.

Lượng nước tiêu thụ m^3	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Số hộ gia đình	20	60	40	32	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. $3m^3$. B. $15m^3$. C. $18m^3$. D. $20m^3$.

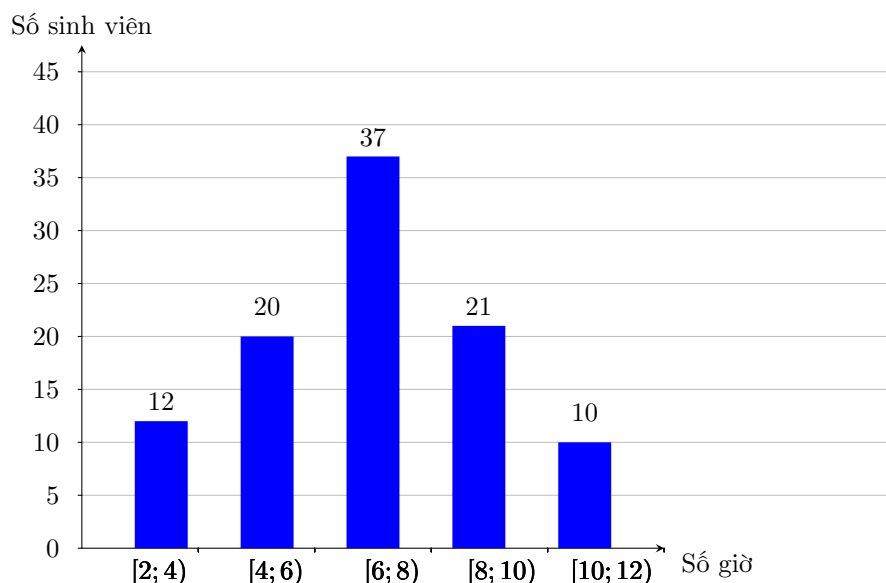
Câu 3. Người ta thống kê tốc độ của một số xe ô tô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau.

Tốc độ (km/h)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)
Số xe	15	22	28	34	19

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 75 km/h. B. 25 km/h. C. 100 km/h. D. 5 km/h.

Câu 4. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ sau.



Khoảng biến thiên của mẫu số liệu được cho trong biểu đồ trên là

- A. 2. B. 3. C. 10. D. 37.

Câu 5. Thâm niên công tác của các công nhân hai nhà máy A và B được cho trong bảng sau

Thâm niên công tác (năm)	$[0; 5)$	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$	$[20; 25)$
Số công nhân nhà máy A	35	13	12	12	8
Số công nhân nhà máy B	19	26	24	11	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết thâm niên công tác các công nhân của nhà máy nào có độ phân tán lớn hơn?

- A. Không so sánh được.
 B. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán lớn hơn nhà máy B .
 C. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán nhỏ hơn nhà máy B .
 D. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán bằng nhà máy B .

Câu 6. Kết quả khảo sát cân nặng của 40 quả cam Canh ở mỗi lô hàng 1 và lô hàng 2 được cho ở bảng sau

Cân nặng (gam)	$[100; 110)$	$[110; 120)$	$[120; 130)$	$[130; 140)$	$[140; 150)$
Số quả cam ở lô hàng 1	0	10	11	19	0
Số quả cam ở lô hàng 2	3	15	12	7	3

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết cân nặng của 40 quả cam Canh của lô hàng nào có độ phân tán lớn hơn.

- A. Không so sánh được.
 B. Lô hàng 2 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 1.
 C. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 2.
 D. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán bằng lô hàng 2.

Câu 7. Bạn Lan thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các học sinh nữ lớp 10B và lớp 10C ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Chiều cao(cm)	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$
Số học sinh nữ lớp 10B	0	5	13	7	0
Số học sinh nữ lớp 10C	2	10	9	3	1

- A. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10B đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp 10C.
 B. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10C đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp 10B.

C. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10B và lớp 10C đồng đều như nhau.

D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10C nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10B.

Câu 8. Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Số lần gặp sự cố	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số xe	17	33	25	20	5

A. 5,32.

B. 3,52.

C. 2,53.

D. 5,23.

Câu 9. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

A. 0,06.

B. 0,08.

C. 0,07.

D. 0,09.

Câu 10. Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

A. 100.

B. 110.

C. 120.

D. 130.

Câu 11. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này. (Làm tròn các kết quả đến hàng phần chục).

Số bệnh nhân	[0,5; 10,5)	[10,5; 20,5)	[20,5; 30,5)	[30,5; 40,5)	[40,5; 50,5)
Số ngày	7	8	7	6	2

A. 20,3.

B. 20,2.

C. 20,4.

D. 20,5.

Câu 12. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Cân nặng (kg)	[1,0; 1,1)	[1,1; 1,2)	[1,2; 1,3)	[1,3; 1,4)
Giống A	8	28	32	17
Giống B	13	14	24	14

- A. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.
- B. Cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống A nhỏ hơn giống B.
- C. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A.
- D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.

Câu 13. Một mẫu số liệu ghép nhóm có khoảng tứ phân vị là 4,43 và tứ phân vị thứ 3 là $\frac{68}{3}$ thì giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó phải là bao nhiêu?

- A. $x > 29,31$. B. $x > 1,51$. C. $x < 51,23$. D. $x \leq 25,11$.

Câu 14. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ 1 là 254,9 và tứ phân vị thứ 3 là 417,25 thì điều kiện giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

- A. $\begin{cases} x \geq 12,1 \\ x \leq 1,35 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x > 11,2 \\ x < 0,375 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x > 660,775 \\ x < 11,375 \end{cases}$. D. $x > 11,375$.

Câu 15. Giáo viên chủ nhiệm thống kê chiều cao (đơn vị cm) của các bạn học sinh nữ của lớp 12A ở bảng sau

Chiều cao	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh	2	4	10	0	1

Xác định khoảng biến thiên của chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12A

- A. 20. B. 10. C. 5. D. 25.

Câu 16. Bảng dưới đây thống kê cân nặng (gam) của 100 quả xoài cát Hòa Lộc sau khi thu hoạch tại một khu vườn

Cân nặng	[200; 205)	[205; 300)	[300; 305)	[305; 310)
Số lượng xoài	10	15	45	30

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 35. B. 60. C. 55. D. 110.

Câu 17. Thời gian và số ngày tập thể dục của bác T và bác H trong một tháng (30 ngày) được thống kê theo bảng dưới đây

Thời gian tập (phút)	[15; 20)	[25; 30)	[30; 35)
Số ngày tập của bác T	10	15	5
Số ngày tập của bác H	9	21	0

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác T bằng 10.
- B. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác H bằng 20.
- C. Độ phân tán thời gian tập của bác T cao hơn độ phân tán thời gian tập của bác H .
- D. Độ phân tán thời gian tập của bác T thấp hơn độ phân tán thời gian tập của bác H .

Câu 18. Bảng sau thống kê khối lượng một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng.

Khối lượng (gam)	[80; 82)	[82; 84)	[84; 86)	[86; 88)	[88; 90)
Số quả	17	20	25	16	12

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 10 gam.
- B. 12 gam.
- C. 2 gam.
- D. 20 gam.

Câu 19. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau.

Khối lượng (gam)	[80; 82)	[82; 84)	[84; 86)	[86; 88)	[88; 90)
Số hộ gia đình	20	60	40	32	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 3m^3 .
- B. 15m^3 .
- C. 18m^3 .
- D. 20m^3 .

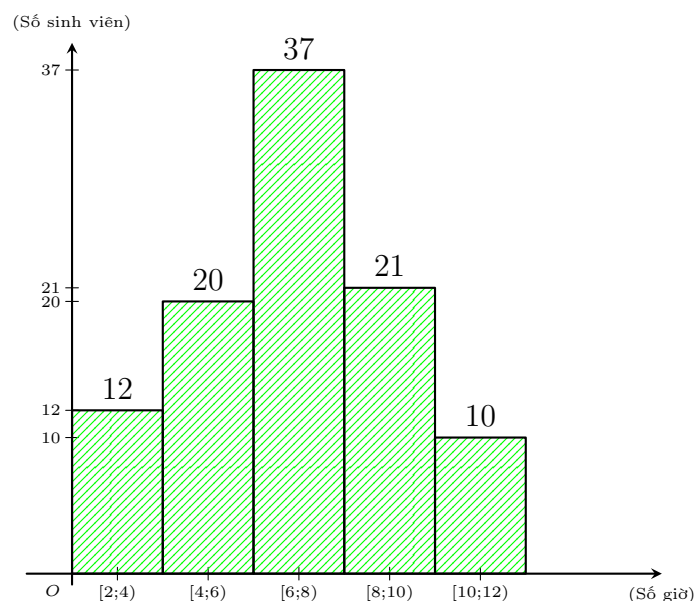
Câu 20. Người ta thống kê tốc độ của một số xe ô tô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau.

