Câu 1: **(THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB=AC=AD=1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

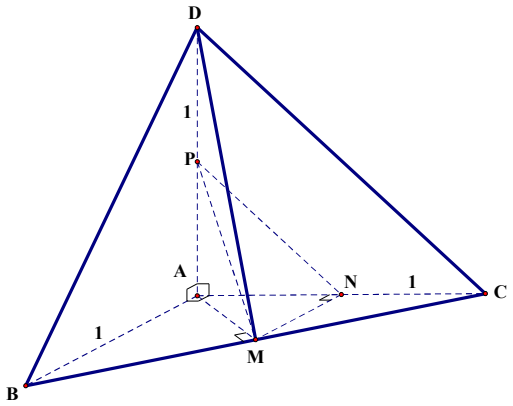
A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D

CÁCH 1. Vì $\left.\begin{matrix} AB\perp AC \\ AB\perp AD \end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp (ACD)\Rightarrow AB\perp CD$.

CÁCH 2.



Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.

Trong ΔABC, có $\begin{cases} MN\,//\,AB \\ MN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔACD, có $\begin{cases} NP\,//\,CD \\ NP=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔAMP, có $MP=\sqrt{AP^2+AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} MN\,//\,AB \\ NP\,//\,CD \end{cases}\Rightarrow (AB;CD)=(MN;NP)=\widehat{MNP}$

Áp dụng định lý Cosin cho ΔMNP, có

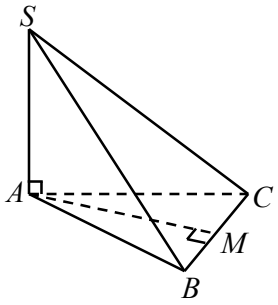
$$\cos\widehat{MNP}=\frac{NP^2+NM^2-MP^2}{2NP.NM}=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}}=0\Rightarrow \widehat{MNP}=90°$$

Hay $(AB;CD)=90°$.

Câu 2: **(THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\dfrac{a}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn D

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp SA \end{cases} \Rightarrow AM$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

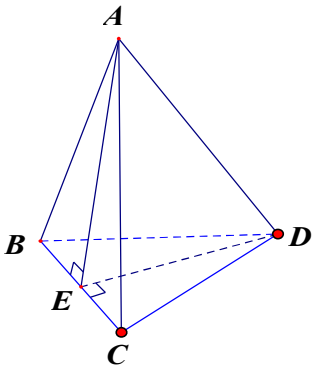
Do đó $AM = d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (ABC)$. **B.** $AC \perp BC$. **C.** $CD \perp (ABD)$. **D.** $BC \perp AD$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E là trung điểm của BC. Tam giác ABC cân nên $BC \perp AE$;

Tam giác DBC cân nên $BC \perp DE$. Do đó $BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp AD$.

Câu 4: **(THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Trong các khẳng định sau đây khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B Vẽ hình phản ví dụ minh họa C,D cho em nhé

A. Sai vì có thể cắt hoặc chéo nhau.

C. Sai vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau hoặc cắt nhau.

D. Sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.

Câu 5: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?

A. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là một hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa: Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều.

Câu 6: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp đều là hình chóp có chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

C. Hình chóp đều là tứ diện đều.

D. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều.

Lời giải

Chọn A

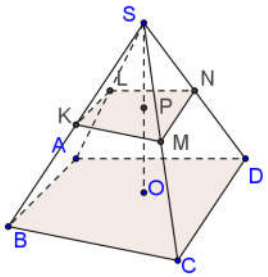
Dựa vào định nghĩa hình chóp đều và tính chất hình chóp đều ta chọn đáp án **A.**

Câu 7: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cắt hình chóp tứ giác bởi mặt phẳng vuông góc với đường cao của hình chóp thiết diện là hình gì?

A. Một hình bình hành. **B.** Một ngũ giác. **C.** Một hình tứ giác. **D.** Một hình tam giác.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng vuông góc với đường cao sẽ song song với đáy nên cắt hình chóp theo tứ giác đồng dạng với đáy.

Câu 8: (THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

B. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

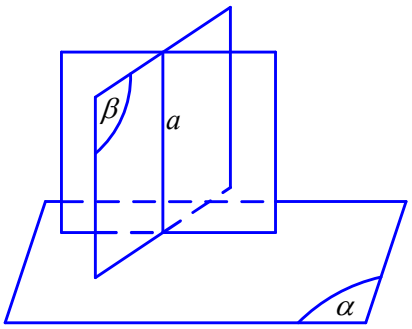
C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn A

Chỉ có A đúng còn lại B, C, D là sai.

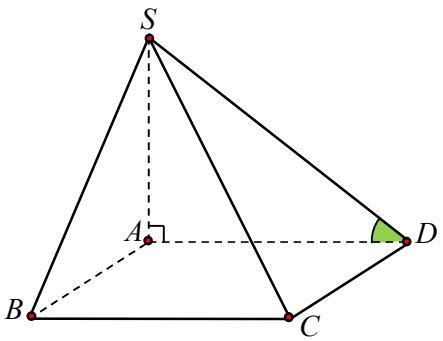


Câu 9: (THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-nawm-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=2a$, $SA=3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SAD}$. **B.** $\widehat{ASD}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{BSD}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SA\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow AD$ là hình chiếu vuông góc của SD xuống mặt $(ABCD)$.

$\Rightarrow\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SD,AD}\right)=\widehat{SDA}$.

Câu 1: (THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018) Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào định nghĩa hai đường thẳng vuông góc trong không gian ta suy ra đáp án C đúng.

Câu 2: (THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018) Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

A. 12. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Số vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là số các chỉnh hợp chập 2 của phần tử $\Rightarrow$ số vectơ là $A_4^2 = 12$.

Câu 3: (SGD Ninh Bình năm 2017-2018) Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

Lời giải

Chọn A

Theo lý thuyết.

Câu 4: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng này và mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a=0\Leftrightarrow m=0\Rightarrow y'=5>0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ (2m)^2-m(3m+5)\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m^2-5m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\leq m\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 5.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

Câu 6: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

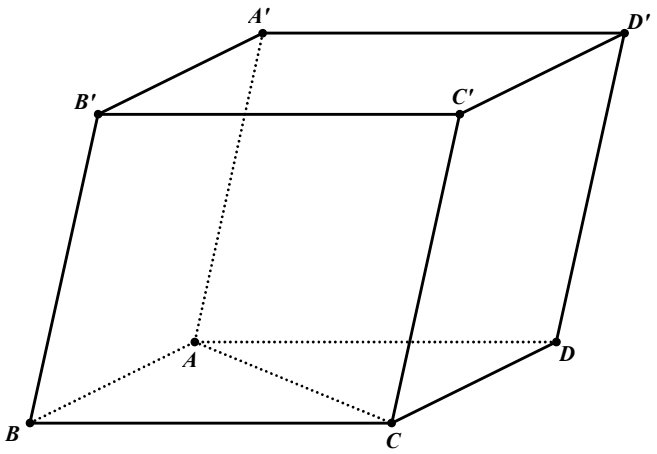
Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ.

Câu 7: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $BB'\perp BD$. **B.** $A'C'\perp BD$. **C.** $A'B\perp DC'$. **D.** $BC'\perp A'D$.

Lời giải

Chọn A



Vì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA$, $B'C'CB$ đều là hình thoi nên ta có

$AC\perp BD$ mà $AC\,//\,A'C'\Rightarrow A'C'\perp BD$ (B đúng).

$A'B\perp AB'$ mà $AB'\,//\,DC'\Rightarrow A'B\perp DC'$ (C đúng).

$BC'\perp B'C$ mà $B'C\,//\,A'D\Rightarrow BC'\perp A'D$ (D đúng).

Câu 8: (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể song song hoặc chéo nhau.

Đáp án C chỉ đúng trong mặt phẳng.

----------**HẾT**----------

Câu 9: **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Đáp án **A** sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

Đáp án **C** sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 10: **(THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A=(4;0;1)$ và $B=(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $3x-y-z=0$.

B. $3x+y+z-6=0$.

C. $3x-y-z+1=0$.

D. $6x-2y-2z-1=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$

(P) đi qua trung điểm M của AB. Tọa độ trung điểm $M(1;1;2)$

Vậy phương trình trung trực của đoạn thẳng AB là: $(P):3x-y-z=0$.

Câu 11: **(THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hiển nhiên **B** đúng.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, **A** sai.

Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b. Do đó, **C** sai.

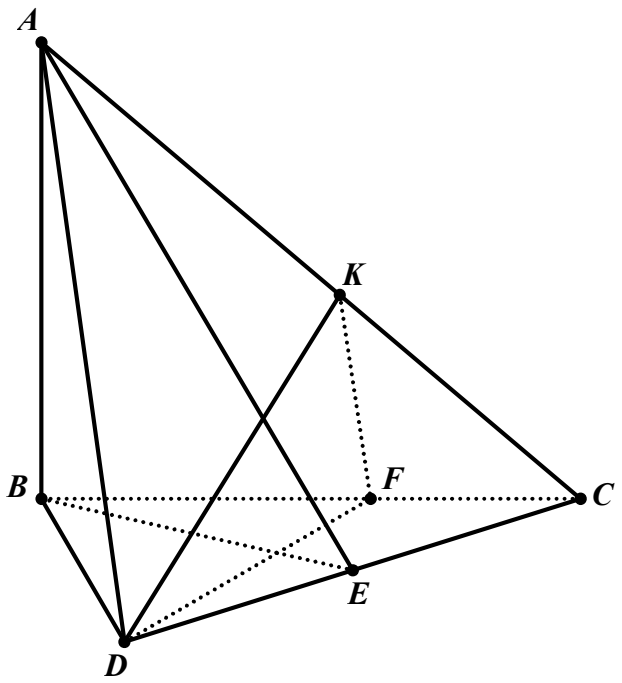
Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, **D** sai.

Câu 12: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau?

A. $(ABE)\perp(ADC)$. **B.** $(ABD)\perp(ADC)$. **C.** $(ABC)\perp(DFK)$. **D.** $(DFK)\perp(ADC)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) nên $AB\perp(DBC)$.

Ta có:

$\square$ $\begin{cases} CD\perp BE \\ CD\perp AB \end{cases}\Rightarrow CD\perp(ABE)\Rightarrow(ABE)\perp(ADC)$ nên **A** đúng.

$\square$ $\begin{cases} DF\perp BC \\ DF\perp AB \end{cases}\Rightarrow DF\perp(ABC)\Rightarrow(ABC)\perp(DFK)$ nên **C** đúng.

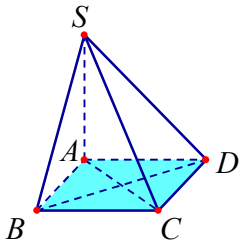
$\square$ $\begin{cases} AC\perp DK \\ AC\perp DF \end{cases}\Rightarrow AC\perp(DFK)\Rightarrow(DFK)\perp(ADC)$ nên **D** đúng.

Câu 1: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $AC \perp (SBD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $CD \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$+ \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$+ \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

$+ \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

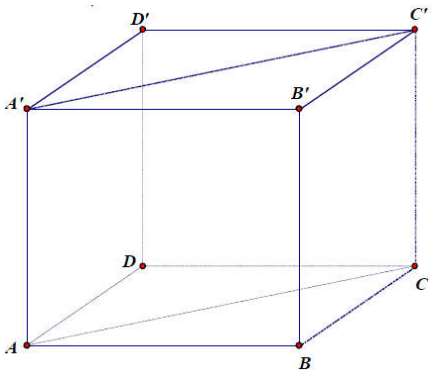
Suy ra: đáp án B sai.

Câu 2: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$.

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Do $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow (ACC'A') \perp (ABCD)$.

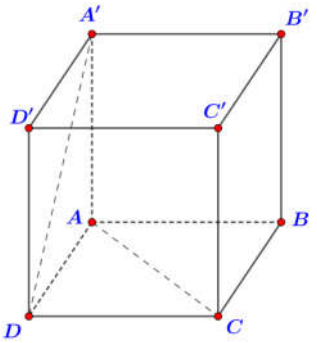
Câu 3: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;5;-7)$ là:

A. $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 5-t \\ z = -7+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = -5-t \\ z = 7+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+5t \\ z = 2-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 1+5t \\ z = -2-7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

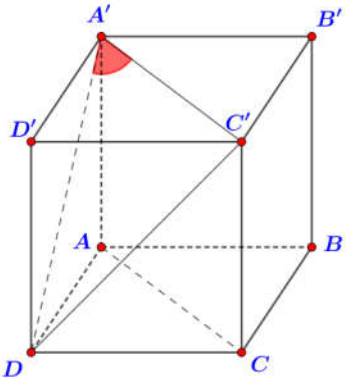
Câu 4: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left(\widehat{AC, A'D}\right) = \left(\widehat{A'C', A'D}\right) = \widehat{DA'C'} = 60°$.

Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

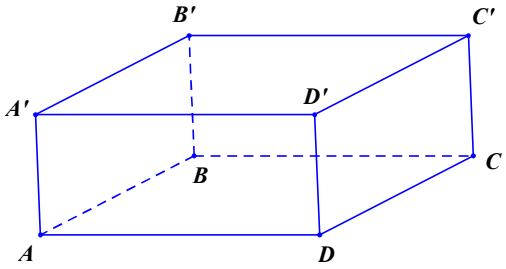
A. AC'. **B.** AB'. **C.** AD'. **D.** AA'.

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

A. AC'. **B.** AB'. **C.** AD'. **D.** AA'.

Lời giải

Chọn D



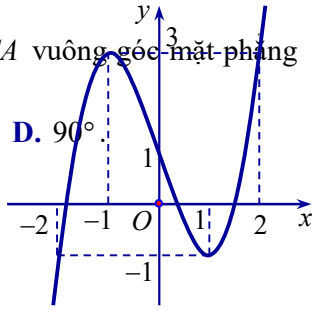
Ta có $d\big((ABCD),(A'B'C'D')\big)=AA'$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

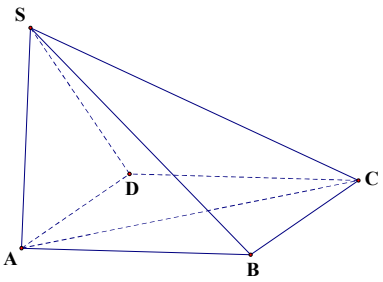
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.



Lời giải

Chọn C



Hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC. Do đó góc giữa SC và đáy là góc $\widehat{SCA}$.

Tam giác SAC có $SC=SA=a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân $\Rightarrow \widehat{SCA}=45°$.

Câu 5: Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**.

A. Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đương thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Câu 6: Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**.

A. Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đương thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn B

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau hoặc chéo nhau.

Câu 7: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

C. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 8: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

C. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải

Chọn C

C sai do b có thể nằm trong (P).

Câu 9: Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.

B. Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

C. Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Câu 10: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.

B. Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

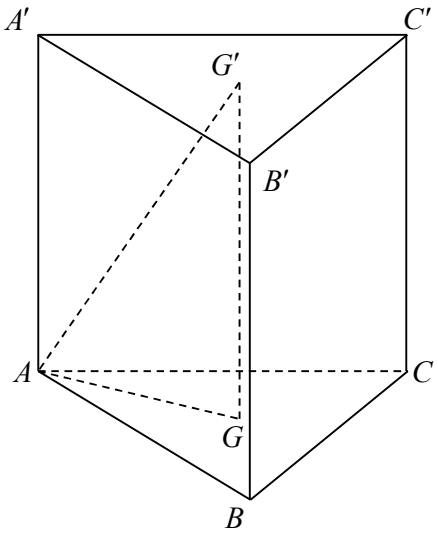
C. Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Lời giải

Chọn A

Câu 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ (tham khảo hình vẽ).

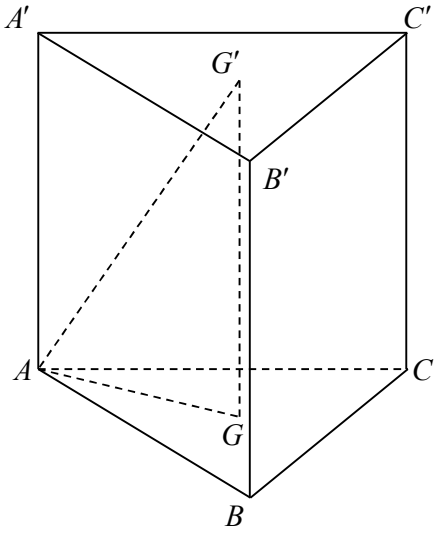


Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AGG') với hình lăng trụ đã cho là

A. Tam giác vuông. **B.** Tam giác cân.

C. Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ (tham khảo hình vẽ).



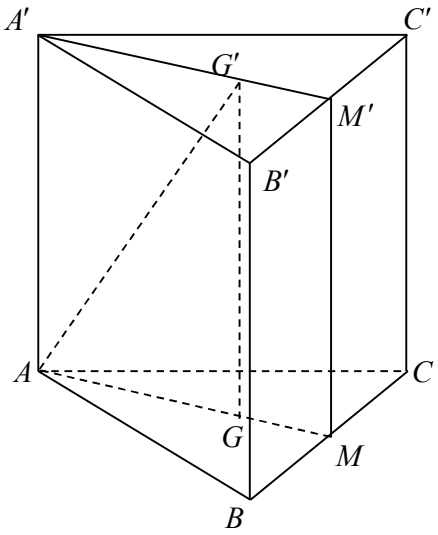
Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AGG') với hình lăng trụ đã cho là

A. Tam giác vuông. **B.** Tam giác cân.

C. Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

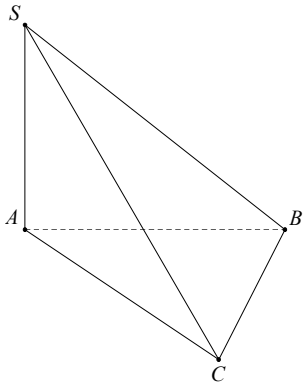
Lời giải

Chọn D



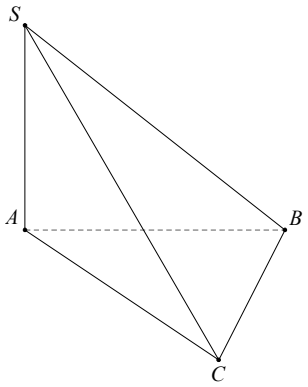
Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó thiết diện của lăng trụ tạo bởi mặt phẳng (AGG') là hình chữ nhật $AMM'A'$.

Câu 13: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.



A. Không tính được d. **B.** $d=8$. **C.** $d=6$. **D.** $d=10$.

Câu 14: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.



A. Không tính được d. **B.** $d=8$. **C.** $d=6$. **D.** $d=10$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết, tam giác ABC vuông tại B nên AB là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Vậy $d(SA;BC)=AB=6$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

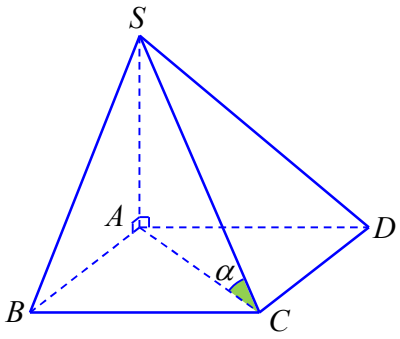
A. $\alpha=60°$. **B.** $\alpha=75°$. **C.** $\tan\alpha=1$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\alpha=60°$. **B.** $\alpha=75°$. **C.** $\tan\alpha=1$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\widehat{SCA}=\alpha$.

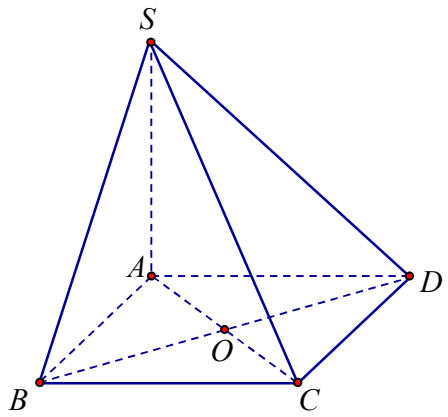
Tam giác SAC vuông tại A có $\tan\alpha=\dfrac{SA}{AC}$, với $AC=a\sqrt{2}$ thì $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến (SBD) bằng $\frac{6a}{7}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)?

A. $\frac{12a}{7}$. **B.** $\frac{3a}{7}$. **C.** $\frac{4a}{7}$. **D.** $\frac{6a}{7}$.

Lời giải

Chọn D



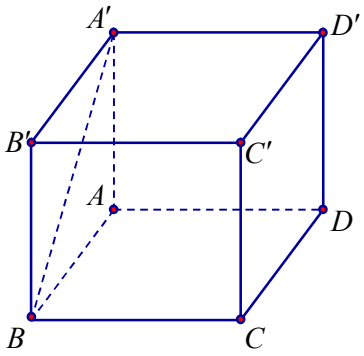
Do $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \cap BD = O$ là trung điểm của AC và $BD \Rightarrow d(C,(SBD)) = d(A,(SBD)) = \frac{6a}{7}$.

Câu 2: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Có $CD//AB \Rightarrow (BA',CD) = (BA',BA) = \widehat{ABA'} = 45°$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).

Câu 3: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc $(AB;SC)$ ta được kết quả:

Đề nghị sửa lời dẫn

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

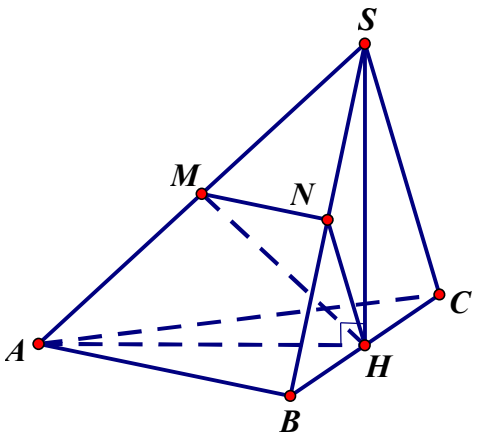
Lời giải

Chọn C

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), theo đầu bài $SA = SB = SC$ và tam giác ΔABC vuông cân tại A ta có H là trung điểm của BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB ta có: $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ HN \,//\, SC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa AB và SC là góc giữa MN và HN.

Xét tam giác ΔMNH ta có: $MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}; HN = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2}; MH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$ (Do ΔSHA vuông tại H)

$\Rightarrow$ tam giác ΔMNH là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNH} = 60°$. Vậy góc cần tìm là $60°$.

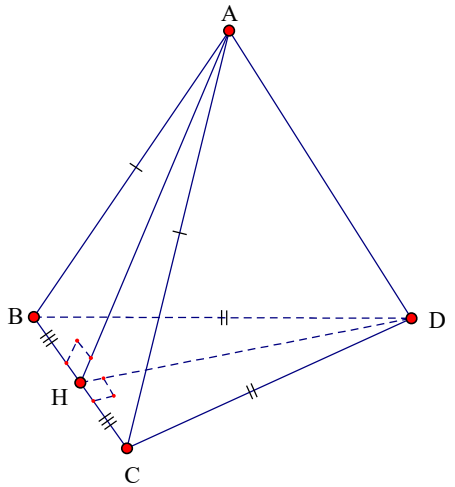


Câu 4: **(THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp AD$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DC \perp (ABC)$.

Lời giải

Chọn A



Theo đề bài ta có: ΔABC, ΔDBC lần lượt cân tại A, D. Gọi H là trung điểm của BC.

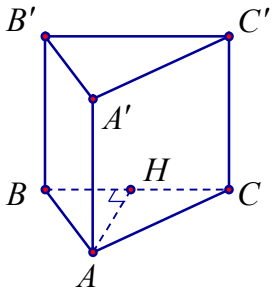
$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \subset (ADH) \\ BC \perp (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$.

Câu 5: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC=2a$, $AB=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AA'//(BCC'B')$ nên khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ cũng chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$. Hạ $AH\perp BC\Rightarrow AH\perp(BCC'B')$.

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{BC^2-AB^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

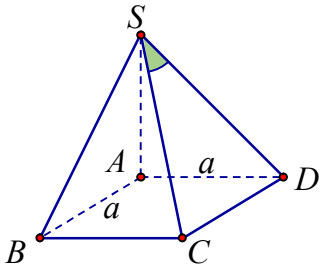
Vậy khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $CB\perp(SAB)\Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\hat{B}=90^\circ;CB=a;SB=a\sqrt{3}\Rightarrow\tan\widehat{CSB}=\frac{CB}{SB}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB}=30^\circ$.

Câu 7: (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD. Giá trị $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $-\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều

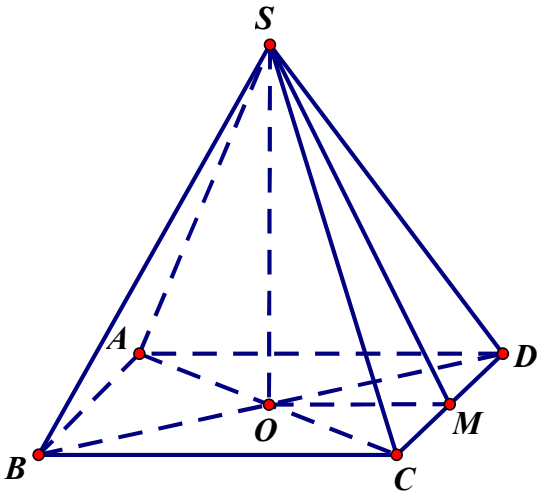
$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \end{cases}$.

Do M là trung điểm của CD nên ta có:

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS},\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

Do $\overrightarrow{OC};\ \overrightarrow{OS};\ \overrightarrow{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$$\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}OC^2 + \frac{1}{2}OD^2 = OC^2 = \frac{a^2}{2}$$

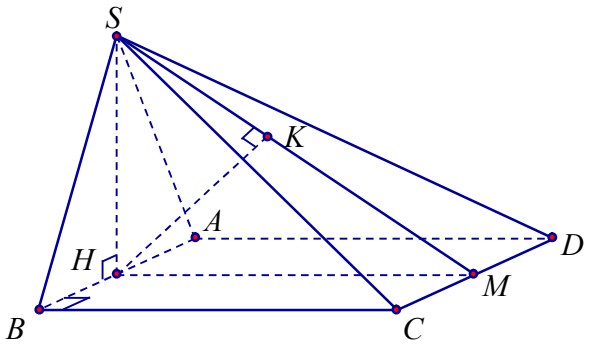


Câu 8: **(THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ B đến (SCD).

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD suy ra $HM = 1$, $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $SM = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Cách 1: $V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Khoảng cách từ B đến (SCD) là $d(B,(SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2: Vì $AB//CD$ nên $AB//(SCD)$.

Do đó $d(B;(SCD)) = d(H;(SCD)) = HK$ với $HK \perp SM$ trong ΔSHM.

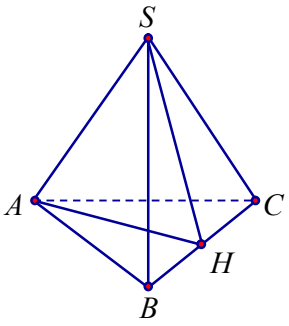
Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9: (THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB} = AS.AC.\cos\widehat{SAC} - AS.AB.\cos\widehat{SAB} = 0.$

Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $90°$.

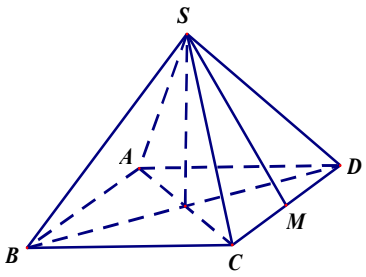
Cách 2: Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\Delta SAC = \Delta SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$. Vậy $SA \perp BC$.

Câu 10: (THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $\arctan 2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB//CD$ nên $\left(\widehat{AB;SC}\right)=\left(\widehat{CD;SC}\right)=\widehat{SCD}$.

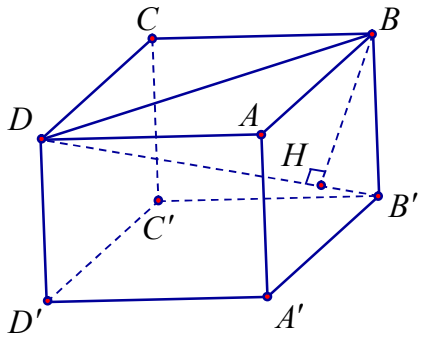
Gọi M là trung điểm của CD. Tam giác SCM vuông tại M và có $SC=a\sqrt{2}$, $CM=a$ nên là tam giác vuông cân tại M nên $\widehat{SCD}=45°$. Vậy $\left(\widehat{AB;SC}\right)=45°$.

Câu 11: **(THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách từ B tới đường thẳng DB'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thuyết ta có: $BD=a\sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu của B lên DB' ta có: $BH=d\left(B,DB'\right)$.

Xét tam giác $BB'D$ vuông tại B ta có:

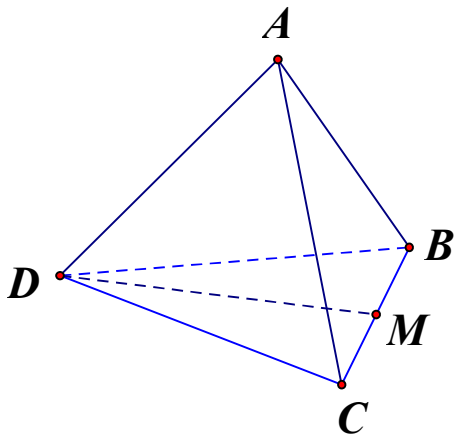
$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{B'B^2}+\frac{1}{BD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 12: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a ta có: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có: $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a.a.\cos 60^\circ + a.a.\cos 120^\circ}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

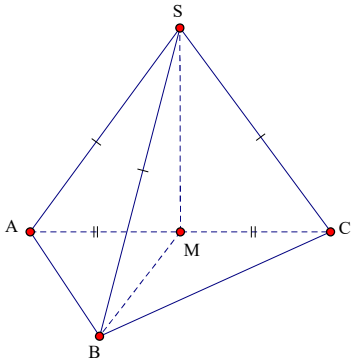
Vậy $\cos\left(AB,DM\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 13: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trực tâm tam giác ABC.
B. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.
C. H trùng với trung điểm AC.
D. H trùng với trung điểm BC.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow BM = AM = CM = \frac{1}{2}AC$.

ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SM \perp AC$ (1).

ΔSMA vuông tại $M \Rightarrow SA^2 = AM^2 + SM^2 \Leftrightarrow SB^2 = BM^2 + SM^2$.

$\Rightarrow .\Delta SMB$ vuông tại M hay $SM \perp BM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SM \perp (ABC)$.

Theo giả thiết: $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC) \Rightarrow H \equiv M$.

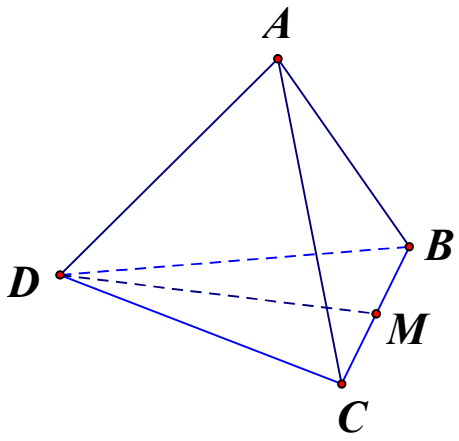
Vậy H trùng với trung điểm AC.

Câu 14: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a ta có: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có: $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{a.a.\cos 60° + a.\frac{a}{2}.\cos 120°}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\cos\left(AB,DM\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

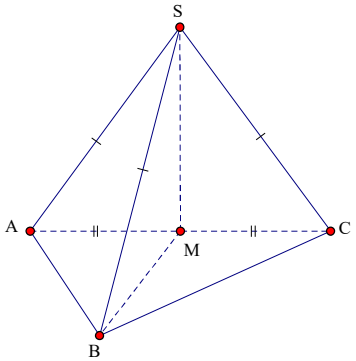
Câu 15: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trực tâm tam giác ABC. **B.** H trùng với trọng tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trung điểm AC. **D.** H trùng với trung điểm BC.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow BM = AM = CM = \frac{1}{2}AC$.

ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SM \perp AC$ (1).

ΔSMA vuông tại $M \Rightarrow SA^2 = AM^2 + SM^2 \Leftrightarrow SB^2 = BM^2 + SM^2$.

$\Rightarrow . \Delta SMB$ vuông tại M hay $SM \perp BM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SM \perp (ABC)$.

Theo giả thiết: $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC) \Rightarrow H \equiv M$.

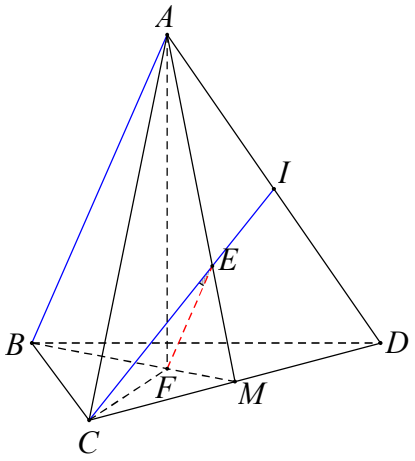
Vậy H trùng với trung điểm AC.

Câu 16: **(THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI với I là trung điểm của AD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm CD; E, F lần lượt là trọng tâm ΔACD, ΔBCD.

Ta có $CF = CE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $EF = a$.

Vì $\frac{ME}{MA} = \frac{MF}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF // AB \Rightarrow \left(\widehat{AB,CI}\right) = \left(\widehat{EF,CE}\right) = \widehat{CEF}$ (Do ΔCEF cân tại C).

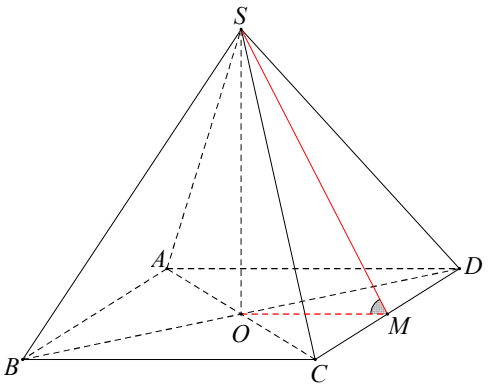
Trong ΔCEF có : $\cos\widehat{CEF} = \frac{EC^2 + EF^2 - CF^2}{2.EC.EF} = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 17: **(THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $45°$. **B.** $75°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm CD.

$$\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ SM\subset(SCD):\ SM\perp CD\\ OM\subset(ABCD):\ OM\perp CD\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SM,OM}\right)=\widehat{SMO}.$$

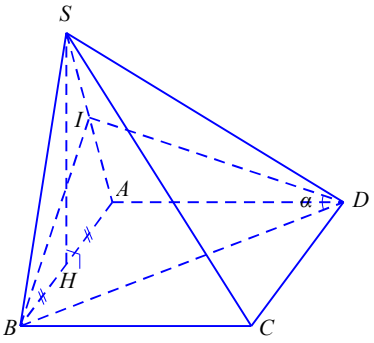
$$\tan\widehat{SMO}=\frac{SO}{OM}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\widehat{SMO}=60^\circ.$$

Câu 18: **(THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm SA. Ta có $BI\perp SA$ và $BI\perp AD$ (do $AD\perp AB$ và $AD\perp SH$).

Do đó $BI\perp(SAD)$. Khi đó: Hình chiếu của BD lên (SAD) là ID, góc giữa BD và (SAD) là $\alpha=\widehat{BDI}$.

Đặt $AB=a$. Ta có $BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $BD=a\sqrt{2}$.

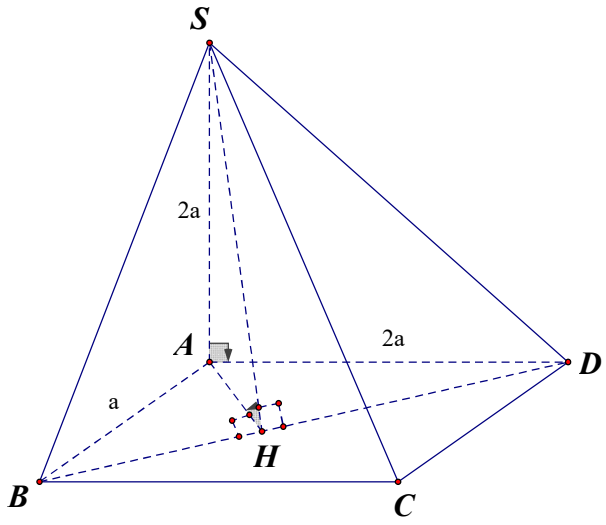
Xét tam giác BID vuông tại I có $\sin\alpha=\frac{BI}{BD}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 19: **(THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA=2a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AH \perp BD$, $(H \in BD)$ (1).

$\begin{cases} BD \perp SA \ (SA \perp (ABCD)) \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$ (2).

Và: $(SBD) \cap (ABCD) = BD$ (3).

Từ (1) (2) và (3) suy ra: góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHA}$.

Xét ΔABD vuông tại A: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

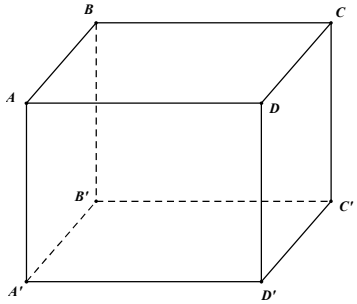
Xét ΔSAH vuông tại A: $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \sqrt{5}$.

Câu 20: **(THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AA' bằng $60°$.
B. Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng $90°$.
C. Góc giữa hai đường thẳng AD và $B'C$ bằng $45°$.
D. Góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng $90°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left(\widehat{B'D',AA'}\right)=90°$ (vì $AA'\perp\left(A'B'C'D'\right)$ nên A sai.

B đúng vì $\begin{cases}A'C'\perp B'D'\\BD//B'D'\end{cases}\Rightarrow AC\perp B'D'$

C đúng vì $A'D//B'C$ nên góc giữa AD và $B'C$ là góc giữa AD và $A'D$ và là góc $\widehat{ADA'}=45^o$

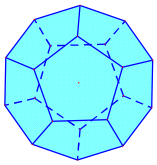
D đúng vì $\begin{cases}A'C'\perp B'D'\\BD//B'D'\end{cases}\Rightarrow A'C'\perp BD$

Câu 21: **(THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Khối đa diện đều nào sau có số đỉnh nhiều nhất?

A. Khối tứ diện đều.
B. Khối nhị thập diện đều.
C. Khối bát diện đều.
D. Khối thập nhị diện đều.

Lời giải

Chọn D Vẽ cho em bảng tổng hợp số đỉnh,số cạnh,số mặt của các khối đa diện đều vào bài này nhé đại ca



Khối thập nhị diện đều có 20 đỉnh.

Câu 22: **(THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Trong không gian cho đường thẳng a và A, B, C, E, F, G là các điểm phân biệt và không có ba điểm nào trong đó thẳng hàng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}a//BC\\BC\subset\left(EFG\right)\end{cases}\Rightarrow a//\left(EFG\right).$
B. $\begin{cases}a\perp BC\\a\perp AC\end{cases}\Rightarrow a\perp mp\left(ABC\right).$

C. $\begin{cases}AB//EF\\BC//FG\end{cases}\Rightarrow\left(ABC\right)//\left(EFG\right).$
D. $\begin{cases}a\perp\left(ABC\right)\\a\perp\left(EFG\right)\end{cases}\Rightarrow\left(ABC\right)//\left(EFG\right).$

Lời giải

Chọn B

Đáp án A sai do đường thẳng a có thể nằm trong mặt phẳng $\left(EFG\right)$.

Đáp án C sai do mặt phẳng $\left(ABC\right)$ có thể trùng với mặt phẳng $\left(EFG\right)$.

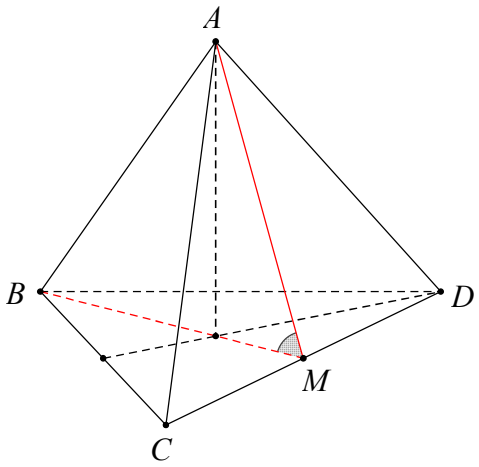
Đáp án D sai do mặt phẳng (ABC) có thể trùng với mặt phẳng (EFG).

Câu 23: **(THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018)** Giả sử α là góc của hai mặt của một tứ diện đều có cạnh bằng a. Khẳng định đúng là

A. $\tan\alpha=\sqrt{8}$. **B.** $\tan\alpha=3\sqrt{2}$. **C.** $\tan\alpha=2\sqrt{3}$. **D.** $\tan\alpha=4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm cạnh CD của tứ diện đều $ABCD$.

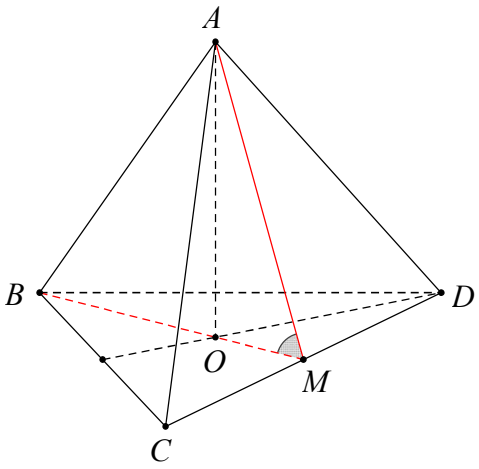
Ta có $\begin{cases}(ACD)\cap(BCD)=CD\\ AM\subset(ACD):AM\perp CD\\ BM\subset(BCD):BM\perp CD\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(ACD),(BCD)}\right)=\left(\widehat{AM,BM}\right)=\widehat{AMB}=\alpha$.

Tính: $AB=a$, $AM=BM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

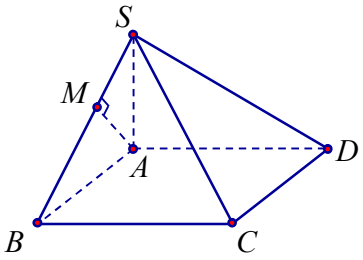
$$\cos\alpha=\cos\widehat{AMB}=\frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2.AM.BM}=\frac{2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=8\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{8}.$$

Cách khác: Gọi O là trọng tâm tam giác BCD. Tính AO, OM. Suy ra $\tan\alpha=\tan\widehat{AMO}=\dfrac{AO}{OM}$



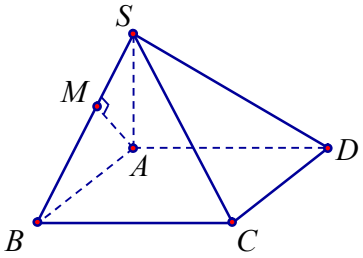
Câu 24: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $AM \perp (SBD)$. **B.** $AM \perp (SBC)$. **C.** $SB \perp (MAC)$. **D.** $AM \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (1).

Do $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$ (2).

Từ $(1), (2) \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$ (3).

Theo giả thiết, ta có $AM \perp SB$ (4).

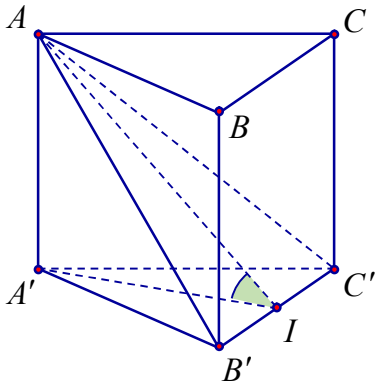
Từ $(3), (4) \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

Câu 25: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

Khi đó: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

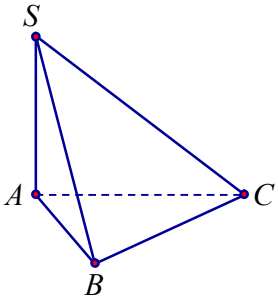
Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan \widehat{AIA'} = \dfrac{AA'}{A'I} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = \dfrac{\pi}{6}$.

Câu 26: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy ABC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $SB \perp AC$. **B.** $SA \perp AB$. **C.** $SB \perp BC$. **D.** $SA \perp BC$.

Lời giải

Chọn A



Nếu $SB \perp AC$.

Từ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$, do đó $\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp AB$.

Điều này là vô lý vì ΔABC vuông tại B nên đáp án A sai.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$, $SA \perp BC$ nên đáp án B và D đúng.

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ nên đáp án C đúng.