Tốc độ (km/h)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)
Số xe	15	22	28	34	19

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 75 km/h.
- B. 25 km/h.
- C. 100 km/h.
- D. 5 km/h.

Câu 21. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ sau.



Khoảng biến thiên của mẫu số liệu được cho trong biểu đồ trên là

- A. 2. B. 3. C. 10. D. 37.

Câu 22. Thâm niên công tác của các công nhân hai nhà máy A và B được cho trong bảng sau

Thâm niên công tác (năm)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Số công nhân nhà máy A	35	13	12	12	8
Số công nhân nhà máy B	19	26	24	11	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết thâm niên công tác các công nhân của nhà máy nào có độ phân tán lớn hơn?

- A. Không so sánh được.
 B. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán lớn hơn nhà máy B.
 C. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán nhỏ hơn nhà máy B.
 D. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán bằng nhà máy B.

Câu 23. Kết quả khảo sát cân nặng của 40 quả cam Canh ở mỗi lô hàng 1 và lô hàng 2 được cho ở bảng sau

Cân nặng (gam)	[100; 110)	[110; 120)	[120; 130)	[130; 140)	[140; 150)
Số quả cam ở lô hàng 1	0	10	11	19	0
Số quả cam ở lô hàng 2	3	15	12	7	3

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết cân nặng của 40 quả cam Canh của lô hàng nào có độ phân tán lớn hơn.

- A. Không so sánh được.
- B. Lô hàng 2 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 1.
- C. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán lớn hơn lô hàng 2.
- D. Lô hàng 1 có cân nặng của 40 quả cam Canh phân tán bằng lô hàng 2.

Câu 24. Bạn Lan thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các học sinh nữ lớp 10B và lớp 10C ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Chiều cao(cm)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh nữ lớp 10B	0	5	13	7	0
Số học sinh nữ lớp 10C	2	10	9	3	1

- A. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10B đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp 10C.
- B. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10C đồng đều hơn chiều cao của các bạn nữ lớp 10B.
- C. Chiều cao của các bạn nữ lớp 10B và lớp 10C đồng đều như nhau.
- D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10C nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của các bạn nữ lớp 10B.

Câu 25. Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Số lần gặp sự cố	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số xe	17	33	25	20	5

- A. 5,32.
- B. 3,52.
- C. 2,53.
- D. 5,23.

Câu 26. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiêu do một hãng sản xuất thu được kết quả sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

- A. 0,06.
- B. 0,08.
- C. 0,07.
- D. 0,09.

Câu 27. Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này?

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

- A. 100. B. 110. C. 120. D. 130.

Câu 28. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần chục).

Số bệnh nhân	[0,5; 10,5)	[10,5; 20,5)	[20,5; 30,5)	[30,5; 40,5)	[40,5; 50,5)
Số ngày	7	8	7	6	2

- A. 20,3. B. 20,2. C. 20,4. D. 20,5.

Câu 29. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở bảng sau. Chọn đáp án có khẳng định đúng.

Cân nặng (kg)	[1,0; 1,1)	[1,1; 1,2)	[1,2; 1,3)	[1,3; 1,4)
Giống A	8	28	32	17
Giống B	13	14	24	14

- A. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.
 B. Cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống A nhỏ hơn giống B.
 C. Cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B đồng đều hơn cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A.
 D. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống A nhỏ hơn khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của lợn con mới sinh thuộc giống B.

Câu 30. Một mẫu số liệu ghép nhóm có khoảng tứ phân vị là 4,43 và tứ phân vị thứ 3 là $\frac{68}{3}$ thì giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó phải là bao nhiêu?

- A. $x > 29,31$. B. $x > 1,51$. C. $x < 51,23$. D. $x \leq 25,11$.

Câu 31. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ 1 là 254,9 và tứ phân vị thứ 3 là 417,25 thì điều kiện giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

- A. $\begin{cases} x \geq 12,1 \\ x \leq 1,35 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x > 11,2 \\ x < 0,375 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x > 660,775 \\ x < 11,375 \end{cases}$. D. $x > 11,375$.

Câu 32. Giáo viên chủ nhiệm thống kê chiều cao (đơn vị cm) của các bạn học sinh nữ của lớp 12A ở bảng sau

Chiều cao	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh	2	4	10	0	1

Xác định khoảng biến thiên của chiều cao của các bạn học sinh nữ lớp 12A

- A. 20. B. 10. C. 5. D. 25.

Câu 33. Bảng dưới đây thống kê cân nặng (gam) của 100 quả xoài cát Hòa Lộc sau khi thu hoạch tại một khu vườn

Cân nặng	[200; 205)	[205; 300)	[300; 305)	[305; 310)
Số lượng xoài	10	15	45	30

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 35. B. 60. C. 55. D. 110.

Câu 34. Thời gian và số ngày tập thể dục của bác T và bác H trong một tháng (30 ngày) được thống kê theo bảng dưới đây

Thời gian tập (phút)	[15; 20)	[25; 30)	[30; 35)
Số ngày tập của bác T	10	15	5
Số ngày tập của bác H	9	21	0

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác T bằng 10.
 B. Khoảng biến thiên thời gian tập của bác H bằng 20.
 C. Độ phân tán thời gian tập của bác T cao hơn độ phân tán thời gian tập của bác H.
 D. Độ phân tán thời gian tập của bác T thấp hơn độ phân tán thời gian tập của bác H.

Câu 35. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 12 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

Giá tiền	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số lượng khách mua	2	6	4

Xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên

- A. $\frac{65}{6}$. B. $\frac{55}{3}$. C. $\frac{12}{5}$. D. $\frac{312}{5}$.

Câu 36. Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường

Cân nặng(g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

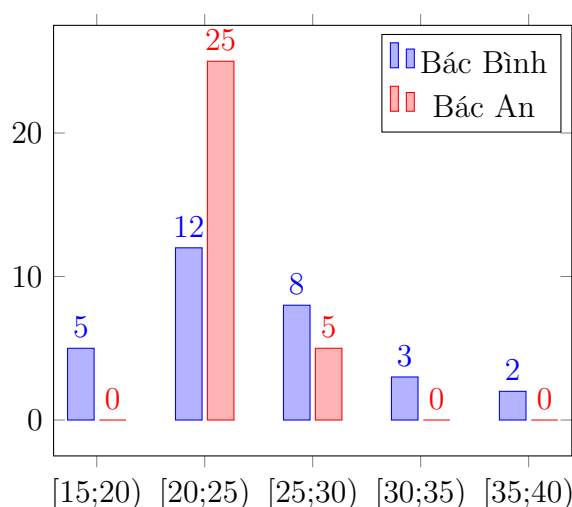
A. $\frac{9080}{143}$.

B. $\frac{980}{143}$.

C. $\frac{908}{143}$.

D. $\frac{9080}{145}$.

Câu 37. Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Hỏi giữa bác Bình và bác An thì người nào có thời gian luyện tập đều?

A. Bác Bình có thời gian tập đều hơn.

B. Bác An có thời gian tập đều hơn.

C. Không xác định được.

D. Bác Bình và Bác An có thời gian tập đều như nhau.

Câu 38. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12C và lớp 12D ở bảng sau

Chiều cao \ Lớp	[155; 160]	[160; 165]	[165; 170]	[170; 175]	[175; 180]	[180; 185]
12C	2	7	12	3	0	1
12D	5	9	8	2	1	0

Hãy so sánh độ phân tán của nử giữa hai mẫu số liệu chiều cao của các học sinh nữ lớp 12C và 12D.

A. Mẫu số liệu của lớp 12C ít phân tán hơn mẫu số liệu của lớp 12D.

B. Mẫu số liệu của lớp 12D ít phân tán hơn mẫu số liệu của lớp 12C.

C. Mẫu số liệu của lớp 12C và mẫu số liệu của lớp 12D không phân tán.

D. Không xác định được.

Câu 39. Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau

Tuổi kết hôn	[19; 22]	[22; 25]	[25; 28]	[28; 31]	[31; 34]
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực nào có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn?

A. Phụ nữ ở khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn.

B. Phụ nữ ở khu vực A có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn.

C. Phụ nữ ở khu vực A và khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều như nhau.

D. Không xác định được.

Câu 40. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	[8, 4; 8, 6)	[8, 6; 8, 8)	[8, 8; 9, 0)	[9, 0; 9, 2)	[9, 2; 9, 4)
Số cây	5	12	25	44	14

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Cây keo cao 8,4 m là cây keo có chiều cao là giá trị ngoại lệ.

B. Cây keo cao 8,4 m là cây keo có chiều cao không là giá trị ngoại lệ.

C. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = 0,5$.

D. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là 7.

Câu 41. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

Nhóm (Tuổi thọ)	Giới tính	
	Nam	Nữ
[50; 55)	4	3
[55; 60)	7	4
[60; 65)	4	5
[65; 70)	6	3
[70; 75)	15	7
[75; 80)	12	14
[80; 85)	2	13

[85; 90)	0	1
----------	---	---

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tuổi thọ của nam giới đều hơn tuổi thọ của nữ giới.
- B. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu nam giới là $\Delta_Q = 14$.
- C. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu nữ giới là $\Delta_Q = 16$.
- D. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu nam giới là 63.

1. A	2. B	3. B	4. C	5. B	6. B	7. A	8. B	9. C	10. C
11. B	12. A	13. A	14. C	15. A	16. D	17. C	18. A	19. B	20. B
21. C	22. B	23. B	24. A	25. B	26. C	27. C	28. B	29. A	30. A
31. C	32. A	33. D	34. C	35. A	36. A	37. B	38. A	39. A	40. A
41. A									

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Thời gian chờ khám bệnh của hai phòng khám 1 và phòng khám 2 ở thành phố X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Phòng khám số 1 (Số bệnh nhân)	3	12	15	18
Phòng khám số 2 (Số bệnh nhân)	5	10	12	0

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Tổng số bệnh nhân chờ khám bệnh ở phòng khám số 1 dưới 5 phút là 3.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chờ khám bệnh của phòng khám số 1 là $R_1 = 15$.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chờ khám bệnh của phòng khám số 2 là $R_2 = 20$.
- Thời gian chờ khám bệnh ở phòng khám số 2 phân tán hơn thời gian chờ khám bệnh ở phòng khám số 1.

Câu 2. Thống kê thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của một nhóm người chạy Grab được cho trong bảng sau:

Thu nhập (triệu đồng)	[3; 5]	[5; 7]	[7; 9]	[9; 11]
Số người	5	10	5	2

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Cỡ mẫu là $n = 22$.
- Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 10$.
- Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 5$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta Q = 5$.

Câu 3. Người ta theo dõi sự thay đổi cân nặng, được tính bằng hiệu cân nặng trước và sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng của một số người cho kết quả sau:

Thay đổi cân nặng (kg)	[-1; 0]	[0; 1]	[1; 2]	[2; 3]	[3; 4]
Số người nam	6	4	3	2	1
Số người nữ	5	6	3	1	0

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Số người thay đổi cân nặng theo chiều hướng giảm cân là 11.

- b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về sự thay đổi cân nặng của nam là $R_1 = 5$.
- c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về sự thay đổi cân nặng của nữ là $R_2 = 3$.
- d) Nếu biết nữ tăng cân nhiều nhất là 2 kg và giảm cân được nhiều nhất là 1 kg thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là 1.

Câu 4. Điểm kiểm tra cuối khóa môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các bảng sau

Bảng a. Điểm của lớp A

Điểm	Số học viên
[50; 60]	8
[60; 70]	20
[70; 80]	10
[80; 90]	7
[90; 100]	5

Bảng b. Điểm của lớp B

Điểm	Số học viên
[50; 60]	15
[60; 70]	25
[70; 80]	30
[80; 90]	20
[90; 100]	10

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- a) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng a là [60; 70].
- b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng b là [90; 100].
- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng a là 10.
- d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng b là 20.

Câu 5. Điểm kiểm tra cuối khóa môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các bảng sau:

Bảng a. Điểm của lớp A

Điểm	Số học viên
[50; 60]	8
[60; 70]	20
[70; 80]	17
[80; 90]	10
[90; 100]	5

Bảng b. Điểm của lớp B

Điểm	Số học viên
[50; 60]	15
[60; 70]	20
[70; 80]	30
[80; 90]	20
[90; 100]	15

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng a là [60; 70].
- Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng b là [90; 100].
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng a là 10.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng b là 20.

Câu 6. Cho mẫu số liệu thống kê chiều cao của các học sinh lớp 12A1, 12A2 và 12A3 của một trường THPT như bảng sau:

Chiều cao (đơn vị: cm)	[150; 155]	[155; 160]	[160; 165]	[165; 170]	[170; 175]	[175; 180]
Số học sinh lớp 12A1	1	3	6	5	3	2
Số học sinh lớp 12A2	0	2	5	7	1	0
Số học sinh lớp 12A3	0	1	3	7	2	0

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A1 phân tán hơn so với 12A2.
- Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A2 phân tán hơn so với 12A3.
- Ở lớp 12A2 có một học sinh có chiều cao là 173 cm, chiều cao của học sinh đó là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu của lớp 12A2.
- Ở lớp 12A3 có một học sinh có chiều cao là 177 cm, chiều cao của học sinh đó là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu của lớp 12A3.

Câu 7. Để chuẩn bị mở một trung tâm thể dục thể thao, ông Adã tiến hành điều tra tuổi thọ (đơn vị tính bằng năm) của máy chạy bộ do ba hãng X, Y, Z sản xuất. Bảng số liệu sau biểu thị các mẫu số liệu mà anh thu được trong quá trình nghiên cứu:

Tuổi thọ	[4; 6]	[6; 8]	[8; 10]	[10; 12]
Số máy của hãng X	7	20	20	15
Số máy của hãng Y	10	35	30	5

Số máy của hãng Z	5	10	20	15
-------------------	---	----	----	----

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng X sản xuất bằng 10.
- Khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng Y sản xuất không vượt quá 6.
- Khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng Z sản xuất thì lớn hơn khoảng biến thiên của máy chạy bộ do hãng Y sản xuất.
- Nếu dựa vào khoảng biến thiên thì máy chạy bộ do hãng Z sản xuất có tuổi thọ phân tán nhất trong ba hãng.

Câu 8. Điểm kiểm tra cuối học kỳ 2 môn Toán (thang điểm 10) của hai lớp 12A và 12B ở một trường THPT được thống kê trong các bảng sau:

Bảng A. Điểm của lớp 12A

Điểm	Số học sinh
[6,5; 7)	5
[7; 7,5)	9
[7,5; 8)	8
[8; 8,5)	7
[8,5; 9)	5
[9; 9,5)	4
[9,5; 10]	2

Bảng B. Điểm của lớp 12B

Điểm	Số học sinh
[6,5; 7)	3
[7; 7,5)	6
[7,5; 8)	7
[8; 8,5)	9
[8,5; 9)	7
[9; 9,5)	4
[9,5; 10]	2

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng A là [7; 7.5).
- Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng B là [8.5; 9).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng A thì lớn hơn 2.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng B nhỏ hơn khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng A.

1.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
4.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
7.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S

2.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
8.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ

3.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
6.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho bảng thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của Bác An và Bác Bình. Gọi R_A, R_B lần lượt là khoảng biến thiên của mẫu số liệu về thời gian tập thể dục của Bác An và Bác Bình, khi đó $R_A + R_B$ bằng

Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[25; 40)
Bác An	5	12	8	3	2
Bác Bình	0	20	5	5	0

KQ:

Câu 2. Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau hai năm sử dụng đầu tiên được cho ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2)	[3; 4)	[5; 6)	[7; 8)	[9; 10]
Số xe	17	33	25	20	5

Khoảng biến thiên của bảng số liệu trên là bao nhiêu?

KQ:

Câu 3. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới ở 50 quốc gia.

Độ tuổi	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)	[70; 75)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90]
Tần số	4	7	4	6	16	12	2	0

Hãy xác định khoảng biến thiên của tuổi thọ trung bình của nam giới trong mẫu số liệu ghép nhóm trên.

KQ:

Câu 4. Bạn Trang thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp 12Cở bảng sau:

Chiều cao	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)	[180; 185]
Tần số	2	7	12	3	0	1

Bạn Trang nhận xét như sau: Chênh lệch chiều cao của các bạn trong lớp không vượt quá a (cm). Hãy xác định giá trị của a để nhận xét của Trang là đúng.