Câu 27: (THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018) Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Câu 28: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Biểu thức $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}$, $(x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là:

A. $x^{\frac{5}{3}}$. **B.** $x^{\frac{5}{2}}$. **C.** $x^{\frac{7}{3}}$. **D.** $x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}=x^{\frac{5}{3}}$.

Câu 29: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\frac{-1}{3}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=\frac{-8}{(x-3)^2}<0$ và $y(0)=\frac{1}{3}$.

Câu 30: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=4a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** $S=8a^2$. **D.** $10a^2$.

Lời giải

Chọn B

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là đa diện mà mỗi mặt có 4 cạnh, mỗi đỉnh có 3 mặt nó là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a. Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S=6a^2$.

Câu 31: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$.

Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$. **B.** $\{2;\sqrt{2}\}$. **C.** $\{-4\sqrt{2}\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Câu 32: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Giá trị của $2^{3-\sqrt{2}}.4^{\sqrt{2}}$ bằng:

A. 8. **B.** 32. **C.** $2^{3+\sqrt{2}}$. **D.** $4^{6\sqrt{2}-4}$.

Lời giải

Chọn C

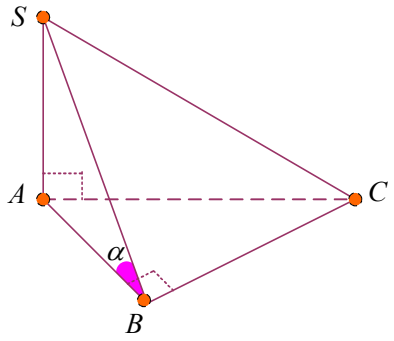
Ta có: $2^{3-\sqrt{2}}.4^{\sqrt{2}}=2^{3-\sqrt{2}}.\left(2^2\right)^{\sqrt{2}}=2^{3-\sqrt{2}}.2^{2\sqrt{2}}=2^{3-\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=2^{3+\sqrt{2}}$. Suy ra $2a+b=-4+5=1$.

Câu 33: **(TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 11-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$, $SA=\sqrt{3}$ cm, $AB=1$ cm, $BC=\sqrt{2}$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với đáy một góc bằng:

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết vì $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp AB$, $SA\perp BC$. Mặt khác $BC\perp AB$ nên $BC\perp SB$. Vậy góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA}=\alpha$.

Trong tam giác vuông SAB ta có: $\tan\alpha=\dfrac{SA}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=60°$.

Câu 34: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Nếu $a\perp(\alpha)$ và $b\perp a$ thì $b\,//\,(\alpha)$. **B.** Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\,//\,(\alpha)$ thì $b\,//\,a$.

C. Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\perp(\alpha)$ thì $a\perp b$. **D.** Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\perp a$ thì $b\perp(\alpha)$.

Lời giải

Chọn C

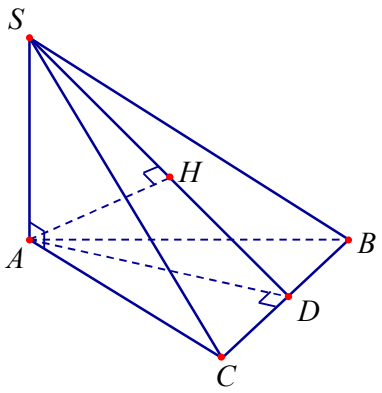
Dựa vào tính chất liên hệ giữa quan hệ song song và vuông góc ta chọn đáp án **C.**

Câu 35: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, ΔABC là tam giác đều cạnh a và tam giác SAB cân. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là trung điểm BC. Do tam giác ABC đều nên $AD \perp BC$ (1).

Trong tam giác SAD, kẻ $AH \perp SD$ (2).

Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AD \perp BC \\ SA \cap AD = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD)$ (3).

Từ (2) và (3), ta suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(H,(SBC)) = AH$.

Theo giả thiết, ta có $SA = AB = a$, $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a).

Tam giác SAD vuông nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Câu 36: **(THPT Quãng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Lời giải

Chọn D

Chẳng hạn với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có AB và AD cùng vuông góc với AA' nhưng chúng không song song.

Câu 37: **(THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường thẳng SA vuông góc với đáy và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và tam giác SBC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. SA, HK, BC đôi một song song.

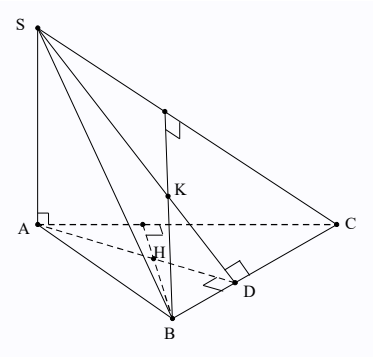
B. AH, BC, SK đồng phẳng.

C. SA, HK, BC đôi một chéo nhau.

D. AH, SK, BC đồng quy.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là giao điểm của AH và BC (*).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AD \\ SA, AD \subset (SAD) \end{cases}$

Do đó: $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$ (1).

Mặt khác K là trực tâm tam giác SBC nên $SK \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $D \in SK$ (**)

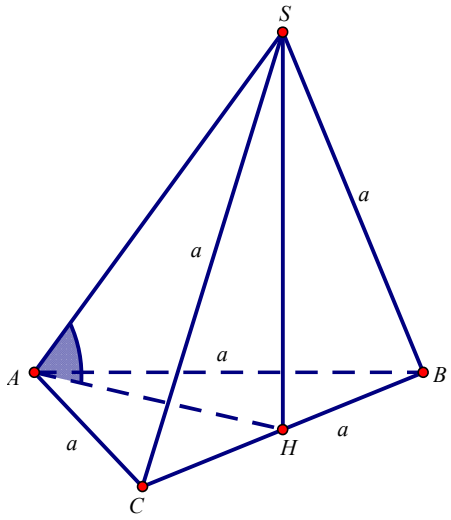
Từ (*) và (**): AH, SK, BC đồng quy.

Câu 38: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



Dễ thấy AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng đáy.

Do đó góc tạo bởi SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$.

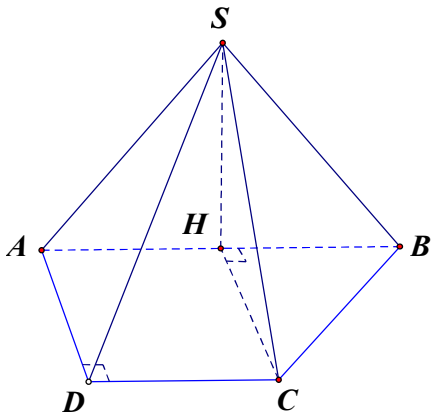
Mặt khác, $\Delta ABC = \Delta SBC \Rightarrow SH = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tam giác SAH là tam giác vuông cân đỉnh H hay $\widehat{SAH} = 45°$.

Câu 39: (THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD=DC=a$. Biết SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thuyết H là hình chiếu của C lên AB nên hình chiếu của mặt phẳng (SBC) lên mặt phẳng (SAB) là (SBH). Đặt $\alpha=\widehat{((SBC),(SAB))}$ ta có: $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SBC}}$.

Mặt khác ta có:

$S_{\Delta SHB}=\frac{1}{2}a.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$SB=SC=2a; BC=a\sqrt{2}$.

$S_{\Delta SBC}=\sqrt{\frac{a\left(4+\sqrt{2}\right)}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\left(4-\sqrt{2}\right)}{2}}=\frac{a^2\sqrt{7}}{2}$.

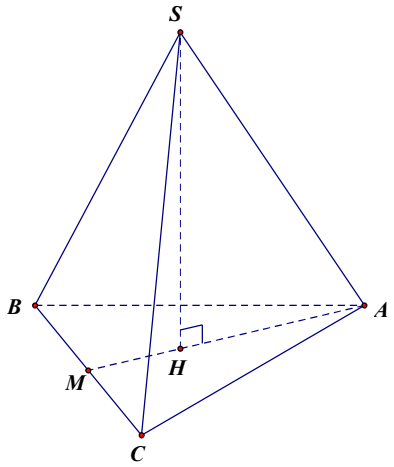
Vậy $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 40: (THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy (ABC)?

A. $h=a$. **B.** $h=a\sqrt{6}$. **C.** $h=\frac{3a}{2}$. **D.** $h=a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên là hình tứ diện đều cạnh $3a$.

Khi đó, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Và $AH = R = \dfrac{AB.BC.CA}{4S_{\Delta ABC}} = \dfrac{(3a)^3}{(3a)^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

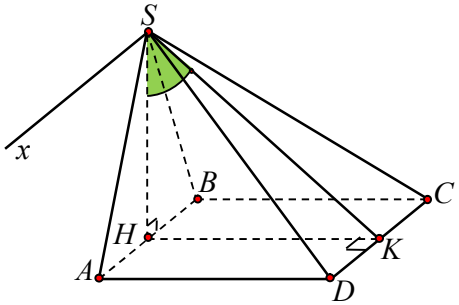
Vậy $h = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{9a^2 - 3a^2} = a\sqrt{6}$

Câu 41: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

Mà $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases}AB \parallel CD\\ S \in (SAB) \cap (SCD)\end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \,//\, AB \,//\, CD$

Mà $Sx \perp (SHK) \Rightarrow \begin{cases}Sx \perp SH\\ Sx \perp SK\end{cases}$, với K là trung điểm CD.

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{HSK}$.

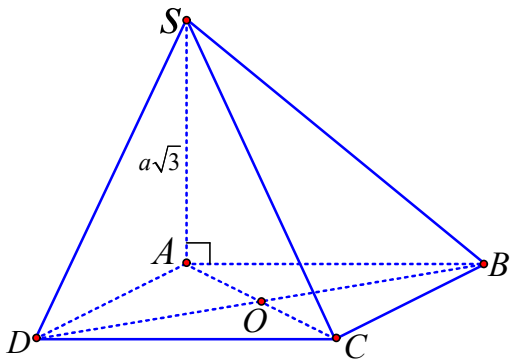
Khi đó $\tan\widehat{HSK}=\dfrac{HK}{SH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 42: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Biết diện tích tam giác SAB là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, khoảng cách từ điểm B đến (SAC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $S_{\Delta SAB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $SA=a\sqrt{3}$ suy ra $\dfrac{1}{2}SA.AB=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=a$.

Vì đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O nên $BO\perp AC$; $SA\perp(ABCD)$, $SA\perp BO$ suy ra $BO\perp(SAC)$.

Vậy BO là khoảng cách từ điểm B đến (SAC): $AB=a$, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$

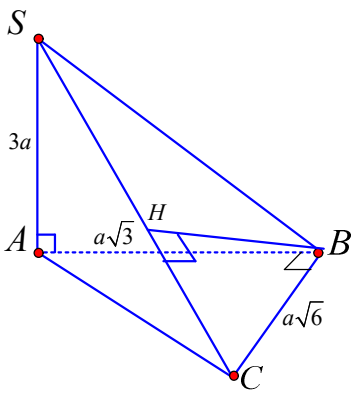
Xét ΔAOB vuông tại O có $AB=a$, $OA=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ suy ra $BO=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 43: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=3a$, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn D



Do $BC \perp AB$; $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$. Kẻ $BH \perp SC$.

Vậy khoảng cách từ B đến SC là BH, trong tam giác vuông SBC: $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2}$

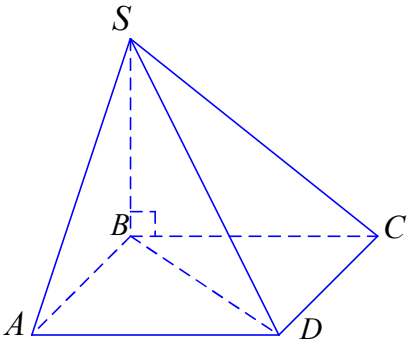
Trong đó $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$ suy ra $BH = 2a$.

Câu 44: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SB vuông góc với mặt đáy. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $SB \perp BC$. **B.** $SA \perp AD$. **C.** $SD \perp BD$. **D.** $SC \perp DC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SB \perp (ABCD)$ nên $SB \perp BC$, $SB \perp AD$, $SB \perp DC$

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD \perp AB$ và $DC \perp BC$ suy ra $AD \perp SA$ và $DC \perp SC$.

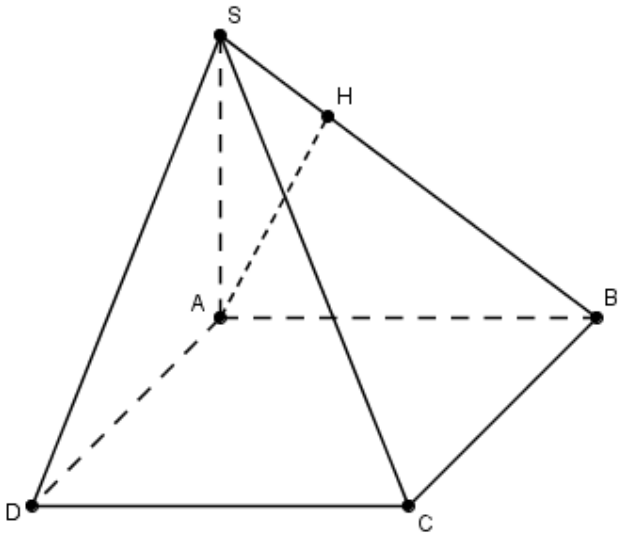
Tam giác SBD vuông tại B nên SD không vuông góc với BD.

Câu 45: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{a\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** a.

Lời giải:

Chọn A



Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Mặt khác $(SBC) \cap (SAB) = SB$. Do đó từ A kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

hay $AH = d\left(A,\left(SBC\right)\right)$. Trong tam giác vuông SAB ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}.$$

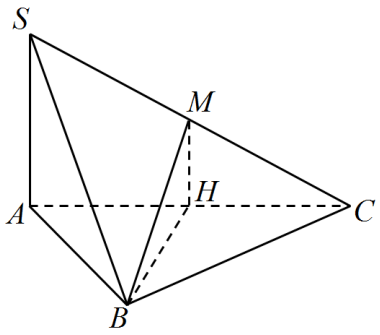
Vậy $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46: **(THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $\left(ABC\right)$

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{14}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{7}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm cạnh AC. Khi đó $HM//SA$ nên HM vuông góc $\left(ABC\right)$ tại H.

Do đó $\left(\widehat{BM,\left(ABC\right)}\right)=\left(\widehat{BM,BH}\right)=\widehat{MBH}$ do ΔMBH vuông tại H.

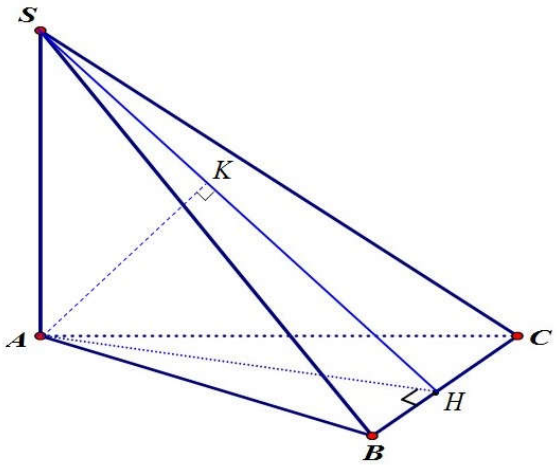
Ta có: $\cos\widehat{MBH}=\frac{BH}{BM}=\frac{BH}{\sqrt{HM^2+BH^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 47: **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-nawm-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $SA\perp\left(ABC\right)$ và $AB=2a$, $AC=3a$, $SA=4a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

A. $d=\frac{12a\sqrt{61}}{61}$. **B.** $d=\frac{2a}{\sqrt{11}}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{43}}{12}$. **D.** $d=\frac{6a\sqrt{29}}{29}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng đường cao AH của tam giác ABC và đường cao AK của tam giác SAH.

Có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AK$.

Có $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AK$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, được

$$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{2a.3a}{\sqrt{4a^2+9a^2}} = \frac{6\sqrt{13}a}{13}.$$

ΔSAH vuông tại H, Áp dụng hệ thức lượng ta được

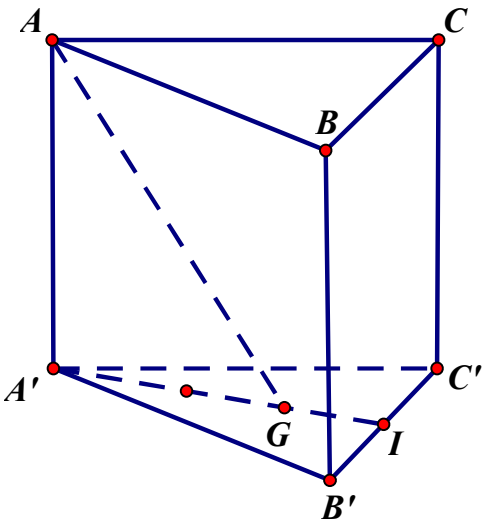
$$d\left(A;(SBC)\right) = AK = \frac{SA.AH}{SH} = 4a.\frac{6\sqrt{13}a}{13}.\frac{1}{\sqrt{16a^2+\frac{36}{13}a^2}} = \frac{12a\sqrt{61}}{61}.$$

Câu 48: **(SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng:

A. $\vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\vec{a} + \frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\vec{a} + \frac{1}{6}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn A



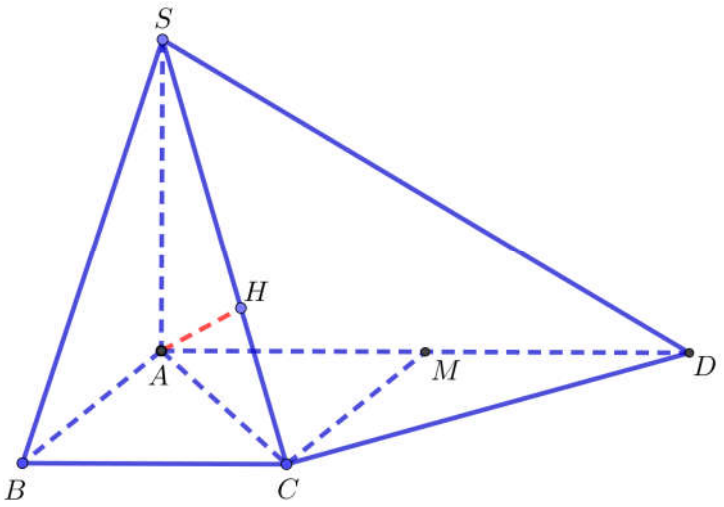
$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Câu 49: **(SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B; $AD=2a$, $AB=BC=SA=a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy; M là trung điểm AD. Tính khoảng cách h từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\frac{a}{3}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



+ Ta có: $CM=AM=a=\frac{AD}{2}$ nên ΔACD vuông tại C và $AC=a\sqrt{2}$.

+ Kẻ $AH\perp SC$ tại H. Ta có:

$CD\perp(SAC)$ nên $AH\perp CD$. Suy ra: $AH\perp(SCD)$ tại H. Suy ra: $d\left[A,(SCD)\right]=AH$.

+ ΔSAC vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{3}{2a^2}$.

Suy ra: $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

+ Ta có: $AM\cap\left(SCD\right)=D$ nên $\frac{d\left(M,\left(SCD\right)\right)}{d\left(A,\left(SCD\right)\right)}=\frac{DM}{DA}=\frac{1}{2}$.

Suy ra: $d\left(M,\left(SCD\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

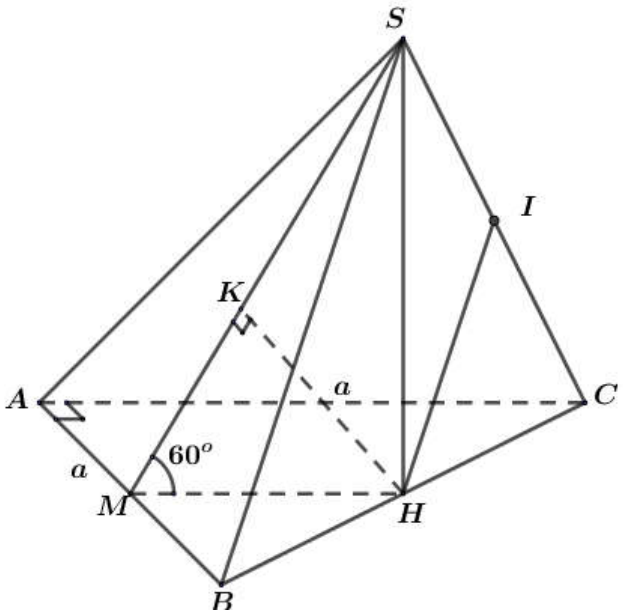
Vậy $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 50: **(THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB=AC=a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của BC, mặt phẳng $\left(SAB\right)$ tạo với đáy một góc bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ theo a.

A. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $4\sqrt{15}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm AB thì $HM//AC\Rightarrow MH\perp AB$ và $MH=\frac{a}{2}$.

Vậy $\left(\widehat{\left(SAB\right),\left(ABC\right)}\right)=\widehat{SMH}=60°$.

Lại có $IH//SB\Rightarrow IH//\left(SAB\right)$ nên $d\left(I,\left(SAB\right)\right)=d\left(H,\left(SAB\right)\right)$.

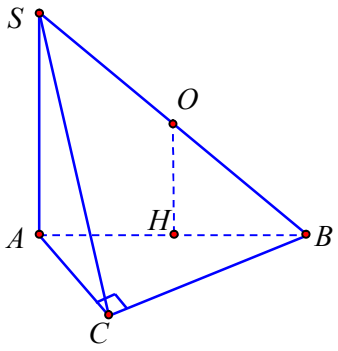
Kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SAB)$ nên $d(H,(SAB)) = HK = MH.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 51: **(THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại C. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H là trọng tâm ΔABC.
B. H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.
C. H là trung điểm cạnh AC.
D. H là trung điểm cạnh AB.

Lời giải

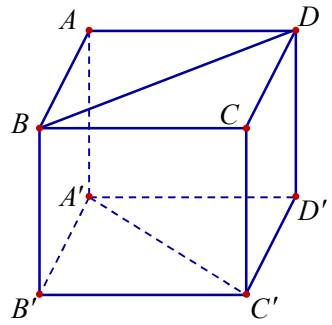
Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SC$ do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC thì O là trung điểm của SB.

Theo giả thiết H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) nên $OH \,//\, SA$ và OH cắt AB tại H. Vì O là trung điểm của SB nên H là trung điểm của cạnh AB.

Câu 52: **(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$.
B. a.
C. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.
D. $\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $BD \,//\, (A'B'C'D')$

$\Rightarrow d(BD,A'C') = d(BD,(A'B'C'D')) = d(B,(A'B'C'D')) = BB' = a$.

Cách 2: Gọi O, O' lần lượt tâm của hai đáy. Ta có: OO' là đoạn vuông góc chung của BD và $A'C'$.

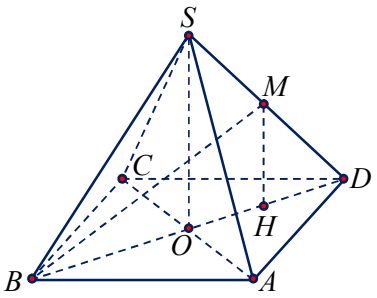
Do đó $d(BD,A'C') = OO' = a$.

Câu 53: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$ và $O = AC \cap BD$.

Ta có MH song song với SO và $MH = \frac{1}{2}SO$.

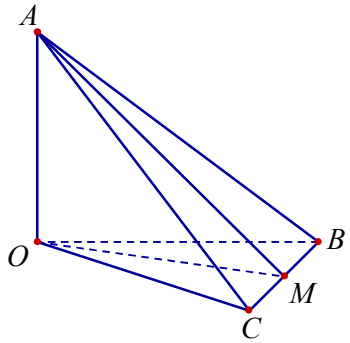
BM có hình chiếu vuông góc trên $(ABCD)$ là BH

Do đó góc giữa BM và $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác MBH vuông tại H nên có: $\tan\widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 54: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

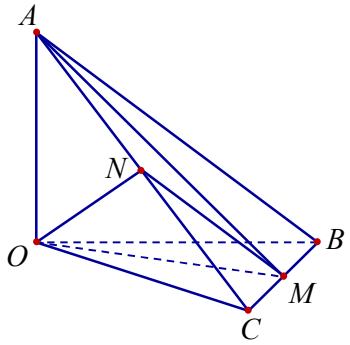


A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Gọi N là trung điểm của AC, ta có $MN//AB \Rightarrow (OM;AB) = (OM;MN) = \widehat{OMN}$.

Do $\Delta OAB = \Delta OCB = \Delta OAC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau nên

$OM = ON = MN = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow (OM;AB) = \widehat{OMN} = 60°$.

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{OA}^2 = a^2$, $\overrightarrow{OB}^2 = b^2$, $\overrightarrow{OC}^2 = c^2$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a\sqrt{2}$,

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(OM;AB) = \left|\cos\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AB}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\dfrac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

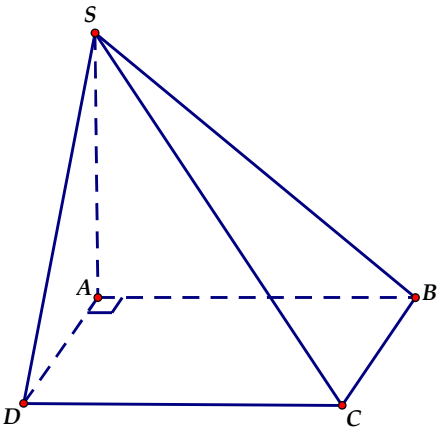
$\Rightarrow (OM;AB) = 60°$.

Câu 1: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AD$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = DA$.

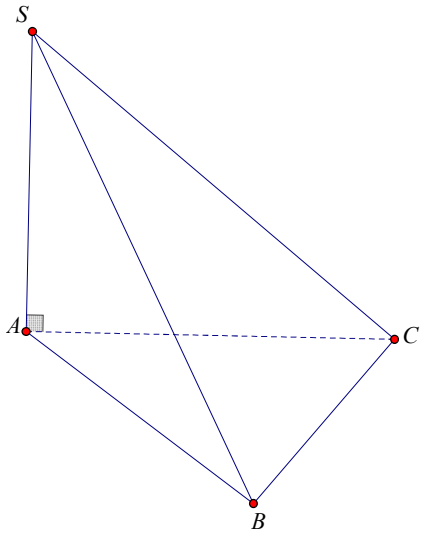
$$\begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD \;//\; AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CD // (SAB) \Rightarrow d(CD,SB) = d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DA = a$$

Câu 2: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, kết luận nào sau đây sai?

A. $(SAC) \perp (SBC)$. **B.** $(SAB) \perp (ABC)$. **C.** $(SAC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB),(SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB),(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow$ B, C đúng.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB); BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC) \Rightarrow$ D đúng.

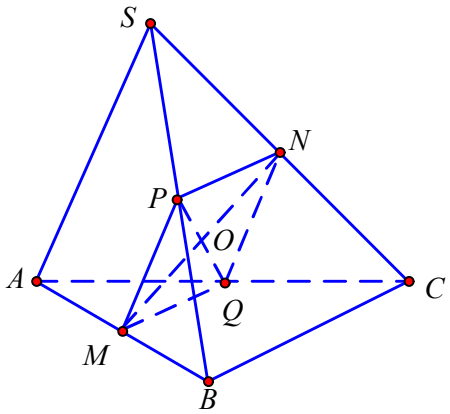
Vậy đáp án sai là A.

Câu 3: (THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, và SC, $MN = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $30°$. **B.** $150°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AC. Khi đó MP, NQ, MQ, PN lần lượt là đường trung bình của tam giác SAB, SAC, ABC, SBC nên MP // NQ // SA; PN // MQ // BC và $MP = NQ = \frac{1}{2}SA = a$; $PN = MQ = \frac{1}{2}BC = a$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BC là góc $\widehat{PMQ}$ và tứ giác $MPNQ$ là hình thoi.

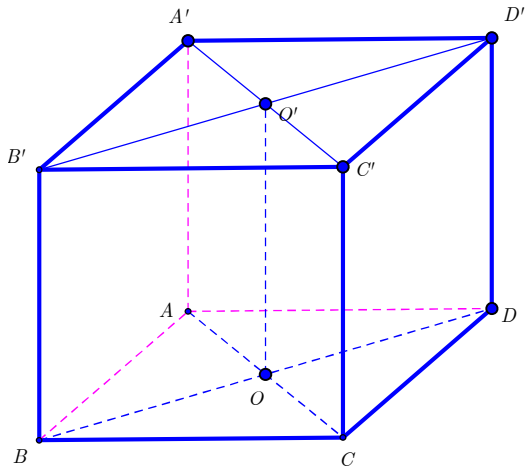
Xét hình thoi $MPNQ$: gọi O giao điểm của hai đường chéo; vì $MN = a\sqrt{3}$ nên $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; trong tam giác vuông MOQ thì $OQ = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow PQ = a$, khi đó tam giác PMQ đều hay $\widehat{PMQ} = 60°$.

Câu 4: (THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính độ dài đoạn OS theo a.

A. $OS = 6a$. **B.** $OS = 4a$. **C.** $OS = a$. **D.** $OS = 2a$.

Lời giải

Chọn B



$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=4\overrightarrow{OO'}$. Với O' là tâm của mặt $A'B'C'D'$.

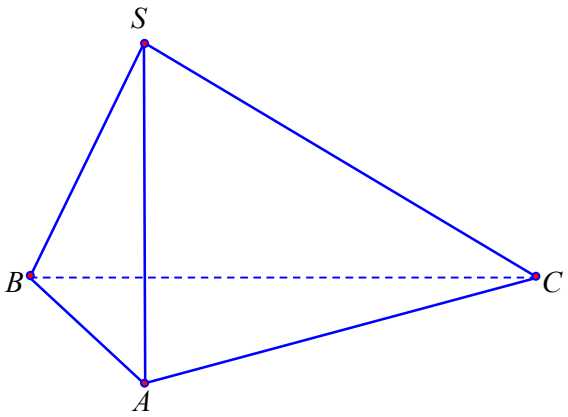
Suy ra $OS=\left|\overrightarrow{OS}\right|=\left|4\overrightarrow{OO'}\right|=4OO'=4a$.

Câu 5: (THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $30°$. **B.** $150°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp AB$ và $SA\perp AC$.

ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAC)=SA\\SA\perp AB\\SA\perp AC\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\left(\widehat{AB,AC}\right)=\widehat{BAC}$.

Xét ΔABC có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{a^2+a^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120°$.

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=120°$.

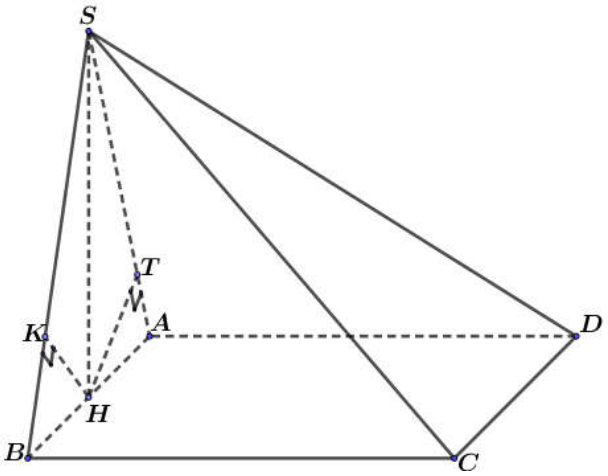
Câu 6: (THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$; $AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và

nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $\widehat{ASB}=120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, theo đề ra ta được $SH \perp (ABCD)$.

Dựng T, K lần lượt là hình chiếu của H lên SA, $SB \Rightarrow HT \perp (SAD)$ và $HK \perp (SBC)$.

Vậy $\left(\widehat{(SAD);\ (SBC)}\right)=\left(\widehat{HT;\ HK}\right)$.

Xét tứ giác $SKHT$ có hai góc vuông đối diện nhau nên $SKHT$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KHT}=60°$ do $\widehat{ASB}=120°$.

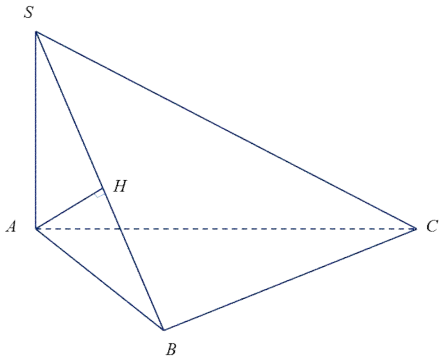
Vậy $\left(\widehat{(SAD);\ (SBC)}\right)=\left(\widehat{HT;\ HK}\right)=\widehat{KHT}=60°$.

Câu 7: **(THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác vuông tại B, $AB=SA=a$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khoảng cách giữa AH và BC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AH \perp SB$ (nên $AH \perp HB$).

$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (nên $BC \perp BH$).

Do đó, $d\left(BC,AH\right)=HB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A, AH là đường cao $\Rightarrow BH=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+a^2}}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

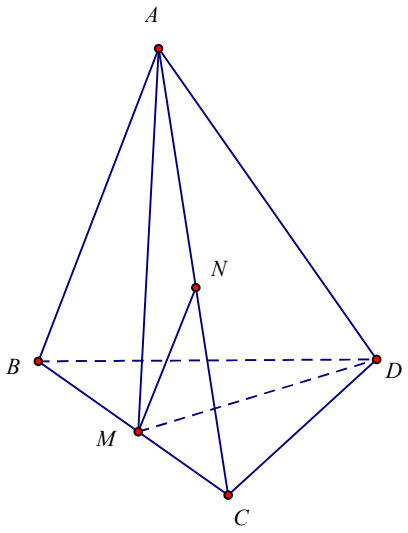
Vậy $d\left(BC,AH\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 8: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của BC. Khi đó cosin của góc giữa hai đường thẳng nào sau đây có giá trị bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

A. $\left(AB,DM\right)$. **B.** $\left(AD,DM\right)$. **C.** $\left(AM,DM\right)$. **D.** $\left(AB,AM\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi cạnh của tứ diện có độ dài là a. Ta có: $AM=DM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác ADM cân tại M có:

$$\cos\widehat{AMD}=\frac{AM^2+DM^2-AD^2}{2.AM.DM}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}.$$

$$\cos\widehat{ADM}=\frac{DM^2+AD^2-AM^2}{2.AD.DM}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Xét tam giác đều ABC có AM là đường trung tuyến và là đường phân giác nên $\left(AB,AM\right)=30°\Rightarrow\cos\left(AB,AM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó loại trừ đáp án B, C, D.

Gọi N là trung điểm của AC. Ta có $MN//AB\Rightarrow\left(AB,DM\right)=\left(MN,DM\right)$.

Xét tam giác MND có:

$$\cos\widehat{NMD}=\frac{MN^2+DM^2-ND^2}{2.MN.DM}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

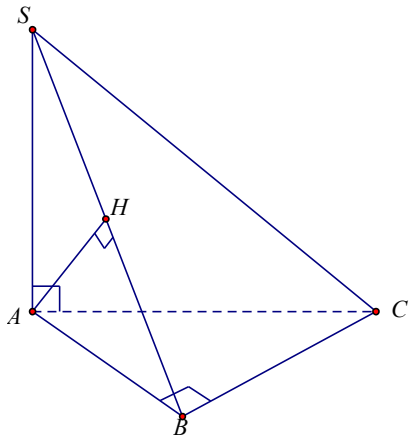
Suy ra $\cos(AB,DM)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$ và AH là đường cao của ΔABC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SB\perp BC$. **B.** $AH\perp BC$. **C.** $SB\perp AC$. **D.** $AH\perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có : $\begin{cases}BC\perp AB(gth)\\BC\perp SA(SA\perp(ABC),BC\subset(ABC))\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

$\Rightarrow BC\perp AH$ và $BC\perp SB$ do đó B và A đúng.

Mặt khác: $\begin{cases}AH\perp SB(gth)\\AH\perp BC(cmt)\end{cases}\Rightarrow AH\perp SC$ nên **D.** đúng.

Vậy **C.** sai.

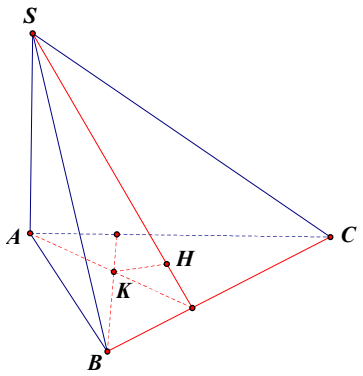
Câu 10: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $SABC$ có $SA\perp(ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $BC\perp(SAH)$. **B.** $HK\perp(SBC)$.

C. $BC\perp(SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$ nên A đúng suy ra C sai vì mặt phẳng (SAH) và mặt phẳng (SAB) là hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với BC suy ra $(SAH)//(SAB)$. Điều này không thể vì hai mặt phẳng này có SA chung.

Cách 2:

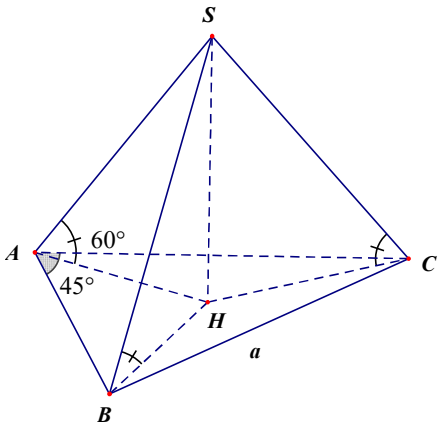
Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BA$ nên tam giác ABC vuông tại B, điều này giả thiết không cho suy ra C sai.

Câu 11: **(THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng $60°$. Biết $BC = a$, $\widehat{BAC} = 45°$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S đến mặt phẳng (ABC).

A. $h = a\sqrt{6}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $h = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC), suy ra $d(S,(ABC)) = SH$ và $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60° \Rightarrow HA = HB = HC$.

Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Xét ΔABC, có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2HA \Rightarrow HA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

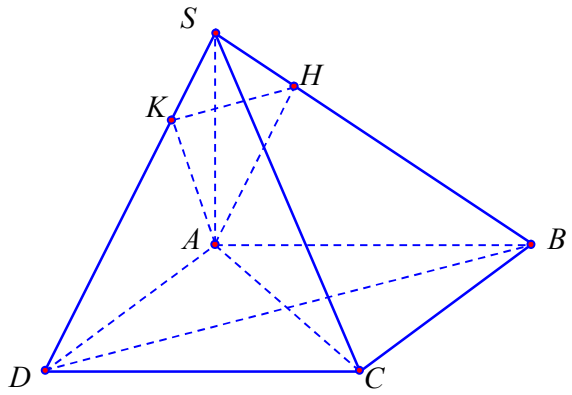
Xét ΔSAH vuông tại H, có $SH = AH.\tan\widehat{SAH} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 12: **(THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $BC \perp AH$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $AK \perp BD$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}$ nên $SA\perp(ABCD)$

Suy ra $SA \perp AC$ (B đúng); $SA \perp BC$; $SA \perp BD$.

Mặt khác $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$ suy ra $BC \perp AH$ (A đúng).

và $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp SC$;

Đồng thời HK // BD nên $HK \perp SC$ (C đúng).

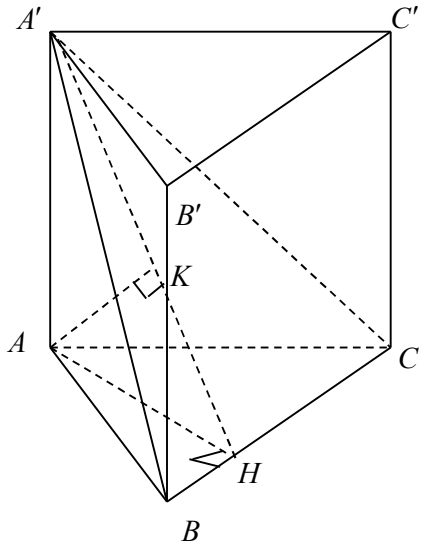
Vậy mệnh đề sai là $AK \perp BD$ (vì không đủ điều kiện chứng minh).

Câu 13: **(THPT Đức Thọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Cạnh bên $AA' = a$, ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên $A'H$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH)$. Mặt khác $AK \subset (A'AH) \Rightarrow AK \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AK \perp AH \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d\left(A,(A'BC)\right) = AK$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$, $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AH^2}$.

Suy ra: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$, nên $AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

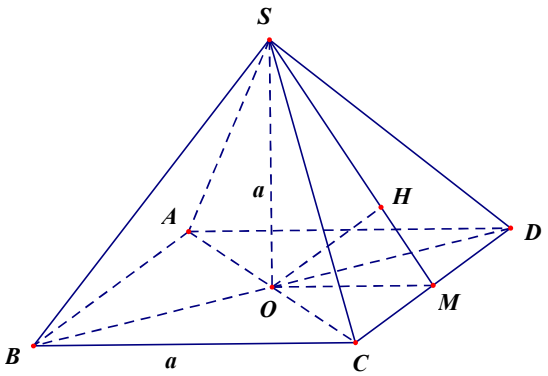
Vậy $d\left(A,(A'BC)\right) = AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: **(THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng:

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm CD; H là hình chiếu vuông góc của O lên SM.

Ta có $d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)=2OH$.

Xét tam giác SMO vuông tại O có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

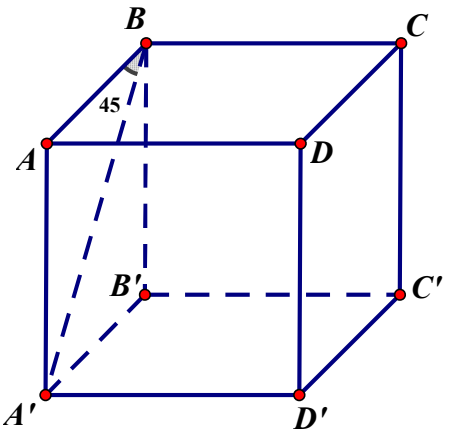
Vậy $d\left(AB,SC\right)=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 15: **(THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



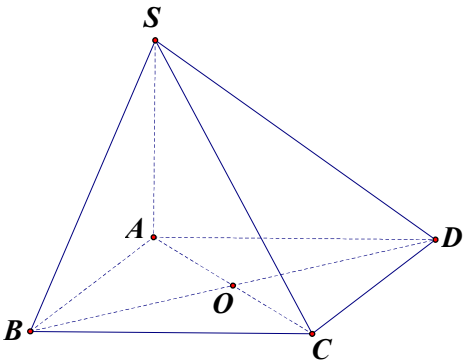
Ta có: $CD//AB\Rightarrow\left(CD;BA'\right)=\left(AB;BA'\right)=\widehat{ABA'}=45°$.

Câu 16: **(THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBD\right)$ bằng $\dfrac{6a}{7}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(SBD\right)$ bằng.

A. $\dfrac{3a}{7}$. **B.** $\dfrac{4a}{7}$. **C.** $\dfrac{6a}{7}$. **D.** $\dfrac{12a}{7}$.

Lời giải

Chọn C



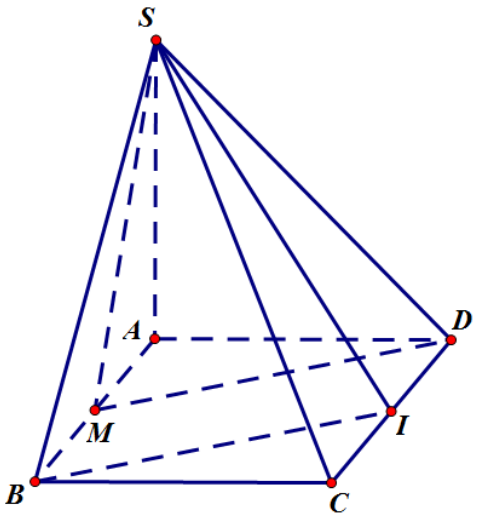
* Gọi $AC\cap BD=O$. Khi đó AC cắt mặt phẳng $\left(SBD\right)$ tại trung điểm O của nó suy ra $d\left(C;\left(SBD\right)\right)=d\left(A;\left(SBD\right)\right)=\dfrac{6a}{7}$.

Câu 17: (THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $45°$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng *(Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị).*

A. $39°$. **B.** $42°$. **C.** $51°$. **D.** $48°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow A$ là hình chiếu của D lên $(SAB) \Rightarrow \widehat{DSA} = 45^{\circ}$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow DM \,//\, BI$

Góc giữa BI và SD bằng góc giữa DM và SD và bằng $\widehat{SDM}$

Đặt $AB = a \Rightarrow SA = a$ (Vì ΔSAD vuông cân tại A)

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$,

$SM = \sqrt{SA^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$,

$MD = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

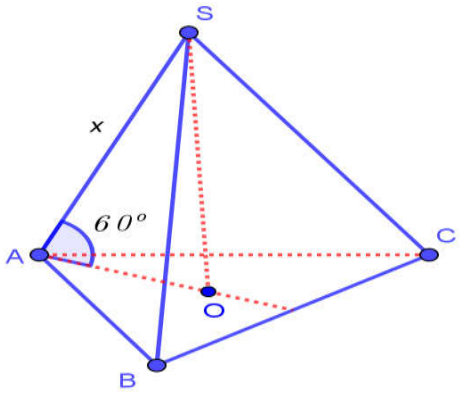
$\cos\widehat{SDM} = \frac{SD^2 + MD^2 - SM^2}{2SD.MD} = \frac{2a^2 + \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{SDM} \approx 51°$.