KQ:

Câu 5. Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 6. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8, 4; 8, 6]	[8, 6; 8, 8]	[8, 9; 9, 0]	[9, 0; 9, 2]	[9, 2; 9, 4]
Tần số	5	12	25	44	14

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 7. Lương tháng của một số nhân viên một văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8]	[8; 10]	[10; 12]	[12; 14]
Số nhân viên	3	6	8	7

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 8. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)	[9,2; 9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu là bao nhiêu?

KQ:

Câu 9. Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải

20212022 cho kết quả sau:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42

(Theo premierleague.com)

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là $[40; 50)$?

KQ:

Câu 10. Bạn Lộc thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn nam lớp 12A và lớp 12B ở bảng sau.

Chiều cao (cm)	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[175; 180)$	$[180; 185)$
Lớp 12A	3	5	12	1	0
Lớp 12B	6	10	7	0	2

Khoảng biến thiên chiều cao của học sinh nam lớp 12B có độ phân tán lớn hơn khoảng biến thiên chiều cao của học sinh nam lớp 12A bao nhiêu cm?

KQ:

Câu 11. Thống kê số thẻ vàng của mỗi cầu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả như sau:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42

Tính khoảng biến của mẫu số liệu ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là $[40; 50)$.

KQ:

Câu 12. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung

Nhóm (Tuổi thọ)	$[50; 55)$	$[55; 60)$	$[60; 65)$	$[65; 70)$	$[70; 75)$	$[75; 80)$	$[80; 85)$	$[85; 90)$
Nam	4	7	4	6	15	12	2	0
Nữ	3	4	5	3	7	14	13	1

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm có tuổi thọ trung bình đồng đều nhất.

KQ:

1.	40	2.	10	3.	35	4.	30	5.	7,36
6.	0,23	7.	3,29	8.	8,4	9.	70	10.	16
11.	16	12.	3,75						

BÀI 2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. LÝ THUYẾT

1. Phương sai

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu s^2 , được tính bởi công thức:

$$s^2 = \frac{1}{n} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \bar{x})^2].$$

Trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ là cỡ mẫu.
- $\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k)$ là số trung bình.

2. Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu s .

Độ lệch chuẩn là căn bậc hai số học của phương sai:

$$\text{Độ lệch chuẩn } s = \sqrt{s^2}.$$

 *Chú ý:*

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau

$$s^2 = \frac{1}{n} (n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \cdots + n_kc_k^2) - \bar{x}^2.$$

- Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \bar{x})^2].$$

 *Ý nghĩa:*

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của mẫu số liệu gốc.
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.

- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 1. Thầy giáo thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B thu được bảng số liệu sau

Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

- Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

Lời giải

- Khoảng biến thiên của điểm số học sinh lớp 11A là $10 - 5 = 5$.
Khoảng biến thiên của điểm số học sinh lớp 11B là $10 - 6 = 4$.
Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì điểm trung bình của các học sinh lớp 11B ít phân tán hơn điểm trung bình của các học sinh lớp 11A.
- Ta có bảng thống kê điểm trung bình theo giá trị đại diện:

Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

- Xét mẫu số liệu của lớp 11A:
Cỡ mẫu là $n_1 = 1 + 11 + 22 + 6 = 40$.
Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 5,5 + 11 \cdot 7,5 + 22 \cdot 8,5 + 6 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s_1^2 = \frac{1}{40}(1 \cdot 5,5^2 + 11 \cdot 7,5^2 + 22 \cdot 8,5^2 + 6 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 = 0,61.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $s_1 = \sqrt{0,61}$.

- Xét mẫu số liệu của lớp 11B:

Cỡ mẫu là $n_2 = 6 + 8 + 14 + 12 = 40$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 6,5 + 8 \cdot 7,5 + 14 \cdot 8,5 + 12 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s_2^2 = \frac{1}{40}(6 \cdot 6,5^2 + 8 \cdot 7,5^2 + 14 \cdot 8,5^2 + 12 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 = 1,06.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $s_2 = \sqrt{1,06}$.

Do $s_1 < s_2$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp 11A có điểm trung bình ít phân tán hơn học sinh lớp 11B.

⚠ Chú ý

- Trong ví dụ trên, kết quả so sánh độ phân tán theo giá trị trung bình và độ lệch chuẩn có sự khác biệt. Điều này là do mẫu số liệu của học sinh lớp 11A có một giá trị ngoại lệ.
- Với các mẫu số liệu ghép nhóm có cùng số trung bình (hoặc xấp xỉ nhau), ta thường sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ phân tán của các mẫu số liệu đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

📁 Dạng 2.1. Lập mẫu số liệu ghép nhóm và tính giá trị trung bình

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Số trung bình cộng được tính như sau

- Bước 1: Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}; i = 1, 2, 3, \dots, k$.
- Bước 2: Tính $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.
- Bước 3: $\bar{x} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_k \cdot x_k}{n}$.

Ví dụ 1. Chiều cao của 20 cây giống được cho bởi bảng sau

Chiều cao (cm)	[40; 44)	[45; 49)	[50; 54)	[55; 59)	[60; 64)	[65; 69)
Số cây giống	2	5	3	4	3	3

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Lời giải

Bảng tần số ghép lớp của bảng nói trên là

Chiều cao (cm)	[40; 44)	[45; 49)	[50; 54)	[55; 59)	[60; 64)	[65; 69)
Giá trị đại diện	42	47	52	57	62	67
Số cây giống	2	5	3	4	3	3

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ghép lớp ta có

$$\bar{x} = \frac{42 \cdot 2 + 47 \cdot 5 + 52 \cdot 3 + 57 \cdot 4 + 62 \cdot 3 + 67 \cdot 3}{20} = 54,5 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 2. Các bạn học sinh lớp 12A trả lời 40 câu hỏi trong một bài kiểm tra. Kết quả được thống kê ở bảng sau

Số câu trả lời đúng	[16; 21)	[21; 26)	[26; 31)	[31; 36)	[36; 41)
Số học sinh	4	6	8	18	4

Tính giá trị trung bình số câu trả lời đúng.

Lời giải

Giá trị đại diện của mỗi nhóm như sau

Số câu trả lời đúng	[16; 21)	[21; 26)	[26; 31)	[31; 36)	[36; 41)
Giá trị đại diện	18,5	23,5	28,5	33,5	38,5
Số học sinh	4	6	8	18	4

Tổng số học sinh là 40.

Vậy giá trị trung bình là

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n} \\ &= \frac{4 \cdot 18,5 + 6 \cdot 23,5 + 8 \cdot 28,5 + 18 \cdot 33,5 + 4 \cdot 38,5}{40} \\ &= 30. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các em học sinh đã tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai nhựa của học sinh thu được bảng sau

Số vỏ chai nhựa	[1; 5]	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Tính giá trị trung bình số câu trả lời đúng.

Lời giải

Ta hiệu chỉnh bảng số liệu và tính giá trị đại diện, kết quả như bảng sau

Số vỏ chai nhựa	[0,5; 5,5)	[5,5; 10,5)	[10,5; 15,5)	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)
Giá trị đại diện	3	8	13	18	23
Số học sinh	53	82	48	39	18

Tổng số học sinh là 240.

Vậy giá trị trung bình là

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_k \cdot x_k}{n} \\
 &= \frac{53 \cdot 3 + 82 \cdot 8 + 48 \cdot 13 + 39 \cdot 18 + 18 \cdot 23}{240} \\
 &= 10,375.
 \end{aligned}$$

Dạng 2.2. Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$\dots$	$[a_i; a_{i+1})$	$\dots$	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k

Phương sai s^2 được tính như sau

- Bước 1: Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}; i = 1, 2, 3, \dots, k$.
- Bước 2: Tính $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.
- Bước 3: $\bar{x} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_k \cdot x_k}{n}$.
- Bước 4: $s^2 = \frac{m_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + m_k \cdot (x_k - \bar{x})^2}{n}$.
Hoặc $s^2 = \frac{1}{n}(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \dots + m_k \cdot x_k^2) - \bar{x}^2$.

Ví dụ 1. Cân nặng (kg) của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau

Cân nặng (kg)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số cây giống	6	12	19	9	4

Lời giải

Ta có giá trị đại diện được thể hiện trong bảng sau

Cân nặng (kg)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Giá trị đại diện	5	7	9	11	13
Số cây giống	6	12	19	9	4

Cỡ mẫu $n = 50$.

Số trung bình:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n} \\ &= \frac{6 \cdot 5 + 12 \cdot 7 + 19 \cdot 9 + 9 \cdot 11 + 4 \cdot 13}{50} \\ &= 8,72.\end{aligned}$$

Phương sai:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{n}(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \cdots + m_k \cdot x_k^2) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{50}(6 \cdot 5^2 + 12 \cdot 7^2 + 19 \cdot 9^2 + 9 \cdot 11^2 + 4 \cdot 13^2) - 8,72^2 \\ &= 4,8016.\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Thống kê điểm trung bình của hai lớp 12A và 12B được cho ở bảng sau

Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Số học sinh lớp 12A	1	0	11	22	6
Số học sinh lớp 12B	0	6	8	14	12

Nếu so sánh phương sai thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

Lời giải

Ta có bảng thống kê điểm trung bình theo giá trị đại diện như sau

Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Số học sinh lớp 12A	1	0	11	22	6
Số học sinh lớp 12B	0	6	8	14	12

- Xét mẫu số liệu lớp 12A:

Cỡ mẫu: $n_1 = 40$.

Số trung bình:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_k \cdot x_k}{n_1} \\ &= \frac{1 \cdot 5,5 + 0 \cdot 6,5 + 11 \cdot 7,5 + 22 \cdot 8,5 + 6 \cdot 9,5}{40} \\ &= 8,3.\end{aligned}$$

Phương sai:

$$\begin{aligned}s_1^2 &= \frac{1}{n_1}(m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \cdots + m_k \cdot x_k^2) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{40}(1 \cdot 5,5^2 + 0 \cdot 6,5^2 + 11 \cdot 7,5^2 + 22 \cdot 8,5^2 + 6 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 \\ &= 0,61.\end{aligned}$$

- Xét mẫu số liệu lớp 12B:

Cỡ mẫu: $n_2 = 40$.

Số trung bình:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + \cdots + m_k \cdot y_k}{n_2} \\ &= \frac{0 \cdot 5,5 + 6 \cdot 6,5 + 8 \cdot 7,5 + 14 \cdot 8,5 + 12 \cdot 9,5}{40} \\ &= 8,3.\end{aligned}$$

Phương sai:

$$\begin{aligned}s_2^2 &= \frac{1}{n_2}(m_1 \cdot y_1^2 + m_2 \cdot y_2^2 + \cdots + m_k \cdot y_k^2) - \bar{y}^2 \\ &= \frac{1}{40}(0 \cdot 5,5^2 + 6 \cdot 6,5^2 + 8 \cdot 7,5^2 + 14 \cdot 8,5^2 + 12 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 \\ &= 1,06.\end{aligned}$$

Vì $s_1^2 < s_2^2$ nên điểm trung bình của học sinh lớp 12B phân tán ít hơn điểm trung bình của học sinh lớp 12A.

Ví dụ 3. Tuổi thọ của một số linh kiện điện tử (đơn vị: năm) được sản xuất bởi hai phân xưởng được cho như sau

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

Tính phương sai của mỗi mẫu số liệu ghép nhóm và nhận xét về độ phân tán của tuổi thọ các linh kiện điện tử được sản xuất bởi mỗi phân xưởng.

Lời giải

Ta có bảng thống kê điểm trung bình theo giá trị đại diện như sau

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Giá trị đại diện	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

- Xét mẫu số liệu phân xưởng 1:

Tổng số linh kiện: $4 + 9 + 13 + 8 + 6 = 40$.

$$\text{Giá trị trung bình } \bar{x}_1 = \frac{1,75 \cdot 4 + 2,25 \cdot 9 + 2,75 \cdot 13 + 3,25 \cdot 8 + 3,75 \cdot 6}{4 + 9 + 13 + 8 + 6} = \frac{223}{80}.$$

Phương sai:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{40}(1,75^2 \cdot 4 + 2,25^2 \cdot 9 + 2,75^2 \cdot 13 + 3,25^2 \cdot 8 + 3,75^2 \cdot 6) - \left(\frac{223}{80}\right)^2 \\ &= \frac{2271}{6400} \approx 0,354. \end{aligned}$$

- Xét mẫu số liệu phân xưởng 2:

Tổng số linh kiện: $2 + 8 + 20 + 7 + 3 = 40$.

$$\text{Giá trị trung bình: } \bar{x}_2 = \frac{1,75 \cdot 2 + 2,25 \cdot 8 + 2,75 \cdot 20 + 3,25 \cdot 7 + 3,75 \cdot 3}{2 + 8 + 20 + 7 + 3} = \frac{221}{80}.$$

Phương sai:

$$\begin{aligned} s_2^2 &= \frac{1}{40}(1,75^2 \cdot 2 + 2,25^2 \cdot 8 + 2,75^2 \cdot 20 + 3,25^2 \cdot 7 + 3,75^2 \cdot 3) - \left(\frac{221}{80}\right)^2 \\ &= \frac{1399}{6400} \approx 0,218. \end{aligned}$$

Vì $s_1^2 > s_2^2$ nên số linh kiện phân xưởng 2 phân tán nhiều hơn số linh kiện phân xưởng 1.

□ Dạng 2.3. Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm và ý nghĩa

Phương pháp:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Phương sai s^2 được tính như sau:

- Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}; i = 1, 2, 3, \dots, k$.
- Tính $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.
- Tính $\bar{x} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_k \cdot x_k}{n}$.
- Tính phương sai

$$s^2 = \frac{m_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + m_k \cdot (x_k - \bar{x})^2}{n}.$$

Hoặc

$$s^2 = \frac{1}{n} (m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \dots + m_k \cdot x_k^2) - (\bar{x})^2.$$

- Tính độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa:

Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng xấp xỉ nhau, mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán so với số trung bình cộng của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

Ví dụ 1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố.

Độ tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)
Giá trị đại diện	25	35	45	55	65	75
Số cư dân	25	20	20	15	14	6

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Số trung bình cộng là

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N} \\ &= \frac{25 \cdot 25 + 20 \cdot 35 + 20 \cdot 45 + 15 \cdot 55 + 14 \cdot 65 + 6 \cdot 75}{100} \\ &= 44,1. \end{aligned}$$

Phương sai là

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (x_k - \bar{x})^2}{N} \\ &= \frac{25 (25 - \bar{x})^2 + 20 (35 - \bar{x})^2 + 20 (45 - \bar{x})^2 + 15 (55 - \bar{x})^2 + 14 (65 - \bar{x})^2 + 6 (75 - \bar{x})^2}{100} \\ &= 244,2. \end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{s^2} \approx 15,6$.

Ví dụ 2. Cho hai mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị là triệu đồng)

Công ty A (đơn vị: triệu đồng)		Công ty B (đơn vị: triệu đồng)	
Mức lương	Số lượng nhân viên	Mức lương	Số lượng nhân viên
[10; 15)	15	[10; 15)	25
[15; 20)	18	[15; 20)	15
[20; 25)	10	[20; 25)	7
[25; 30)	10	[25; 30)	5
[30; 35)	5	[30; 35)	5
[35; 40)	2	[35; 40)	3

- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm lần lượt biểu diễn mức lương của hai công ty A, B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- Công ty nào có mức lương đồng đều hơn?

Lời giải

- Xét mức lương tại công ty A .

Số trung bình của công ty A là

$$\bar{x}_A = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} = \frac{62}{3} \approx 20,7(\text{triệu đồng}).$$

Phương sai của công ty A là

$$s_A^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = \frac{1769}{36}.$$

Độ lệch chuẩn của công ty A là $s_A = \sqrt{s_A^2} \approx 7$ (triệu đồng).

Xét mức lương tại công ty B .

Số trung bình của công ty B là

$$\bar{x}_B = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} = \frac{229}{12} \approx 19,1(\text{triệu đồng}).$$

Phương sai của công ty B là

$$s_B^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = \frac{8339}{144}.$$

Độ lệch chuẩn của công ty B là $s_B = \sqrt{s_B^2} \approx 7,6$ (triệu đồng).

- Vì độ lệch chuẩn của công ty A nhỏ hơn độ lệch chuẩn của công ty B và lương bình quân của cả hai công ty xấp xỉ nhau nên công ty A có mức lương đồng đều hơn.

Dạng 2.4. Sử dụng phương sai, độ lệch chuẩn đo độ rủi ro**Phương pháp:**

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$\dots$	$[a_i; a_{i+1})$	$\dots$	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k

Phương sai s^2 được tính như sau:

- Tính giá trị đại diện mỗi nhóm $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}; i = 1, 2, 3, \dots, k$.
- Tính $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.
- Tính $\bar{x} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_k \cdot x_k}{n}$.
- Tính phương sai

$$s^2 = \frac{m_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + m_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + m_k \cdot (x_k - \bar{x})^2}{n}.$$

Hoặc

$$s^2 = \frac{1}{n} (m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \dots + m_k \cdot x_k^2) - (\bar{x})^2.$$

- Tính độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa:

Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng xấp xỉ nhau, mẫu số liệu nào có phương sai và độ lệch chuẩn cao hơn thì mức độ rủi ro lớn hơn.