Câu 18: (THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $\angle SAO = 60°$.

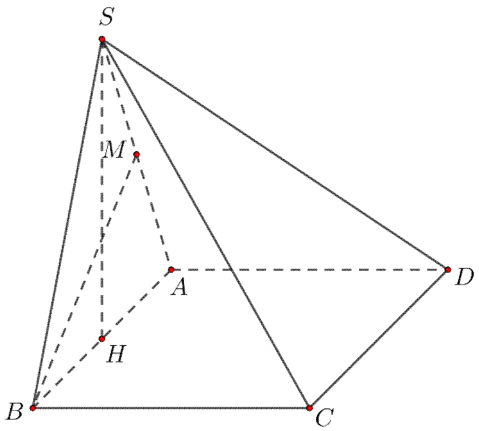
Xét tam giác vuông SAO: $\cos 60° = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 19: **(THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Vì tam giác SAB đều nên gọi M là trung điểm của SA thì $BM \perp SA$ nên BM là đoạn vuông góc chung của BC và SA.

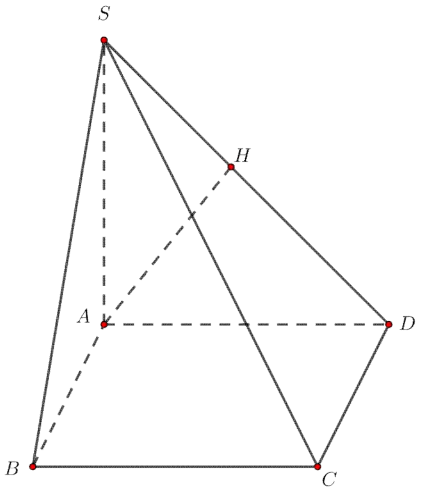
Vậy $d(SA;BC) = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018)** Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Trên hình chỉnh lại điểm H nhé,vẽ H gần D hơn vì AD<SA

Ta có $d\left(B;\left(SCD\right)\right)=d\left(A;\left(SCD\right)\right)$ (1)

Trong tam giác SAD vẽ $AH\perp SD$. Vì $SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp CD$

Mà $CD\perp AD$. Do đó $CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp AH$.

Ta có $\begin{cases}CD\perp AH\\AH\perp SD\end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(SCD\right)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d\left(B;\left(SCD\right)\right)=AH$

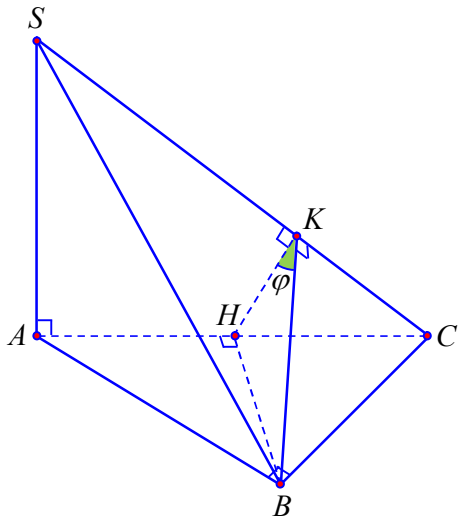
Mặt khác, trong tam giác vuông SAD, có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=BC=a$ và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBC\right)$ bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC)\perp(ABC)$ (vì $SA\perp(ABC)$) và $BH\perp AC\Rightarrow BH\perp(SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK\perp SC$ thì $SC\perp(BHK)\Rightarrow SC\perp BK$.

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=\widehat{SKH}=\varphi$.

Mặt khác

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB=BC=a$ nên $AC=a\sqrt{2}$ và $BH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK=\dfrac{HC.SA}{SC}\Leftrightarrow HK=\dfrac{HC.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi=\dfrac{BH}{BK}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60^\circ$.

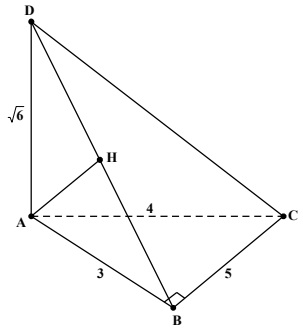
Vậy $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=60^\circ$.

Câu 22: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=3\,\text{cm}$, $AC=4\,\text{cm}$, $AD=\sqrt{6}\,\text{cm}$, $BC=5\,\text{cm}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\dfrac{12}{5}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{12}{7}\text{cm}$. **C.** $\sqrt{6}\,\text{cm}$. **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn D



+ Vì tam giác ABC có ba cạnh $AB=3\,\text{cm}$, $AC=4\,\text{cm}$, $BC=5\,\text{cm}$ nên tam giác ABC vuông tại B.

+ Kẻ $AH\perp DB$ ta có:

$\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\BC\perp AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(ABD)\Rightarrow BC\perp AH$

Suy ra $AH\perp(BCD)\Rightarrow d\left(A,(BCD)\right)=AH$

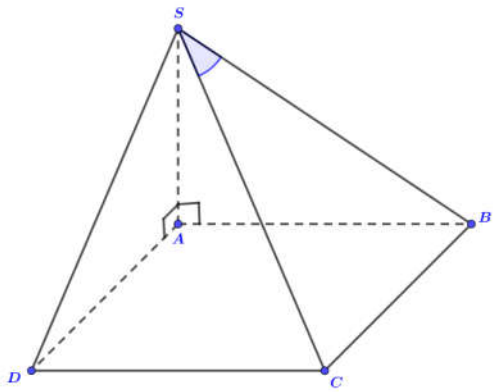
Lại có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{18}\Rightarrow AH=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$.

Câu 23: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a\sqrt{2}$, $AD=a$, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Tính góc giữa SC và (SAB).

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(SAB) \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{CSB}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

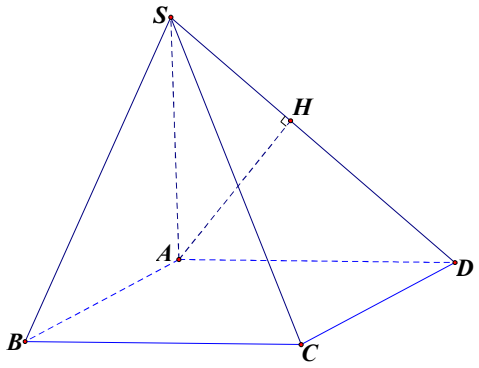
Tam giác SBC vuông tại B có: $\tan \widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30°$.

Câu 24: **(THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

A. a. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \quad (\text{do } SA \perp (ABCD)) \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD$ thì AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD. Do đó $d(AB,CD) = AH$.

ΔSAD vuông cân nên $AH = \dfrac{1}{2}SD = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(AB,SD) = a\sqrt{2}$.

Câu 25: **(SGD Bắc Ninh năm 2017-2018)** Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Q).

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song với đường thẳng b.

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b.

D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

Lời giải

Chọn D

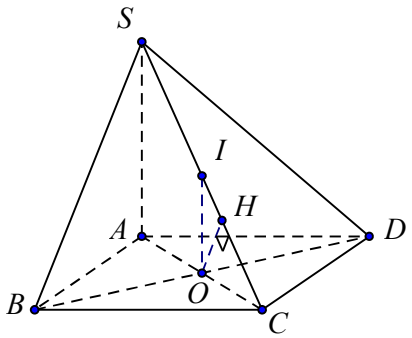
Phát biểu D đúng theo định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

Câu 26: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $OH \perp SC$ tại H.

$\Rightarrow OH$ là đường vuông góc chung của BD và SC.

Gọi I là trung điểm SC. Tam giác OIC vuông tại O có đường cao OH.

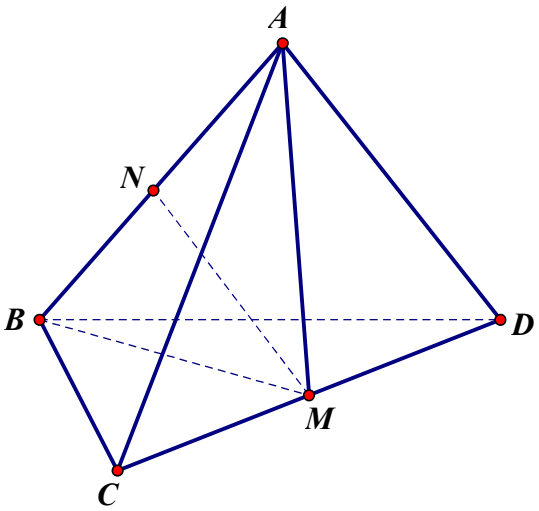
Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{OI.OC}{\sqrt{OI^2 + OC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 27: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của CD.

Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AB tại trung điểm N (ΔAMN cân tại M)

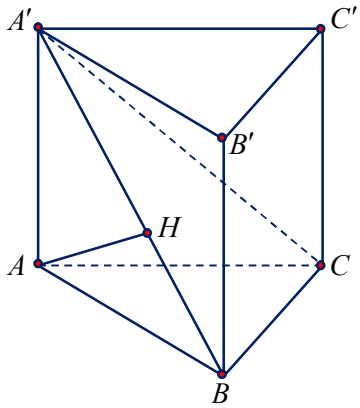
Suy ra $d\left(AB,CD\right)=MN=\sqrt{BM^2-BN^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28: **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$.

A. $2\sqrt{5}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $AH\perp A'B$.

Ta có $\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\BC\perp AA'\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp\left(A'AB\right)\Rightarrow BC\perp AH$

Vậy $AH\perp\left(A'BC\right)\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AH$.

Xét tam giác vuông $A'AB$ có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AB^2}$

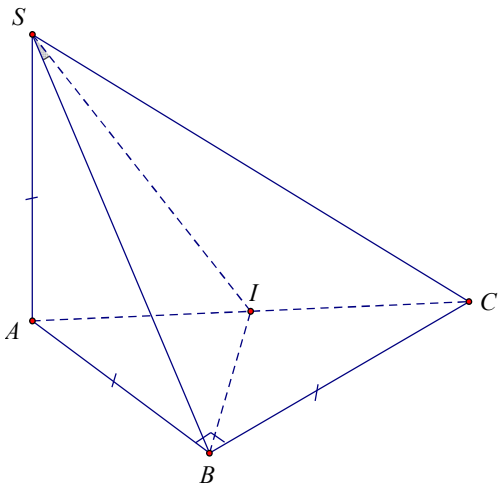
$\Rightarrow AH=\frac{AA'.AB}{\sqrt{AA'^2+AB^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 29: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = AB = BC$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $arc\cos\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow BI \perp AC$ (vì ΔABC vuông cân tại A). (1)

Mặt khác: $SA \perp BI$ (vì $SA \perp (ABC)$) (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BI \perp (SAC)$.

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SB lên (SAC).

$\Rightarrow \widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{(SB,SI)} = \widehat{BSI}$.

Xét ΔBSI vuông tại I, ta có: $\sin\widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{BSI} = 30°$.

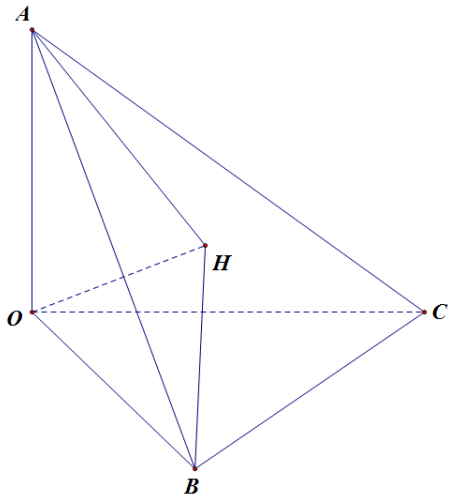
Câu 30: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018) Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. H là trọng tâm tam giác ABC. **B.** H là trung điểm của BC.

C. H là trực tâm tam giác ABC. **D.** H là trung điểm của AC.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$,

Mặt khác $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp BC$. Từ đó suy ra $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AC \perp BH$.

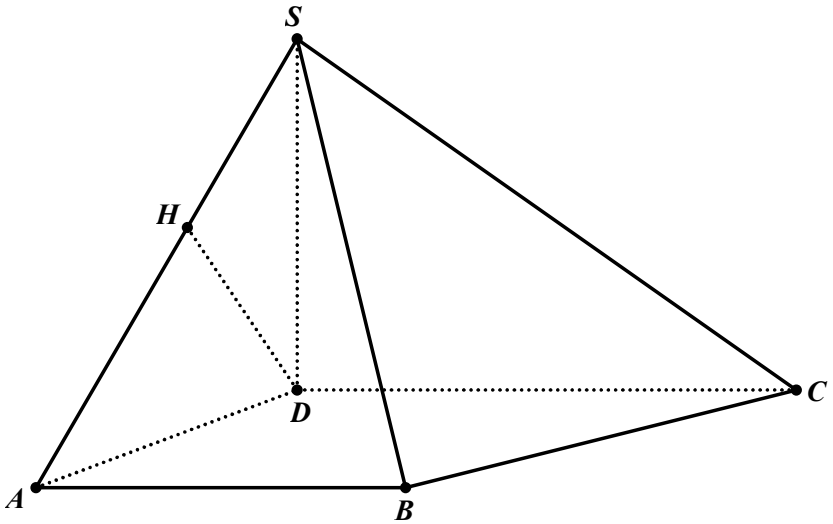
Như vậy H là giao điểm hai đường cao trong tam giác ABC nên H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 31: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D; SD vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$; $AD = 2a$; $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên SA. Khi đó ta có:

$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SDA) \Rightarrow AB \perp DH$; $\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$.

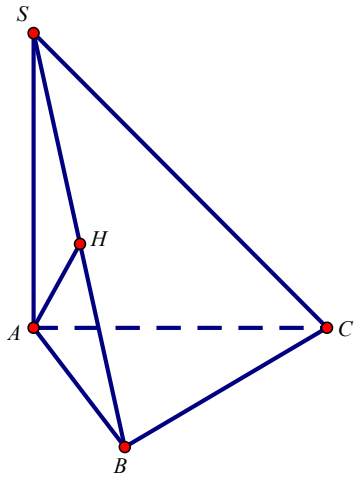
Ta có $CD//(SAB) \Rightarrow d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DH = \dfrac{SD.AD}{\sqrt{SD^2+AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 32: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018)** Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Hạ $AH \perp SB$.

Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ do đó $AH \perp (SBC)$ hay $AH = d(A;(SBC))$.

Khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 33: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018)** Trong hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng $45°$.

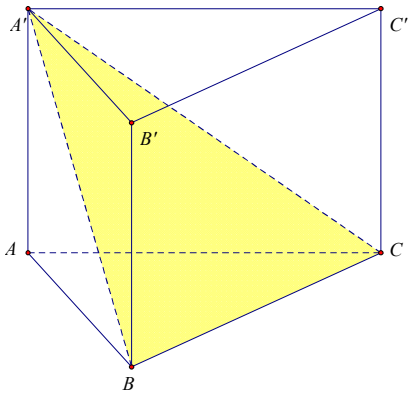
B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C)$ vuông góc với nhau.

C. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

D. Đáy ABC là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $AB^2+BC^2=a^2+(2a)^2=5a^2=AC^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B.

$\Rightarrow$ Đáp án **D** đúng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và tam giác ABC vuông tại B nên

$AB \perp (BB'C) \Rightarrow (AA'B'B) \perp (BB'C) \Rightarrow$ Đáp án **B** đúng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và tam giác ABC vuông tại B nên

$((ABC),(A'BC)) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'} = 45° \Rightarrow$ Đáp án **A** đúng.

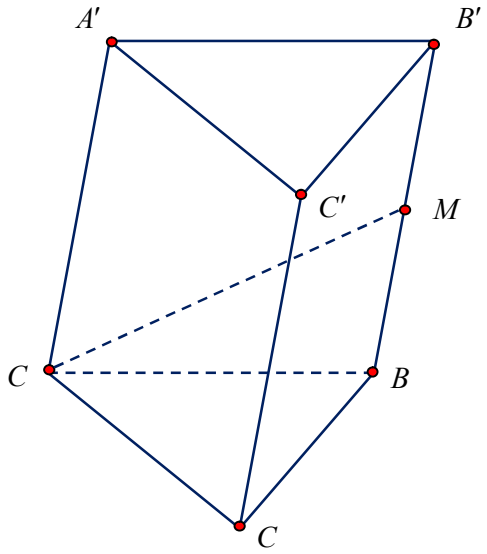
Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có $A'C = \sqrt{AA'^2+AC^2} = \sqrt{a^2+5a^2} = a\sqrt{6} \Rightarrow$ Đáp án **C** sai.

Câu 34: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M là trung điểm cạnh bên BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CC'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB'}-\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB'}-2\overrightarrow{CA}\right)$.

Theo quy tắc hình bình hành ta lại có: $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CB}$.

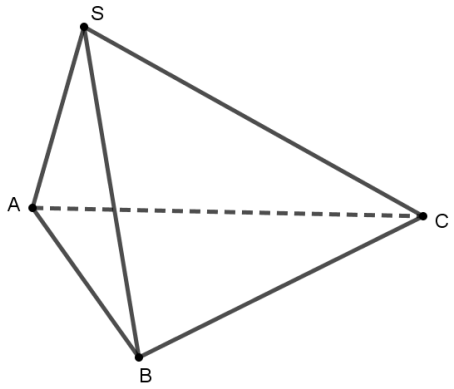
Do đó: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}-2\overrightarrow{CA}\right)=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 35: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=a$, $SB=2a$, $SC=3a$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60°$, $\widehat{CSA}=90°$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\cos\alpha=0$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\cos\alpha=\left|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}\right|}{SA.BC}=\frac{\left|\overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB})\right|}{SA.BC}=\frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}\right|}{SA.BC}$$

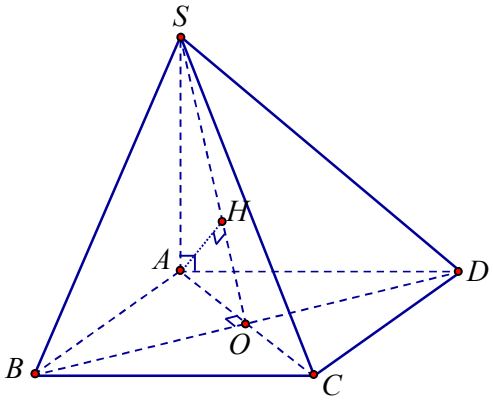
$$=\frac{\left|SA.SC.\cos 90°-SA.SB.\cos 60°\right|}{a.\sqrt{4a^2+9a^2-2.2a.3a.\cos 60°}}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 36: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mp(SBD).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$, $BD\subset(SBD)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$ và $(SAC)\cap(SBD)=SO$

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $AH\perp SO$ thì $AH\perp(SBD)\Rightarrow AH=d\left(A,(SBD)\right)$.

Mặt khác

Tam giác SAO vuông tại A có $OA=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $SA=a$ và $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{OA^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2} \Rightarrow AH=\frac{a}{\sqrt{3}}$

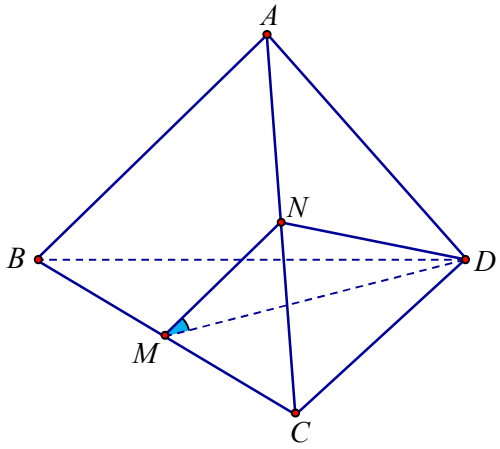
Vậy $d\left(A,\left(SBD\right)\right)=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 37: **(THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC và a là độ dài cạnh tứ diện đều.

Ta có $MN // AB \Rightarrow \left(AB,DM\right)=\left(MN,DM\right)=\widehat{DMN}$.

Tam giác DMN có $DM=DN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$ và $\cos\widehat{DMN}=\frac{DM^2+MN^2-DN^2}{2.DM.MN}$.

$\Leftrightarrow \cos\widehat{DMN}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

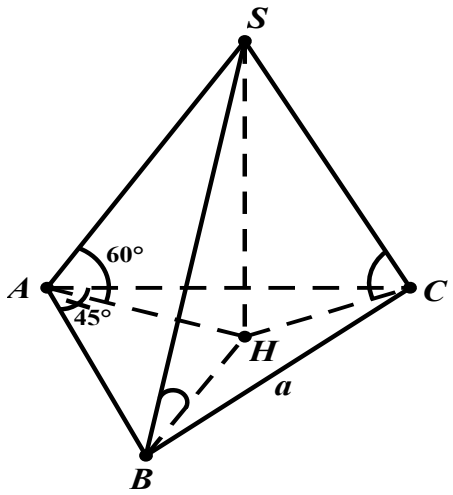
Vậy $\cos\left(AB,DM\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 38: **(THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng $60°$. Biết $BC=a$, $\widehat{BAC}=45°$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$.

A. $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $h=a\sqrt{6}$. **C.** $h=\frac{a}{\sqrt{6}}$. **D.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\left.\begin{array}{l} SH \perp (ABC) \\ SA = SB = SC \end{array}\right\} \Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = AH$

Góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc $\widehat{SAH} = 60°$; $SH = AH.\tan 60° = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 39: **(THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng ?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

Lời giải

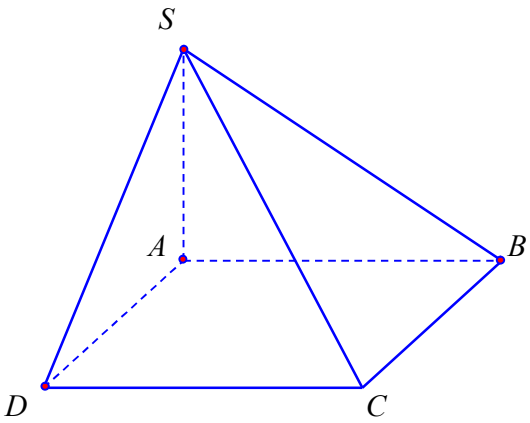
Chọn B

Câu 40: **(THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi trong các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ có mấy mặt bên là tam giác vuông ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



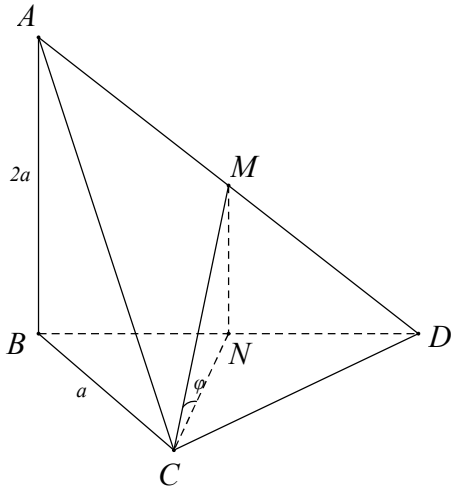
Ta có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên các tam giác SAB, SAD vuông tại A. Lại có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ suy ra $BC \perp SB$ do đó tam giác SBC vuông tại B. Tương tự tam giác SCD vuông tại D.Vậy hình chóp có 4 mặt bên là các tam giác vuông.

Câu 41: **(THPT Phan Đăng Lưu-Huế-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a, AB vuông góc với $mp(BCD)$, $AB = 2a$. M là trung điểm đoạn AD, gọi φ là góc giữa CM với $mp(BCD)$. khi đó:

A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. ***D.*** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi N là trung điểm BC. Ta có góc giữa CM với $mp(BCD)$ bằng góc $\widehat{MCN}$.

$+\ MN = \frac{AB}{2} = a$.

$+ CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

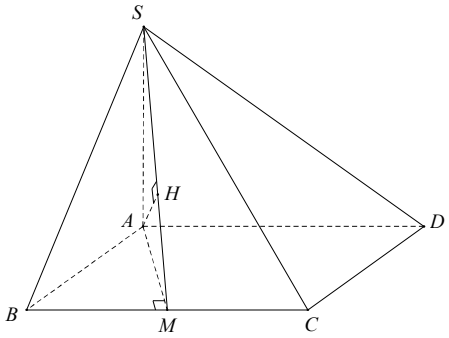
Vậy $\tan\varphi = \frac{MN}{CN} = a.\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 42: (THPT Phan Đăng Lưu-Huế-lần 1 năm 2017-2018) Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAC}=60°, SA$ vuông góc với $mp(ABCD)$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách từ A đến $mp(SBC)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** a.

Lời giải.

Chọn C



+ $ABCD$ là hình thoi, góc $\widehat{BAC}=60°$ nên ta có tam giác ABC đều.

+ Gọi M là trung điểm BC ta có góc giữa (SBC) và đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMA}=60°$.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM ta có:

+ $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Lại có: $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

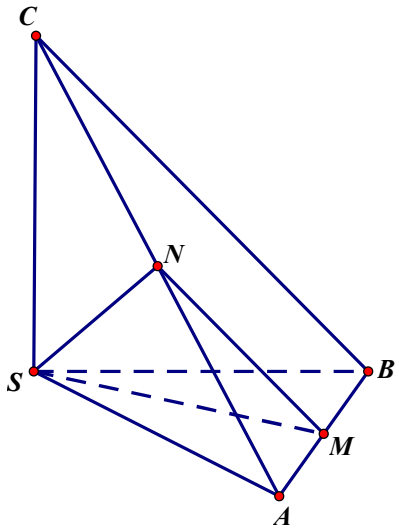
+ $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{AH}{AM} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

Câu 43: (THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó góc giữa SM và BC bằng góc giữa SM và MN.
Ta có:
$\square\square$ $AB = BC = CA$

$\square$ $SM = \frac{1}{2}AB$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

$\square$ $SN = \frac{1}{2}AC$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

$\square$ $MN = \frac{1}{2}BC$.

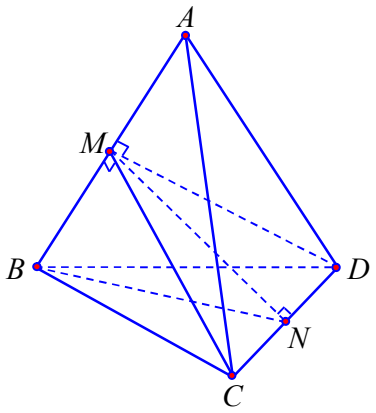
Suy ra $SM = MN = SN$ hay tam giác SMN đều. Do đó $\left(\widehat{SM;BC}\right) = \widehat{SMN} = 60°$.

Câu 44: **(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 5$, các cạnh còn lại bằng 3, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Ta có:
❍ Tam giác ABC cân tại C $\Rightarrow CM \perp AB$ (1)
❍ Tam giác ABD cân tại D $\Rightarrow DM \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (MCD)$

Lại có $\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow MC = MD \Rightarrow MN \perp CD \Rightarrow MN = d(AB, CD)$

Mặt khác

Tam giác BMN vuông tại M có $BM = \frac{5}{2}$, $BN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ và $MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

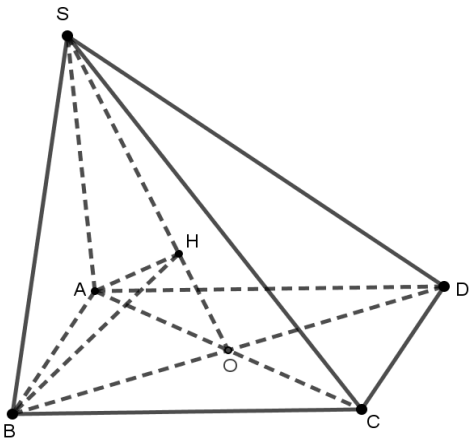
Vậy $d(AB, CD) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 45: (THPT Trần Quốc Tuấn năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Kẻ $AH \perp SO$ tại H.

Ta có: $BD \perp AO$, $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$. Vậy $AH \perp (SBD)$.

Lại có: $AB \perp (SAD)$, do đó góc α giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AB. Vậy $\alpha = \widehat{BAH}$.

Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ nên ta có: $\frac{1}{3}SA.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A, đường cao AH nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{5}{2a^2}$

Suy ra: $AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. Từ đó: $\cos\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 46: (THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là hình chiếu của A trên SB, trong các khẳng định sau:

$(1): AH \perp SC$.

$(2): BC \perp (SAB)$.

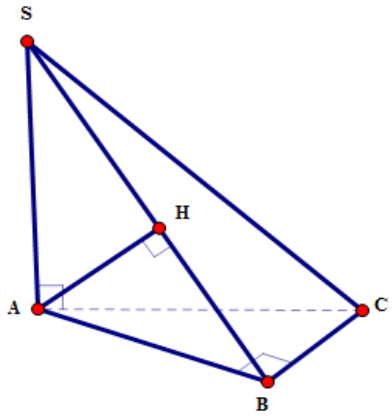
$(3): SC \perp AB$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp SA$, BC ⊥ AB nên $BC \perp (SAB)$.

Và $(SBC) \perp (SAB)$, $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp SC$

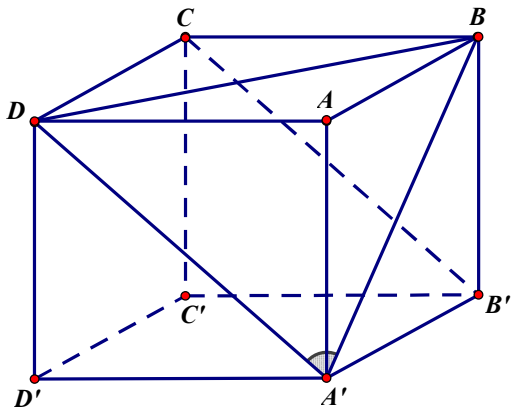
Vậy có hai khẳng định đúng.

Câu 47: (THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \,//\, A'D \Rightarrow (\widehat{A'B;B'C}) = (\widehat{A'B;A'D}) = \widehat{DA'B}$.

Xét $\Delta DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\Delta DA'B$ là tam giác đều.

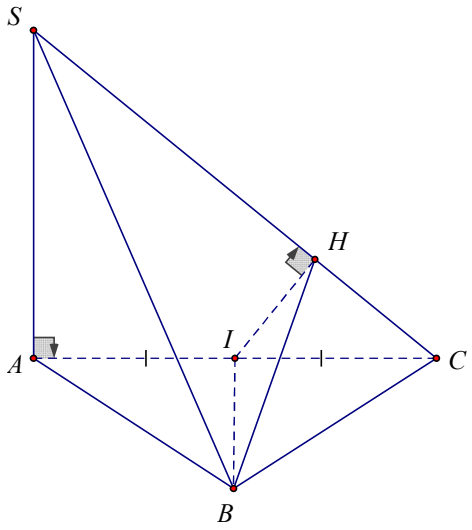
Vậy $\widehat{DA'B} = 60°$.

Câu 48: **(THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018)**.Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SBC)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BI\perp AC(\text{gt}) \\ BI\perp SA\left(SA\perp(ABC)\right) \end{cases}\Rightarrow BI\perp(SAC)\supset SC\Rightarrow SC\perp BI\ \ (1)$.

Theo giả thiết: $SC\perp IH\ \ (2)$.

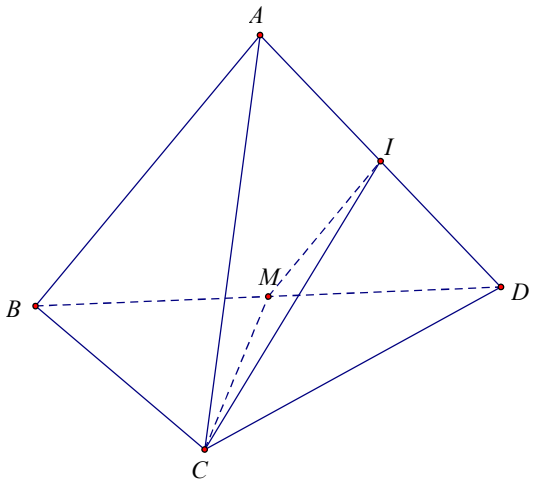
Từ (1) và (2) suy ra: $SC\perp(BIH)$. Mà $SC\subset(SBC)$ nên $(BIH)\perp(SBC)$.

Câu 49: **(THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI, với I là trung điểm của AD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BD.

Ta có: $IM \,//\, AB$.

$\Rightarrow (AB, IC) = (IM, IC)$.

$\Rightarrow \cos(AB, IC) = \cos(IM, IC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}\right)\right| = \left|\cos \widehat{MIC}\right|$.

Mà: $\cos \widehat{MIC} = \dfrac{MI^2 + IC^2 - MC^2}{2.MI.IC} = \dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

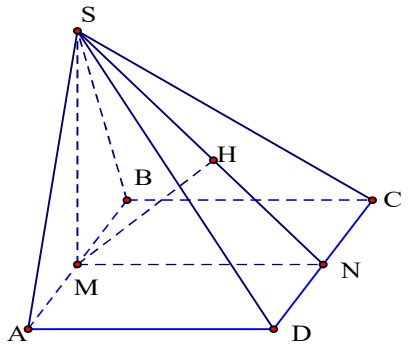
$\Rightarrow \cos(AB, IC) = \left|\cos \widehat{MIC}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 50: (THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $h = a$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N là trung điểm của AB, CD.

Gọi H là hình chiếu của M lên SN ta có: $\left.\begin{matrix} CD \perp MH \\ SN \perp MH \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH \perp (SCD)$

$\Rightarrow MH = d(M, (SCD))$ mà $AM \,//\, (SCD) \Rightarrow MH = d(A, (SCD))$

Mặt khác ta có: $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = a$

Xét tam giác vuông ΔSMN ta có: $MH = \sqrt{\dfrac{SM^2.MN^2}{SM^2 + MN^2}} = a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 51: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **ĐÚNG?**

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Câu A sai vì có thể hai đường thẳng chéo nhau.

Câu C sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng đã cho.

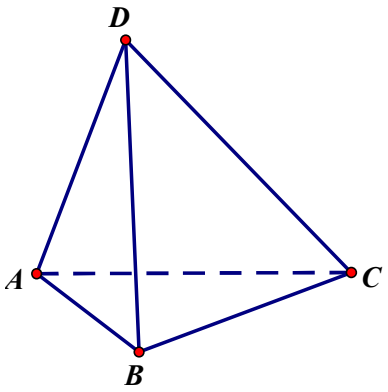
Câu D sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau (khi không đồng phẳng) hoặc cắt nhau (nếu chúng đồng phẳng).

Câu 52: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ bằng?

A. a^2. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



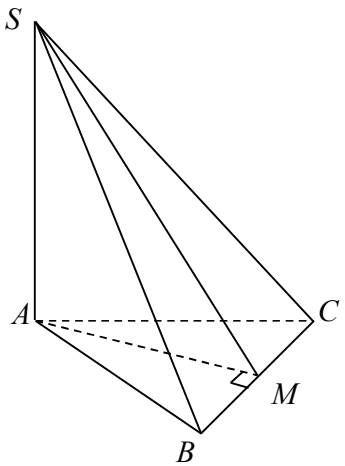
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=CB.CD.\cos 60^0-CA.CD.\cos 60^0=0$.

Câu 53: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $BC\perp(SAB)$. **B.** $BC\perp(SAM)$. **C.** $BC\perp(SAC)$. **D.** $BC\perp(SAJ)$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$.

Theo giải thiết tam giác ABC là tam giác cân tại A và M là trung điểm $BC\Rightarrow BC\perp AM$.

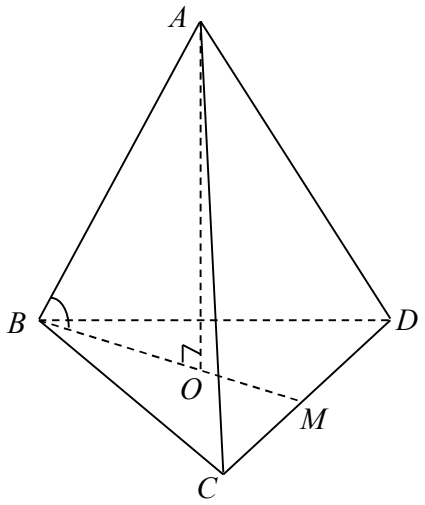
Ta có $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$.

Câu 54: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$. Côsin góc giữa AB và $mp(BCD)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi độ dài các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a. Gọi M là trung điểm của CD. Gọi O là trọng tâm của tam giác BCD.

Ta có $AO \perp (BCD) \Rightarrow$ BO là hình chiếu vuông góc của AB lên $mp(BCD)$.

Do đó $\left(\widehat{AB,(BCD)}\right) = \left(\widehat{AB,BO}\right) = \widehat{ABO}$.

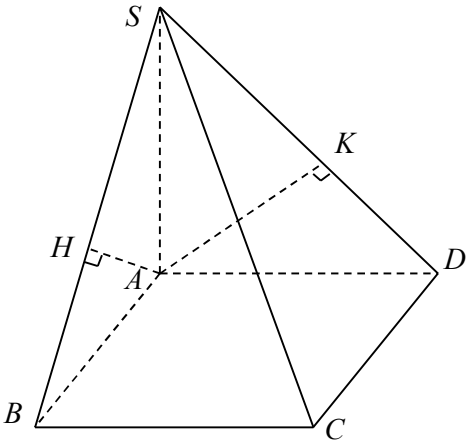
Trong ΔABO vuông tại O, ta có $\cos\widehat{ABO} = \frac{BO}{AB} = \frac{\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 55: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, tam giác SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $HK \perp SC$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $BC \perp AH$. **D.** $AK \perp BD$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết: $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAD) \perp (ABCD)\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$, đáp án B đúng.

Ta có: $\begin{cases}BC \perp AB\\BC \perp SA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, đáp án C đúng.

Ta có $\begin{cases} AH \perp (SBC) \supset SC \\ AK \perp (SCD) \supset SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$, mà $HK \subset (AHK) \Rightarrow HK \perp SC$, đáp án A đúng.

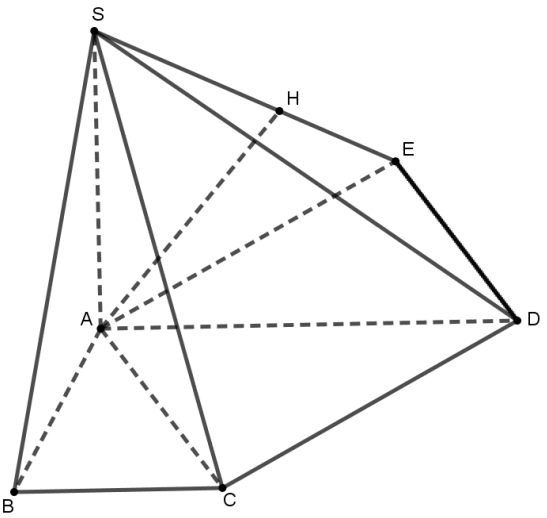
Vậy đáp án D sai.

Câu 56: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng hình bình hành $ACDE$, kẻ $AH \perp SE$ tại H. Ta có: $AC // (SDE)$

$\Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)) = AH$.

Vì $AC \perp CD \Rightarrow AE \perp ED \Rightarrow DE \perp (SAE) \Rightarrow DE \perp AH \Rightarrow AH \perp (SDE)$.

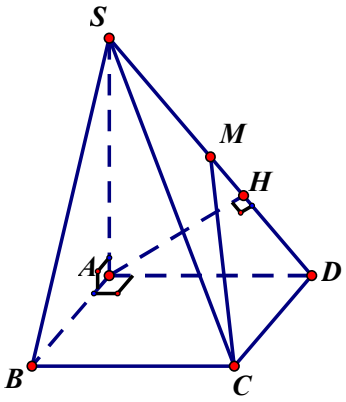
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 57: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $AB // CD$ nên $AB // (SCD)$.

Do đó $d(AB,CM) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AH$ với H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAD.

Ta có $AH = \dfrac{SA.AD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 58: **(THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có MC là hình chiếu của MC' lên (ABC). Suy ra $\alpha = \widehat{C'CM}$.

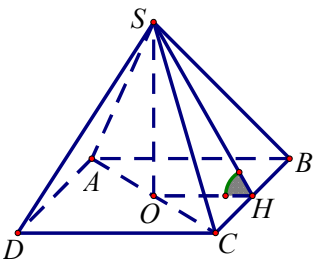
Xét tam giác MCC' vuông tại C có: $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{CM} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 59: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm của AC. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm của BC và góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là α.

Ta có $(SBC)\cap(ABCD)=BC$ mà $BC\perp SH$ và $BC\perp OH$ nên $\widehat{SHO}=\alpha$.

SH là đường cao của tam giác đều SBC cạnh a nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

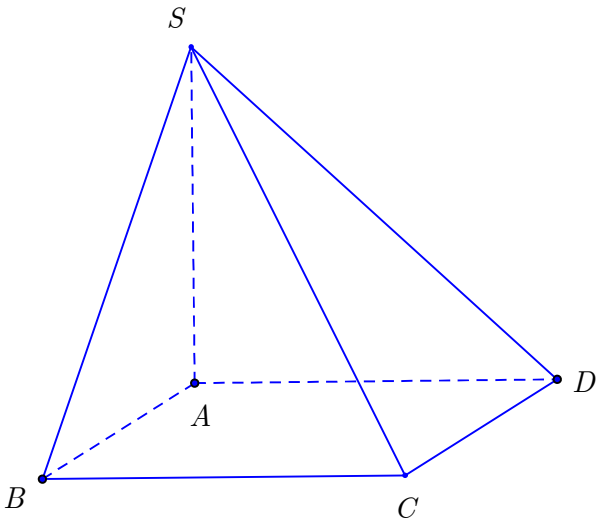
Xét tam giác SOH vuông tại O có: $\cos\alpha=\dfrac{OH}{SH}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 60: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa đường SC và mặt phẳng (SAD) là góc?

A. $\widehat{CSA}$. **B.** $\widehat{CSD}$. **C.** $\widehat{CDS}$. **D.** $\widehat{SCD}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$. Do đó góc giữa SC và (SAD) bằng góc giữa SC và SD.

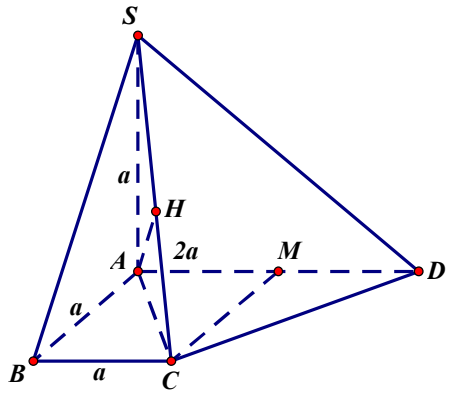
Do góc $\widehat{CSD}<90^\circ$ nên chọn **B.**

Câu 61: **(THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AD=2a$, $AB=BC=SA=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách h từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{a}{3}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $\frac{d\left(A,(SCD)\right)}{d\left(M,(SCD)\right)}=2\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)$.

Dễ thấy $AC\perp CD$, $SA\perp CD$ dựng $AH\perp SA\Rightarrow AH\perp(SCD)$.

Vậy $d\left(A,(SCD)\right)=AH$.

Xét tam giác vuông $SAC\left(\hat{A}=1v\right)$ có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AS^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

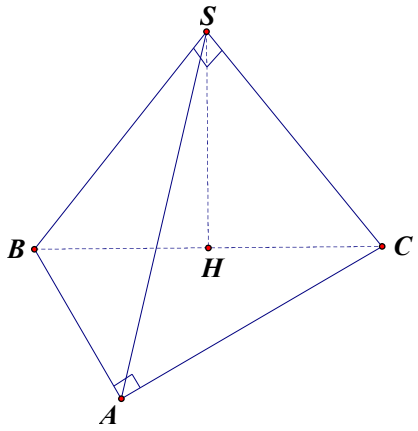
Vậy $\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 62: **(THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB, SC.

A. $45°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



□ Tam giác ABC vuông tại A và tam giác SBC vuông tại S vì $AB=AC=1$, $BC=\sqrt{2}$ và $SB=SC=1$, $BC=\sqrt{2}$.

□ Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}=0-SC.SB.\cos 60°=-\frac{1}{2}$.