Ví dụ 1. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị là nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	9	8	11	13	9
Cổ phiếu B	14	6	5	20	5

- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai mã cổ phiếu A, B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- So sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và B.

Lời giải

a) Số trung bình của cổ phiếu A là

$$\bar{x}_A = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} = 125,2.$$

Phương sai của cổ phiếu A là

$$s_A^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = 7,4.$$

Độ lệch chuẩn của cổ phiếu A là $s_A = \sqrt{s_A^2} \approx 2,7$.

Số trung bình của cổ phiếu B là $\bar{x}_B = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} = 124,8$.

Phương sai của cổ phiếu B là

$$s_B^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = 8,1.$$

Độ lệch chuẩn của cổ phiếu B là $s_B = \sqrt{s_B^2} \approx 2,9$.

b) Vì độ lệch chuẩn về giá của cổ phiếu A nhỏ hơn độ lệch chuẩn về giá của cổ phiếu B nên cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Ví dụ 2. Chỉ số P/B (viết tắt của từ Price to book ratio) là một chỉ số tài chính quan trọng, được sử dụng để so sánh giữa giá của cổ phiếu với giá trị ghi sổ của cổ phiếu đó. Khi chỉ số P/B cao, nghĩa là thị trường đang có nhiều kỳ vọng đối với cổ phiếu này, doanh nghiệp có tiềm năng phát triển tốt trong tương lai. Bảng sau thống kê chỉ số P/B của hai mã cổ phiếu A và B trong 10 năm giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Cổ phiếu A	1	0	4	2	2	1
Cổ phiếu B	1	2	1	2	3	1

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai mã cổ phiếu A, B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) So sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và B ? Biết rằng các chỉ số tài chính còn lại của hai cổ phiếu đó là xấp xỉ nhau.

Lời giải

a) Số trung bình của cổ phiếu A là

$$\bar{x}_A = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} = 6,4.$$

Phương sai của cổ phiếu A là

$$s_A^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = 7,2.$$

Độ lệch chuẩn của cổ phiếu A là $s_A = \sqrt{s_A^2} \approx 2,7$.

Số trung bình của cổ phiếu B là

$$\bar{x}_B = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} = 6,4.$$

Phương sai của cổ phiếu B là

$$s_B^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = 9,6.$$

Độ lệch chuẩn của cổ phiếu B là $s_B = \sqrt{s_B^2} \approx 3,1$.

b) Vì độ lệch chuẩn về chỉ số P/B của cổ phiếu A nhỏ hơn độ lệch chuẩn của cổ phiếu B nên cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

C. LUYỆN TẬP

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Cự li (m)	[19; 19,5)	[19,5; 20)	[20; 20,5)	[20,5; 21)	[21; 21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 100. B. 20,015. C. 2001,5. D. 2.

Câu 2. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Số ngày giao dịch của cổ phiếu A	8	9	12	10	11

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 50. B. 12528. C. 125,28. D. 10.

Câu 3. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3,0)	[3,0; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 3,39. B. 11,62. C. 0,13. D. 0,36.

Câu 4. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 31,77. B. 31,25. C. 31,44. D. 32,25.

Câu 5. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số lần	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 5,98. B. 6. C. 2,44. D. 2,5.

Câu 6. Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau

Độ dài quãng đường (km)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	[250; 300)
Số ngày	5	10	9	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 55,68. B. 56,67. C. 3100. D. 3000.

Câu 7. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A , B cho kết quả như sau

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro đầu tư các lĩnh vực có giá trị trung bình tiền lãi gần bằng nhau. Lĩnh vực nào có phương sai, độ lệch chuẩn tiền lãi cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

- A. Lĩnh vực A có độ rủi ro bằng lĩnh vực B .
 B. Lĩnh vực A có độ rủi ro cao hơn lĩnh vực B .
 C. Lĩnh vực A có độ rủi ro thấp hơn lĩnh vực B .
 D. Không so sánh được.

Câu 8. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

- A. Cổ phiếu A có độ rủi ro bằng cổ phiếu B.
- B. Cổ phiếu A có độ rủi ro cao hơn cổ phiếu B.
- C. Cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B.
- D. Không so sánh được.

Câu 9. Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên nam Dũng được lần lượt thống kê trong các bảng sau (đơn vị: mét)

Nhóm	[6,22; 6,46)	[6,46; 6,70)	[6,70; 6,94)	[6,94; 7,18)	[7,18; 7,42)	
Tần số	3	7	5	20	5	$n = 40$

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét)?

- A. 6,92.
- B. 7,34.
- C. 9,86.
- D. 5,85.

Câu 10. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng sau.

Nhóm	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)	
Tần số	4	14	8	10	6	2	$n = 44$

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

- A. 53,2.
- B. 57,34.
- C. 49,86.
- D. 65,85.

Câu 11. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7; 3)	[3; 3,3)	[3,3; 3,6)	[3,6; 3,9)	[3,9; 4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

- A. 3,39.
- B. 11,62.
- C. 0,1314.
- D. 0,36.

Câu 12. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 31,77.
- B. 31,25.
- C. 31,44.
- D. 32,25.

Câu 13. Một mẫu số liệu có bảng tần số ghép nhóm như sau

Nhóm	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)
Tần số	4	8	13	6	4

Phương sai của mẫu số liệu bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 21,01. B. 20,01. C. 22. D. 23.

Câu 14. Khảo sát thời gian tự học bài ở nhà của học sinh khối 9 ở trường X, ta thu được bảng sau

Thời gian(phút)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)
Số học sinh	9	10	9	15	7

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm bằng

- A. 1602. B. 1601,64. C. 1601,9. D. 1603.

Câu 15. Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian(phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 2,93. B. 8,56. C. 8,59. D. 3,01.

Câu 16. Một câu lạc bộ thể dục thể thao đã ghi lại số giờ các thành viên của mình sử dụng cơ sở vật chất của câu lạc bộ để tập luyện trong một tháng như sau

Thời gian (giờ)	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)	[21; 25)
Tần số (số người)	10	14	31	2	5	23

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 6,9. B. 9,6. C. 6,96. D. 7,96.

Câu 17. Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau

Số giờ nắng	[80; 98)	[98; 116)	[116; 134)	[134; 152)	[152; 170)
Số năm	3	6	3	5	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

- A. 23,795. B. 24,795. C. 23,794. D. 23,796.

Câu 18. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Số ngày giao dịch của cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Số ngày giao dịch của cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Chọn khẳng định đúng.

- A. Giá đóng cửa của cổ phiếu A ít phân tán hơn giá đóng cửa của cổ phiếu B.
- B. Giá đóng cửa của cổ phiếu A ít phân tán hơn giá đóng cửa của cổ phiếu B.
- C. Giá đóng cửa của hai cổ phiếu A và B có độ phân tán như nhau.
- D. Phương sai của mẫu số liệu của cổ phiếu A lớn hơn phương sai của mẫu số liệu của cổ phiếu B.

Câu 19. Trong 30 ngày, một nhà đầu tư đã theo dõi giá cổ phiếu của hai công ty G và H vào phiên mở cửa mỗi ngày. Thông tin được ghi lại ở hai bảng dưới đây

Giá cổ phiếu của công ty G

Giá (nghìn đồng)	[50; 52]	[52; 54]	[54; 56]	[56; 58]	[58; 60]
Tần số	3	7	9	8	3

Giá cổ phiếu của công ty H

Giá (nghìn đồng)	[40; 42]	[42; 44]	[44; 46]	[46; 48]	[48; 50]
Tần số	6	7	5	7	5

Chọn câu trả lời đúng nhất biết độ lệch chuẩn càng cao thì tỷ lệ rủi ro càng lớn:

- A. Công ty G rủi ro hơn.
- B. Công ty H rủi ro hơn.
- C. Cả hai đều rủi ro như nhau.
- D. Cả hai công ty đều không rủi ro.

Câu 20. Anh An đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B. Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

Đáp án nào sau đây đúng?

- A. Đầu tư ở lĩnh vực A rủi ro hơn.
- B. Đầu tư ở lĩnh vực B rủi ro hơn.
- C. Độ lệch chuẩn ở lĩnh vực A lớn hơn 10..
- D. Đầu tư ở hai lĩnh vực A và B rủi ro như nhau.

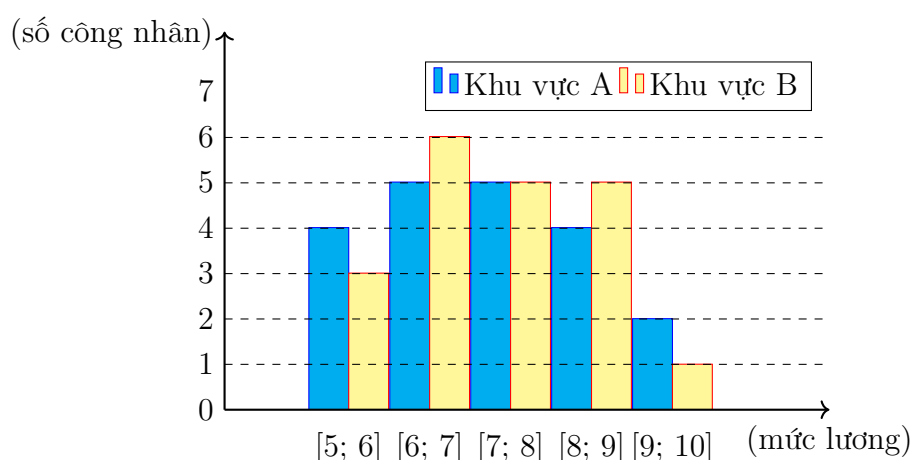
Câu 21. Một vận động viên luyện tập chạy cự li 100 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau.

Thời gian (giây)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11)
Số vận động viên	3	7	8	2

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2)

- A. 1,03. B. 0,03. C. 2,90. D. 1,86.

Câu 22. Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B.



Tổng độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm ở 2 khu vực gần bằng với số nào sau đây nhất.

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 23. Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm dùng máy để đo (chính xác đến 0,001 mm) độ dày của một chi tiết máy. Kết quả đo một số sản phẩm được thống kê trong bảng sau:

Độ dày (mm)	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)	[21; 22)	[22; 23)
Tần số	3	7	23	25	2

Nhận xét nào sau đây sai?

- A. Độ lệch chuẩn của mẫu lớn hơn 2.
 B. Số trung bình của mẫu số liệu gần bằng với 20,77.
 C. Độ dày của chi tiết máy không bị sai lệch nhiều.
 D. Cỡ mẫu của mẫu số liệu là 60.

Câu 24. Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau:

Lợi nhuận	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số tháng	2	4	8	4	2

Bảng 1. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

Lợi nhuận	[510; 520)	[520; 530)	[530; 540)	[540; 550)	[550; 560)
Số tháng	4	3	3	3	4

Bảng 2. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Đáp án nào dưới đây đúng nhất?

- A. Không nên chỉ dựa vào độ lệch chuẩn để đánh giá mức độ rủi ro.
- B. Lợi nhuận trung bình mỗi tháng của nhà đầu tư nhỏ cao hơn nhà đầu tư lớn.
- C. Độ lệch chuẩn của nhà đầu tư lớn cao hơn 14.
- D. Nhà đầu tư lớn có mức độ rủi ro cao hơn.

1. A	2. B	3. B	4. C	5. B	6. B	7. A	8. B	9. C	10. C
11. B	12. A	13. A	14. C	15. A	16. D	17. C	18. A	19. B	20. B
21. C	22. B	23. B	24. A	25. B	26. C	27. C	28. B	29. A	30. A
31. C	32. A	33. D	34. C	35. A	36. A	37. B	38. A	39. A	40. A
41. A									

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Số khách hàng mua bảo hiểm ở từng độ tuổi được thống kê trong bảng số liệu ghép nhóm sau:

Độ tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số khách hàng	4	6	10	7	3

Khi đó

- Giá trị đại diện của nhóm [20; 30) là 25.
- Giá trị đại diện của nhóm [60; 70) là 70.
- Công thức tính độ tuổi bình quân của khách hàng mua bảo hiểm trong bảng thống kê là: $\bar{x} = \frac{20 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 40 \cdot 10 + 50 \cdot 7 + 60 \cdot 3}{30}$.
- Độ tuổi trung bình (làm tròn đến hàng phần trăm) của khách hàng mua bảo hiểm là 44,67.

Câu 2. Xét mẫu dữ liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau với $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\dots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Khi đó

- Giá trị đại diện của $[u_2; u_3)$ là $c_2 = \frac{u_2 + u_3}{2}$.
- Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\bar{x} = \frac{1}{n} (c_1 + c_2 + \dots + c_k)$.
- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s^2 = \frac{1}{n} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2]$.
- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s^2 = \frac{1}{n} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2) - \bar{x}$.

Câu 3. Cho mẫu số liệu dưới dạng bảng sau

Số câu trả lời đúng	[16; 21)	[21; 26)	[26; 31)	[31; 36)	[36; 41)	$N = 40$
Tần số	4	6	8	18	4	

Khi đó

- Giá trị đại diện của lớp [36; 41) là 38,5.
- Công thức tính số trung bình là $\bar{x} = \frac{18,5 \cdot 4 + 23,5 \cdot 6 + 28,5 \cdot 8 + 33,5 \cdot 18 + 38,5 \cdot 4}{40}$.
- Số trung bình là 30.
- Phương sai của mẫu số liệu là $S^2 = 32,75$.

Câu 4. Số lượng khách hàng nữ mua hàng thời trang trong một ngày của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Khoảng tuổi	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	2

Khi đó

- Giá trị đại diện của nhóm $[30; 40)$ là 35.
- Cỡ mẫu là $n = 20$.
- Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 42,08 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 129,99 (làm tròn đến hàng phần trăm).

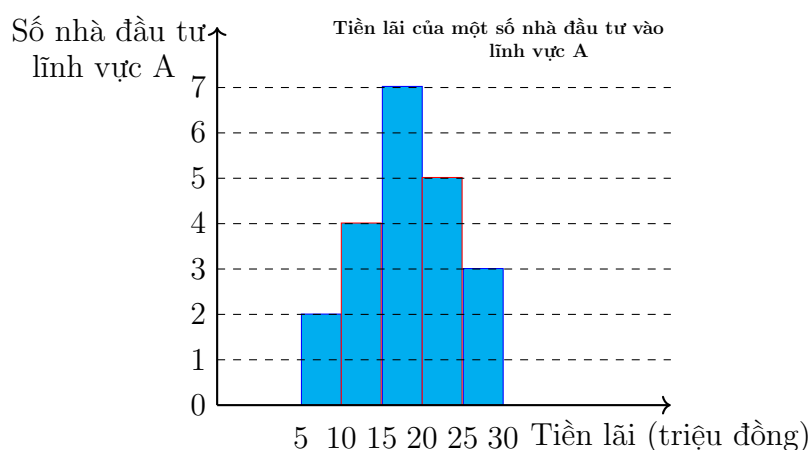
Câu 5. Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

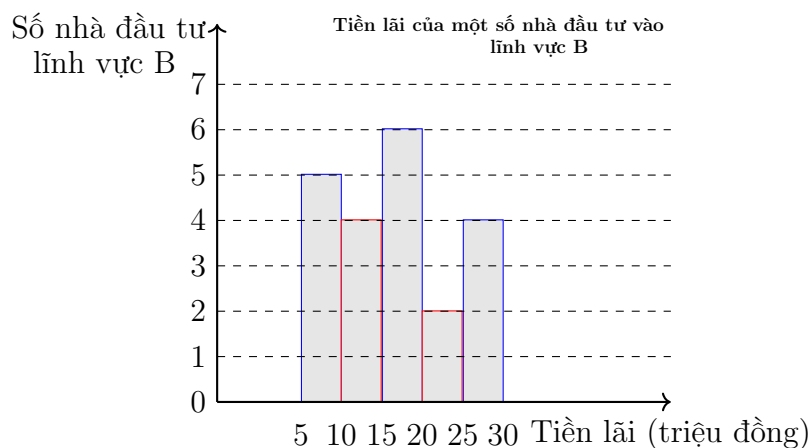
Thời gian (phút)	[0,5; 10,5)	[10,5; 20,5)	[20,5; 30,5)	[30,5; 40,5)	[40,5; 50,5)
Số học sinh lớp 11A	2	10	6	4	3
Số học sinh lớp 11B	3	8	10	2	4

Khi đó

- Phương sai của mẫu số liệu lớp 11A là 133,44 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 11A là 11,77 (làm tròn đến hàng phần trăm)..
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 11B là 11,55 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì thời gian để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi của lớp 11A ít phân tán hơn lớp 11B.