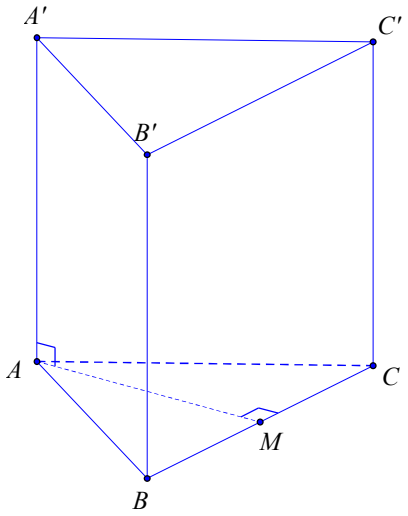
□ Suy ra $\cos(SC;AB)=\left|\cos\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}\right|}{SC.AB}=\frac{1}{2}$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB, SC bằng $60°$.

Câu 63: **(THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC. Do ABC là tam giác đều cạnh a nên ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AM \perp BC$ (1).

Mặt khác ta lại có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AM$ (2).

Từ (1) và (2) ta có AM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.

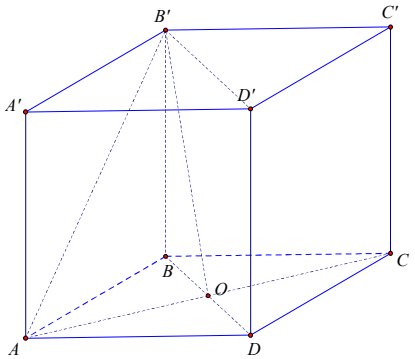
Vậy $d(AA', BC) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 64: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình bên). Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO \perp BD$ (1).

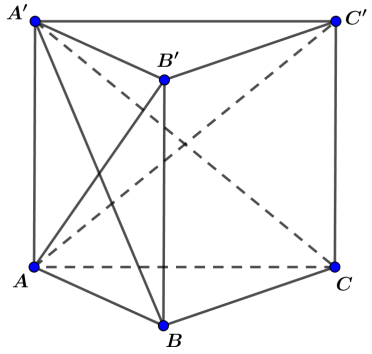
Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO \perp (BDD'B') \Rightarrow (AB', (ABCD)) = (AB', B'O) = \widehat{AB'O}$.

Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin AB'O = \frac{AO}{AB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30°$.

Vậy $\left(AB',\left(ABCD\right)\right)=30°$.

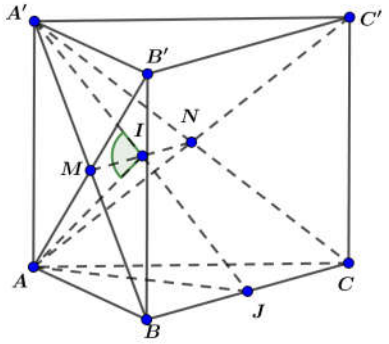
Câu 65: (THPT Mộ Đức-Quãng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(A'BC\right)$, tính $\cos\alpha$



A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

Gọi $M=A'B\cap AB'$ và $N=A'C\cap AC'$.

Khi đó $\left(AB'C'\right)\cap\left(A'BC\right)=MN$.

Kẻ $A'I\perp MN$ $\left(I\in MN\right)$ mà $AA'\perp BC$, $BC//MN\Rightarrow AA'\perp MN$. Vậy $AI\perp MN$.

Khi đó $\left(\left(AB'C'\right),\left(A'BC\right)\right)=\left(AI,A'I\right)=\alpha$.

Gọi J là trung điểm BC.

$AJ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'J=\sqrt{AA'^2+AJ^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a\Rightarrow A'I=\frac{1}{2}A'J=\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Xét tam giác $\Delta A'IA$ có:

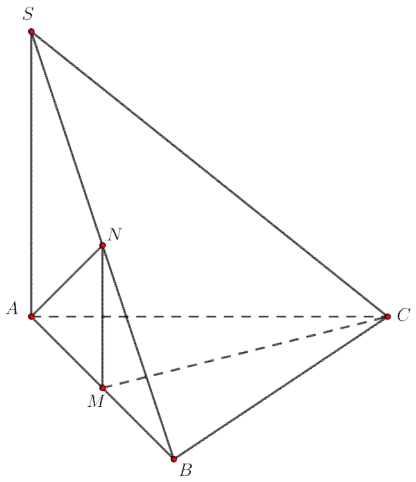
$\cos\widehat{A'IA}=\frac{AI^2+A'I^2-AA'^2}{2.AI.A'I}=\frac{-1}{7}\Rightarrow\cos\alpha=\cos\left(AI,A'I\right)=\cos\left(180°-\widehat{A'IA}\right)=\frac{1}{7}$.

Câu 66: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $AN\perp BC$. **B.** $CM\perp SB$. **C.** $CM\perp AN$. **D.** $MN\perp MC$.

Lời giải

Chọn A



Do tam giác ABC đều nên $CM \perp AB$, vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp CM \Rightarrow CM \perp (SAB)$

$\Rightarrow CM \perp SB$, $CM \perp AN$ nên B, C đúng.

Do $MN // SA$ nên $MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp MC$ nên D đúng.

Vậy A sai.

Câu 67: **(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)** Hình lăng trụ có 45 cạnh có bao nhiêu mặt?

A. 15. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 17.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là số cạnh của một mặt đáy hình lăng trụ ta có $3x = 45 \Leftrightarrow x = 15$.

Vậy hình lăng trụ có 15 mặt bên và 2 mặt đáy.

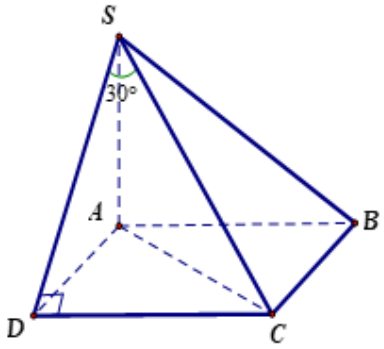
Số mặt của hình lăng trụ là 17.

Câu 1: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAD) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V=\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta thấy:

$$\left.\begin{array}{l} SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD \\ CD\perp AD \end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow (SC;(SAD))=\widehat{CSD}=30°.$$

Trong tam giác vuông SDC: $SD=\dfrac{CD}{\tan 30°}=\dfrac{a}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SAD: $SA=\sqrt{SD^2-AD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}=a\sqrt{2}.$

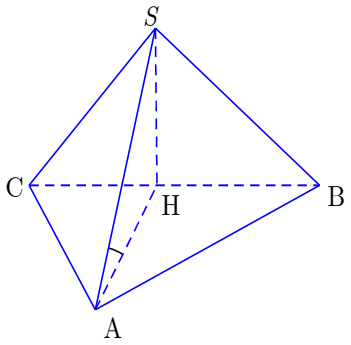
Thể tích V của khối chóp: $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $75°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC, (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có $SH\perp(ABC)$.

Khi đó ta có hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) là AH. Suy ra góc giữa SA và (ABC) bằng góc giữa SA và AH bằng góc SAH.

Ta có: $AH=\frac{1}{2}BC$, $SH=BC\frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó trong tam giác SAH ta có $\tan SHA=\frac{SH}{AH}=\sqrt{3}$.

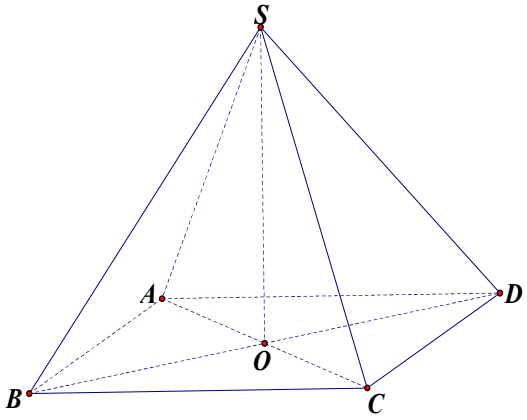
Vậy góc $SAH=60°$.

Câu 3: **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA=SC$ và $SB=SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD\perp(SBD)$. **B.** $SO\perp(ABCD)$. **C.** $BD\perp SA$. **D.** $AC\perp SD$.

Lời giải

Chọn A



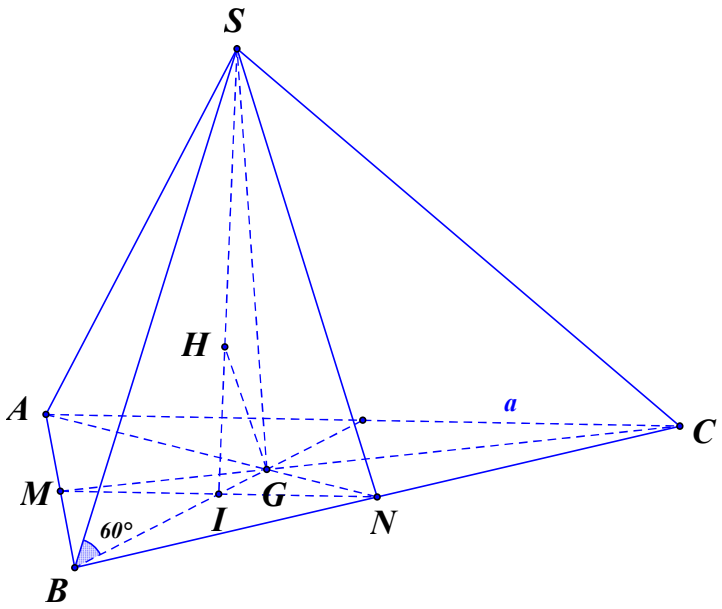
- Ta có $CD\perp(SBD)\Rightarrow CD\perp BD$ điều này vô lý vì ΔCOD là tam giác vuông tại O.

Câu 4: **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SMN) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{7a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{7}$. **D.** $\frac{a}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $d\left(A;\left(SMN\right)\right)=3d\left(G;\left(SMN\right)\right)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là giao điểm của MN và BG, H là chân đường cao kẻ từ G của tam giác SIG. Khi đó $d\left(G;\left(SMN\right)\right)=GH$.

Lại có:

- $BG=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $BI=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow IG=BG-BI=\frac{a\sqrt{3}}{12}$.
- $SG=BG.\tan 60^\circ=a$.
- $\frac{1}{HG^2}=\frac{1}{SG^2}+\frac{1}{IG^2}=\frac{49}{a^2}\Rightarrow GH=\frac{a}{7}\Rightarrow d\left(A;\left(SMN\right)\right)=\frac{3a}{7}$.

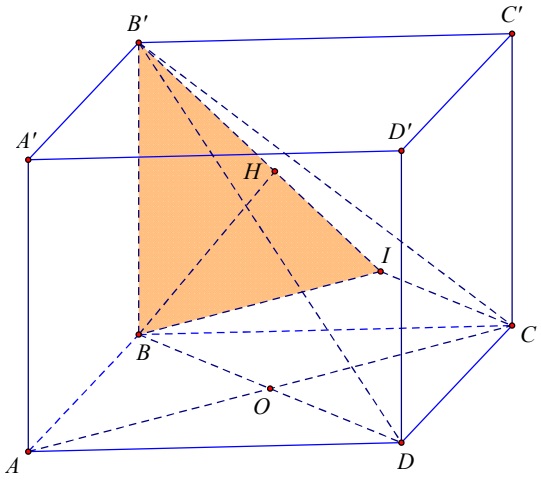
Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SMN\right)$ bằng $\frac{3a}{7}$.

Câu 5: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CB' bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng hình vuông $BOCI$ khi đó ta có $CI \perp (BB'I) \Rightarrow (B'CI) \perp (BB'I)$.

Trong mặt phẳng $(BB'I)$ kẻ $BH \perp B'I$ khi đó ta có $d(BD, CB') = BH$.

Xét tam giác vuông $B'BI$ ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

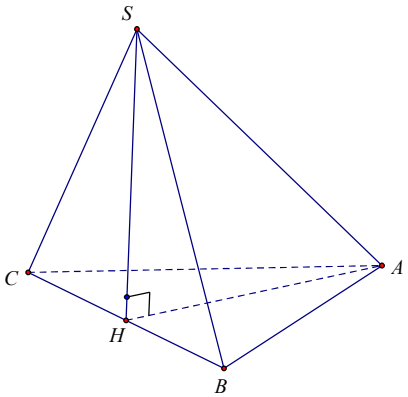
Vậy $d(BD, CB') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6: **(SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt ABC và SBC là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết ta có $(ABC) \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ hay SH là đường cao của hình chóp.

Khi đó ta có $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.

Mặt khác theo giả thiết tam giác SBC và ABC là tam giác đều nên H là trung điểm của BC và $AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SHA ta có $\tan \widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = 1 \Rightarrow \widehat{SAH} = 45°$.

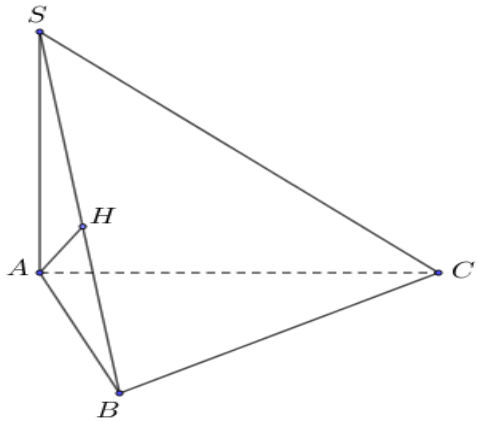
Vậy $\left(SA,\left(ABC\right)\right) = 45°$.

Câu 7: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và tam giác ABC vuông tại B. Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AH \perp SC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $SA \perp BC$. **D.** $AH \perp AC$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp \left(ABC\right) \Rightarrow SA \perp BC$, suy ra C đúng.

Lại có $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp \left(SAB\right) \supset AH \Rightarrow BC \perp AH$, suy ra B đúng.

Mặt khác $AH \perp SB$, $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp \left(SBC\right) \supset SC \Rightarrow AH \perp SC$, suy ra A đúng.

Vậy **Chọn D**

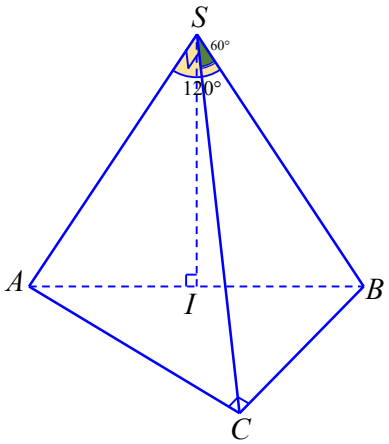
Câu 8: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 120°$, $\widehat{BSC} = 60°$, $\widehat{CSA} = 90°$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. I là trung điểm AC. **B.** I là trọng tâm tam giác ABC.

C. I là trung điểm AB. **D.** I là trung điểm BC.

Lời giải

Chọn C



Đặt $a = SA = SB = SC$, với $a > 0$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SAB và SBC, ta có $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$.

Tam giác SAC vuông cân tại S có $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác ABC có $BC^2 + CA^2 = AB^2$ nên nó vuông tại C

Gọi I là trung điểm cạnh AB thì $IA = IB = IC$ và $SA = SB = SC \Rightarrow SI \perp (ABC) \Rightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

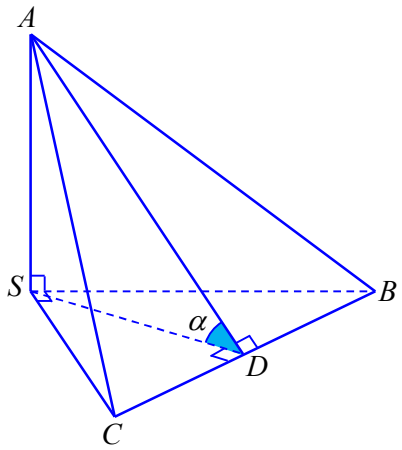
Câu 9: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB; SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)?

A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

❍ Cách 1:



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

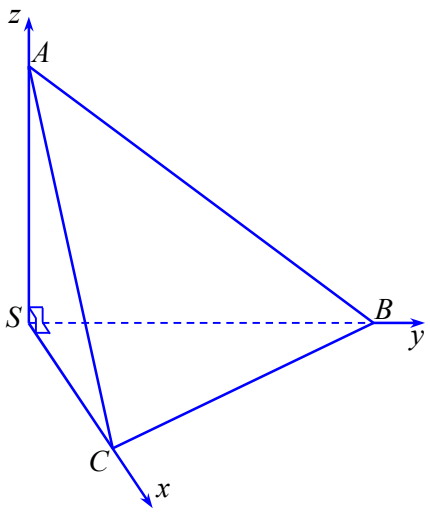
Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SDA} = \alpha$.

Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos\alpha = \frac{SD}{AD} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

❍ Cách 2:



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ

Ta có $S(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(ABC): x+y+z-1=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;1;1)$.

Mặt phẳng $(SBC)\equiv Oxy: z=0$ có VTPT là $\vec{k}=(0;0;1)$.

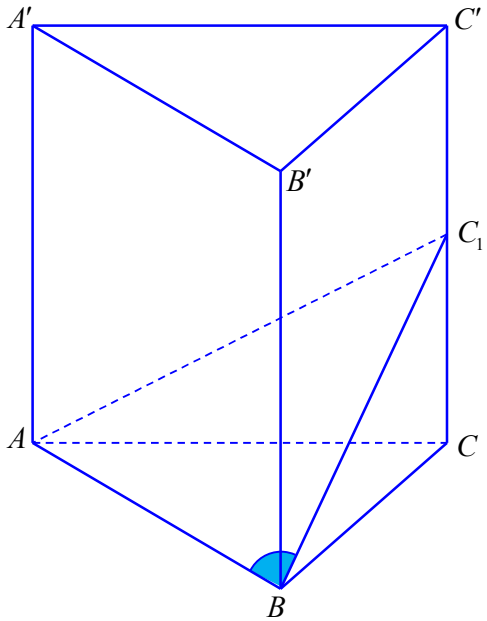
Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 10: **(THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi C_1 là trung điểm của CC'. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng BC_1 và $A'B'$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $A'B'\,//\,AB\Rightarrow\left(\widehat{BC_1,A'B'}\right)=\left(\widehat{BC_1,AB}\right)=\widehat{ABC_1}$.

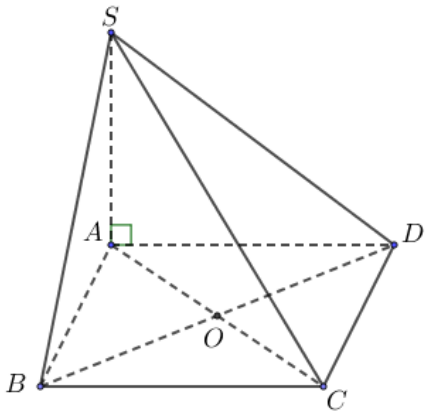
Tam giác ABC_1 có $AB=1;\ AC_1=BC_1=\sqrt{2}$ và $\cos B=\dfrac{AB^2+BC_1^2-AC_1^2}{2AB.BC_1}\Leftrightarrow \cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 11: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA\perp(ABCD)$. Tìm khẳng định **sai**?

A. $AD\perp SC$. **B.** $SC\perp BD$. **C.** $SA\perp BD$. **D.** $SO\perp BD$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp SC$. Ta có $\begin{cases}SA\perp(ABCD)\\BD\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp BD$.

Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SO$.

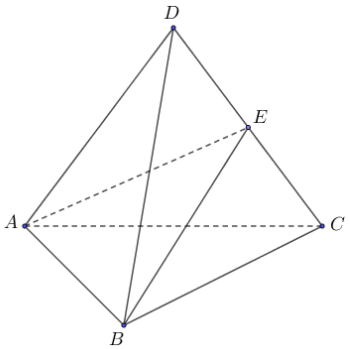
Vậy khẳng định $AD\perp SC$ là khẳng định sai.

Câu 12: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1. Đặt $AB=a$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{2}=0\Rightarrow AB\perp CD$.

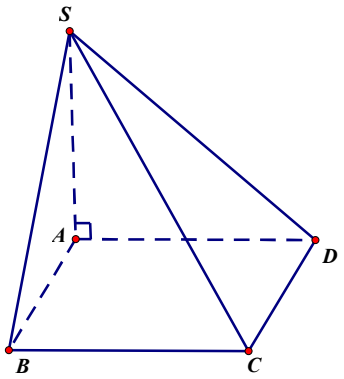
Cách 2. Gọi E là trung điểm CD thì $AE\perp CD$, $BE\perp CD\Rightarrow CD\perp(ABE)\Rightarrow CD\perp AB$.

Câu 13: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp S.$ABCD$ có S$A\perp(ABC$D$)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC=a\sqrt{5}$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC?

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$d\left(BC;SD\right)=d\left(BC;\left(SAD\right)\right)=d\left(B;\left(SAD\right)\right)=BA$.

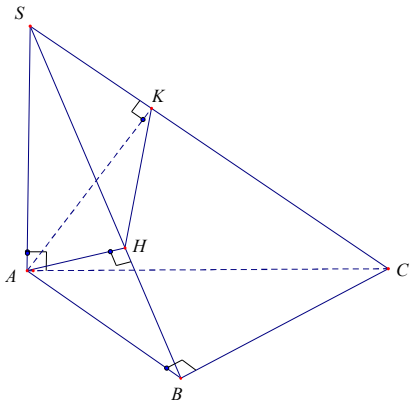
$BA=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{5a^2-2a^2}=a\sqrt{3}$.

Câu 14: **(THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB=a$, $AC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$. Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$, $\left(SBC\right)$. Tính $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SA\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SA\perp BC$

Mặt khác $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp AH$ (1).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC khi đó ta có $AH\perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow AH\perp SC$ (3).

Mặt khác ta lại có $AK\perp SC$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $SC\perp\left(AHK\right)\Rightarrow SC\perp HK$.

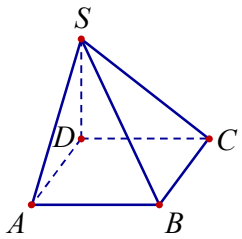
Vậy $\left(\left(SAC\right),\left(SBC\right)\right)=\left(AK,HK\right)=\widehat{AKH}$.

Do $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow AH\perp HK$ hay tam giác AHK vuông tại H.

Ta có $AH=\dfrac{AB.SA}{\sqrt{AB^2+SA^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$; $AK=\dfrac{AC.SA}{\sqrt{AC^2+SA^2}}=a\sqrt{2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Vậy $\cos\widehat{AKH}=\dfrac{HK}{AK}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 15: **(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $d\left(B,(SAC)\right)=a$.

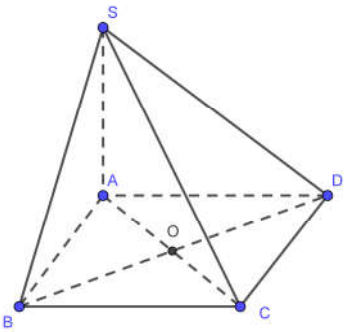
B. $d\left(B,(SAC)\right)=a\sqrt{2}$.

C. $d\left(B,(SAC)\right)=2a$.

D. $d\left(B,(SAC)\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

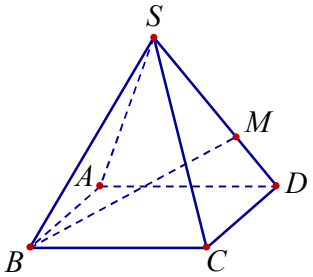
Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}BO\perp AC\\BO\perp SA\end{cases}\Rightarrow BO\perp(SAC)\Rightarrow d\left(B,(SAC)\right)=BO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16: **(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM=2MD$.



Tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\dfrac{1}{3}$.

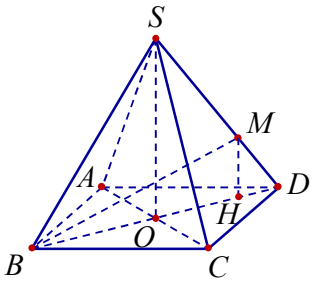
B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOD vuông tại O có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MH \perp BD$ tại H nên $\left(BM;(ABCD)\right) = \widehat{MBH}$

Do $MH \perp BD \Rightarrow MH // SO$. Ta có $\dfrac{MH}{SO} = \dfrac{MD}{SD} = \dfrac{HD}{OD} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow MH = \dfrac{SO}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ và $HD = \dfrac{1}{3}OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow BH = BD - HD = a\sqrt{2} - \dfrac{a\sqrt{2}}{6} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Xét tam giác BHM vuông tại H có:

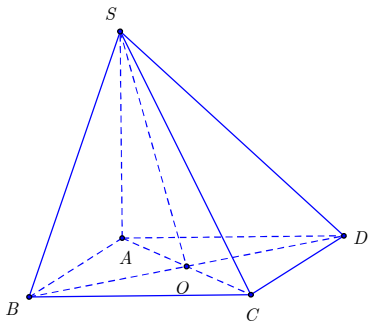
$\tan\left(BM;(ABCD)\right) = \widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} \Rightarrow \tan\left(BM;(ABCD)\right) = \dfrac{1}{5}$.

Câu 17: **(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$ Gọi α là góc tạo bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC), khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây:

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



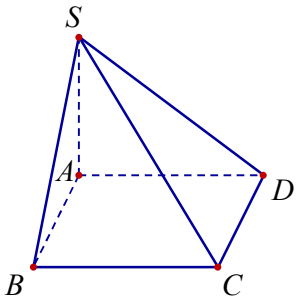
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Suy ra $\alpha = \widehat{BSO}$.

Lại có $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

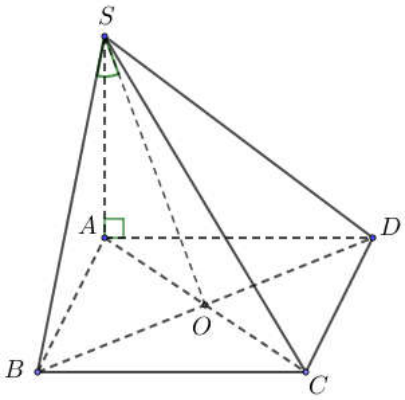
Câu 18: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{6}$ (hình vẽ). Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$ ta được kết quả là



A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $BO\perp(SAC)\Rightarrow\alpha=\widehat{(SB,(SAC))}=\widehat{BSO}$.

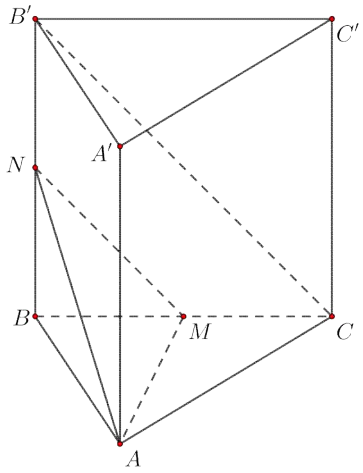
Ta có $SB=a\sqrt{7}$, $\sin\alpha=\frac{BO}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$.

Câu 19: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm BB' nên $MN//B'C \Rightarrow d\left(AM;B'C\right)=d\left(B'C;\left(AMN\right)\right)=d\left(C;\left(AMN\right)\right)$ $=d\left(B;\left(AMN\right)\right)$. Gọi H là hình chiếu của B lên $\left(AMN\right)$, do tứ diện $B.AMN$ là tứ diện vuông đỉnh B nên $\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{BA^2}+\dfrac{1}{BM^2}+\dfrac{1}{BN^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{7}{a^2}$.

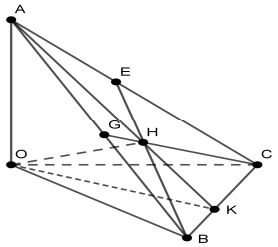
Vậy $BH=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 20: **(THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. H là trung điểm của AC.
B. H là trọng tâm tam giác ABC.
C. H là trung điểm của BC.
D. H là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OK\perp BC$; $OH\perp AK$.

Ta có: $\begin{cases}OK\perp BC\\OA\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(OAK\right)\Rightarrow BC\perp OH$.

$\begin{cases}OH\perp BC\\OH\perp AK\end{cases}\Rightarrow OH\perp\left(ABC\right)\Rightarrow H$ là hình chiếu của O trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$.

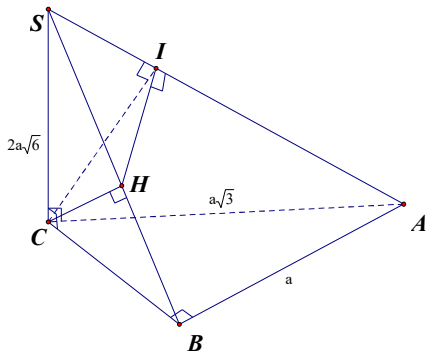
$AH\perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

Câu 21: **(THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC\perp\left(ABC\right)$ và tam giác ABC vuông tại B. Biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SC=2a\sqrt{6}$. Sin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$, $\left(SAC\right)$ bằng

A. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
B. $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.
C. 1.
D. $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (SAC) từ C kẻ $CI \perp SA$, $I \in SA$. Trong mặt phẳng (SAB) từ I kẻ $IH \perp SA$ cắt SB tại H.

Ta có: $AB \perp SC$, $AB \perp BC \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp CH$ mà $CH \perp SB \Rightarrow CH \perp (SAB)$

$\Rightarrow CH \perp SA$ mà $CI \perp SA \Rightarrow SA \perp (CIH)$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) là $\widehat{CIH}$. Vì $CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp IH$ hay tam giác CHI vuông tại H.

Xét tam giác vuông SAC có: $CI = \dfrac{SC.CA}{\sqrt{SC^2 + CA^2}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông SBC có: $CH = \dfrac{SC.CB}{\sqrt{SC^2 + CB^2}} = \dfrac{SC.\sqrt{CA^2 - AB^2}}{\sqrt{SC^2 + CA^2 - AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{78}}{13}$.

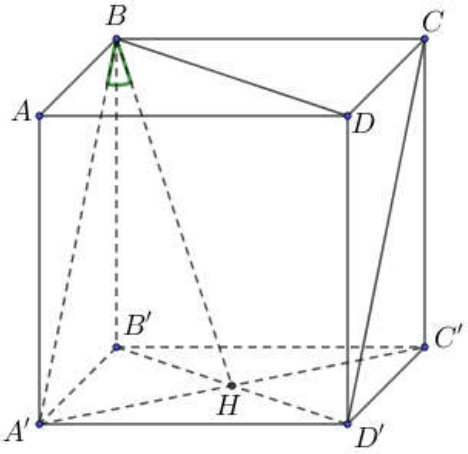
Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) là $\widehat{CIH}$ nên $\sin \widehat{CIH} = \dfrac{CH}{CI} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Câu 22: **(THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $A'H \perp B'D'$, $A'H \perp BB' \Rightarrow A'H \perp (BB'D'D)$. BH là hình chiếu của $A'B$ trên

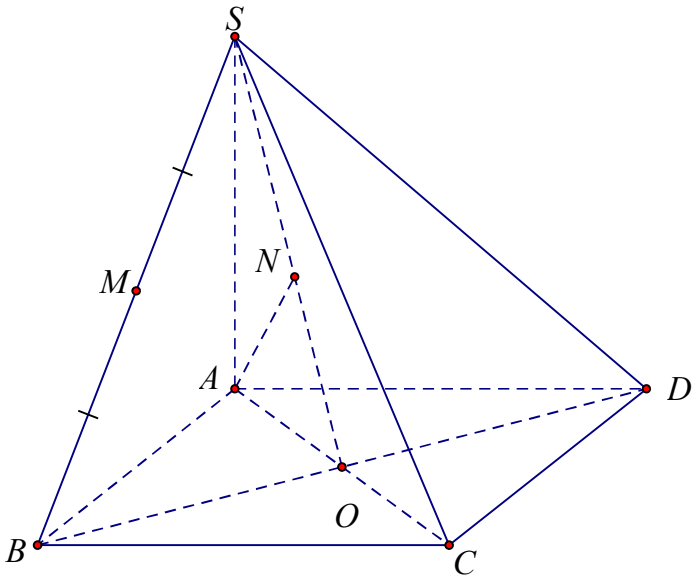
$(BB'D'D) \Rightarrow \left(\widehat{A'H,(BB'D'D)}\right) = \widehat{A'BH} = \alpha$. $\sin\alpha = \dfrac{A'H}{A'B} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 23: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 2, cạnh bên SA bằng 3 và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh bên SB và N là hình chiếu vuông góc của A trên SO. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AC \perp (SDO)$. **B.** $AM \perp (SDO)$. **C.** $SA \perp (SDO)$. **D.** $AN \perp (SDO)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \supset AN \Rightarrow AN \perp BC$.

Theo giả thiết: $AN \perp SO$.

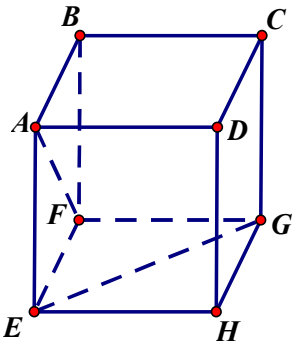
Vậy $AD \perp (SDO)$.

Câu 24: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vecto $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn B



Nhận xét $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ nên $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{FAC}$.

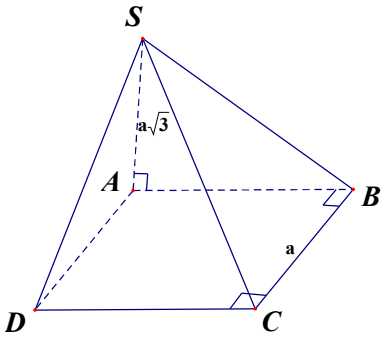
Tam giác FAC là tam giác đều nên $\widehat{FAC}=60^{\circ}$.

Câu 25: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp SB$ và $BC\perp DC$.

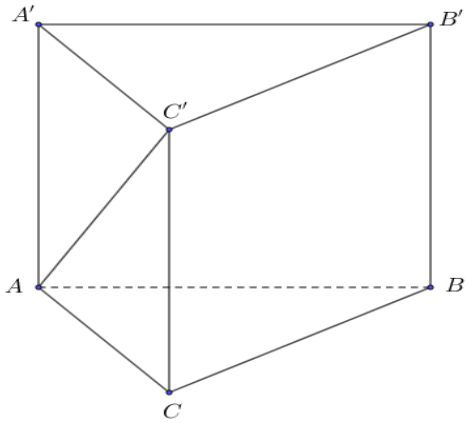
Do đó, BC chính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SB và DC.
Nên khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DC là $BC=a$.

Câu 26: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=\sqrt{3}$ và $AA'=1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và $\left(ABC\right)$ bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 75°.

Lời giải

Chọn C



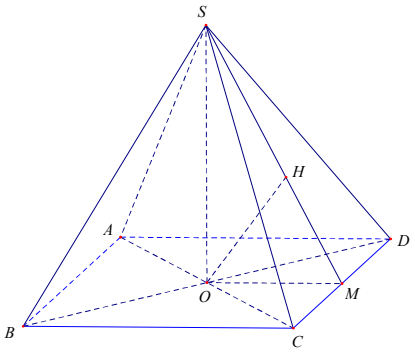
Ta có $\widehat{\left(AC',\left(ABC\right)\right)}=\widehat{\left(AC',AC\right)}=\widehat{CAC'}$, $\tan\widehat{C'AC}=\frac{CC'}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{C'AC}=30^{\circ}$.

Câu 27: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB=2a$, $SO=a$ với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của cạnh CD, ta có $\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow (SCD) \perp SOM$.

Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM$, $(H \in SM)$ thì OH là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD).

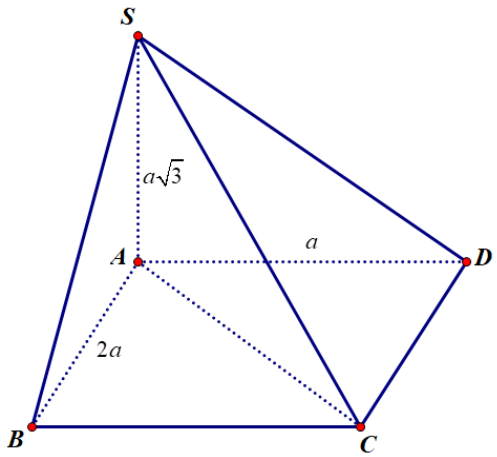
Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC

Do đó $\widehat{[SC,(ABCD)]} = \widehat{SCA}$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$

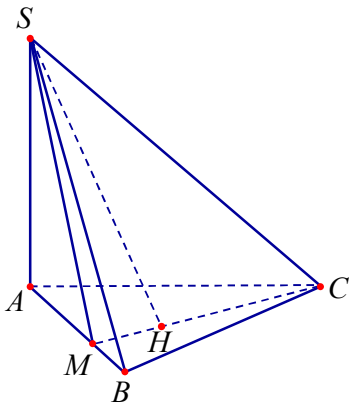
Trong tam giác vuông SAC: $\cos\widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 29: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$, $AB=AC=a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM=\dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM.

A. $d=\dfrac{2a\sqrt{110}}{5}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{110}}{5}$. **D.** $d=\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $CM=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $SM=\sqrt{4a^2+\dfrac{4a^2}{9}}=\dfrac{2a\sqrt{10}}{3}$, $SC=a\sqrt{6}$.

Đặt $p=\dfrac{SM+MC+SC}{2}$.

Diện tích tam giác SMC: $S_{\Delta SMC}=\sqrt{p(p-SM)(p-CM)(p-SC)}=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$

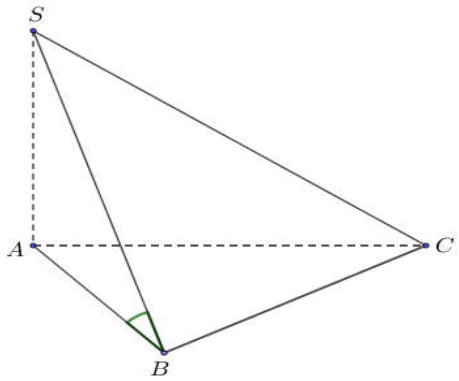
Suy ra khoảng cách từ S đến CM: $SH=\dfrac{2S_{\Delta SMC}}{CM}=\dfrac{a\sqrt{110}}{5}$.

Câu 30: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=BC=a$, $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

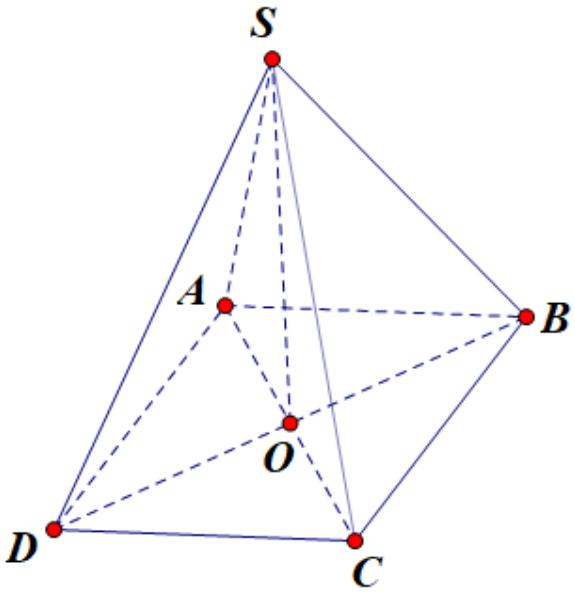
$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Câu 31: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $60°$. **B.** $75°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC} = 60°$ nên ΔACD đều và $OD = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

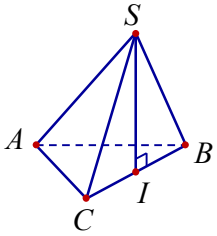
Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan \widehat{SDO} = \dfrac{SO}{DO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{SDO} = 30°$.

Câu 32: **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC=a\sqrt{2}$ nên tam giác ABC vuông tại A. Vì $SA=SB=SC=a$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông tại A nên I là trung điểm của BC.

Ta có $\cos(AB,SC)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}\right|}{AB.SC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SI}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}BA.BC.\cos 45^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

$\cos(AB,SC)=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{a^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{(AB,SC)}=60^\circ$.

Cách 2: $\cos(AB,SC)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}\right|}{AB.SC}$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}=\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=SB.SC.\cos 90^\circ-SA.SC.\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

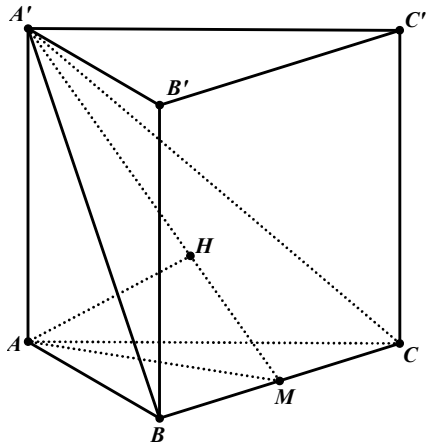
Khi đó $\cos(AB,SC)=\dfrac{\left|\frac{-a^2}{2}\right|}{a^2}=\dfrac{1}{2}$

Câu 33: **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của A trên $A'M$ ta có:

$\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AA'M)$ mà $AH\subset(AA'M)\Rightarrow BC\perp AH$.

$\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp A'M\end{cases}\Rightarrow AH\perp(A'BC)$ nên $d\left(A,(A'BC)\right)=AH$.

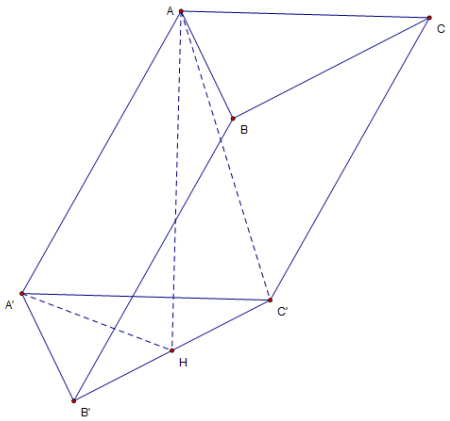
Trong tam giác $AA'M$ vuông tại A có $AH=\dfrac{AM.AA'}{\sqrt{AM^2+AA'^2}}=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 34: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $AH\perp(A'B'C')$ nên góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy $(A'B'C')$ là $\widehat{AA'H}$

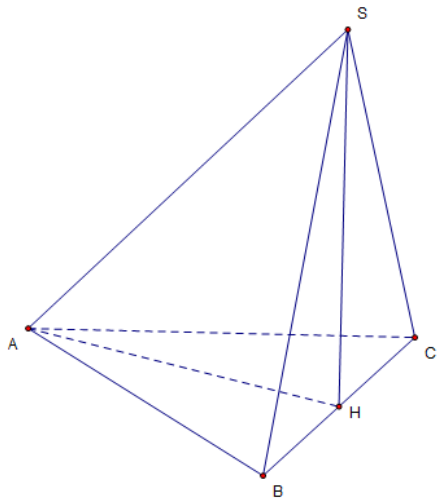
Do hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a suy ra $A'H=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AH=\dfrac{a}{2}$.

Câu 35: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=a$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC thì khi đó $SH \perp (ABC)$; suy ra HA là hình chiếu của SA trên (ABC).

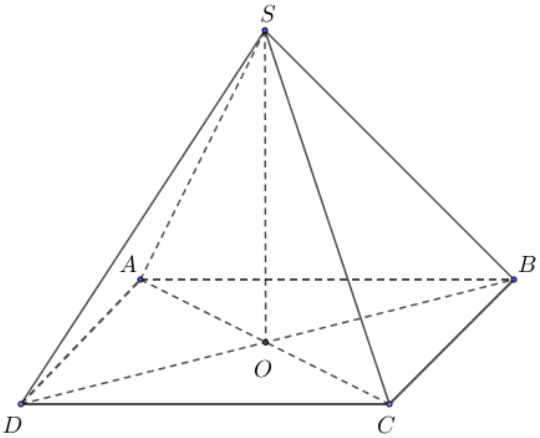
Do đó $\widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{(SA;HA)} = \widehat{SAH} \Rightarrow \cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 36: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của mặt đáy $\Rightarrow \left(\widehat{SO,(ABCD)}\right) = \widehat{SBO} = 60°$.

Ta có $SO = BO.\sqrt{3} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 37: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

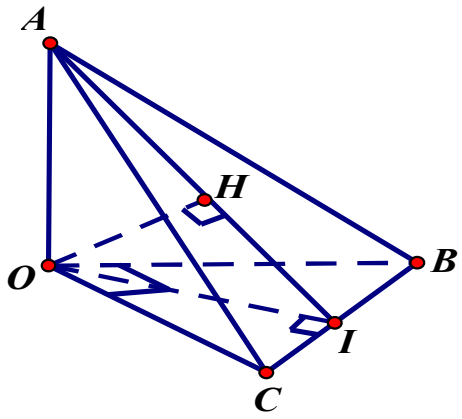
B. H là trực tâm tam giác ABC.

B. $OA\perp BC$.

D. $AH\perp(OBC)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp BC$ và $OA\perp(OBC)\Rightarrow OA\perp BC$.

Suy ra $BC\perp(AOH)\Rightarrow BC\perp AH\ (1)$

Ta lại có $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp AC$ và $OB\perp(OAC)\Rightarrow OB\perp AC$

Suy ra $AC\perp(BOH)\Rightarrow AC\perp BH\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC.

Gọi I là chân đường vuông góc của O lên đường thẳng BC

Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OA^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OA^2}$.

Vậy D là đáp án sai.

Câu 38: **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a\perp(P)$ và $b//(P)$ thì $a\perp b$.

B. Nếu $a\perp b$, $c\perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.

C. Nếu $a//b$ và $b\perp c$ thì $c\perp a$.

D. Nếu $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a//c$.

Lời giải

Chọn D

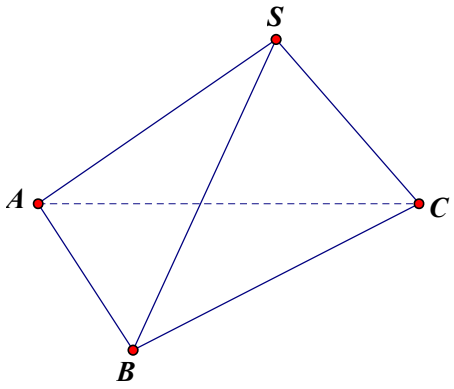
Sai vì a và c có thể không đồng phẳng.

Câu 39: **(SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC=a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

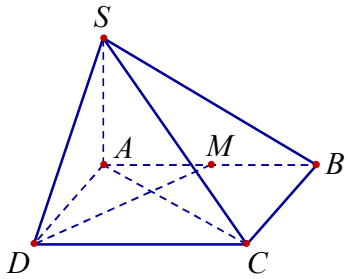
Chọn B



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{SB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AC}}{a^2}=\dfrac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{a^2}=\dfrac{-\dfrac{a^2}{2}+0}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $120°$.

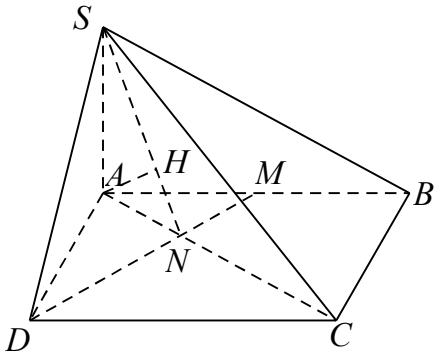
Câu 40: **(SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a\sqrt{2}$, $AD=a$ và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SDM\right)$ bằng



A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

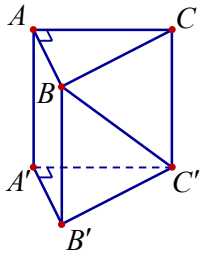
Lời giải

Chọn D



Gọi $N=AC\cap DM$. Ta có $\dfrac{AM}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, do đó hai tam giác ABC và DAM đồng dạng, suy ra $\widehat{AMN}+\widehat{MAN}=90°$. Vậy $AC\perp DM\Rightarrow DM\perp\left(SAC\right)$ mà $DM\subset\left(SDM\right)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SDM\right)$ là $90°$.

Câu 41: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC = a$.

$\Delta ABA'$ vuông tại $A \Rightarrow A'B = a\sqrt{2}$.

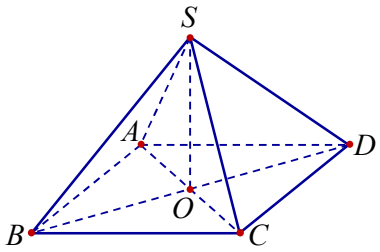
Ta có $\begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A' \perp (ABB'A')$.

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$\Rightarrow (BC';(ABB'A')) = (BC';BA')$.

$\Delta A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan \widehat{A'BC'} = \frac{A'C'}{A'B} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 42: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O, $SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

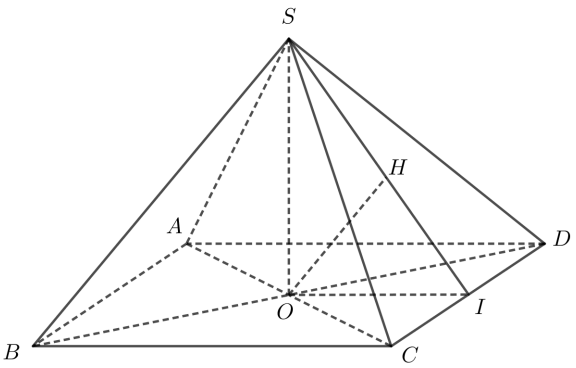


A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Gọi I là trung điểm CD. Trong mặt phẳng (SOI), kẻ $OH \perp SI$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp OI \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp OH$.

Mà $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Suy ra $d(O;(SCD)) = OH$.

Ta có $OI = \frac{1}{2}BC = a$, $SO = a \Rightarrow \Delta SOI$ vuông cân tại $O \Rightarrow OH = \frac{1}{2}SI = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Vậy $d(O;(SCD)) = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Cách 2: Vì tứ diện $SOCD$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên

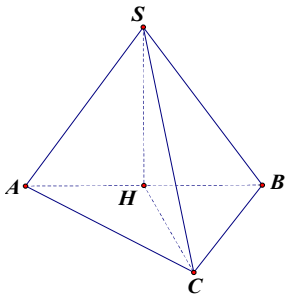
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Câu 43: **(THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại C. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. H là trung điểm cạnh AB.
B. H là trọng tâm tam giác ABC.
C. H là trực tâm tam giác ABC.
D. H là trung điểm cạnh AC.

Lời giải

Chọn A



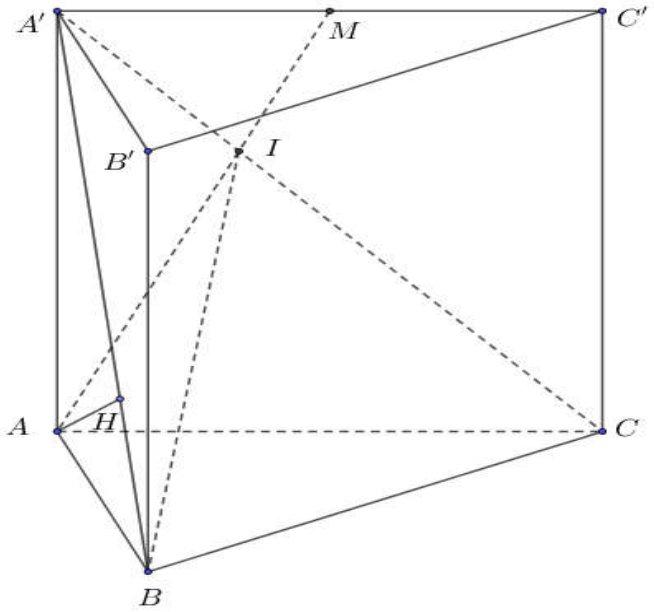
Vì $SA = SB = SC$ suy ra $HA = HB = HC$ do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà ABC là tam giác vuông tại C suy ra H là trung điểm của cạnh huyền AB.

Câu 44: **(THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính khoảng cách d từ điểm A tới (IBC).

A. $d=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}$. **C.** $d=\dfrac{5a}{3\sqrt{2}}$. **D.** $d=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D



Vẽ AH vuông góc $A'B$ tại H. Ta có $BC\perp(A'AB)\Rightarrow BC\perp AH\Rightarrow AH\perp(A'BC)$

$$d=d\left(A,(A'BC)\right)=d\left(A,(IBC)\right)=AH=\frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2+AB^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Câu 45: **(THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018)** Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều cả 5 điểm S, A, B, C, D?

A. 5. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Có 5 mặt phẳng cách đều $ABCDEF$ điểm S, A, B, C, D:

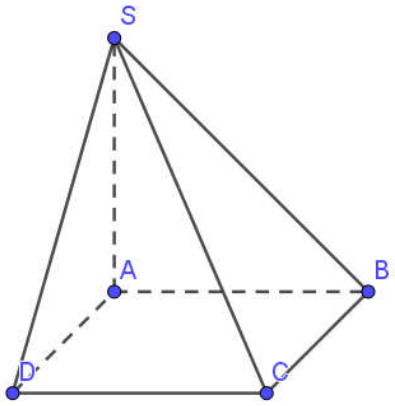
- Mặt phẳng đi qua 4 trung điểm của 4 cạnh bên: có 9 mặt.
- Mặt phẳng đi qua tâm O và song song với từng mặt bên: có 4 mặt như vậy

Câu 46: **(THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD).$

Mà $\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SA\\AD\cap SA=A\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD).$

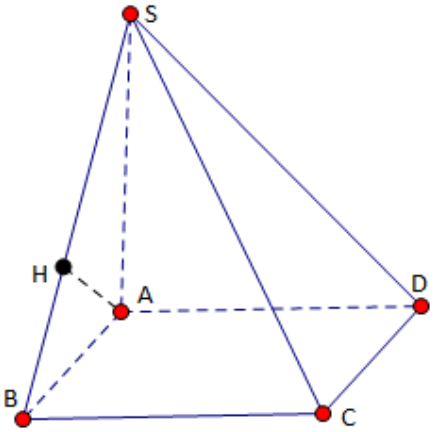
$\cos\left(\widehat{SB,(SAD)}\right)=\cos\widehat{BSA}=\dfrac{SA}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$

Câu 47: **(THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4, biết $SA=3$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD là

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{12}{5}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $4\ \ 3$.

Lời giải

Chọn B

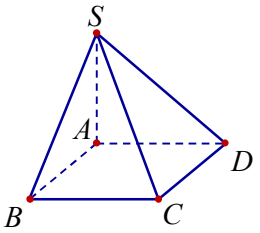


Kẻ $AH\perp SB$

Ta có $\begin{cases}AD\perp SA\\AD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)$ suy ra $AD\perp AH$

Vậy $d(SB,AD)=AH=\sqrt{\dfrac{SA^2.AB^2}{SA^2+AB^2}}=\dfrac{12}{5}$

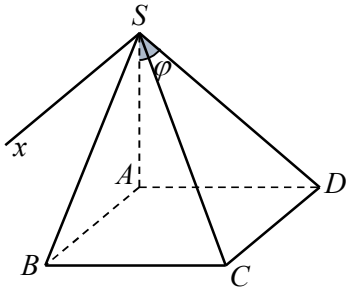
Câu 48: **(SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng?



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

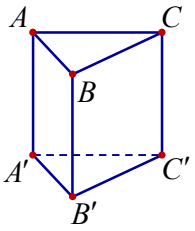


Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ CD // Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} Sx \perp SA \\ Sx \perp SD \end{cases}$ và $(SAB) \cap (SCD) = Sx // AB // CD$

$\Rightarrow ((SAB),(SCD)) = \widehat{ASD} = \varphi$.

Tam giác SAD vuông tại A có $SA = AD = a \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45°$.

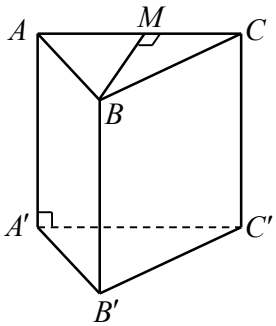
Câu 49: **(SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018)** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' bằng?



A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AC, ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp BB' \end{cases}$.

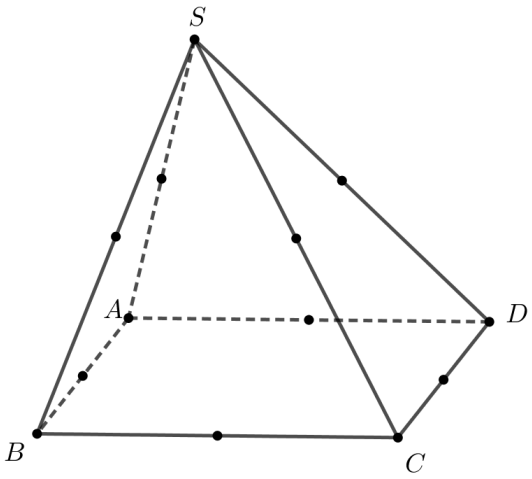
Vậy $d\left(AC, BB'\right) = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 50: **(Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 1 mặt phẳng. **D.** 5 mặt phẳng.

Lời giải

Chọn D



Vì 5 điểm S, A, B, C, D không đồng phẳng nên không xảy ra trường hợp cả 5 điểm cùng nằm về một phía của (P).

- Trường hợp 1: bốn điểm nằm cùng một phía của (P). Vì chỉ có 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng nên trong trường hợp này (P) là mặt phẳng đi qua các trung điểm của SA, SB, SC và SD.
- Trường hợp 2: hai điểm nằm cùng một phía của (P).
  - ✓ Nếu A, B nằm cùng phía của (P) thì (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của SA, SB, AD, BC.
  - ✓ Nếu A, D nằm cùng phía của (P) thì (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của SA, SD, AB, DC.
  - ✓ Nếu B, C nằm cùng phía của (P) thì (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của SC, SB, AB, DC.
  - ✓ Nếu C, D nằm cùng phía của (P) thì (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của SC, SD, AD, BC.

Vậy có 5 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 51: Cho hình tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b $(a \neq b)$. Phát biểu nào dưới đây **sai**?

A. Đoạn thẳng MN là đường vuông góc chung của AB và SC (M và N lần lượt là trung điểm của AB và SC).

B. Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau.

C. Hình chiếu vuông góc của S lên trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC.

D. SA vuông góc với BC.

Câu 52: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 53: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hình tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b $(a \neq b)$. Phát biểu nào dưới đây **sai**?

A. Đoạn thẳng MN là đường vuông góc chung của AB và SC (M và N lần lượt là trung điểm của AB và SC).

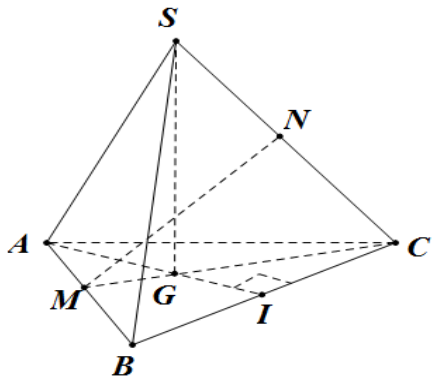
B. Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau.

C. Hình chiếu vuông góc của S lên trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC.

D. SA vuông góc với BC.

Lời giải

Chọn A



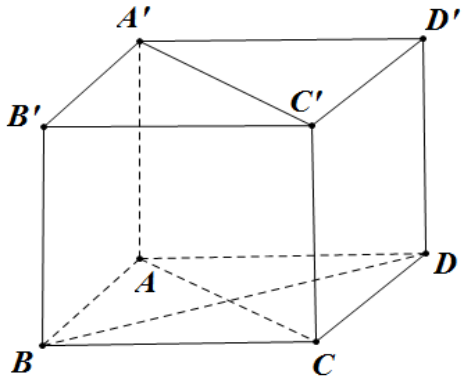
- $\Delta SAG = \Delta SBG = \Delta SCG$. Suy ra góc giữa các cạnh bên và đáy bằng nhau.
- $\begin{cases} SA = SB = SC \\ AB = AC = BC \end{cases}$, suy ra hình chiếu vuông góc của S lên trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC.
- $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SA$.

Câu 54: **(THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

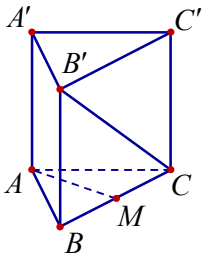
Lời giải

Chọn D



Ta có: $\left(\widehat{A'C';BD}\right)=\left(\widehat{AC;BD}\right)=90°$

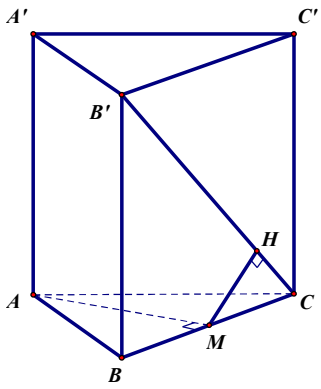
Câu 55: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình bên). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là



A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



- Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $B'C$ (1).

  Ta có $AM\perp\left(BCC'B'\right)\Rightarrow AM\perp MH$ (2).

  Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH$ là đoạn vuông góc chung của AM và $B'C$.

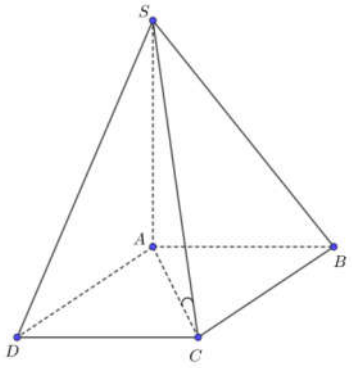
- $BCC'B'$ là hình vuông $\Rightarrow\widehat{MCH}=45°\Rightarrow MH=MC.\sin 45°=\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 56: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA=a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

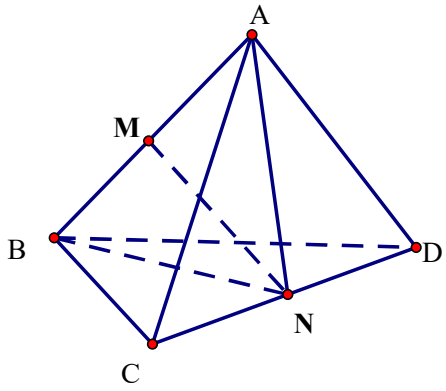
$\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

Câu 57: (THPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

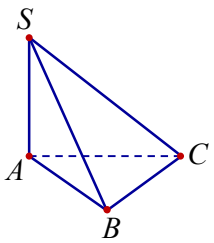
Chọn A



Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD

Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên ΔBCD và ΔACD là tam đều nên trung tuyến AN, BN cũng đồng thời là đường cao $\Leftrightarrow\begin{cases}AN\perp CD\\BN\perp CD\end{cases}\Leftrightarrow CD\perp(ABN)\Leftrightarrow CD\perp AB\Leftrightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=90°$.

Câu 58: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $135°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

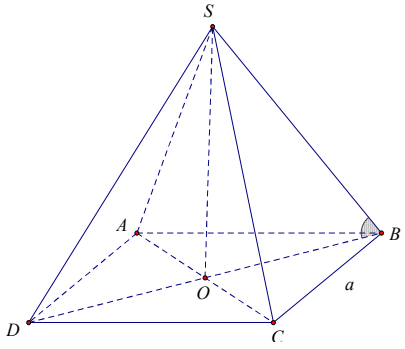
Tam giác SAC vuông cân tại A nên góc $\widehat{SCA}=45°$.

Câu 59: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a.

Lời giải

Chọn B



Trong $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $SO\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow d\left(S,(ABCD)\right)=SO$.

Ta lại có: OB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{\left(SB,(ABCD)\right)}=(SB,OB)=\widehat{SBO}=60°$.

Xét ΔSOB vuông tại O, ta có: $SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d\left(S,(ABCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 60: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC=AC=AB=a$, $\widehat{ABC}=45°$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A, tam giác BDC vuông cân tại D.

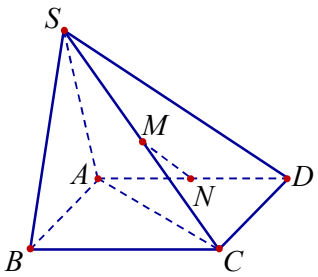
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$

$= \left|\overrightarrow{DB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}\right) - \left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}\right) = -\frac{1}{2}a^2$.

Mặt khác ta lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right) = 120^\circ \Rightarrow (AB,CD) = 60^\circ$.

Câu 61: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và AD (tham khảo hình vẽ).

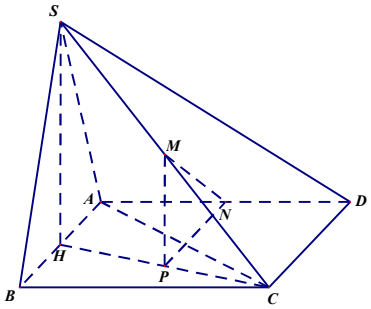


Góc giữa MN và mặt đáy $(ABCD)$ bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn B



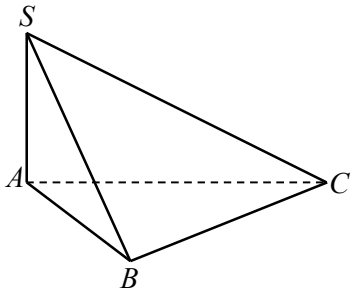
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi P là trung điểm $CH \Rightarrow MP \,//\, SH \Rightarrow MP \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa MN với mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNP}$ (do $\widehat{MPN} = 90^\circ$)

Ta có $MP = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $PN = \frac{AH + CD}{2} = \frac{\frac{a}{2} + a}{2} = \frac{3a}{4}$.

$\Rightarrow \tan\widehat{MNP} = \frac{MP}{PN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MNP} = 30^\circ$.

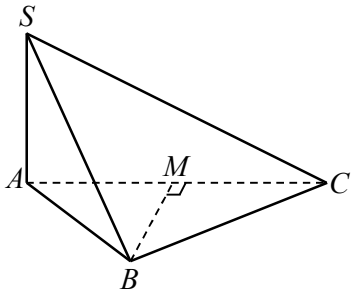
Câu 62: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=2a$. Biết SA vuông góc với đáy (ABC) (Hình tham khảo). Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $2a$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AC=2\sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm AC.

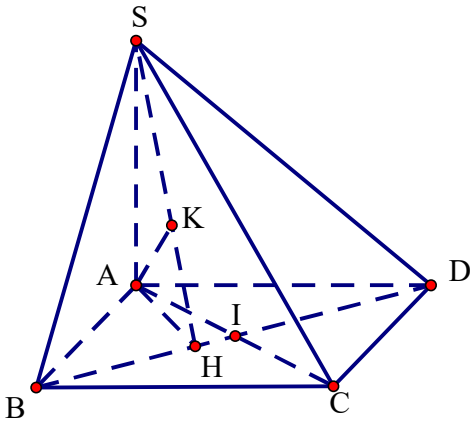
Ta có: $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow d\left(B,(SAC)\right)=BM=\frac{AC}{2}=a\sqrt{2}$.

Câu 63: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $d=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $d=\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A lên BD.

Gọi K là hình chiếu của A lên SH. Suy ra $AK \perp (SBD)$ tại K nên $d(A,(SBD)) = AK$.

Tam giác ABD vuông tại A có $AH \perp BD$

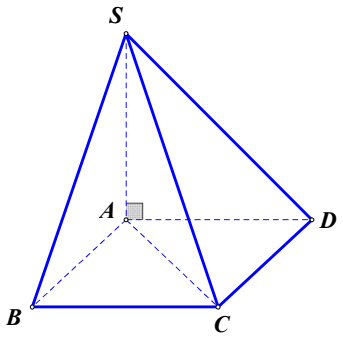
$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{3a}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác SAH vuông tại A có $AK \perp SH$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{19}{12a^2} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{12a^2}{19} \Leftrightarrow AK = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Gọi $I = AC \cap BD \Leftrightarrow I = AC \cap (SBD) \Rightarrow \frac{d(A,(SBD))}{d(C,(SBD))} = \frac{IA}{IC}$. Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên I là trung điểm AC nên $\frac{IA}{IC} = 1$ nên $d(C,(SBD)) = d(A,(SBD)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 64: **(SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



A. Góc $\widehat{SDA}$. **B.** Góc $\widehat{SCA}$. **C.** Góc $\widehat{SCB}$. **D.** Góc $\widehat{ASD}$.

Lời giải

Chọn A

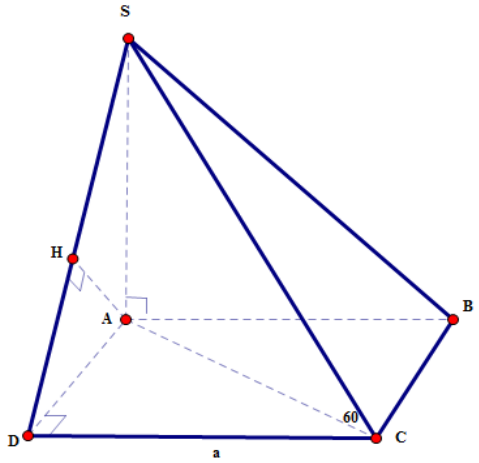
Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \end{cases} \Rightarrow ((ABCD),(SCD)) = \widehat{SDA}$.

Câu 65: **(THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AB//(SCD)$ nên $h=d(B,(SCD))=d(A,(SCD))=AH$

Vì $CD\perp(SAD)\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)$ theo giao tuyến SD, dựng $AH\perp SD\Rightarrow AH\perp(SCD)$.

Theo đề góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° nên $\widehat{SCA}=60^\circ$.

Ta có: $\tan 60^\circ=\dfrac{SA}{AC}\Rightarrow SA=a\sqrt{6}$

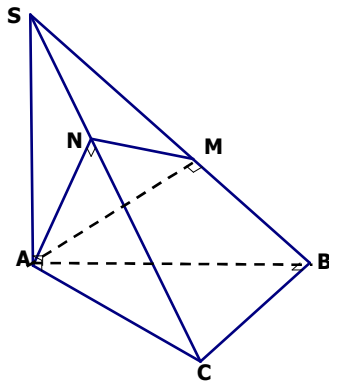
Và $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AD^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Câu 66: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $AM\perp SC$. **B.** $AM\perp MN$. **C.** $AN\perp SB$. **D.** $SA\perp BC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ mà $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp(SAB)$, $AM\subset(SAB)\Rightarrow BC\perp AM$.

Vậy $\begin{cases}AM\perp SB\\AM\perp BC\end{cases}\Rightarrow AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp SC\Rightarrow$ Đáp án **A** đúng.

Vì $\begin{cases}AM\perp(SBC)\\MN\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow AM\perp MN\Rightarrow$ Đáp án **B** đúng.

$SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC\Rightarrow$ Đáp án **D** đúng.

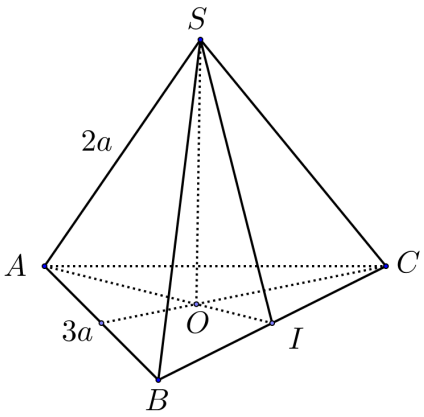
Vậy **C** sai.

Câu 67: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=2a$, $AB=3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

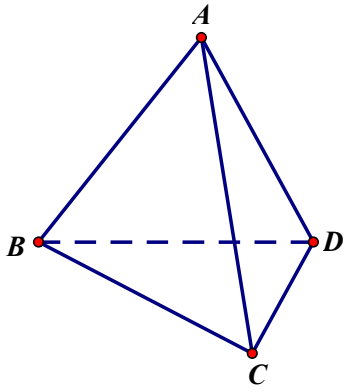


Gọi O là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow d(S;(ABC)) = SO$.

Ta có: $AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right) = a\sqrt{3}$; $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a$.

Vậy: $d(S;(ABC)) = a$.

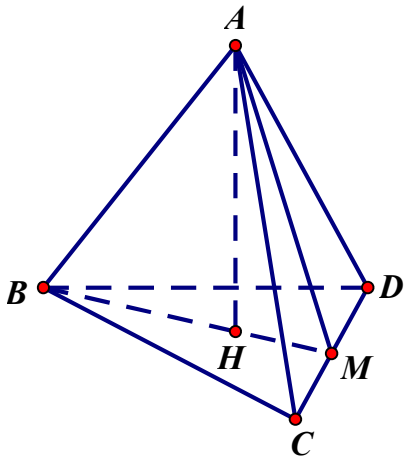
Câu 68: **(SGD Nam Định – năm 2017 – 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\varphi$.



A. $\cos\varphi = 0$. **B.** $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



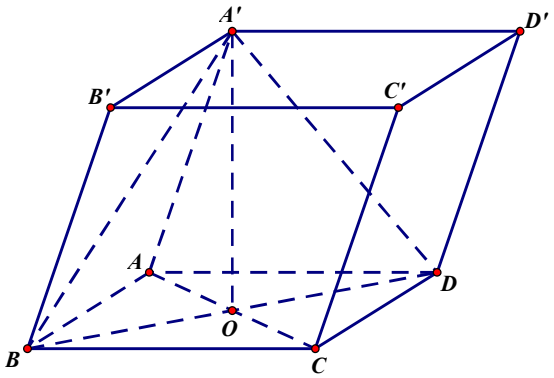
Gọi M là trung điểm của CD. Ta có $BM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) thì $H \in BM$ và $BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là $\widehat{ABM}$.

Ta có $\cos\varphi = \cos\widehat{ABM} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\dfrac{AB\sqrt{3}}{3}}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

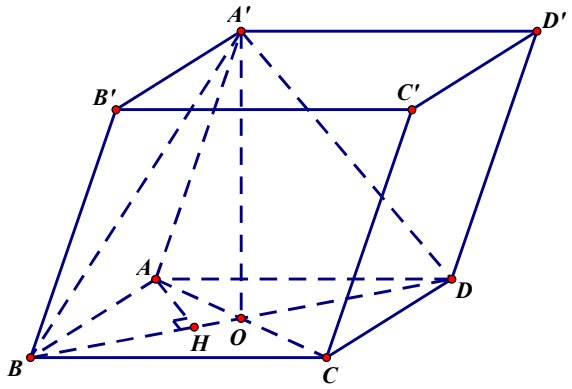
Câu 69: (SGD Nam Định – năm 2017 – 2018) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$.



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $d\left(B',\left(A'BD\right)\right)=d\left(A,\left(A'BD\right)\right)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD.

Ta có: $AH\perp\left(A'BD\right)\Rightarrow d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=AH$.

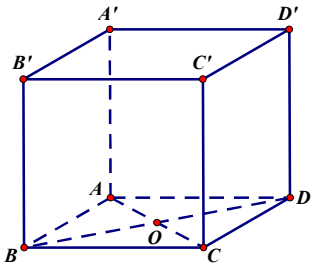
Mà: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d\left(B,\left(A'BD\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ tính khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có vì $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow \begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp CC' \end{cases}$

$\Rightarrow OC$ là khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD

Mà $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow OC = a$.

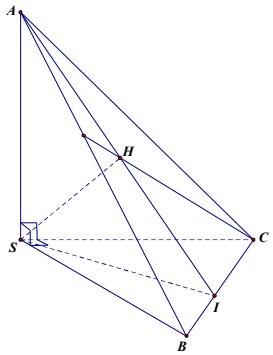
Câu 2: (Tạp chí THTT – Tháng 4 năm 2017 – 2018) Cho tứ diện $SABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC. **B.** trọng tâm tam giác ABC.

C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. **D.** tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\left.\begin{matrix} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp (SBC)$.

$\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH \ (1)$.

Tương tự, ta có: $\left.\begin{matrix} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (SAB)$.

$\left.\begin{matrix} AB \perp SC \\ AB \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp CH \ (2)$.

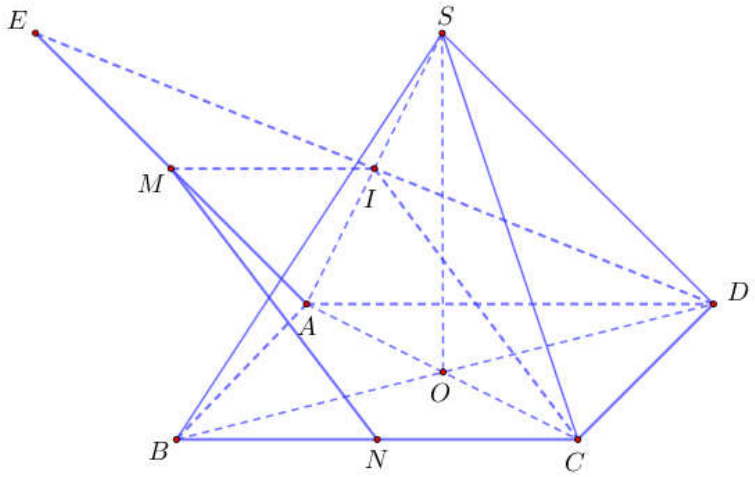
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 3: **(THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm SA thì $IMNC$ là hình bình hành nên $MN \,//\, IC$.

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp IC$ mà $MN \,//\, IC \Rightarrow BD \perp MN$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $90°$.

Cách khác: có thể dùng hệ trục tọa độ của lớp 12, tính tích vô hướng $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MN} = 0$.

Câu 4: **(THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn. **B.** Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn.

C. Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn. **D.** Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn.

Lời giải

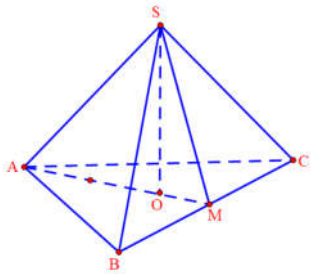
Chọn A

Chọn tứ diện vuông: có ba mặt là tam giác vuông; một mặt là tam giác nhọn.

Câu 5: **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Lời giải



Chọn C

Gọi M là trung điểm cạnh BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC) là 60^0

$\Rightarrow \widehat{SAO}=60^0 \Rightarrow SO=OA.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}=a$.

Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) là $\widehat{SMO}$.

Ta có $\cos\widehat{SMO}=\dfrac{OM}{SM}=\dfrac{OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Câu 6: **(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3)$, $B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):3x-8y+7z-1=0$. Điểm $C(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt phẳng (P), có hoành độ dương để tam giác ABC đều. Tính $a-b+3c$

A. -7. **B.** -9. **C.** -5. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;0;-2)$. $\overrightarrow{AC}=(a;b;c+3)$, $\overrightarrow{AB}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{IC}=(a-1;b;c+2)$

Ta có: $\begin{cases} C\in(P) \\ \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}=0 \\ AC=AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-8b+7c-1=0 \\ 2(a-1)+2(c+2)=0 \\ a^2+b^2+(c+3)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{a}{2}-1 \\ c=-a-1 \\ a^2+\left(-\dfrac{a}{2}-1\right)^2+(-a+2)^2=8\ (1) \end{cases}$

Giải (1) ta được $\left[\begin{array}{l} a=2\ (N) \\ a=-\dfrac{2}{3}\ (L) \end{array}\right.$.

Với $a=2 \Rightarrow b=-2$, $c=-3$.

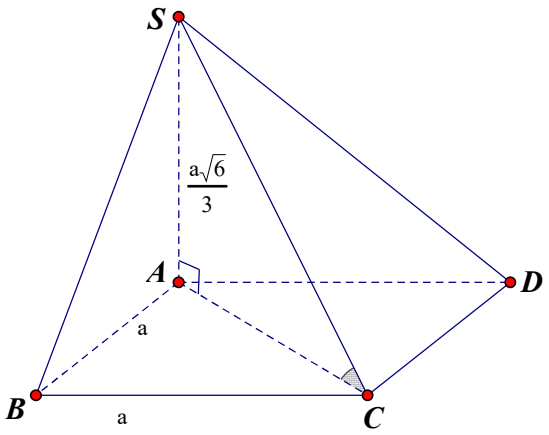
Vậy $a-b+3c=-5$.

Câu 7: **(THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$. Biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $75°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

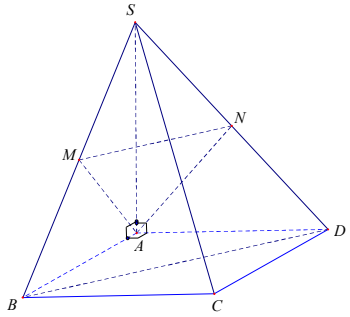
Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là $30°$.

Câu 8: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của SD khi đó ta có $MN \,//\, BD \Rightarrow (AM,BD) = (AM,MN)$.

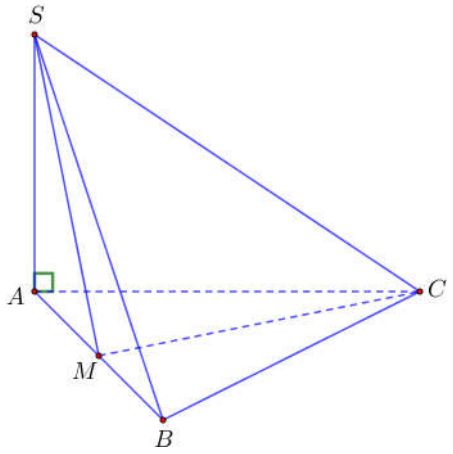
Theo giả thiết ta có $AM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AN = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $MN = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta AMN$ đều $\Rightarrow \widehat{AMN} = 60°$. Vậy $(AM,BD) = 60°$.

Câu 9: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AB thì $CM \perp AB \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

Ta có SM là hình chiếu của SC trên $(SAB) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAC)}\right) = \left(\widehat{SC,SM}\right) = \widehat{MSC}$.

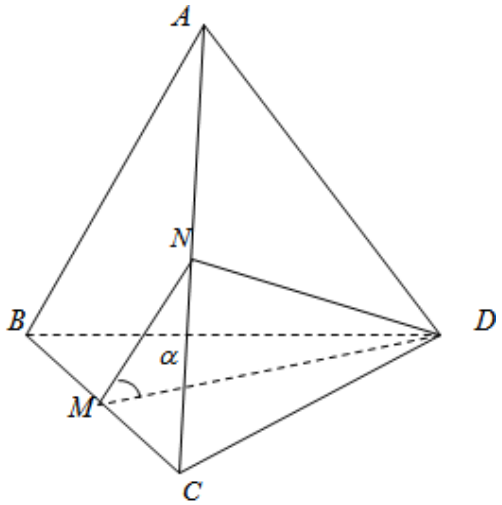
Ta có $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Vậy $\tan\widehat{MSC} = \frac{MC}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Câu 10: **(THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Kẻ $MN // AB$, suy ra MN là đường trung bình của ΔABC. Suy ra $MN = \frac{AB}{2}$.

Suy ra: $\left(\widehat{AB,DM}\right)=\left(\widehat{MN,DM}\right)=\widehat{DMN}=\alpha$.

Gọi tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a.

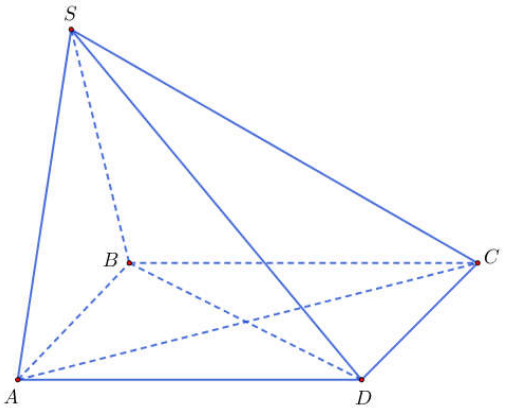
$MN=\dfrac{a}{2}, DN=DM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{MN^2+DM^2-DN^2}{2.MN.DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 11: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA=SB=2a$, $AB=a$. Gọi φ là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos\varphi$?

A. $\cos\varphi=-\dfrac{7}{8}$. **B.** $\cos\varphi=-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{7}{8}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SB^2=\left(\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}\right)^2\Leftrightarrow SB^2=AS^2-2\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB}+AB^2$

$\Rightarrow\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{SB^2-SA^2-AB^2}{2}=-\dfrac{a^2}{2}$.

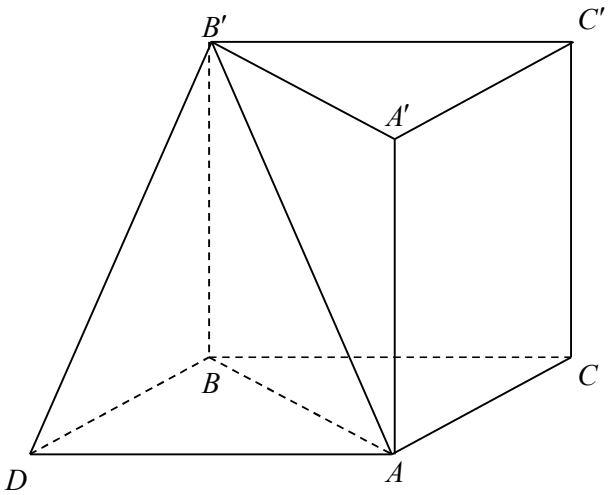
Vậy $\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AS}\right)=\dfrac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AS}}{CD.AS}=\dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{a.2a}=\dfrac{-1}{4}$.

Câu 12: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC.

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Trong (ABC): kẻ AD sao cho $ACBD$ là hình bình hành.

Ta có: $BC // AD$ Nên $(AB';BC)=(AB';AD)=\widehat{B'AD}$.

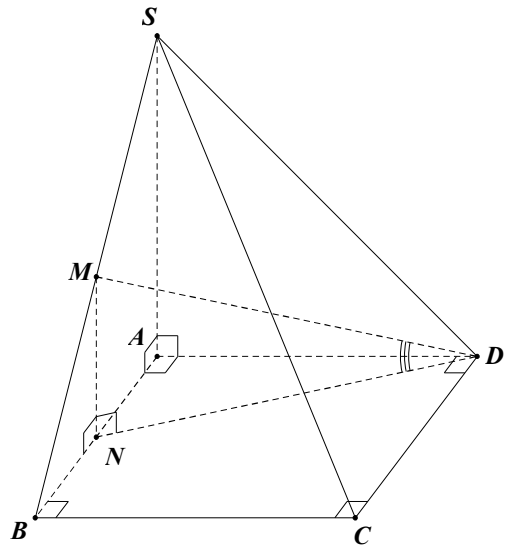
Ta có $AD=BC=a\sqrt{3}$, $AB'=\sqrt{AB^2+AB'^2}=a\sqrt{3}$, $DB'=\sqrt{BB'^2+AC^2}=a\sqrt{3}$. Vậy tam giác $B'AD$ đều nên $\widehat{B'AD}=60°$.

Câu 13: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB. Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm AB.

Ta có: MN là đường trung bình của ΔSAB nên $MN//SA$ và $MN=\frac{1}{2}SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $SA\perp(ABCD)$.

Do đó $MN\perp(ABCD)$ (1).

Suy ra $MN\perp DN$.

Ta có: N là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$ (do (1)) và D là hình chiếu vuông góc của D lên $(ABCD)$.

Suy ra $(DM;(ABCD))=(DM;ND)=\widehat{MDN}$ ($\widehat{MDN}$ nhọn vì ΔMND vuông tại N).

Ta có: $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔMND vuông tại N, có:

$\tan MDN=\dfrac{MN}{DN}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $\tan(DM;(ABCD))=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB=BC=a$. Biết $SA=a\sqrt{3}$, khi đó khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC là.

A. $a\sqrt{10}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 15: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là $a>0$. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a>0$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh A đến $mp(BCD)$ bằng

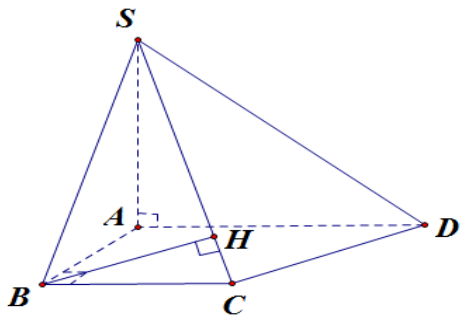
A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{8}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB=BC=a$. Biết $SA=a\sqrt{3}$, khi đó khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC là.

A. $a\sqrt{10}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Trong ΔSBC dựng đường cao $BH \Rightarrow d\left(B;SC\right) = BH$.

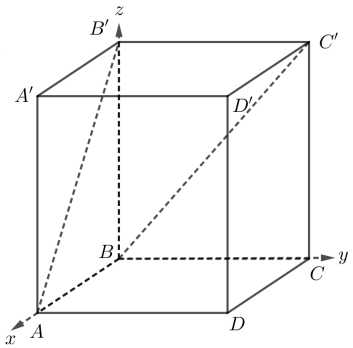
$SB = 2a$; $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \dfrac{BS.BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là $a > 0$. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1:

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.

$B\left(0;0;0\right)$, $A\left(a;0;0\right)$, $B'\left(0;0;a\right)$, $C'\left(0;a;a\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(-a;0;0\right)$

$\overrightarrow{AB'} = \left(-a;0;a\right) \Rightarrow AB'$ có một VTCP là $\overrightarrow{u_1} = \left(-1;0;1\right)$.

$\overrightarrow{BC'} = \left(0;a;a\right) \Rightarrow BC'$ có một VTCP là $\overrightarrow{u_2} = \left(0;1;1\right)$.

$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = \left(-1;1;-1\right)$.