Câu 6. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả bằng biểu đồ dưới đây





Khi đó

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu số nhà đầu tư vào lĩnh vực A là 5,83 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu số nhà đầu tư vào lĩnh vực B là 7,01 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Về trung bình, đầu tư vào lĩnh vực B đem lại tiền lãi cao hơn lĩnh vực A .
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực A có xu hướng phân tán rộng hơn so với tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực B .

Câu 7. Bác sĩ A điều trị 18 bệnh nhân mỡ máu bằng cách xét nghiệm Cholesterol toàn phần trong buổi sáng điều trị như sau

3,8 4,0 3,8 4,2 4,3 4,5 4,1 4,6 4,8

5,0 5,2 5,1 4,7 5,3 5,6 5,8 5,6 4,4

Khi đó

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên bảng 1, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên bảng 0,61 do bác sĩ A điều trị.
- Bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[3; 7,4; 14]$ và độ dài mỗi nhóm bằng 0,44 do bác sĩ A điều trị được thống kê dưới đây

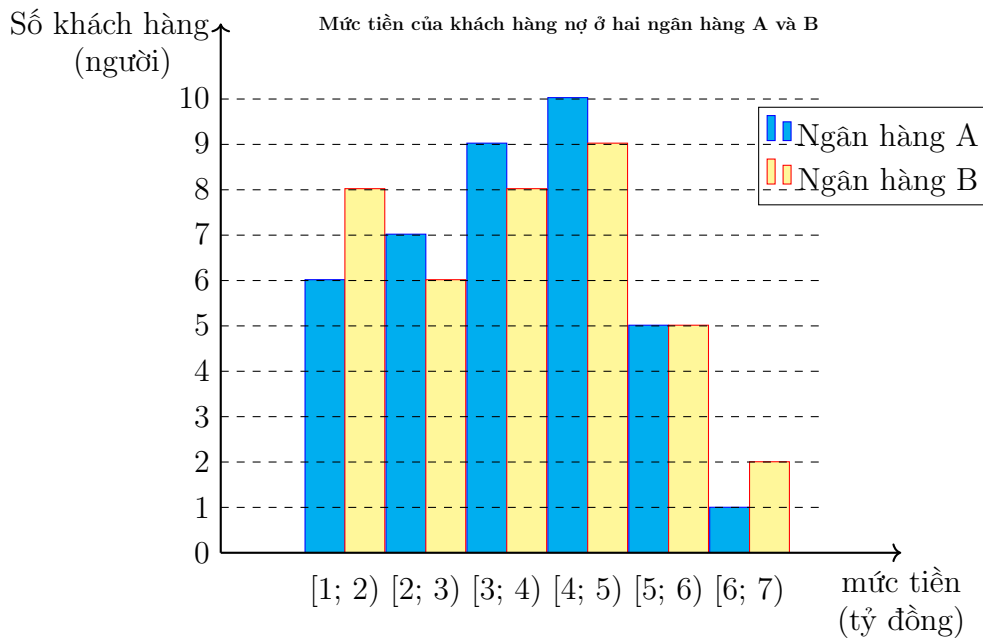
Chỉ số Cholesterol toàn phần do bác sĩ A điều trị	$[3; 7,4; 14]$	$[4,14; 4,58]$	$[4,58; 5,02]$	$[5,02; 5,46]$
Số bệnh nhân	3	5	6	4

- Giá trị độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đầu tiên là $[3; 7,4; 14]$ và độ dài mỗi nhóm bằng 0,44 do bác sĩ A điều trị là 0,58.

- d) Biết rằng bác sĩ B cũng điều trị 18 bệnh nhân trên với nhóm đầu tiên là $[3; 7,4; 14]$ và độ dài mỗi nhóm bằng 0,44 được thống kê dưới đây:

Chỉ số Cholesterol toàn phần do bác sĩ B điều trị	$[3; 7,4; 14]$	$[4,14; 4,58]$	$[4,58; 5,02]$	$[5,02; 5,46]$
Số bệnh nhân	4	5	6	3

Câu 8. Biểu đồ dưới đây biểu thị kết quả thu thập được về mức tiền (đơn vị: tỷ đồng) của một số khách hàng nợ ở hai ngân hàng A và B .



Khi đó

- a) Bảng giá trị đại diện cho mỗi nhóm và bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu tương ứng với biểu đồ trên

Mức tiền đại diện (tỷ đồng)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)
Số khách hàng ngân hàng A	6	7	9	5	4	3
Số khách hàng ngân hàng B	7	5	6	4	3	2

- b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của ngân hàng A bằng $\frac{661}{361}$.
- c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của ngân hàng B bằng $\frac{3221}{1444}$.
- d) Người ta dùng độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của số tiền khách hàng nợ ngân hàng. Ngân hàng nào có độ lệch chuẩn cao hơn thì có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của ngân hàng A cao hơn ngân hàng B .

1. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	2. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	3. ☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
4. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	5. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	6. ☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S

7. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ

8. ☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Bảng thống kê sau cho biết điện năng tiêu thụ của 30 hộ ở một khu dân cư trong một tháng như sau (đơn vị: kW):

50	47	30	65	63	70	38	34	48	53	33	39	32	40	50
55	50	61	37	37	43	35	65	60	31	33	41	45	55	59

Chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm 8 nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 5 như sau:

Giá trị	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)
Số lượng	6	5	3	x	4	3	y	z

Tính giá trị của $S = 43x + 47y + 1000z$.

KQ:

Câu 2. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 3. Điều tra 42 học sinh của một lớp 12 về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng thống kê sau

Số giờ tự học	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)
Số học sinh	8	10	12	9	3

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

KQ:

Câu 4. Điều tra 42 học sinh của một lớp 12 về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng thống kê sau

Số giờ tự học	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)
Số học sinh	8	10	12	9	3

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 5. Thống kê điểm trắc nghiệm môn Tiếng Anh của 40 học sinh, người ta có bảng sau

Điểm	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]
Số học sinh	3	5	5	8	7	5	3	4

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 6. Thống kê doanh thu (đơn vị: triệu đô la) của 20 công ty sản xuất ô tô trong năm 2023, người ta có bảng sau

Doanh thu	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100]
Số công ty	5	5	6	2	2

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 7. Điều tra về số tiền mua sách (đơn vị: nghìn đồng) trong một năm của 50 học sinh trong một trường THPT, người ta có bảng sau

Số tiền mua sách	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000)
Số học sinh	29	11	3	4	3

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 8. Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau

42	43,4	43,4	46,5	46,7	46,8	47,5	47,7	48,1	48,4
50,8	52,1	52,7	53,9	54,8	55,6	57,5	59,6	60,3	61,1

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [42; 46) và độ dài mỗi nhóm bằng 4 (làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 9. Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	7
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	18	14

Gọi phương sai đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở địa điểm A và B lần lượt là S_A^2 và S_B^2 . Tính $|S_A^2 - S_B^2|$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 10. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau.

Thời gian (Phút)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Số học sinh trường X	8	10	13	10	9
Số học sinh trường Y	4	12	17	14	3

Gọi độ lệch chuẩn thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 ở trường X và Y lần lượt là S_X và S_Y . Tính $S_X - S_Y$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 11. Kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên HUY được thống kê trong bảng sau (đơn vị: mét):

Nhóm	Tần số
[6,22; 6,46)	3
[6,46; 6,70)	7
[6,70; 6,94)	5
[6,94; 7,18)	20
[7,18; 7,42)	5
	$n = 40$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) KQ:

Câu 12. Anh An đầu tư số tiền sử dụng vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B . Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo từng lĩnh vực cho kết quả như sau

Số tiền (triệu đồng)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	20	5	10	5	20
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	5	10	30	10	5

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi bắt đầu tư vào từng lĩnh vực A, B . Kí hiệu $\Delta = S_A - S_B$ nếu $\Delta > 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực A “rủi ro” hơn, ngược lại nếu $\Delta < 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực B “rủi ro” hơn. Tính $\Delta = S_A - S_B$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). KQ:

Câu 13. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi bắt đầu tư vào từng lĩnh vực A, B . Kí hiệu $\Delta = S_A - S_B$ nếu $\Delta > 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực A “rủi ro” hơn, ngược lại nếu $\Delta < 0$ thì đầu tư vào lĩnh vực B “rủi ro” hơn. Tính $\Delta = S_A - S_B$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

1.	3270	2.	9,4	3.	1,431	4.	1,43	5.	405
6.	24,9	7.	242	8.	26,6	9.	1,91	10.	0,29
11.	0,26	12.	3,42	13.	-0,78				