Suy ra: $d\left(AB',BC'\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$, kẻ $CH \perp C'O$ tại H,

mà $CH \perp BD$ (do $BD \perp \left(ACC'A'\right)$) nên $CH \perp \left(C'BD\right) \Rightarrow d\left(C;C'BD\right) = CH$

Ta có: $AB' \,//\, \left(C'BD\right) \Rightarrow d\left(AB',BC'\right) = d\left(AB',\left(C'BD\right)\right) = d\left(A,\left(C'BD\right)\right) = d\left(C,\left(C'BD\right)\right) = CH$

Xét $\Delta\, C'CO$ vuông tại C, đường cao CH:

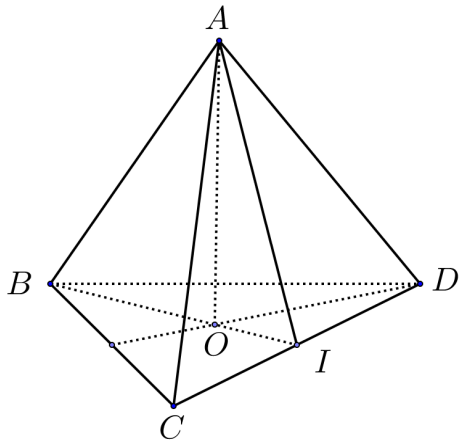
$\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CO^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh A đến $mp\left(BCD\right)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{8}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow AO \perp (BCD) \Rightarrow d(A;(BCD)) = AO$.

Gọi I là trung điểm CD.

Ta có: $BO = \frac{2}{3}BI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

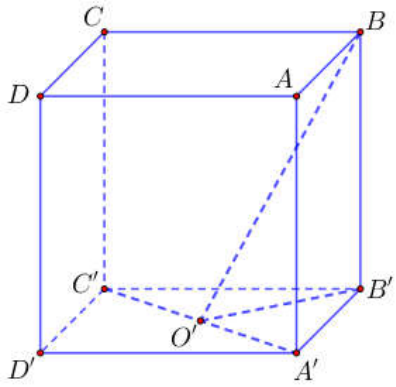
Vậy $d(A;(BCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là trung điểm của của $A'C'$. Tính $\tan\alpha$ với α là góc tạo bởi BO' và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt cạnh hình lập phương bằng a.

Ta có $\left(\widehat{BO',(ABCD)}\right) = \left(\widehat{BO',(A'B'C'D')}\right)$.

Ta có $O'B'$ là hình chiếu của BO' trên $(A'B'C'D)$

$\Rightarrow \left(\widehat{BO',(ABCD)}\right) = \left(\widehat{BO',B'O'}\right) = \widehat{BO'B'} = \alpha$, $\tan\alpha = \frac{BB'}{O'B'} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Cho $SA = a$ và hợp với đáy một góc $30°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 22: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$, $AA'=4a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

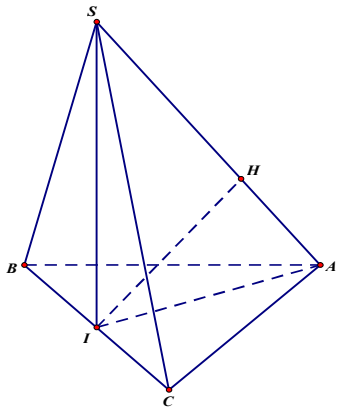
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Cho $SA=a$ và hợp với đáy một góc $30°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: SA và BC là hai đường thẳng chéo nhau

Kẻ $IH \perp SA$ với $H \in SA$ (1)

$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp IH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH$ là đoạn vuông góc giữa hai đường thẳng SA và BC chéo nhau.

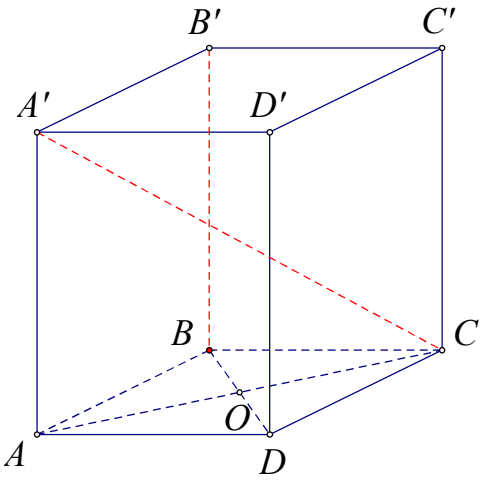
$\Rightarrow d(SA,BC)=IH=IA.\sin\widehat{SAI}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 30°=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

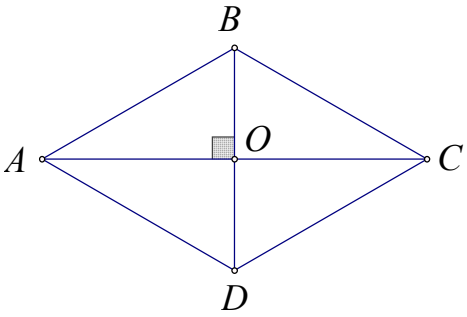
Câu 24: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$, $AA'=4a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C





Ta có $(A'AC)$ là mặt phẳng chứa $A'C$ và song song với BB'

$\Rightarrow d(BB', A'C) = d(B,(AA'C))$.

Gọi O là tâm hình thoi $ABCD \Rightarrow BO \perp AC$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BO$.

$\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BO \perp (AA'C) \Rightarrow d(B,(AA'C)) = BO$.

Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120°$

$\Rightarrow ABC$ là tam giác đều

$\Rightarrow BD = AB = a$

$\Rightarrow BO = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $d(BB', A'C) = d(B,(AA'C)) = BO = \dfrac{a}{2}$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $SC \perp (AED)$. **B.** $SC \perp (ACE)$. **C.** $SC \perp (AFB)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O. Biết rằng $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

A. $\dfrac{245}{108}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{64}{27}$. **D.** $\dfrac{75}{32}$.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

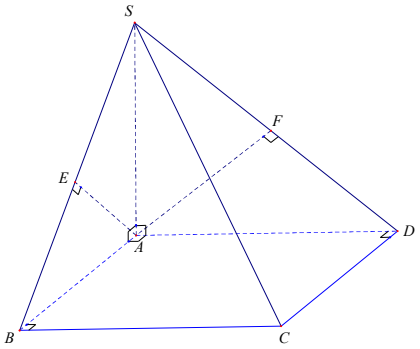
A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $SC \perp (AED)$. **B.** $SC \perp (ACE)$. **C.** $SC \perp (AFB)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).

Mặt khác ta có $AE \perp SB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (*).

Chứng minh tương tự ta cũng có $AF \perp (SDC) \Rightarrow AF \perp SC$ (**).

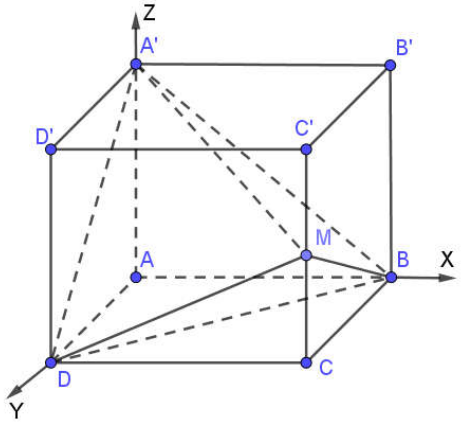
Từ (*) và (**) ta có $SC \perp (AEF)$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O. Biết rằng $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

A. $\frac{245}{108}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{64}{27}$. **D.** $\frac{75}{32}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $A(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ suy ra $C(m;m;0)$, $B'(m;0;n)$, $C'(m;m;n)$, $D'(0;m;n)$, $M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BD}=(-m;m;0)$, $\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n)$, $\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\frac{n}{2}\right)$.

$V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{1}{4}\left|m^2.n\right|=\frac{1}{4}\left|m^2.(4-m)\right|=\frac{1}{8}\left|m.m.(8-2m)\right|\le\frac{1}{8}\left(\frac{m+m+8-2m}{3}\right)^3$

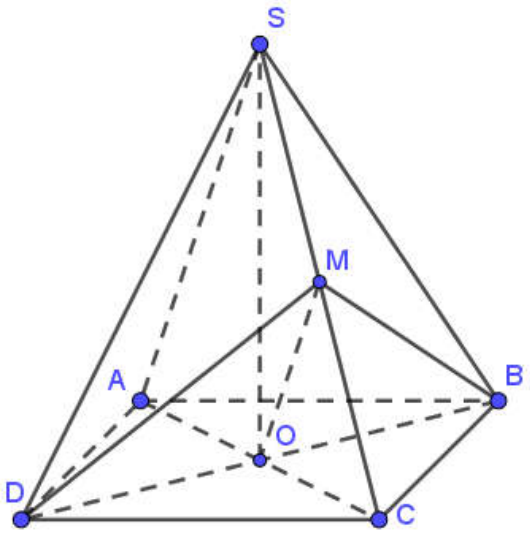
$=\frac{64}{27}$.

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, Ta có:

$\begin{cases}BD\perp SO\\BD\perp AC\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SOC)\Rightarrow BD\perp OM$.

$\begin{cases}(MBD)\cap(ABCD)=BD\\BD\perp OM\\BD\perp OC\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right)=\widehat{(OM,OC)}=\widehat{MOC}$.

$OM=MC=\frac{SC}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow\Delta MOC$ cân tại M; $OC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\cos\widehat{MOC}=\cos\widehat{MCO}=\frac{OC}{SC}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{MOC}=45°$.

Vậy $\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right)=45°$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng:

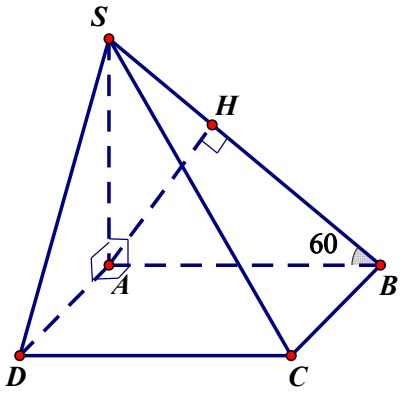
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $(SB;(ABCD)) = (SB;AB) = \widehat{SAB} = 60° \Rightarrow SA = AB.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

(SBC) là mặt phẳng chứa SC và song song với AD nên:

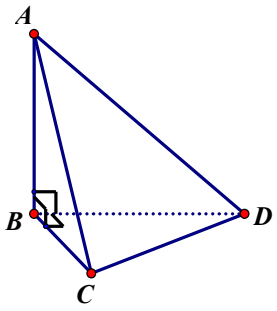
$d(SC;AD) = d(AD;(SBC)) = d(A;(SBC))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) nên $d(A;(SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow d(SC;AD) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

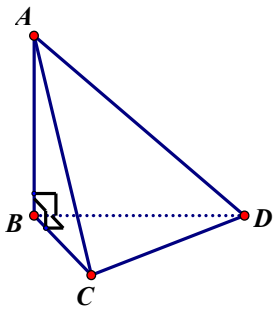
Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một (như hình vẽ bên dưới). Khẳng định nào sau đây sai?



A. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$. **B.** Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

C. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$. **D.** Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một (như hình vẽ bên dưới). Khẳng định nào sau đây sai?



A. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$. **B.** Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

C. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$. **D.** Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

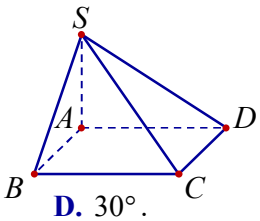
Lời giải

Chọn A

Ta có $CB \perp (ABD)$ nên góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$, góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Ta lại có $AB \perp (BCD)$ nên góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $[0;5]$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

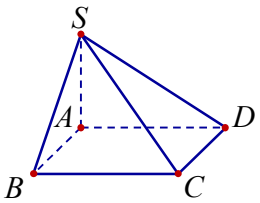


A. $75°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách gữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

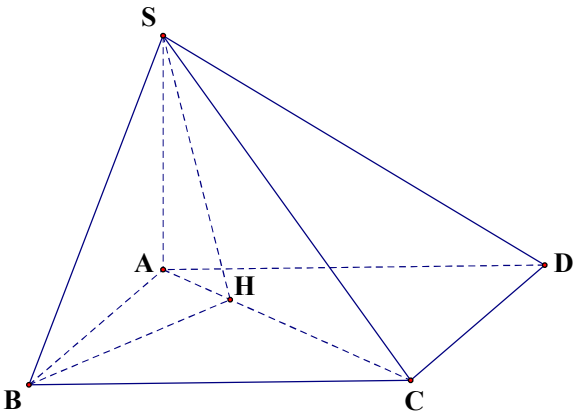
Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $[0;5]$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng



A. $75°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $BH \perp AC$ và $H \in AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

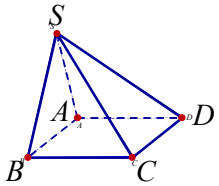
SH là hình chiếu của BH trên mặt phẳng (SAC).

Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSH}$.

Ta có $BH = \dfrac{AB.BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SBH ta có $\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSH} = 30°$.

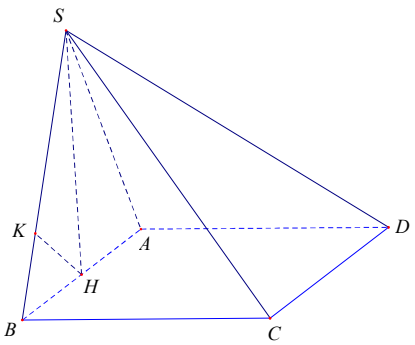
Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách gữa hai đường thẳng AD và SC bằng



A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

Do tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết ta có $AB = 2a \Rightarrow AH = a$.

Mà ta lại có $SA = a\sqrt{5}$ nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$

Ta có $AD \,//\, BC \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$

$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$.

Do mặt phẳng $(SBC) \perp (SAB)$ nên từ H kẻ $HK \perp SB$ thì $HK = d(H, (SBC))$.

Ta có $HK = \dfrac{SH.HB}{SB} = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d(AD, SC) = 2HK = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 39: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất các cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$.

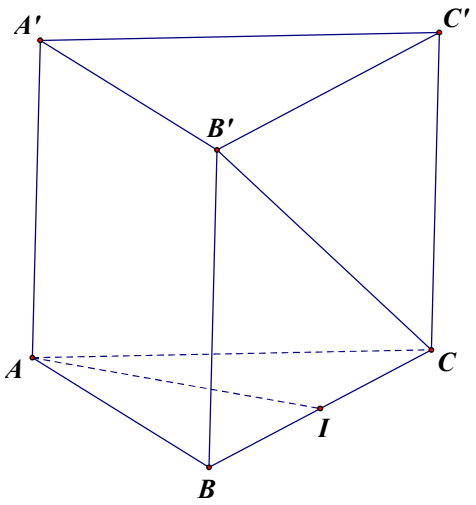
A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Câu 40: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất các cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn C



AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ do đó $d(AA',B'C)=d(A,(BB'C'C))=AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Biết ΔSBC đều, tính góc giữa SA và (ABC).

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 42: Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh bằng 4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

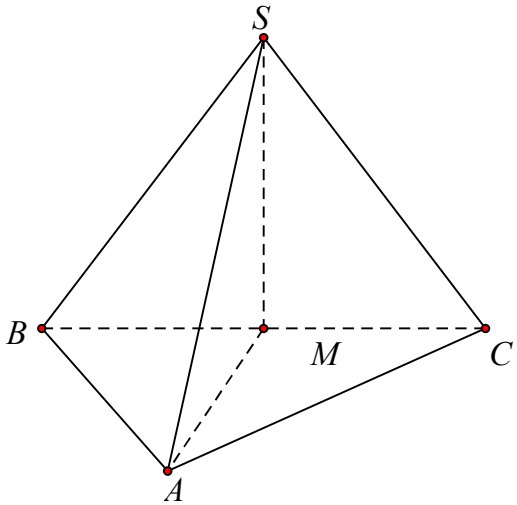
A. $2\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Biết ΔSBC đều, tính góc giữa SA và (ABC).

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó góc giữa SA và (ABC) là góc giữa SA và MA.

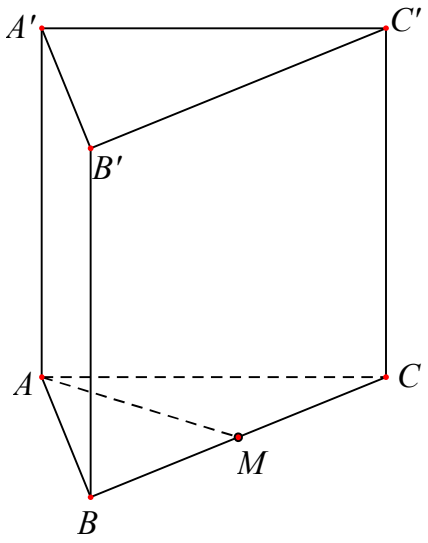
Tam giác SAM vuông tại M có $SM=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{SAM}=45°$.

Câu 44: Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh bằng 4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $AM \perp AA'$ tại A, $AM \perp BC$ tại M.
Do đó AM là đoạn vuông góc chung giữa AA' và BC,

suy ra $d\left(AA', BC\right) = AM = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp \left(ABCD\right)$ và mặt bên $\left(SCD\right)$ hợp với mặt đáy $\left(ABCD\right)$ một góc $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng

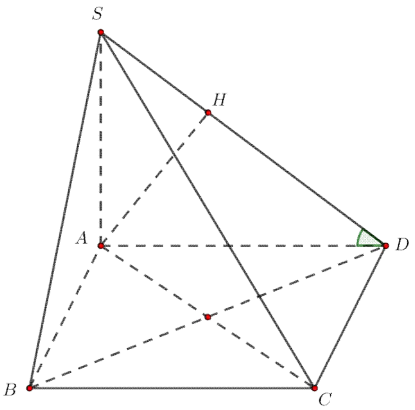
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp \left(ABCD\right)$ và mặt bên $\left(SCD\right)$ hợp với mặt đáy $\left(ABCD\right)$ một góc $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có góc giữa (SCD) và mặt đáy là góc $\widehat{SDA} = 60°$.

Kẻ $AH \perp SD$, do $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$

nên $d(A,(SCD)) = AH = AD.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

A. α, với $\cot\alpha\sqrt{3}$. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BD')$ bằng:

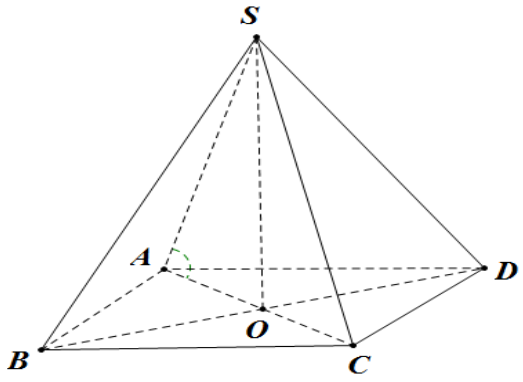
A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 49: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

A. α, với $\cot\alpha\sqrt{3}$. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn D



Ta có : $\cos\widehat{SAO} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

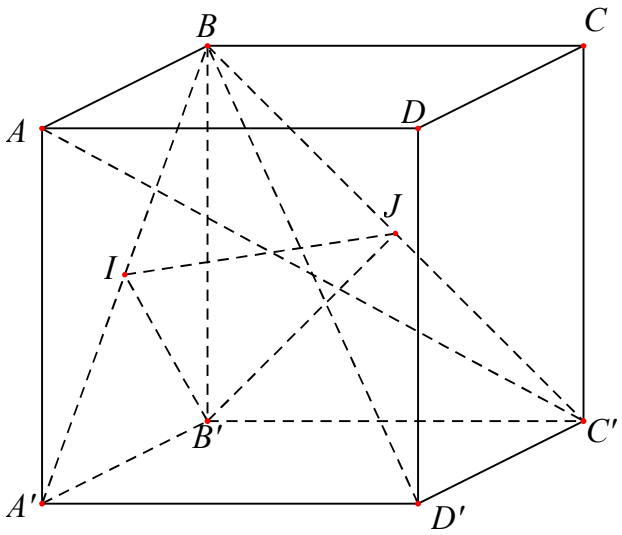
Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(A'BD')$ bằng:

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $A'B$ và BC'. Khi đó $B'I \perp (A'BD')$, $B'J \perp (ABC')$ nên góc giữa mặt phẳng (ABC') và $(A'BD')$ là góc giữa $B'I$ và $B'J$.

Tam giác $B'IJ$ đều vì có ba cạnh bằng nhau và bằng $\frac{AB\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\widehat{IB'J} = 60°$.

Câu 51: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin\alpha$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $\triangle ABC$ vuông tại A. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

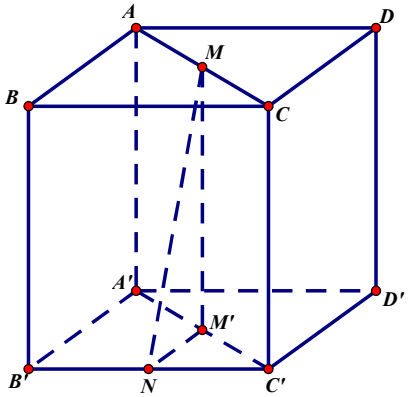
A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 53: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin\alpha$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi M' là trung điểm cạnh $A'C'$,ta có $MM' \perp (A'B'C'D')$ nên hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $M'N$

$\alpha = \widehat{MNM'}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{MM'}{MN} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

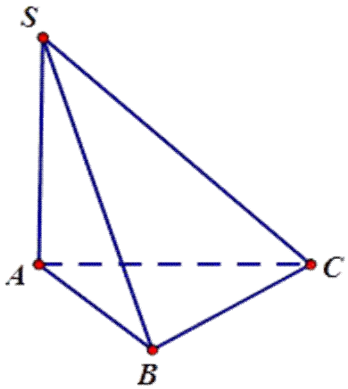
Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $\triangle ABC$ vuông tại A. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1:



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS} = 0$

$\cos(AB, SC) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}}{AB.SC} = 0 \Rightarrow (AB, SC) = \dfrac{\pi}{2}$.

Cách 2:

Ta có $AB \perp SA$ và $AB \perp AC$

$\Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp SC$

Câu 55: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng 2, độ dài đường chéo các mặt bên bằng $\sqrt{5}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (A_1BC) là

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA=2$, $SB=6$, $SC=9$. Độ dài cạnh SD là

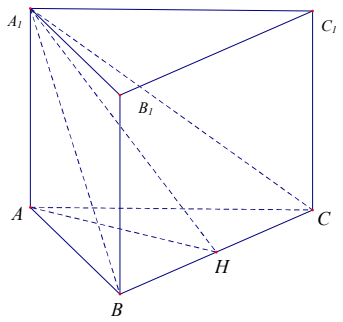
A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 11.

Câu 57: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng 2, độ dài đường chéo các mặt bên bằng $\sqrt{5}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (A_1BC) và (ABC) là

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$ khi đó ta có $BC \perp (AHA_1) \Rightarrow \left(\widehat{(A_1BC),(ABC)}\right) = \left(\widehat{AH, A_1H}\right) = \widehat{AHA_1}$.

Xét tam giác vuông A_1AB có $AA_1^2 = A_1B^2 - AB^2 = 5-4 = 1$.

Mặt khác AH là đường cao của tam giác đều ABC cạnh $AB=2$ nên $AH=\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông AA_1H có $\tan \widehat{AHA_1} = \dfrac{AA_1}{AH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AHA_1} = 30°$

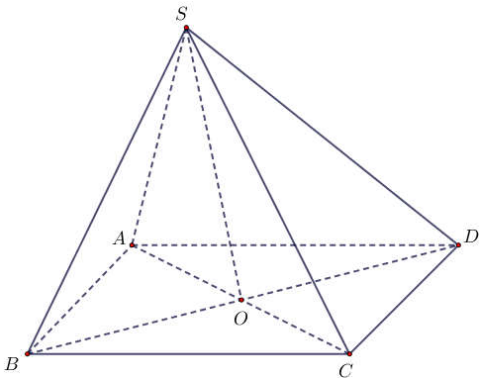
$\Rightarrow \left(\widehat{(A_1BC),(ABC)}\right) = 30°$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA=2$, $SB=6$, $SC=9$. Độ dài cạnh SD là

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$

Ta có $\dfrac{2\left(SA^2+SC^2\right)-AC^2}{4}=SO^2=\dfrac{2\left(SB^2+SD^2\right)-BD^2}{4}$

Mà $BD=AC\Rightarrow SA^2+SC^2=SB^2+SD^2\Rightarrow SD^2=49\Rightarrow SD=7$.

Câu 59: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

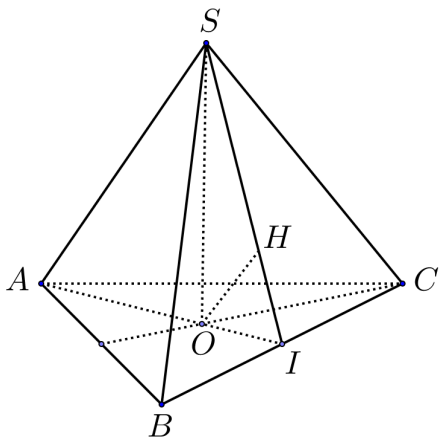
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 60: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi: O là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow SO\perp(ABC)$

I là trung điểm BC

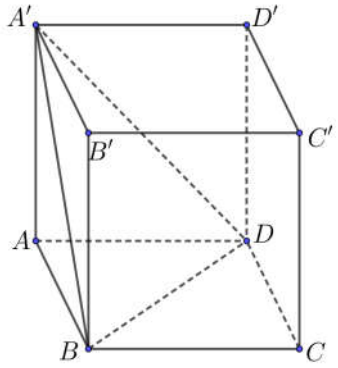
Ta có: $\begin{cases}BC\perp OI\\BC\perp SO\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOI)\Rightarrow\widehat{\left((SBC),(ABC)\right)}=\widehat{SIO}=60°$.

Dựng $OH\perp SI\left(H\in SI\right)\Rightarrow OH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(O;(SBC)\right)=OH$

Tam giác OHI vuông tại H có $OH=OI\sin 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{4}$

Vì $AI = 3OI \Rightarrow d\left(A;\left(SBC\right)\right) = 3d\left(O;\left(SBC\right)\right) = 3OH = \dfrac{3a}{4}$.

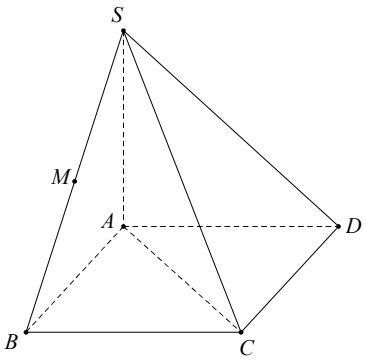
Câu 61: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(BDA'\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 62: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, góc giữa SC và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng

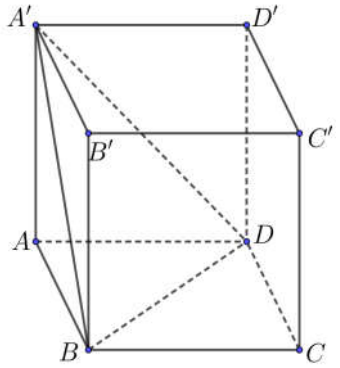


A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 63: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 64: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).

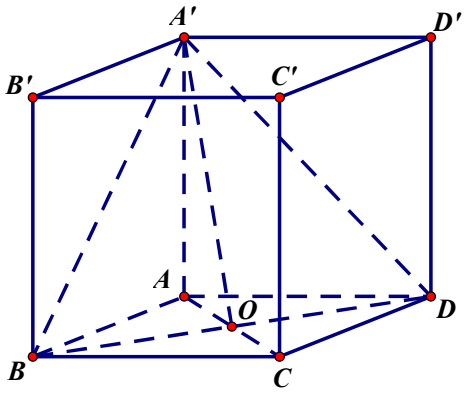


Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

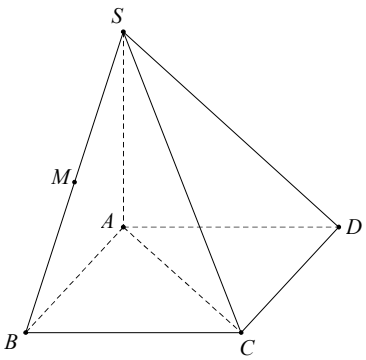
Chọn C



Ta thấy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'OA}$

$$\sin\widehat{A'OA}=\frac{AA'}{A'O}=\frac{AA'}{\sqrt{AA'^2+AO^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

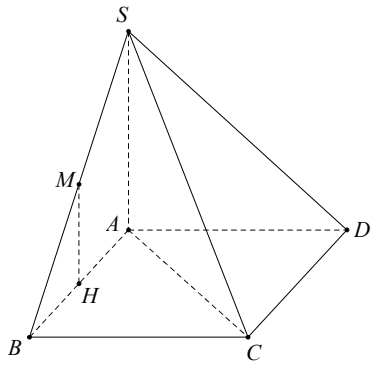
Câu 65: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$. Do đó $\widehat{SCA} = 60°$.

$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = \sqrt{AB^2 + AD^2}\tan 60° = 3a$.

Trong mặt phẳng (SAB) dựng đường thẳng qua M song song với SA cắt AB tại H.

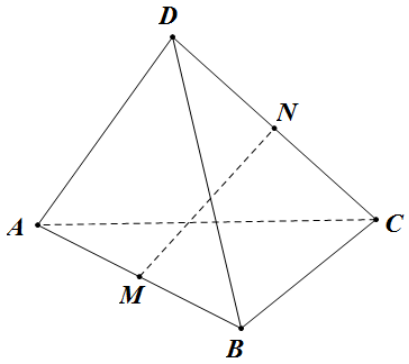
Suy ra $MH \perp (ABCD)$. Vậy $d(M,(ABCD)) = MH = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2}$.

Câu 66: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi M; N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

$\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN$; $\begin{cases} CD \perp AN \\ CD \perp BN \end{cases} \Rightarrow CD \perp MN$.

Hay MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Khi đó: $d(AB;CD) = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 67: Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 68: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là:

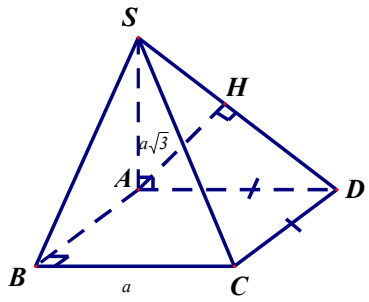
A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Câu 69: Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AB \,//\, (SCD) \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right)$.

Kẻ $AH \perp SD$ (1).

$CD \perp SA$, $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \supset AH \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có: $AH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = AH$.

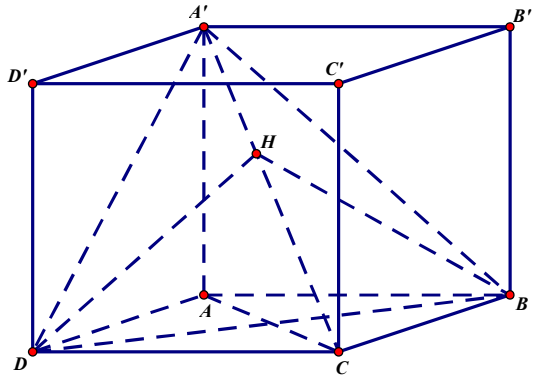
Trong tam giác vuông SAD: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 70: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là:

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $\Delta A'DC = \Delta A'BC$, $\widehat{A'BC} = \widehat{A'DC} = 90^\circ$.

Dựng $DH \perp A'C \Rightarrow BH \perp A'C$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là góc (HD, HC).

Xét tam giác ΔDHC có $BD = a\sqrt{2}$, $DH = BH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\cos\widehat{DHB} = \dfrac{HD^2 + HB^2 - BD^2}{2HD.HB} = \dfrac{HD^2 + HB^2 - BD^2}{2HD.HB} = \dfrac{-1}{2}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng 60°.

Câu 71: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 1, $AA' = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 72: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều. Biết rằng diện tích tứ giác $BCC'B'$ bằng $2a^2$. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

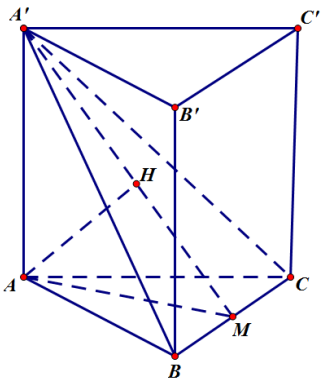
A. $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $h = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $h = a$.

Câu 73: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 1, $AA' = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$,

Do $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC$ suy ra $BC \perp (AA'M)$.

Kẻ $AH \perp A'M \Rightarrow AH \perp BC$. Do đó $AH \perp (A'BC)$ hay $d(A;(A'BC)) = AH$.

Ta có $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều cạnh bằng 1).

Suy ra $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

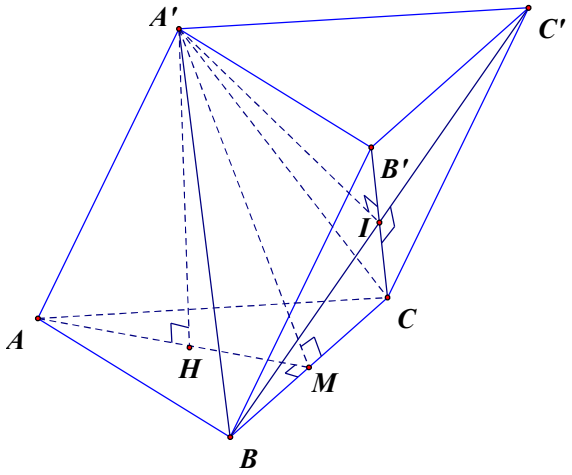
Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 74: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều. Biết rằng diện tích tứ giác $BCC'B'$ bằng $2a^2$. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $h = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $h = a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi cạnh của tam giác ABC là x, chiều cao của hình lăng trụ là h.

Gọi I là giao điểm của BC' và $B'C$.

Ta có: $A'B = A'C = A'B' = A'C' = BB' = CC' = BC = B'C' = x$ nên $A'I \perp B'C; A'I \perp BC'$

$\Rightarrow A'I \perp (BCC'B')$ do đó tứ giác $BCC'B'$ là hình vuông nên $x.x = 2a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$

Trong tam giác ABC có $AM = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Do đó: $h = A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{3}} = \dfrac{x\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 75: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, đường thẳng SA vuông góc với phẳng đáy tại và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

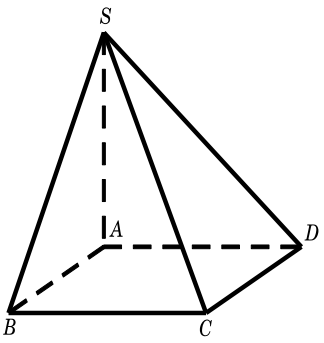
A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Câu 76: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, đường thẳng SA vuông góc với phẳng đáy tại và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D



$BC \perp CD$, $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow d(SB, CD) = BC = a$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC) xấp xỉ

A. $16°$. **B.** $35°$. **C.** $14°$. **D.** $33°$.

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

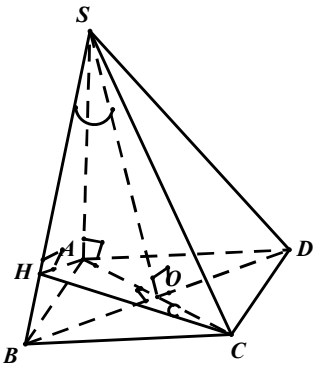
A. $SO \perp (ABCD)$. **B.** $CD \perp (SBD)$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC) xấp xỉ

A. $16°$. **B.** $35°$. **C.** $14°$. **D.** $33°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$ suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Vậy $\widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{BSO} = \varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{BO}{SB} = \frac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow \varphi \approx 16°.$$

Câu 80: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $SO \perp (ABCD)$. **B.** $CD \perp (SBD)$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 81: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng $2a$. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 82: Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $45°$. Tính sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

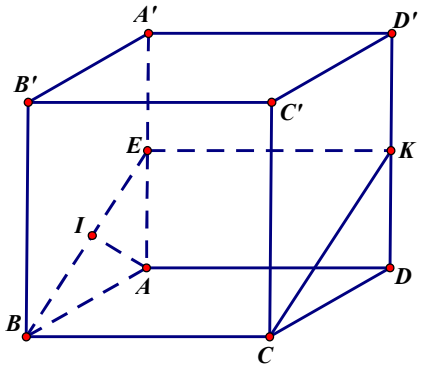
A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 83: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng $2a$. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của AA'

Ta có $A'D' // (CKEB)$.

$d(CK, A'D') = d(A'D', (CKEB)) = d(A', (CKEB)) = d(A, (CKEB))$

Hạ $AI \perp BE$. Khi đó $d(A, (CKEB)) = AI$.

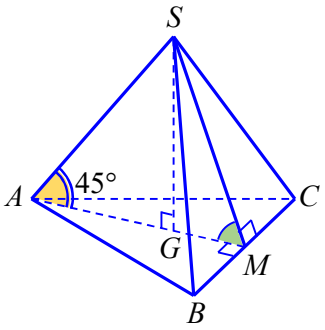
$$AI = \frac{AE.AB}{\sqrt{AE^2 + AB^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 84: Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $45°$. Tính sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi M, G lần lượt là trung điểm BC và là trọng tâm của tam giác ΔABC.

Ta có: $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right)=\widehat{SAG}=45°$ và $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SMG}$.

Ta có $\tan\widehat{SAG}=\dfrac{SG}{AG}=\tan 45°=1$ mà $MG=\dfrac{1}{2}AG$ nên $\tan\widehat{SMG}=\dfrac{SG}{MG}=\dfrac{SG}{0,5.AG}=2$.

Vậy $\sin\widehat{SMG}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{SMG}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\tan^2\widehat{SMG}}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 85: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $BC=2a$, $AA'=3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Câu 86: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC=a\sqrt{2}$, $CD=a$. Gọi E là trung điểm của AD. Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng

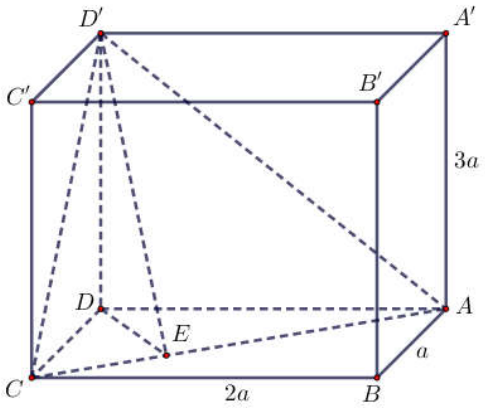
A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 87: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $BC=2a$, $AA'=3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Vẽ $DE\perp AC$ tại $E\Rightarrow AC\perp(DD'E)\Rightarrow AC\perp D'E$, $DE=\dfrac{DC.DA}{\sqrt{DC^2+DA^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ta có $DE \perp AC$, $ED' \perp AC$, $(ABCD) \cap (ACD') = AC$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ABCD),(ACD')} \right) = \left(\widehat{DE, D'E} \right) = \widehat{DED'} = \alpha$, $\tan \alpha = \dfrac{DD'}{DE} = \dfrac{3a}{\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

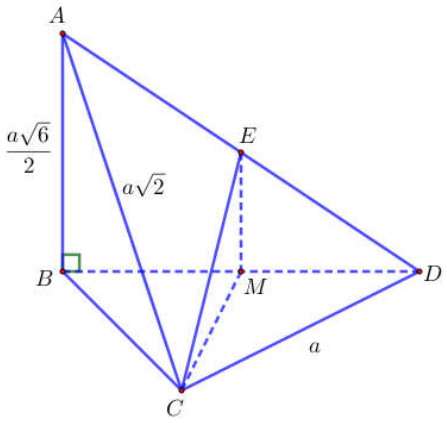
Ghi chú: đề gốc sai đã sửa đề lại là gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ thay vì gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABD') và $(ABCD)$.

Câu 88: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD. Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



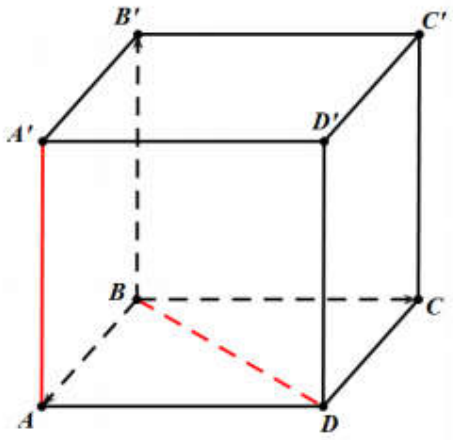
Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $BD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm $BD \Rightarrow ME \,//\, AB$, $ME = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, $CM = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

$\Rightarrow \Delta CME$ vuông cân tại M.

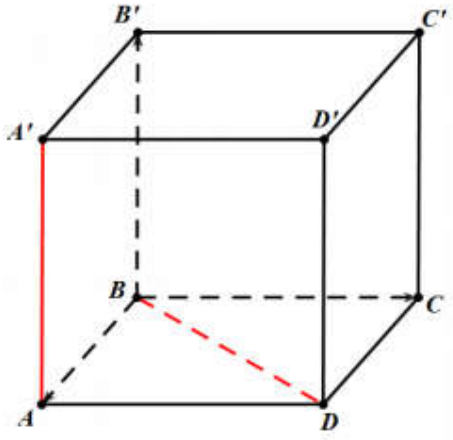
Ta có $\left(\widehat{AB, CE} \right) = \left(\widehat{EM, CE} \right) = \widehat{CEM} = 45^\circ$.

Câu 89: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD bằng



A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 90: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD bằng



A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

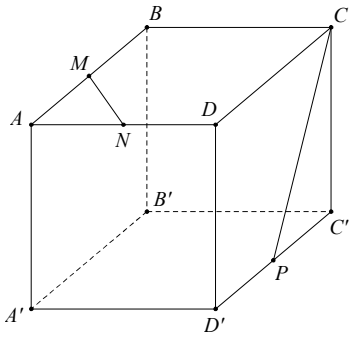
Hướng dẫn giải

Chọn D

$$d\left(AA',BD\right)=d\left(AA',BDD'B'\right)=d\left(A,BDD'B'\right)=AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

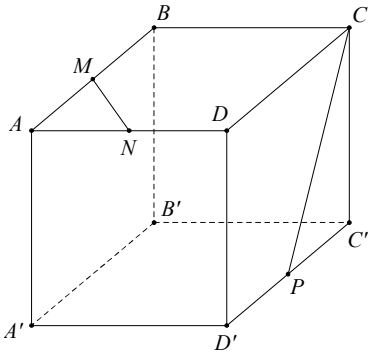
(với O là trung điểm của BD).

Câu 91: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,AD,C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.



A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

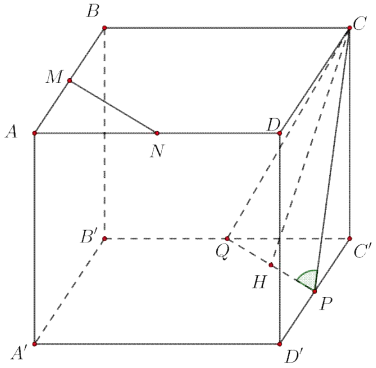
Câu 92: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.



A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm $B'C'$. Khi đó $PQ \,//\, MN$.

Ta có $(MN,CP)=(PQ,CP)=\widehat{CPQ}$ vì tam giác CPQ cân tại C do $CP=CQ=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi H trung điểm PQ nên $CH \perp PQ$; $PQ=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

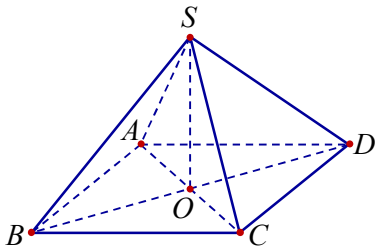
Vậy $\cos\widehat{CPH}=\frac{PH}{CP}=\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{2}{a\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 93: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và đáy $ABCD$ là hình vuông (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BD \perp (SAD)$. **B.** $BD \perp (SCD)$.

C. $BD \perp (SAC)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Câu 94: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và đáy $ABCD$ là hình vuông (tham khảo hình vẽ).

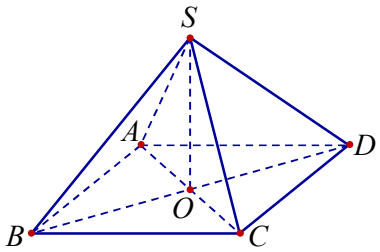


Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BD \perp (SAD)$. **B.** $BD \perp (SCD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$.

Do $AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

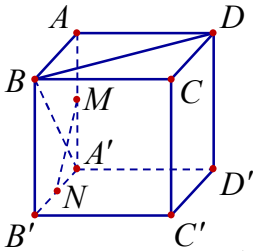
Câu 95: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính số đo của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAC).

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 96: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Câu 97: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và $A'B'$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và BD.



A. $45°$. **B.** $30°$.

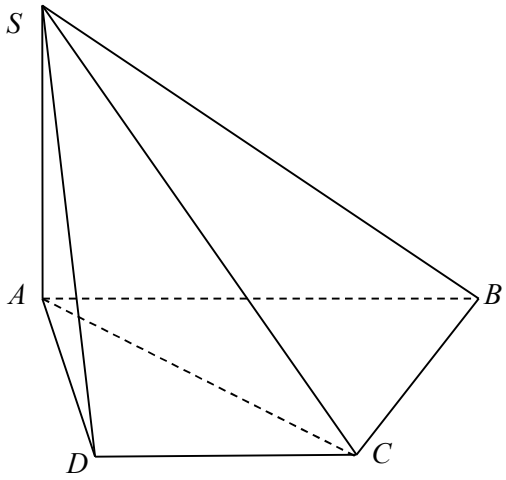
C. $60°$. **D.** $90°$.

Câu 98: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính số đo của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAC).

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



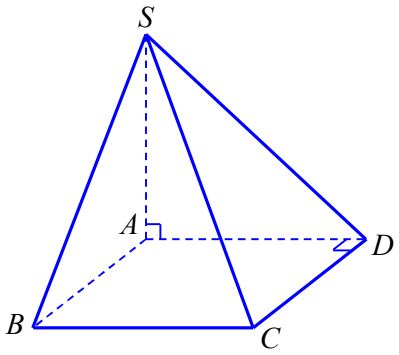
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow \widehat{(BC,(SAC))} = 90°$.

Câu 99: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải

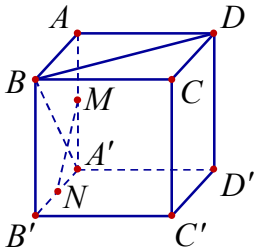
Chọn D



Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow AD$ là đoạn vuông góc chung của AD và SA.

Do đó $d(SA,CD) = AD = 2a$.

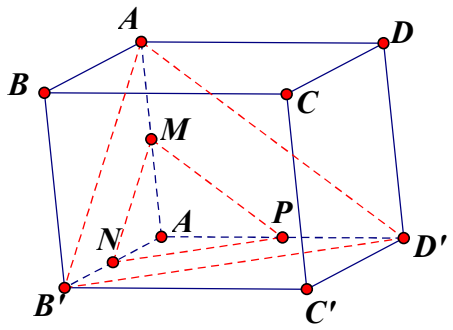
Câu 100: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và $A'B'$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và BD.



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Gọi P là trung điểm cạnh AD'. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên

$AB' = B'D' = D'A = a\sqrt{2}$ suy ra $MN = NP = PM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\widehat{MN, BD}\right) = \left(\widehat{MN, NP}\right) = 60°$.

Câu 101: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 102: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

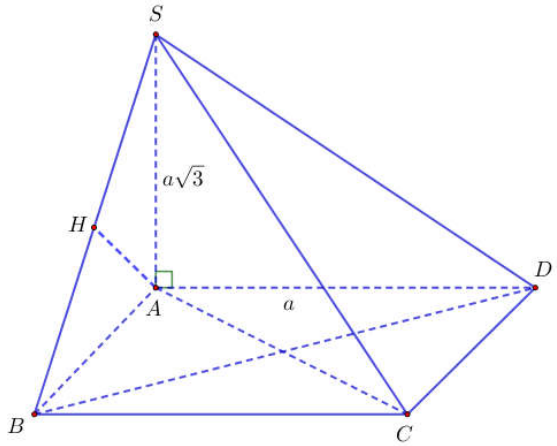
A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Câu 103: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$, vẽ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

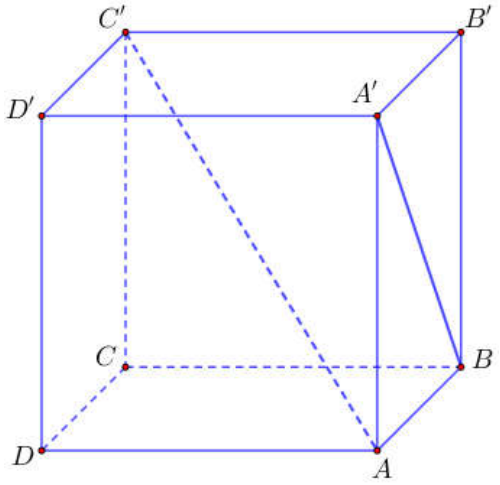
Ta có $AD \,//\, BC \Rightarrow d\left(D,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 104: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Có $\left.\begin{matrix} AB' \perp A'B \\ B'C' \perp A'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng $90°$.

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, chuẩn hóa $a=1$ sao cho $B(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $B'(0;0;1)$, $A'(1;0;1)$, $C'(0;1;1)$.

Ta có đường thẳng $A'B$ có vtcp $\vec{u}=(1;0;1)$, AC' có vtcp $\vec{k}=(-1;1;1)$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' thì $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{k}|}{|\vec{u}|.|\vec{k}|}=0$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng $90°$.

Câu 105: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính góc tạo bởi SA và CD.

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Câu 106: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Tính $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=-a^2$.

Câu 107: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\dfrac{a}{2}$. D. $\dfrac{a}{3}$.

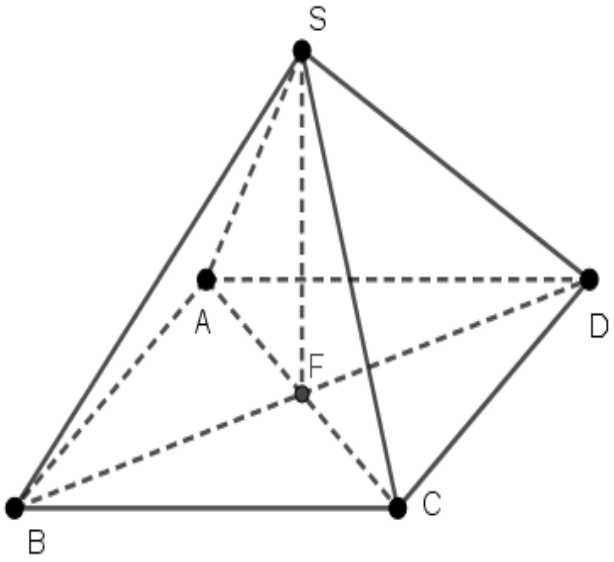
Câu 108: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính góc tạo bởi SA và CD.

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $CD // AB \Rightarrow (\widehat{SA,CD}) = (\widehat{SA,AB}) = \widehat{SAB} = 60°$ (vì tam giác SAB đều).

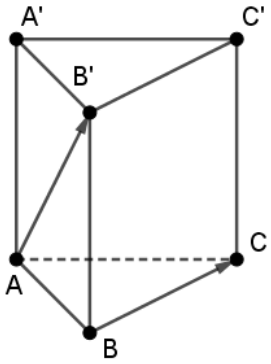


Câu 109: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Tính $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=-a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{BC}$.

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}$.

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ (vì $\overrightarrow{BB'}\perp\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}=0$).

$=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

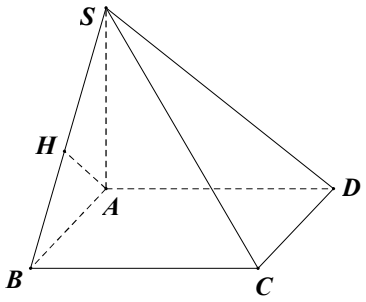
$=-AB.BC.\cos 60^\circ=-a.a.\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}a^2$.

Câu 110: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khi đó $BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 111: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lượt lần là trung điểm của AB, AC. Tính côsin góc φ giữa SM và DN.

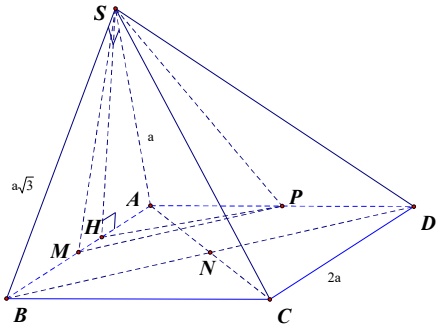
A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{5}{4}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Câu 112: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lượt lần là trung điểm của AB, AC. Tính côsin góc φ giữa SM và DN.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{5}{4}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của AD, H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống AB.

Theo giả thiết $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SAB có $AB^2 = SA^2 + SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S. Ta có: $MP // DN$ do đó góc giữa SM và DN là góc giữa SM và MP.

Xét tam giác SAB có: $SM = \dfrac{1}{2}AB = a$ và $SH = \dfrac{SA.SB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \dfrac{a}{2}$.

Ta lại có: $MP = \dfrac{1}{2}BD = a\sqrt{2}$. Mặt khác: $HP = \sqrt{HA^2 + AP^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó: $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SHP có $\cos\widehat{SMP} = \dfrac{SM^2 + MP^2 - SP^2}{2.SM.MP} = \dfrac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2.a.a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 113: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $CA = BD = c$. Giá trị $\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}\right)$ là:

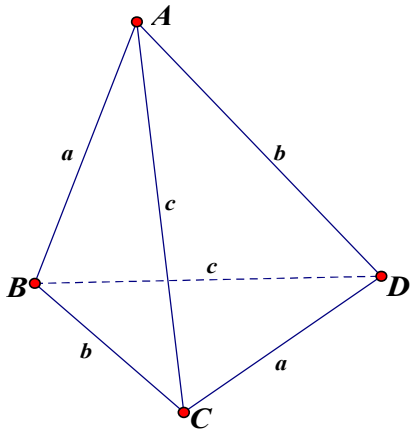
A. $\frac{a^2-c^2}{b^2}$. **B.** $\frac{b^2-c^2}{b^2}$. **C.** $\frac{c^2-a^2}{b^2}$. **D.** $\frac{a^2-b^2}{b^2}$.

Câu 114: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, $CA=BD=c$. Giá trị $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$ là:

A. $\frac{a^2-c^2}{b^2}$. **B.** $\frac{b^2-c^2}{b^2}$. **C.** $\frac{c^2-a^2}{b^2}$. **D.** $\frac{a^2-b^2}{b^2}$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABD có $\cos BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB.AD}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a.b}$.

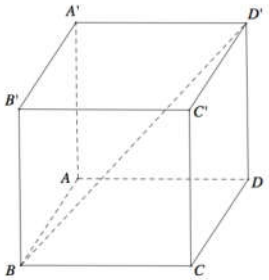
Tam giác ACD có $\cos CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC.AD}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2c.b}$.

Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}}{BC.DA}=\frac{\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{DA}}{BC.DA}=\frac{-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{BC.DA}$

$=\frac{-AC.AD.\cos CAD+AB.AD.\cos BAD}{BC.DA}$

$=\frac{-c.b.\frac{c^2+b^2-a^2}{2c.b}+a.b.\frac{a^2+b^2-c^2}{2a.b}}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{b^2}$.

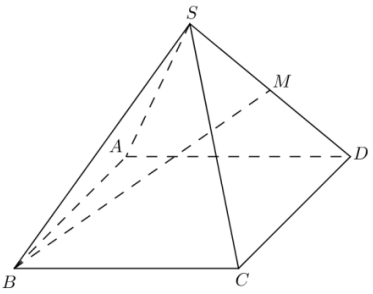
Câu 115: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên)



Tang góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $\left(ADD'A'\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

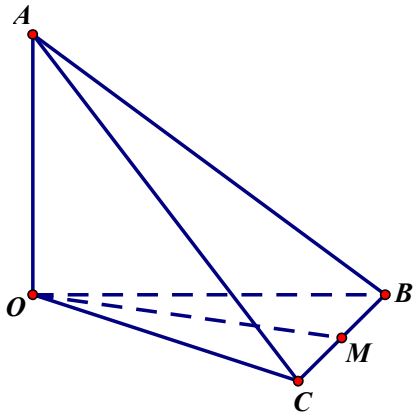
Câu 116: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên).



Côsin góc giữa hai đường thẳng BM và AD bằng.

A. $\frac{\sqrt{55}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{155}}{20}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{20}$.

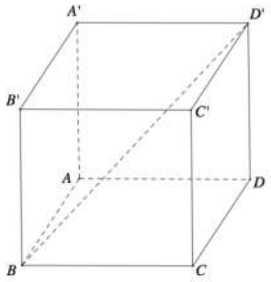
Câu 117: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB=OC$. Gọi M là trung điểm BC, $OM=a$ (tham khảo hình vẽ bên).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng.

A. $\sqrt{2}a$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 118: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên)



Tang góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

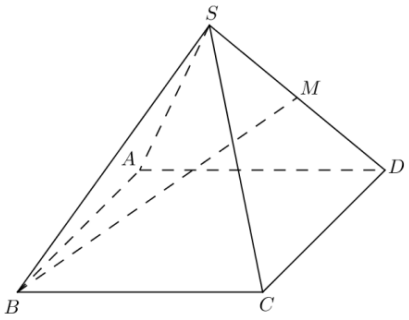
Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $BA\perp(ADD'A')$ nên góc giữa BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ là $\widehat{AD'B}$.

Đặt $AB=a\Rightarrow AD'=a\sqrt{2}$. Do đó $\tan\widehat{AD'B}=\frac{AB}{AD'}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 119: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên).

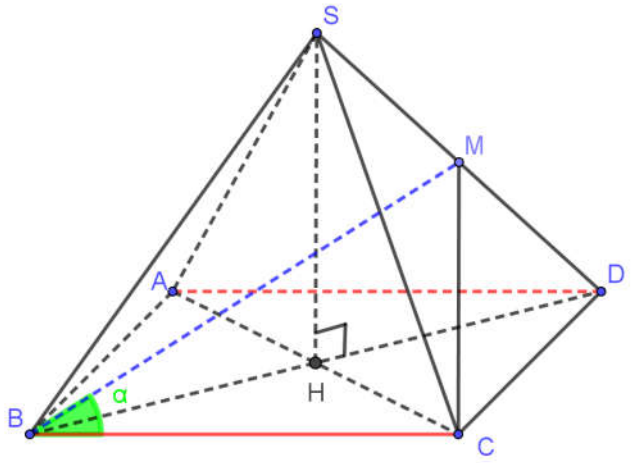


Côsin góc giữa hai đường thẳng BM và AD bằng.

A. $\frac{\sqrt{55}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{155}}{20}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{20}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AD \,//\, BC \Rightarrow \left(\widehat{AD,BM}\right) = \left(\widehat{BC,BM}\right)$.

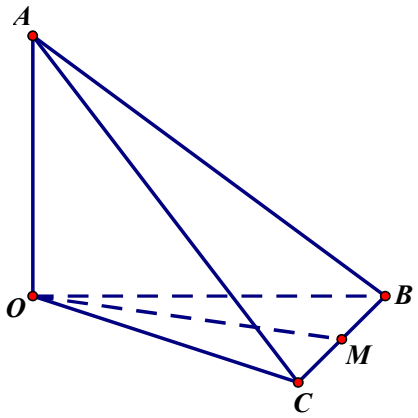
Gọi cạnh của hình chóp là a.

$$BM^2 = \frac{SB^2 + BD^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = \frac{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\left(\widehat{BC,BM}\right) = \left|\cos\alpha\right| = \left|\frac{BM^2 + BC^2 - CM^2}{2BM.BC}\right| = \left|\frac{\frac{5a^2}{4} + a^2 - \frac{3a^2}{4}}{2\frac{a\sqrt{5}}{2}.a}\right| = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Câu 120: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB = OC$. Gọi M là trung điểm BC, $OM = a$ (tham khảo hình vẽ bên).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng.

A. $\sqrt{2}a$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OM$.

Mà $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $O \Rightarrow OM \perp BC$.

Vậy $d(OA, BC) = OM = a$.

Câu 121: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn chứa một đường thẳng cố định.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 122: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $30°$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Câu 123: Một kim tự tháp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 150m, cạnh đáy dài 220m. Diện tích xung quanh của kim tự tháp này là?

A. $1100\sqrt{346}\ (\text{m}^2)$. **B.** $4400\sqrt{346}\ (\text{m}^2)$. **C.** $2200\sqrt{346}\ (\text{m}^2)$. **D.** $2420000\ (\text{m}^3)$.

Câu 124: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn chứa một đường thẳng cố định.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn C

A sai vì qua một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì có vô số mặt phẳng khác vuông góc với (P).

B sai vì chúng có thể trùng nhau.

C đúng

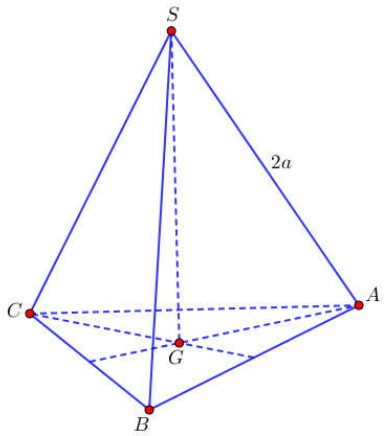
D sai vì nếu dựng hai mặt phẳng như câu **A** (đã nói ở trên) thì ta thấy sẽ có hai mặt phẳng bất kì cùng vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 125: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $30°$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi G là tâm tam giác đều ABC thì $SG \perp (ABC)$, $\widehat{SAG} = 30°$.

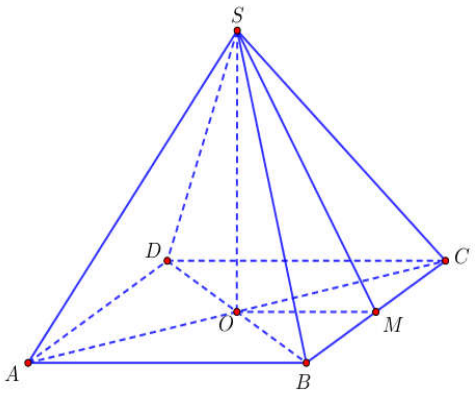
Ta có $\sin \widehat{SAG} = \frac{SG}{SA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{SG}{2a} \Rightarrow SG = a$.

Câu 126: Một kim tự tháp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 150m, cạnh đáy dài 220m. Diện tích xung quanh của kim tự tháp này là?

A. $1100\sqrt{346}\ (\text{m}^2)$. **B.** $4400\sqrt{346}\ (\text{m}^2)$. **C.** $2200\sqrt{346}\ (\text{m}^2)$. **D.** $2420000\ (\text{m}^3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC, $SO = 150$ m, $BC = 220$ m, $OM = 110$ m, $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = 10\sqrt{346}$ m.

Diện tích xung quanh của kim tự tháp:

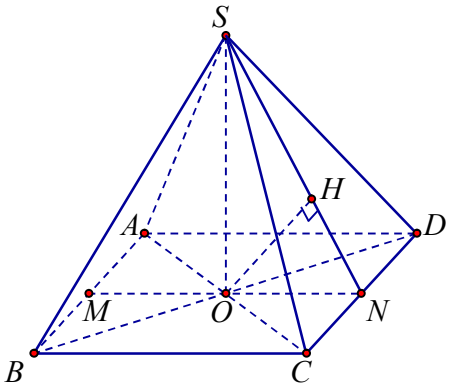
$S_{xq} = 4S_{SBC} = 4.\dfrac{1}{2}SM.BC = 2SM.BC = 4400\sqrt{346}\ \left(\text{m}^2\right)$.

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD; H là hình chiếu vuông góc của O trên SN.

Vì $AB//CD$ nên $d(AB,\text{SC})=d(AB,(SCD))=d(M,(SCD))=2d(O,(SCD))$ (vì O là trung điểm đoạn MN)

Ta có $\begin{cases}CD\perp SO\\CD\perp ON\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SON)\Rightarrow CD\perp OH$

Khi đó $\begin{cases}CD\perp OH\\OH\perp SN\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SCD)\Rightarrow d(O;(SCD))=OH.$

Tam giác SON vuông tại O nên $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{5}}$

Vậy $d(AB,\text{SC})=2OH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $45°$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng *(Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị).*

A. $48°$. **B.** $51°$. **C.** $42°$. **D.** $39°$.

Lời giải

Chọn B

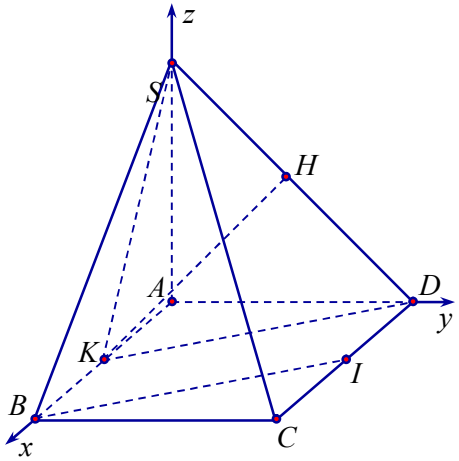
Cách 1. Giả sử hình vuông $ABCD$ cạnh a, $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)=45°\Rightarrow SA=AD=a$.

Xét trong không gian tọa độ $Oxyz$ trong đó: $O\equiv A$, $Ox\equiv AB, Oy\equiv AD, Oz\equiv AS$. Khi đó ta có:

$B(a;0;0)$, $I\left(\frac{a}{2};a;0\right)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;a)$

Suy ra $\overrightarrow{IB}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)$, $\overrightarrow{SD}=(0;-a;a)$

Mặt khác: $\cos\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{SD}\right)=\dfrac{a^2}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+a^2}.\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}\Rightarrow\left(\widehat{IB,SD}\right)\approx 51°$.



Cách 2. Gọi K là trung điểm của AB.

Giả sử hình vuông $ABCD$ cạnh a, $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)=45°\Rightarrow SA=AD=a$

Gọi K là trung điểm của AB. Vì $KD//BI$ nên góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng góc giữa hai đường thẳng KD và SD và là góc $\widehat{SDK}$. Ta có $KD=SK=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}, SD=a\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm của SD. Ta có $\cos\widehat{SDK}=\dfrac{HD}{KD}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng 51°.

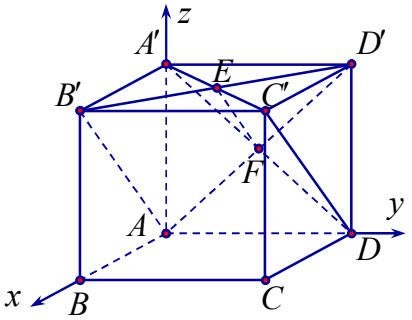
Câu 3: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2, AD=3; AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

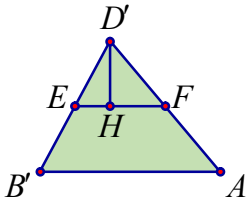
A. $45,2°$. **B.** $38,1°$. **C.** $53,4°$. **D.** $61,6°$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ có giao tuyến là EF như hình vẽ. Từ A' và D' ta kẻ 2 đoạn vuông góc lên giao tuyến EF sẽ là chung một điểm H như hình vẽ. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng cần tìm chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$.





Tam giác DEF lần lượt có $D'E=\dfrac{D'B'}{2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $D'F=\dfrac{D'A}{2}=\dfrac{5}{2}$, $EF=\dfrac{B'A}{2}=\sqrt{5}$.

Theo hê rông ta có: $S_{DEF}=\frac{\sqrt{61}}{4}$. Suy ra $D'H=\frac{2S_{DEF}}{EF}=\frac{\sqrt{305}}{10}$.

Tam giác $D'A'H$ có: $\cos\widehat{A'HD'}=\frac{HA'^2+HD'^2-A'D'^2}{2HA'.HD'}=-\frac{29}{61}$.

Do đó $\widehat{A'HD'}\approx 118,4°$ hay $\left(\widehat{A'H,D'H}\right)\approx 180°-118,4°=61,6°$.

Cách 2: Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ . Khi đó $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;3;0)$, $C(2;3;0)$, $A'(0;0;4)$, $B'(2;0;4)$, $D'(0;3;4)$, $C'(2;3;4)$.

Gọi $\vec{n_1}$ là véc tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Có $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD'}\right]=(-12;-8;6)$.

Gọi $\vec{n_2}$ là véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Có $\vec{n_2}=\left[\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'D}\right]=(-12;8;6)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$

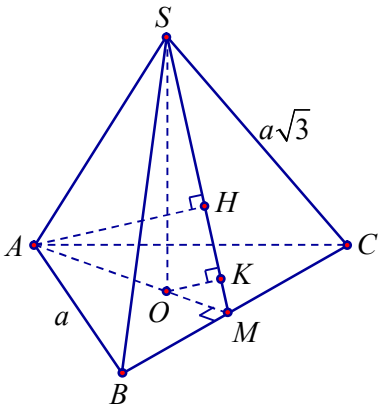
$\cos\alpha=\left|\frac{\vec{n_1}\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}\right|=\frac{29}{61}$. Vậy giá trị gần đúng của góc α là $61,6°$

Câu 4: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d=d_1+d_2$.

A. $d=\frac{2a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $d=\frac{2a\sqrt{2}}{33}$. **C.** $d=\frac{8a\sqrt{2}}{33}$. **D.** $d=\frac{8a\sqrt{2}}{11}$.

Lời giải

Chọn C



Do tam giác ABC đều tâm O suy ra $AO\perp BC$ tại M là trung điểm của BC.

Ta có: $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}, MO=\frac{1}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{6}, OA=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ giả thiết hình chóp đều suy ra $SO\perp(ABC)$, $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{3a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng $OK\perp SM, AH\perp SM\Rightarrow AH//OK; \frac{OK}{AH}=\frac{OM}{AM}=\frac{1}{3}$.

Có $\begin{cases}BC\perp SO\\BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp OK$.

Có $\begin{cases} OK \perp SM \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SBC), AH \perp (SBC)$ (do $AH // OK$).

Từ đó có $d_1 = d(A,(SBC)) = AH = 3OK; d_2 = d(O,(SBC)) = OK$.

Trong tam giác vuông OSM có đường cao OK nên:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{36}{3a^2} + \frac{9}{24a^2} = \frac{99}{8a^2} \Rightarrow OK = \frac{2a\sqrt{2}}{33}.$$

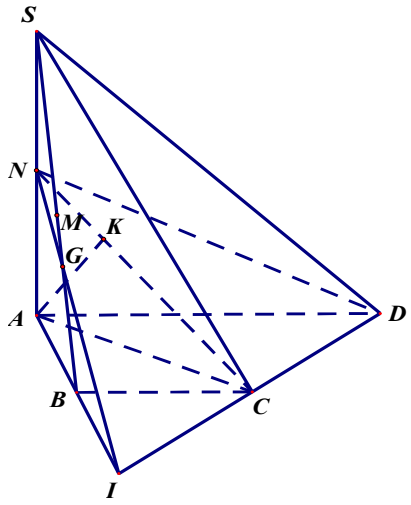
Vậy $d = d_1 + d_2 = 4OK = \frac{8a\sqrt{2}}{33}$.

Câu 5: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{66}}{22}$. **B.** $2a\sqrt{66}$. **C.** $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\frac{a\sqrt{66}}{44}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1 : Gọi I là giao điểm của AB và CD, vì $AD = 2BC$ nên B là trung điểm của AI. Gọi G là giao điểm của SB và IN, dễ thấy G là trọng tâm tam giác SAI. Do đó,

$SG = \frac{2}{3}SB = \frac{4}{3}SM \Rightarrow MG = \frac{1}{4}SG$, mà $G \in (NCD)$ nên

$d(M;(NCD)) = \frac{1}{4}d(S;(NCD)) = \frac{1}{4}d(A;(NCD))$.

Lại có, $CD \perp AC; CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Gọi K là hình chiếu của A lên NC thì

$d(A;(NCD)) = AK = \frac{AN.AC}{\sqrt{AN^2 + AC^2}}$ $(*)$, với $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AC = a\sqrt{2}$ thay vào $(*)$ ta được

$AK = \frac{a\sqrt{66}}{11}$. Vậy $d(M;(NCD)) = \frac{1}{4}AK = \frac{a\sqrt{66}}{44}$

Cách 2 : Gắn hệ trục $Oxyz$ sao cho $O \equiv A; D \in Ox; B \in Oy; S \in Oz; |\vec{i}| = a$.

Khi đó $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$, $N\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$d\left(M;(NCD)\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CD}\right]\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CD}\right]\right|}.$$

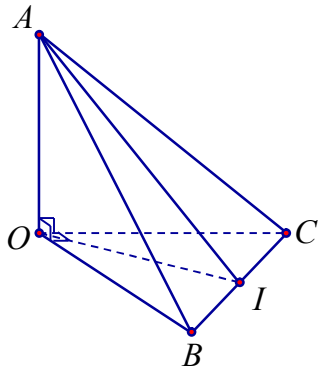
Nhập vào máy tính bỏ túi các tọa độ $\overrightarrow{CN}\left(-1;-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{CM}\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ta được kết quả $\frac{\sqrt{66}}{44}$. Vậy $d\left(M;(NCD)\right) = \frac{\sqrt{66}}{44}a$.

Câu 6: (THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((OBC),(ABC)\right)} = \widehat{(OI,AI)} = \widehat{OIA}$.

Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30°$.

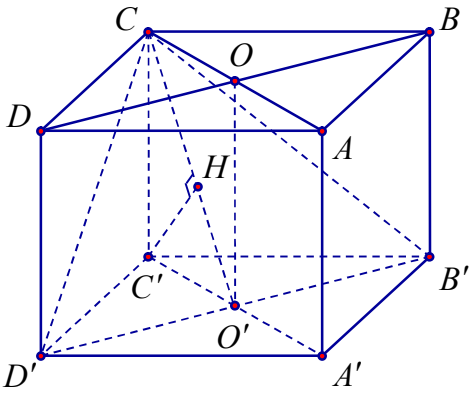
Vậy $\widehat{\left((OBC),(ABC)\right)} = 30°$.

Câu 7: (THPT Hoa Lư A-Ninh Bình-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai mặt đáy.Khi đó tứ giác $COO'C'$ là hình bình hành và $C'O' = \dfrac{AC}{2} = a$

Do $BD \,//\, B'D' \Rightarrow BD \,//\, (CB'D')$ nên $d(BD;CD') = d(O;(CB'D')) = d(C';(CB'D'))$.

Ta có : $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (COO'C') \Rightarrow (CB'D') \perp (COO'C')$

Lại có $(CB'D') \cap (COO'C') = CO'$.

Trong $\Delta CC'O'$ hạ $C'H \perp CO' \Rightarrow C'H \perp (CB'D') \Rightarrow d(BD;CD') = C'H$

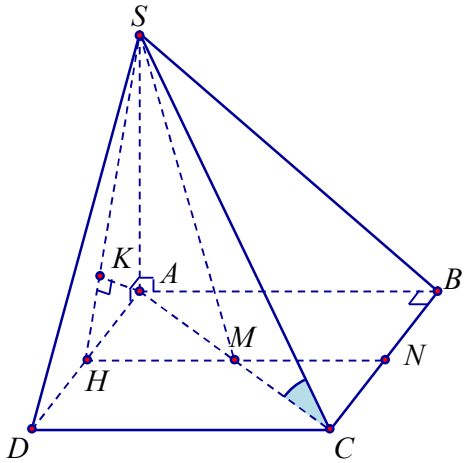
Khi đó : $\dfrac{1}{C'H^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{C'O'^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow C'H = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 8: **(THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. **C.** $\dfrac{5a}{2}$. **D.** $5a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



$AC = 5a$, $SA = 5a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm BC $\Rightarrow AB // (SMN) \Rightarrow d(AB, SM) = d(A, (SMN))$.

Dựng $AH \perp MN$ tại H trong (ABC).

Dựng $AK \perp SH$ tại K trong (SAH).

$\Rightarrow AK \perp (SMN)$ tại K nên $d(A,(SMN)) = AK \Rightarrow d[AB,SM] = AK$.

$AH = NB = 2a$.

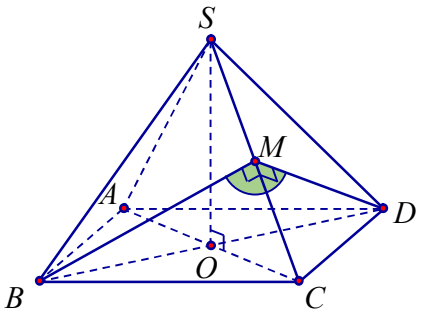
$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{75a^2} = \frac{79}{300a^2} \Rightarrow AK = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Câu 9: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC = SB = a, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của SC, do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC \perp BM$ (1).

Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM.

Ta có $\Delta SBO = \Delta CBO$ suy ra $SO = CO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc $\widehat{BMO} = 45°$, suy ra $\widehat{BMD} = 90°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $90°$.

Câu 10: (THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018) Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x = -1$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \left(3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$.

$= \left(3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$

$= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + (x+3)\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + (x+3)\overrightarrow{DC}$

$= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (x+2)\overrightarrow{DC}$.

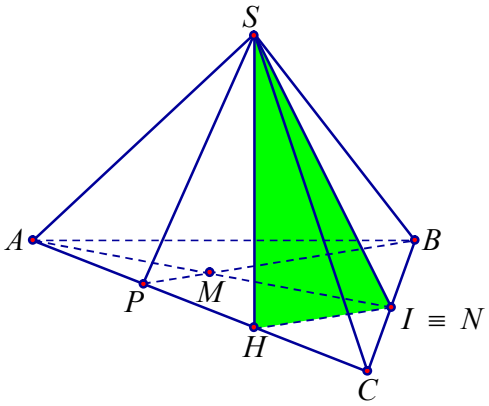
Ba véc tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Câu 11: (THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB=a$, $BC=2a$. Điểm H thuộc cạnh AC sao cho $CH=\frac{1}{3}CA$, SH là đường cao hình chóp $S.ABC$ và $SH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I là trung điểm BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Gọi (α) là mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

Vì $SH\perp(ABC)$, $AI\subset(ABC)$ nên $SH\subset(\alpha)$.

Ta có $AI=AB=BI=a$ nên ΔABI là tam giác đều. Gọi M là trung điểm AI, ta được $BM\perp AI(1)$. Từ đây suy ra $(\alpha)\,//\,BM$ (vì cùng vuông góc AI).

Trong (ABC) dựng $HN\,//\,BM$ với $N\in BC$, ta suy ra $(\alpha)\cap(ABC)=HN$.

Từ đó, thiết diện của mặt phẳng (α) và hình chóp là ΔSHN.

Xét ΔABP vuông có: $\begin{cases}\cos 30^\circ=\frac{AB}{BP}\\ \sin 30^\circ=\frac{AP}{BP}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}BP=\frac{AB}{\cos 30^\circ}=\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\\ AP=\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\end{cases}$.

Dễ thấy $AC=a\sqrt{3}\Rightarrow CH=\frac{AC}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy H là trung điểm của $CP\Rightarrow HN$ là đường trung bình của ΔCBP hay $N\equiv I\Rightarrow HN=\frac{1}{2}BP=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông $SHN\left(\widehat{H}=90^\circ\right)$: $S_{SHN}=\frac{1}{2}HS.HN=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Cách 2: Tam giác ABI đều $\Rightarrow\widehat{IAH}=30^\circ$.

Áp dụng định lí côsin trong ΔAHI có $IH=\frac{a}{\sqrt{3}}$

Vậy $\begin{cases} AH^2=\dfrac{4a^2}{3} \\ HI^2=\dfrac{a^2}{3} \\ AI^2=a^2 \end{cases}$ suy ra ΔAIH vuông đỉnh I hay $HI\perp AI$.

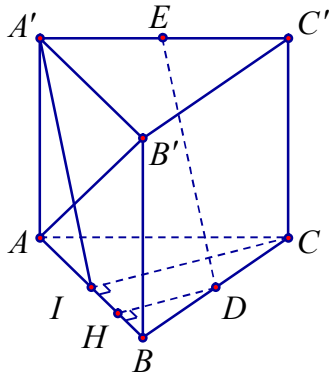
Phần tiếp theo giống cách 1.

Câu 12: (THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông cạnh a. Gọi D, E lần lượt là trung điểm các cạnh BC, $A'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và DE theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CI\perp(ABB'A')$

Gọi H là trung điểm của IB.

Vì $DH//CI$ nên $DH\perp(ABB'A')$

Vì $\begin{cases} ID//AC//A'E \\ ID=\dfrac{1}{2}AC=A'E \end{cases}$ nên tứ giác $A'EDI$ là hình bình hành, suy ra $DE\,//\,A'I\subset(ABB'A')$.

Ta có $DE\,//\,(ABB'A')$.

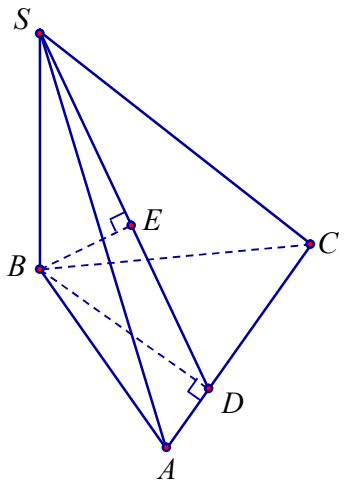
Vậy $d(AB',DE)=d(D,(ABB'A'))=DH=\dfrac{CI}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 13: (THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SB=3a$, $AB=4a$, $BC=2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **B.** $\dfrac{4a}{5}$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$.

Lời giải

Chọn A



Từ B kẻ BD vuông góc AC tại D, suy ra $AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

Mặt khác $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD}$ nên từ B kẻ BE vuông góc SD tại E thì

$BE \perp (SAC) \Rightarrow BE = d(B,(SAC))$.

Trong ΔSBD vuông tại B, ta có

$$\frac{1}{BE^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{61}{144a^2}.$$

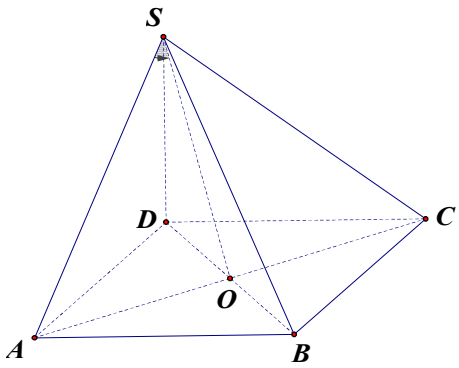
Suy ra $BE = \frac{12\sqrt{61}a}{61}$.

Câu 14: **(THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018)** **Cho** hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

A. $45°$. **B.** $\arcsin\frac{1}{4}$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông $ABCD$. Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp SD \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của AS lên mặt phẳng (SBD) suy ra góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$.

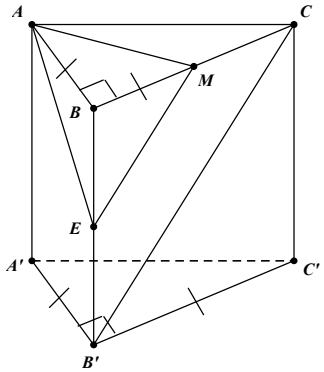
Trong tam giác vuông AOS, ta có $\sin \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \to \widehat{ASO} = 30°$.

Câu 15: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018)** Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó: $EM \;//\; B'C \Rightarrow B'C \;//\; (AME)$

Ta có: $d(AM, B'C) = d(B'C, (AME)) = d(C, (AME)) = d(B, (AME))$

Xét khối chóp $BAME$ có các cạnh BE, AB, BM đôi một vuông góc với nhau nên

$$\frac{1}{d^2(B,(AME))} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{MB^2} + \frac{1}{EB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{d^2(B,(AME))} = \frac{7}{a^2} \Leftrightarrow d^2(B,(AME)) = \frac{a^2}{7}$$

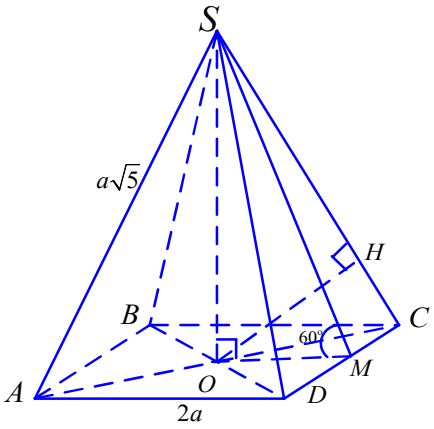
$$\Leftrightarrow d(B,(AME)) = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

Câu 16: **(THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều, O là tâm của đáy $ABCD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của CD thì $SM \perp CD$ và $OM \perp CD$ suy ra $\widehat{SMO} = 60°$ là góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABC).

Hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$ nên $OC = \frac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$; $OM = \frac{1}{2}BC = a$. Do ΔSOM vuông tại O; $\widehat{SMO} = 60°$ nên $SO = OM.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông SOC, kẻ $OH \perp SC$, $BD \perp (SOC)$ nên $OH \perp BD$. Do đó OH là khoảng cách giữa BD và SC: Tam giác vuông SOC có $SO = a\sqrt{3}$; $OC = a\sqrt{2}$ nên

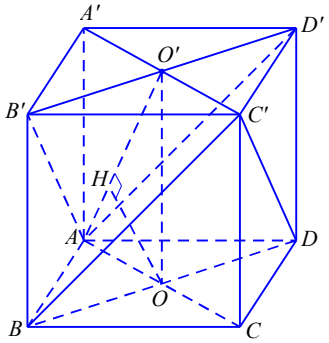
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{6a^2}{5} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Câu 17: **(THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $B'D' // BD$ và $AB' // DC'$. Suy ra $(AB'D') // (BC'D)$.

Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Kẻ $OH \perp AO'$.

Ta có $B'D' \perp OO'$ và $B'D' \perp AC$ nên $B'D' \perp OH$.

Do đó $OH \perp (AB'D')$. Suy ra $d\left((AB'D'),(BC'D)\right) = d\left(O,(AB'D')\right) = OH$.

Xét tam giác OAO' vuông tại O có $OO'=2$, $OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

Suy ra $OH=\frac{OO'.OA}{\sqrt{OO'^2+OA^2}}=\frac{2.\sqrt{2}}{\sqrt{4+2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Cách khác: Sử dụng công thức nhanh $d\left(\left(AB'D'\right),\left(BC'D\right)\right)=\frac{1}{3}A'C=\frac{1}{3}2\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 18: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

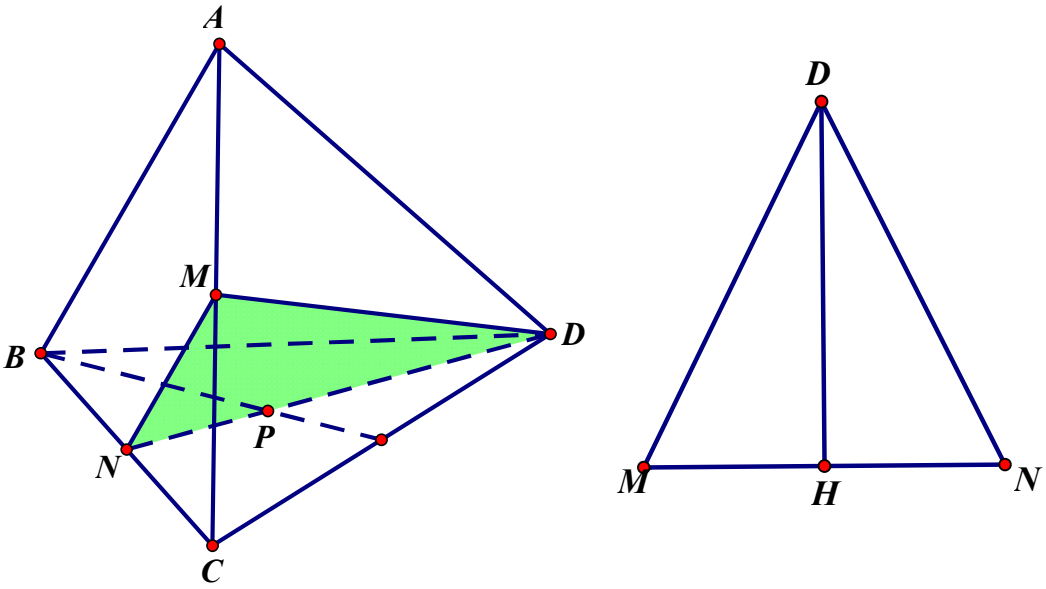
Trong tam giác BCD có P là trọng tâm, N là trung điểm BC nên suy ra N, P, D thẳng hàng. Vậy, thiết diện là tam giác MNP.

Xét tam giác MND, ta có $MN=\frac{AB}{2}=a$, $DM=DN=\frac{AD\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$. Do đó tam giác MND cân tại D.

Gọi H là trung điểm MN, suy ra $DH\perp MN$.

Ta có: $DH=\sqrt{DM^2-MH^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Diện tích tam giác MND là: $S_{\Delta MND}=\frac{1}{2}MN.DH=\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{11}}{2}=\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.



Câu 19: **(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AB, dựng $OK \perp SM$, ta chứng minh $OK \perp mp(SAB)$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều và O là tâm của đáy ABC nên $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp AB$.

Do tam giác ABC đều và M là trung điểm AB nên $AB \perp CM$.

Từ $SO \perp AB$ và $AB \perp CM$ suy ra $AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp OK$.

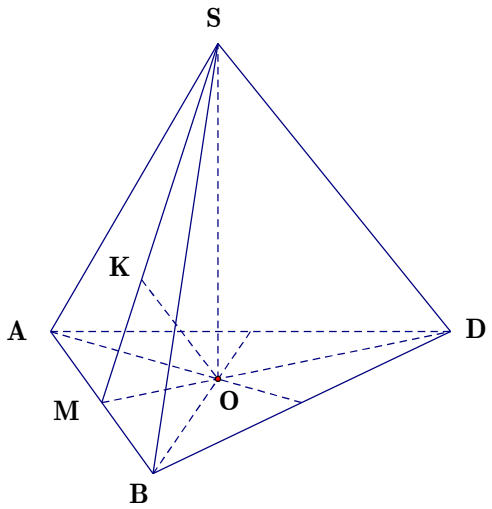
Từ $OK \perp SM$ và $AB \perp OK$ suy ra $OK \perp mp(SAB)$. Bởi vậy $d(O;(SAB)) = OK$.

Ta có $OM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}.\frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOM vuông tại O ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{10}{3a^2} \Rightarrow OK = a\sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Vậy $d(O;(SAB)) = a\sqrt{\frac{3}{10}}$.



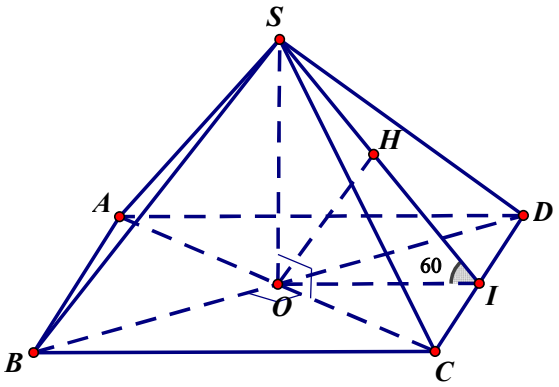
Câu 20: **(TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C

* Ta có: $\frac{d(B;(SCD))}{d(O;(SCD))} = \frac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow d(B;(SCD)) = 2.d(O;(SCD)) = 2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).



* Gọi I là trung điểm của CD ta có: $\begin{cases} SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow \left((SCD);(ABCD)\right) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60^\circ$.

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI.\tan 60 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

* Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: [1H3 - 3] (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Cho hình lập phương có cạnh bằng . Gọi là điểm thuộc cạnh sao cho . Tính khoảng cách từ điểm đến .

A. . **B. .** **C. .** **D. .**

Lời giải

Chọn C

Ta có: .

Ta có:

.

Câu 22: (THPT Quãng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

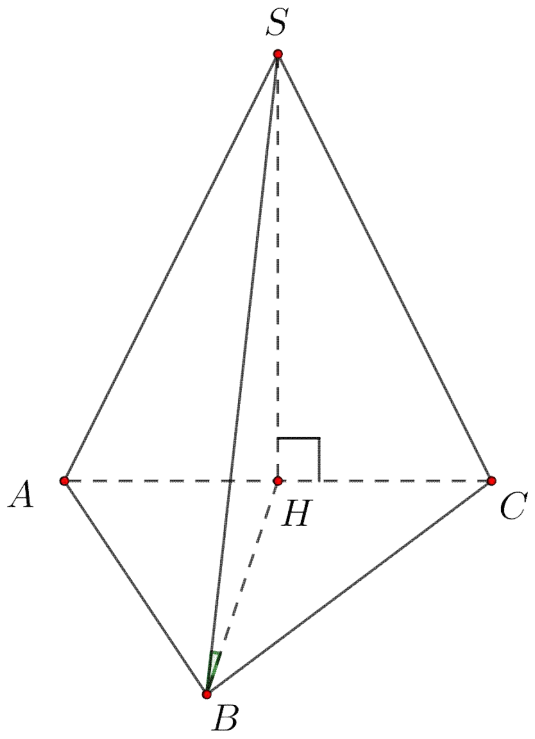
A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn D

Đặt $SA = SB = SC = a$.

Ta có ΔSAB vuông cân tại $S \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$; ΔSBC đều $\Rightarrow BC = a$; ΔSAC cân tại $S \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$. Ta thấy $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $B \Rightarrow$ trung điểm H của AC là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.



Vậy góc giữa SB và (ABC) là góc $\widehat{SBH}$. Ta có $SB=a$, $BH=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cos\widehat{SBH}=\frac{BH}{SB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{SBH}=30°$.

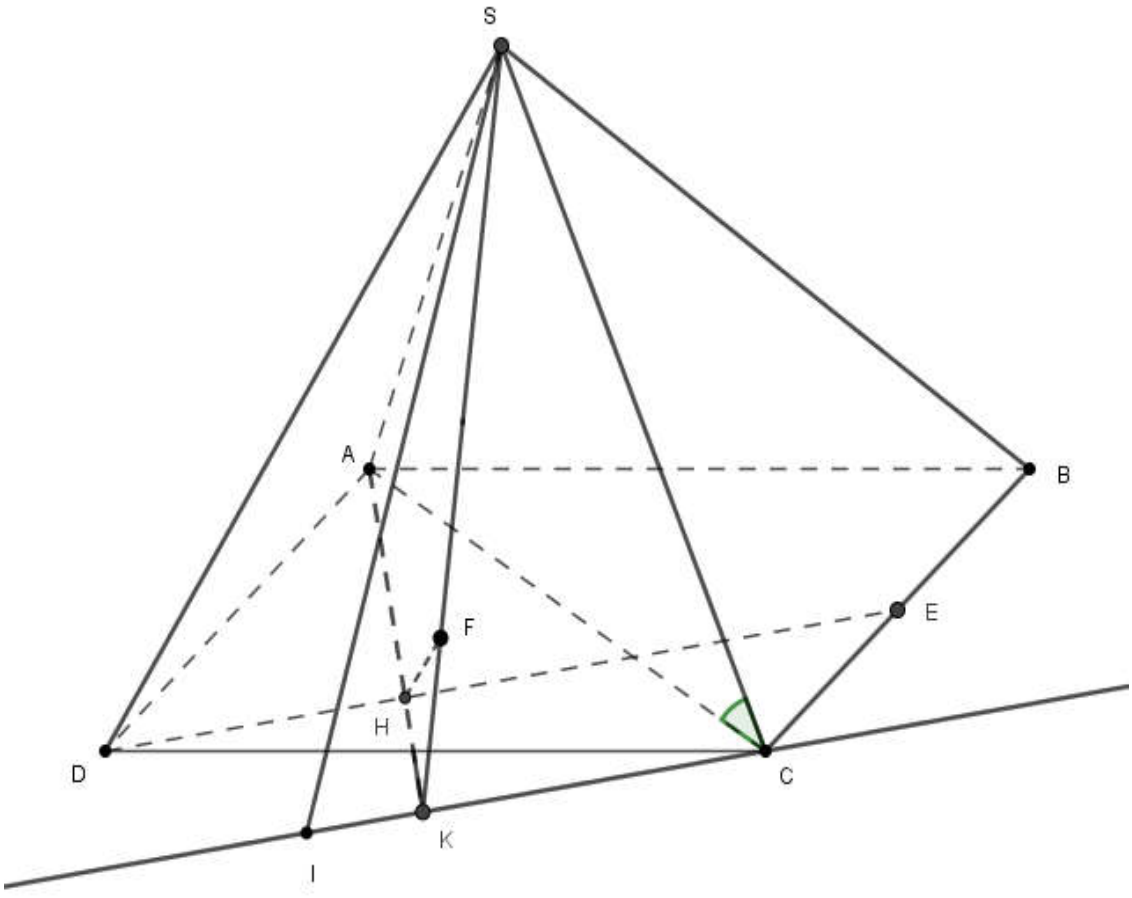
41-45_Quảng Xương 1_Lê Thanh Bình.doc

Câu 23: (THPT Quãng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Gọi E là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\frac{a\sqrt{38}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{38}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$, suy ra $\widehat{SCA} = 45°$.

Tam giác SCA vuông cân tại A, suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$. Dựng $CI \parallel DE$, suy ra $DE \parallel (SCI)$.

Dựng AK vuông góc với CI cắt DE tại H và cắt CI tại K.

Trong (SAK) dựng $HF \perp SK$, do $CI \perp (SAK) \Rightarrow HF \perp (SCI)$, $AK = \dfrac{CD.AI}{CI} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

$HK = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

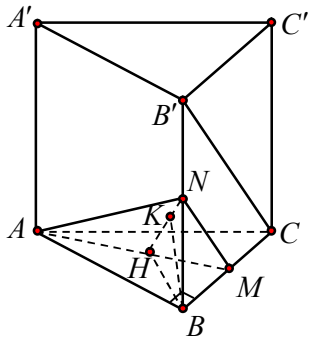
$SK = \sqrt{AK^2 + SA^2} = \dfrac{a\sqrt{95}}{5} \Rightarrow d(DE, SC) = d(H, (SCI)) = HF = \dfrac{SA.HK}{SK} = \dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

Câu 24: **(THPT Ngô Sĩ Liên-Bắc Giang-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = 2a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, $B'C$ là

A. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Gọi N là trung điểm BB'.

Ta có $\begin{cases} MN // B'C \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$

Mà M là trung điểm BC nên $d(C, (AMN)) = d(B, (AMN))$

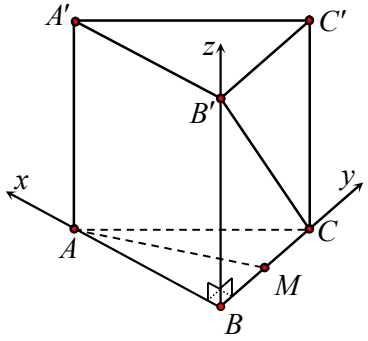
↳ Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $BH \perp AM$ thì $AM \perp (BHN) \Rightarrow \begin{cases} (AMN) \perp (BHN) \\ (AMN) \cap (BHN) = HN \end{cases}$

↳ Trong mặt phẳng (BHN), kẻ $BK \perp HN \Rightarrow BK \perp (AMN) \Rightarrow BK = d(B, (AMN))$.

↳ Tam giác ABM vuông tại B có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BM^2} \Rightarrow BH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

↳ Tam giác BHN vuông tại B có $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BN^2} \Rightarrow BK = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$.

Cách 2: Chọn hệ trục $Bxyz$ như hình vẽ



Ta có :

↳ $B(0; 0; 0)$; $A(2a; 0; 0)$; $C(0; 2a; 0)$; $B'(0; 0; a\sqrt{2})$

↳ M là trung điểm BC nên $M(0; a; 0)$

↳ $\overrightarrow{AM} = (-2a; a; 0)$; $\overrightarrow{B'C} = (0; 2a; -a\sqrt{2})$; $\overrightarrow{MC} = (0; -a; 0)$

↳ $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right] = (-a^2\sqrt{2}; -2a^2\sqrt{2}; -4a^2)$; $\overrightarrow{MC} = (0; -a; 0)$.

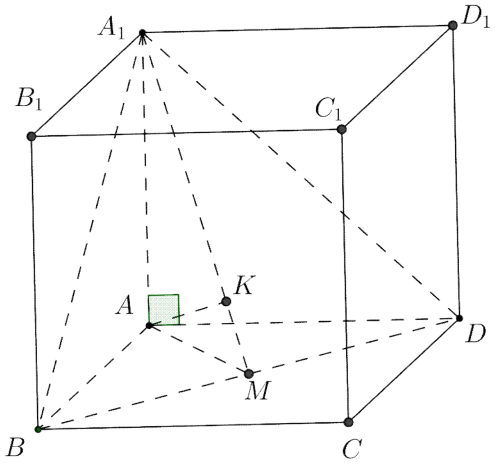
Khi đó $d(AM, BC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{MC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$.

Câu 25: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB = a, AD = 2a, AA_1 = 3a$. Khoảnh cách từ A đến mặt phẳng (A_1BD) bằng bao nhiêu?

A. a. **B.** $\frac{7}{6}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{6}{7}a$.

Lời giải

Chọn D



Trong tam giác ABD kẻ $AM \perp BD$ suy ra $\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}$.

.Trong tam giác A_1AM kẻ $AK \perp A_1M \Rightarrow \frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AA_1^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{9a^2} \Rightarrow AK=\frac{6}{7}a$.

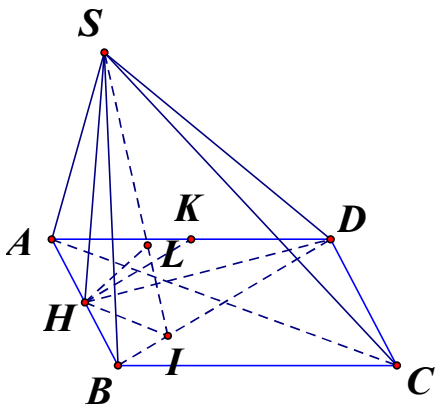
Khi đó $AK \perp (A_1BD)$ hay $d\left(A;(A_1BD)\right)=AK=\frac{6}{7}a$.

Câu 26: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và HK theo a

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\frac{3a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $HK // BD \Rightarrow HK // (SBD) \Rightarrow d(HK,SD)=d\left(HK,(SBD)\right)=d\left(H,(SBD)\right)$.

Dựng $HI \perp BD, HL \perp SI$ khi đó $HK=d\left(H,(SBD)\right)$.

$HI = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\dfrac{17a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}} = a\sqrt{3}$.

$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{16}{2a^2} = \dfrac{25}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 27: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$?

A. $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

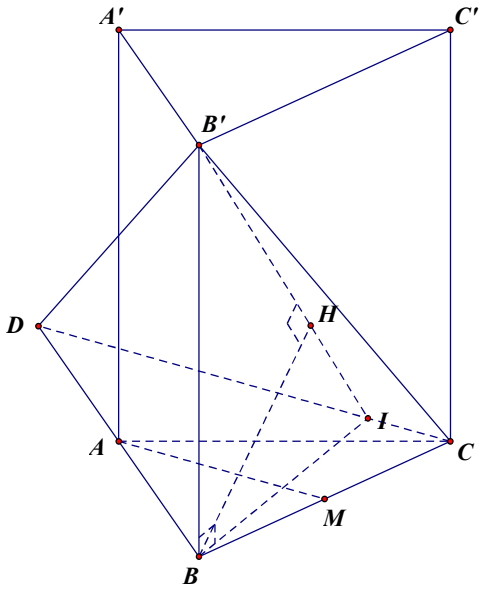
B. $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Nhận xét: hai đường thẳng AM và $B'C$ chéo nhau và không vuông góc nên ta chọn phương pháp tính thông qua đoạn vuông góc chung.

Qua điểm C, dựng đường thẳng $CD // AM$ với $D \in AB$. Ta dễ dàng chứng minh được $AM // \left(B'CD\right)$. Vậy $d\left(AM, B'C\right) = d\left(AM, \left(B'CD\right)\right) = d\left(M, \left(B'CD\right)\right)$.

Do B là chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $\left(ABC\right)$, đồng thời M là trung điểm của đoạn thẳng BC, nên ta có mối quan hệ $d\left(M, \left(B'CD\right)\right) = \dfrac{1}{2}.d\left(B, \left(B'CD\right)\right)$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B trên CD, H là hình chiếu vuông góc của B trên $B'I$. Ta dễ dàng chứng minh được $BH \perp \left(B'CD\right)$.

Theo định lý Talet trong tam giác BCD với $AM // CD$, ta có $BD = 2.BA = 2a$.

Có BI là đường cao của tam giác vuông BCD nên $BI = \dfrac{BD.BC}{\sqrt{BD^2 + BC^2}} = \dfrac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Có BH là đường cao của tam giác BIB' nên $BH=\dfrac{BI.BB'}{\sqrt{BI^2+BB'^2}}=\dfrac{\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.a\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{4a^2}{5}+2a^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{7}}=\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$

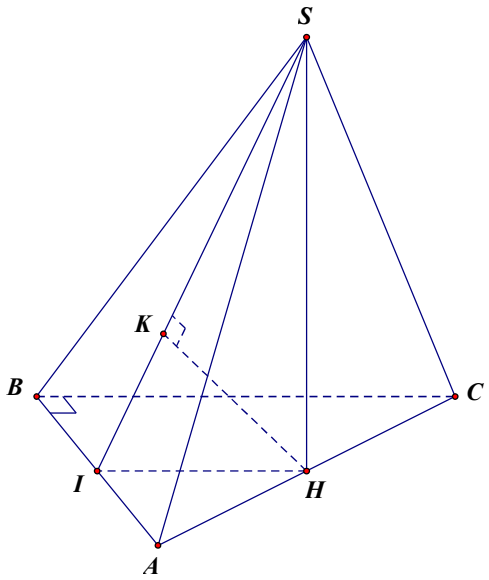
Vậy, ta có: $d\left(AM,B'C\right)=\dfrac{BH}{2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

Câu 28: **(THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SB=a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$?

A. $\dfrac{7a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Để tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$, ta xác định hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng $\left(SAB\right)$ qua các bước sau:

- Dựng $HI\perp AB$ với $I\in AB$, chứng minh được $AB\perp\left(SIH\right)$ và $\left(SIH\right)\perp\left(SAB\right)=SI$.
- Dựng K là hình chiếu vuông góc của H trên SI, ta chứng minh được $SK\perp\left(SAB\right)$.

Vậy $d\left(H,\left(SAB\right)\right)=HK$.

Do $HI//BC$ nên dễ dàng chỉ ra được I là trung điểm của AB và $IH=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IA=IB=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Ta có $AB\perp SI$ nên $SI=\sqrt{SB^2-IB^2}=\sqrt{2a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Do $SH\perp IH$ nên xét tam giác vuông SIH có:

$SH=\sqrt{SI^2-IH^2}=\sqrt{\frac{7a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}=a$; $HK=\frac{SH.HI}{SI}=\frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

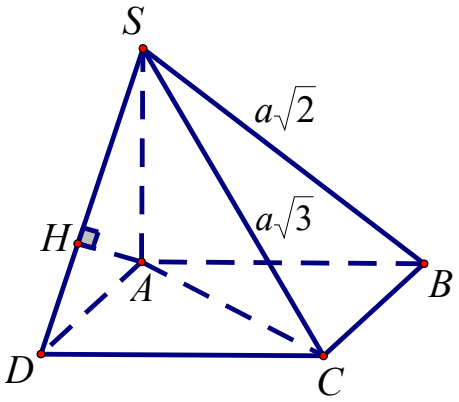
Do vậy, ta có $d\left(H,\left(SAB\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 29: (THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $\frac{SB}{\sqrt{2}}=\frac{SC}{\sqrt{3}}=a$. Cạnh $SA\perp\left(ABCD\right)$, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng:

A. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $AB=x$, $\left(x>0\right)$. Xét ΔSAB có $SA^2=SB^2-AB^2=2a^2-x^2$.

Xét ΔSAC có $SC^2=SA^2+AC^2\Leftrightarrow 3a^2=2a^2-x^2+2x^2\Leftrightarrow x^2=a^2\Leftrightarrow x=a\Rightarrow SA=a$.

Kẻ $AH\perp SD$, $\left(H\in SD\right)$. Ta có $AH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 30: (THPT Tam Phước-Đồng Nai-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=a$, $AB=2a$, $BC=3a$, $SA=2a$, H là trung điểm cạnh AB, SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

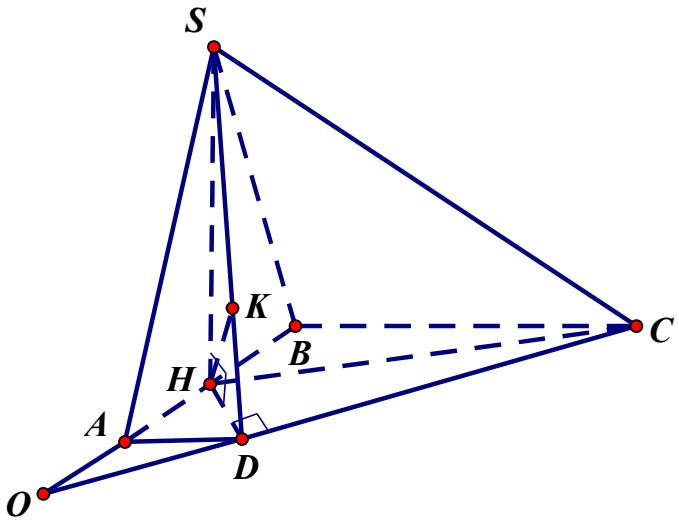
A. $\frac{a\sqrt{30}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $SH=a\sqrt{3}$; $HC=a\sqrt{10}$; $HD=a\sqrt{2}$; $DC=a\sqrt{8}$ $\Rightarrow HC^2=HD^2+DC^2$

Vậy tam giác HDC vuông tại D.



Ta có: $\frac{d\left(A;(SCD)\right)}{d\left(H;(SCD)\right)}=\frac{OA}{OH}=\frac{AD}{HM}=\frac{2AD}{AD+BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(A;(SCD)\right)=\frac{1}{2}.d\left(H;(SCD)\right)=\frac{1}{2}.HK$

Trong đó K là hình chiếu vuông góc của H lên SD. Ta có:

$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HD^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{5}{6a^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\Rightarrow d\left(A;(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{30}}{10}.$

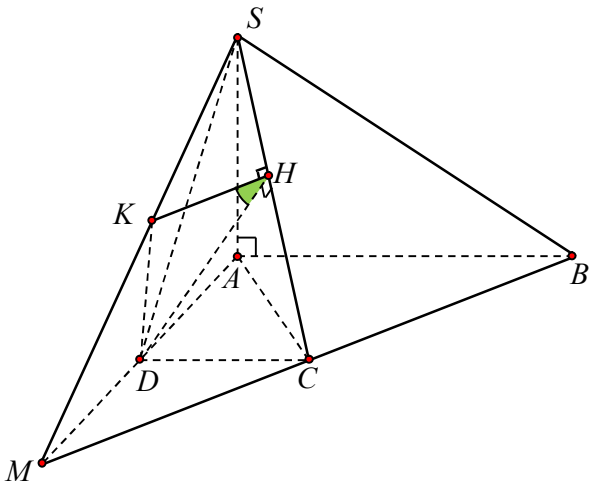
Câu 31: **(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=DC=a$, $SA=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABCD)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Cách 1:



Gọi $M=BC\cap AD$. Khi đó: $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)=\left(\widehat{(SCM),(SCD)}\right)$

Gọi H là hình chiếu của D lên SC, kẻ $HK//MC$ $(K\in SM)$ ta có:

$\left(\widehat{(SCM),(SCD)}\right)=\widehat{KHD}=\alpha$

Xét ΔSCD vuông tại D ta có: $\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$HC=\frac{DC^2}{SC}=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$.

Do $HK//MC$ mà $\frac{SH}{SC}=\frac{3}{4}$ nên $HK=\frac{3}{4}a\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$; $KM=\frac{1}{4}SM=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

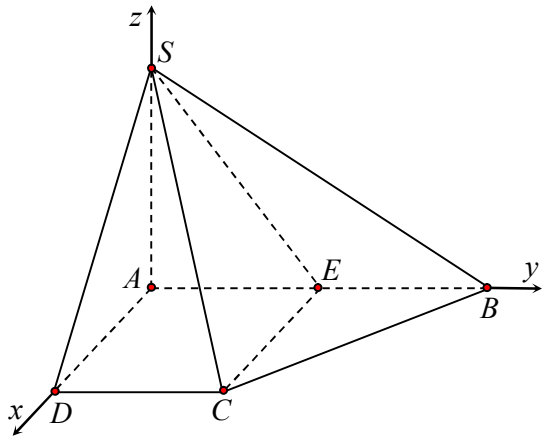
Mặt khác ta có: $\widehat{KDM}=\widehat{DSA}$ mà $\sin\widehat{KMD}=\sin\widehat{DSA}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\widehat{KDM}=\widehat{KMD}$.

Do đó: $KD=KM=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Xét tam giác KDH ta có: $\cos\alpha=\frac{HD^2+HK^2-KD^2}{2HK.HD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2:

Chọn hệ trục như hình vẽ



Ta có $A(0;0;0)$; $D(a;0;0)$; $B(0;2a;0)$; $E(0;a;0)$; $C(a;a;0)$; $S(0;0;a\sqrt{2})$.

$\overrightarrow{SC}=(a;a;-a\sqrt{2})$; $\overrightarrow{SB}=(0;2a;-a\sqrt{2})$; $\overrightarrow{SD}=(a;0;-a\sqrt{2})$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\vec{n}_1=-a^2\sqrt{2}(1;1;\sqrt{2})$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) là $\vec{n}_2=-a^2(\sqrt{2};0;1)$.

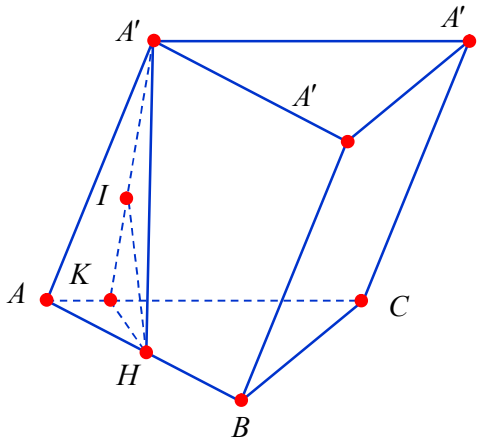
Khi đó góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 32: **(THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $h=\frac{\sqrt{39}.a}{13}$. **B.** $h=\frac{2\sqrt{15}.a}{5}$. **C.** $h=\frac{2\sqrt{21}.a}{7}$. **D.** $h=\frac{\sqrt{15}.a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\widehat{A'AH}=60^\circ \Rightarrow A'H=AH.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Kẻ $HK\perp AC, HI\perp A'K \Rightarrow HK=AH.\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (hình vẽ).

Ta có $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{HA'^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow IH=\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

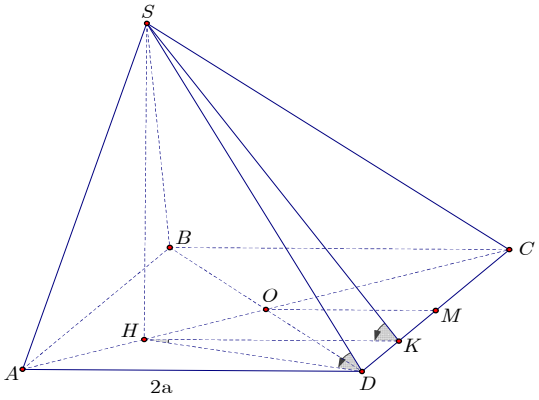
$d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=2d\left(H,ACC'A'\right)=2HI=\dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 33: **(THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-nawm-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn OA và góc $\widehat{(SD;(ABCD))}=60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha=\dfrac{4\sqrt{15}}{9}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{30}}{12}$. **C.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH\perp(ABCD)$ suy ra góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SDH}$ hay $\widehat{SDH}=60^\circ$.

Hạ $HK\perp CD$ suy ra $CD\perp(SHK)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SKH}$ suy ra $\widehat{SKH}=\alpha$.

Ta có $DH=\sqrt{OH^2+OD^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Tam giác SHD là nửa tam giác đều cạnh $SD=2DH=a\sqrt{10}$ suy ra đường cao $SH=\frac{\left(a\sqrt{10}\right)\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{30}}{2}$.

Gọi M là trung điểm CD, ta có $HK=\frac{OM+AD}{2}=\frac{3a}{2}$.

Vậy $\tan\alpha=\frac{SH}{HK}=\frac{\frac{a\sqrt{30}}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 34: **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

Lời giải.

Chọn A

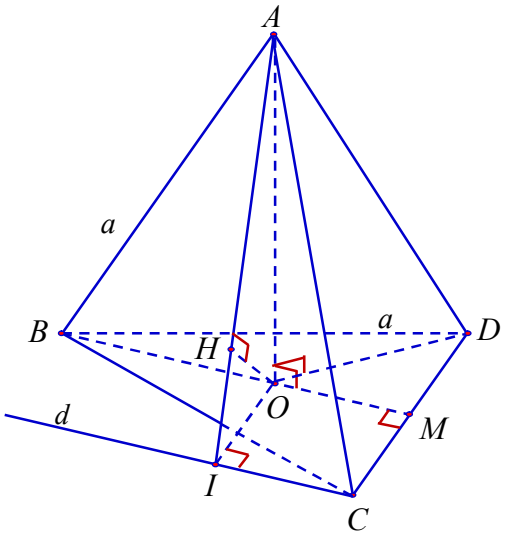
Gọi O là tâm của tam giác BCD.

Qua C kẻ đường thẳng d song song với BM.

Khi đó $d\left(AC,\ BM\right)=d\left(BM,\ \left(AC,d\right)\right)=d\left(O,\ \left(AC,d\right)\right)$.

Do tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AO\perp\left(BCD\right)$.

Kẻ $OI\perp d$ và $I\in d$, $OH\perp AI$ và $H\in AI\Rightarrow OH\perp\left(AC,d\right)$. Suy ra $d\left(O,\ \left(AC,d\right)\right)=OH$.



Ta có $d\ //\ BM\Rightarrow d\perp CD$. Tứ giác $IOMC$ là hình chữ nhật, suy ra $IO=MC=\frac{a}{2}$.

BM là đường cao trong tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} \Rightarrow AO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

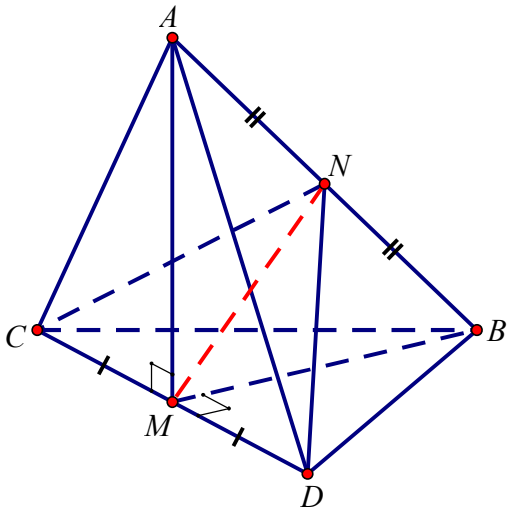
Do đó ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \dfrac{OA.OI}{\sqrt{OA^2 + OI^2}} \Rightarrow OH = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a}{2}}{\sqrt{\dfrac{2a^2}{3} + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 35: **(THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018)** Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD, AB.

Ta có: $AC = AD = BC = BD = a$ nên ΔACD cân tại A, ΔBCD cân tại B, ΔCAB cân tại C, ΔDAB cân tại D. Suy ra $AM = BM$, $CN = DN$.

Góc giữa (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AMB} = 90°$.

Tính: $BM = AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét ΔABM vuông cân tại M có: $MN = \dfrac{AM}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}}$ (1).

Góc giữa (ABC) và (ABD) là góc giữa CN và DN.

Khi đó $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow CN \perp DN \Leftrightarrow \widehat{CND} = 90°$.

Xét ΔCDN vuông cân tại N có: $MN = \dfrac{CD}{2} = x$ (2).

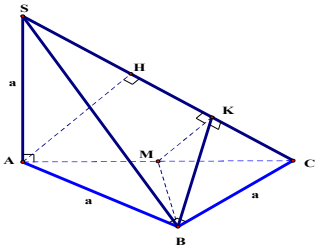
Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{2}}=x\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36: **(THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA=BC=a$, $SA=a$ và vuông góc với đáy, cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Trong ΔSAC, vẽ $AH\perp SC$

Gọi M là trung điểm của AC, vẽ $MK\perp SC$ (1)

Vì ΔBAC vuông cân tại $B\Rightarrow BM\perp AC$

Theo giả thiết $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BM$

Ta có $\begin{cases}BM\perp AC\\BM\perp SA\end{cases}\Rightarrow BM\perp(SAC)\Rightarrow BM\perp SC$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow SC\perp(BMK)\Rightarrow SC\perp BK$ (3)

Từ (1) và $(3)\Rightarrow\begin{cases}MK\perp SC;\ MK\subset(SAC)\\SC\perp BK;\ BK\subset(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow((SAC);(SBC))=(BK;MK)=\widehat{BKM}$

Vì tam giác SBC vuông tại B, nên $\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{BA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BK=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vì $\Delta MCK\sim\Delta SCA\Rightarrow\frac{MK}{SA}=\frac{MC}{SC}\Leftrightarrow MK=\frac{MC.SA}{SC}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Theo CMT, ta có $BM\perp(SAC)\Rightarrow BM\perp MK\Rightarrow\Delta BMK$ vuông tại M

Do đó, $\cos\widehat{BMK}=\frac{MK}{BK}=\frac{a\sqrt{6}}{6}:\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{2}$

Cách 2:

Nhận xét: ΔSBC vuông tại B và $SB=\sqrt{SB^2+AB^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của AC .Ta có: $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC)$ và $MC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra :Hình chiếu của ΔSBC là ΔSMC .Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Khi đó $\cos\alpha = \frac{S_{\Delta SMC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{1}{2}SA.MC}{\frac{1}{2}BC.SB} = \frac{\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a.a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

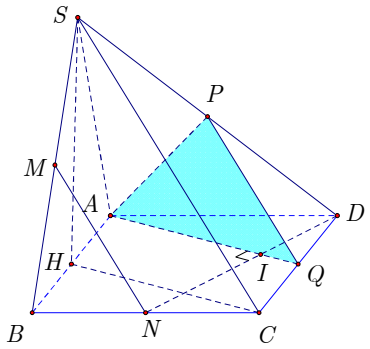
Câu 37: **(THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. M , N , P lần lượt là trung điểm của SB , BC , SD . Tính khoảng cách giữa AP và MN .

A. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$. **B.** $4\sqrt{15}a$. **C.** $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Gọi Q là trung điểm CD, I là giao điểm của ND và AQ, H là trung điểm AB .

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Do đó $(SHC) \perp (ABCD)$

Cách 1:

Ta có $\begin{cases} AQ // CH \\ PQ // SC \end{cases} \Rightarrow (APQ) // (SHC)$. Suy ra $(APQ) \perp (ABCD)$.

Ta có $\Delta ADQ = \Delta DCN$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{IDQ} + \widehat{IQD} = \widehat{IAD} + \widehat{IQD} = 90°$. Suy ra $ND \perp AQ$.

Mặt khác $(ABCD) \perp (APQ)$ và $NI \perp AQ$ nên $NI \perp (APQ)$.

Ta có $MN // SC // PQ \Rightarrow MN // (APQ)$.

Do đó $d(MN, AP) = d(MN, (APQ)) = d(N, (APQ)) = NI$.

Ta có $AQ = DN = \sqrt{AD^2 + QD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác AQD vuông tại D có $ID=\dfrac{AD.DQ}{AQ}=\dfrac{a.\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

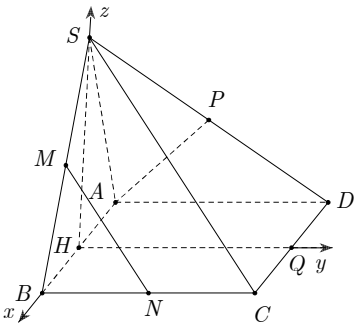
Suy ra $NI=ND-ID=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}-\dfrac{a\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Ghi chú: Bài toán chỉ cần tam giác SAB cân tại S thì khoảng cách đã tính được.

Cách 2: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Giả sử $a=1$ (đvđd) thì $SH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Khi đó $H(0;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $A\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $D\left(-\dfrac{1}{2};1;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{1}{4};0;\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, $P\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Ta có

$\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\Rightarrow\vec{a}=\left(1;2;\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\Rightarrow\vec{b}=\left(1;2;-\sqrt{3}\right)$

Suy ra $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(-4\sqrt{3};2\sqrt{3};0\right)$ và $\overrightarrow{AN}=\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$.

Do đó $d(MN,AP)=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Vì $a=1$ đơn vị độ dài nên $d(MN,AP)=\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Ghi chú: Khi bài toán cho tam giác SAB cân tại S ta chỉ cần đặt $SH=h$ khi đó bài toán hoàn toàn giải được bằng tọa độ.

Cách 3:

Ta thấy $h=d(MN,PQ)=d\left(N,(APQ)\right)=\dfrac{3V_{PANQ}}{S_{\Delta APQ}}$ $(*)$.

Vì ΔSAD vuông cân tại A nên $AP=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AQ=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

, $PQ=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HC^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi J là trung điểmcủa

$AQ:PJ=\sqrt{PQ^2-JQ^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S_{\Delta APQ}=\frac{1}{2}PJ.AQ=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a^2\sqrt{15}}{16}$.

$V_{PANQ}=\frac{1}{3}d\left(P;(ANQ)\right).S_{\Delta ANQ}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}SH.\left[S_{ABCD}-S_{ADQ}-S_{ABN}-S_{NQC}\right]=\frac{3a^3\sqrt{3}}{32}$

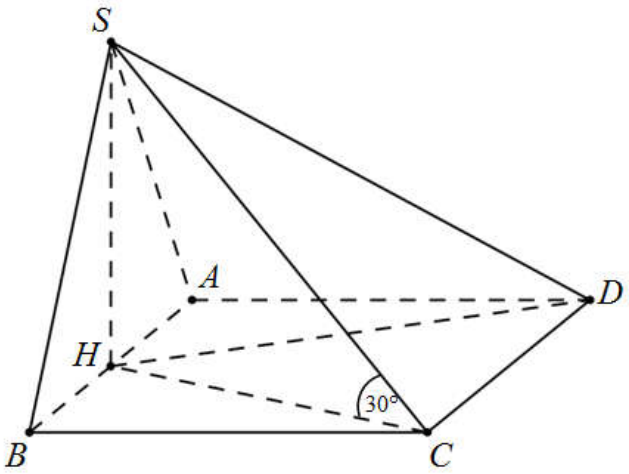
Thay vào $(*):h=\frac{\frac{3a^3\sqrt{3}}{32}}{\frac{a^2\sqrt{15}}{16}}=\frac{3a}{2\sqrt{5}}=\frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Câu 38: (THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết $SD=2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{2a}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $4\sqrt{15}a$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1:

Ta có $SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\sqrt{SH^2+HD^2}=SD=2a\sqrt{3}$

$\sin 30°=\frac{SH}{SC}\Rightarrow SH=SC.\sin 30°=a\sqrt{3}$

$\cos 30°=\frac{CH}{SC}\Rightarrow CH=SC\cos 30°=3a$

$\Rightarrow BH=\frac{SH}{\sqrt{3}}=a$; $BC=\sqrt{HC^2-BH^2}=2\sqrt{2}a$; $AB=2BH=2a$

Tam giác SAC có $SA=AB=2a$; $SC=2a\sqrt{3}$; $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a\sqrt{3}$.

Do đó $S_{SAC}=a^2\sqrt{11}$.

$V_{SABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{2a.2a\sqrt{2}}{2}=\frac{2a^2\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=\frac{3V_{SABC}}{S_{SAC}}=\frac{2a\sqrt{66}}{11}$.

Cách 2:

$d\left(B,\left(SAC\right)\right)=2d\left(H,\left(SAC\right)\right)(*)$.

Trong ΔSAC : Hạ $HI\perp AC$,ta có : $HI=\frac{2.S_{\Delta AHC}}{AC}=\frac{2.\frac{1}{4}.S_{\Delta ABCD}}{AC}=\frac{2a^2\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong ΔSHI : Hạ $HK\perp SI\Rightarrow HK\perp\left(SAC\right)$ và $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HI^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

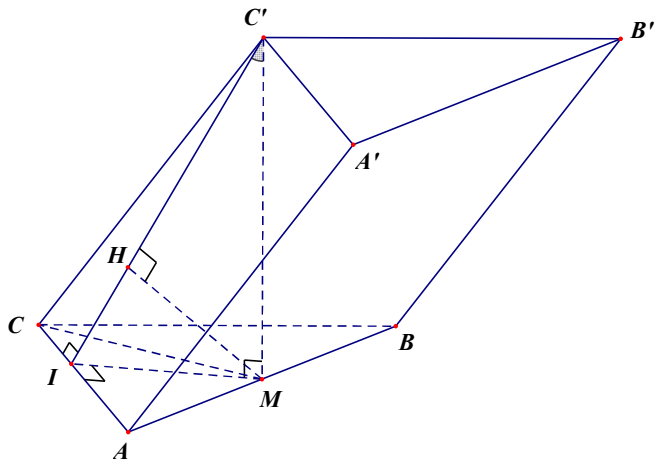
Vậy $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=2HK=\frac{2a\sqrt{66}}{11}$.s

Câu 39: (THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=\frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=135°$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$?

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $MI\perp AC$ $(I\in AC)$ và $MH\perp C'I$ $(H\in C'I)$ (1).

Ta có: $\begin{cases}AC\perp IM\\AC\perp C'M\end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(C'MI\right)$ mà $HM\subset\left(C'MI\right)\Rightarrow MH\perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH\perp\left(ACC'A'\right)$. Do đó góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ là góc $\widehat{HC'M}=\alpha$.

Mặt khác, ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA.CB.\sin 135°=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}\Rightarrow S_{\Delta AMC}=\frac{a^2}{4}$.

Lại có $S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}.MI.AC\Rightarrow MI=\frac{2S_{\Delta AMC}}{AC}=\frac{a^2}{2AC}=\frac{a^2}{2a\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CB^2 - 2AC.CB.\cos 135°} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + a^2 - 2a\sqrt{2}.a.\cos 135°} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$AI = \sqrt{AM^2 - IM^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CI = AC - AI = a\sqrt{2} - \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$C'I = \sqrt{C'C^2 - CI^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{16} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

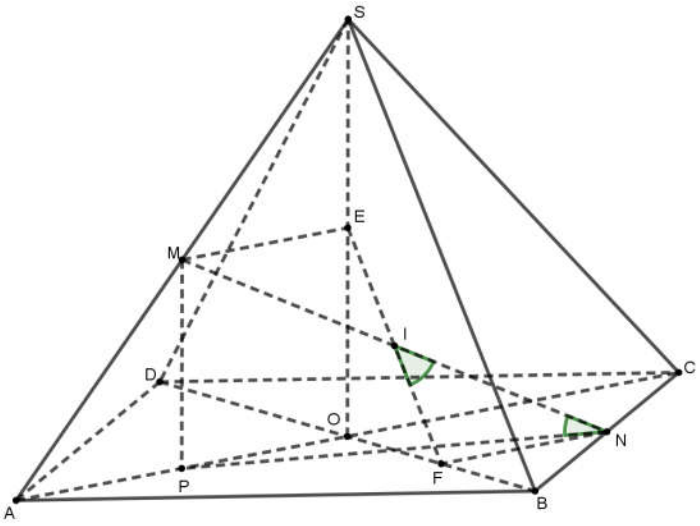
Do đó $\sin\alpha = \frac{IM}{C'I} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Câu 1: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Gọi E , F lần lượt là trung điểm SO , OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP}=60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2=CP^2+CN^2-2CP.CN.\cos 45^\circ=\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{a^2}{4}-2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP=\frac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP=NP.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO=2MP=\frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=2a\sqrt{2}\Rightarrow EF=a\sqrt{2}$.

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\frac{1}{2}OA$).

Gọi I là giao điểm của MN và EF, khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$$\cos\widehat{NIF}=\frac{IK}{IN}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{4}{a\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 2:

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ sao cho:

$$O(0;0;0)\ ,A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),S(0;0;x),x>0.$$

M là trung điểm của SA : $M\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4};0;\frac{x}{2}\right)$

N là trung điểm của BC : $N\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{-x}{2}\right)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có : $\sin 60^o=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{2a^2}{8}+\frac{a^2}{8}+\frac{x^2}{4}}}\Rightarrow x=a\sqrt{30}$

Khi đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{-a\sqrt{30}}{4}\right)$

VTCP của (SBD) là $\vec{i}=(1;0;0)$

Gọi α là góc giữa (SBD) và MN

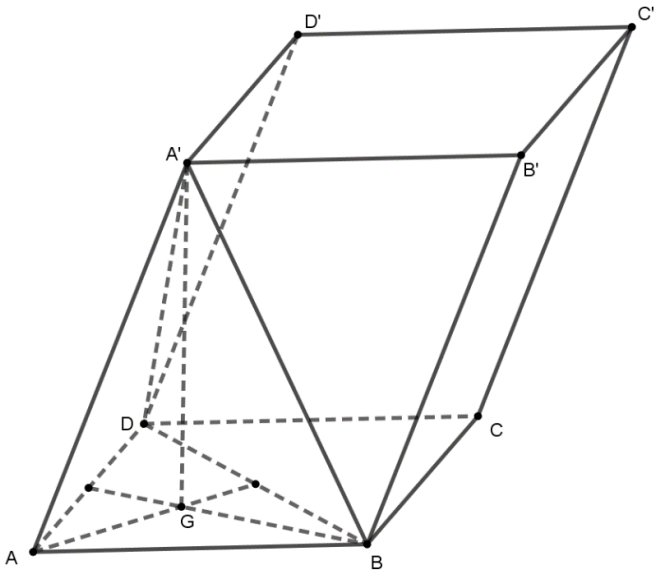
Ta có : $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{i}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{i}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

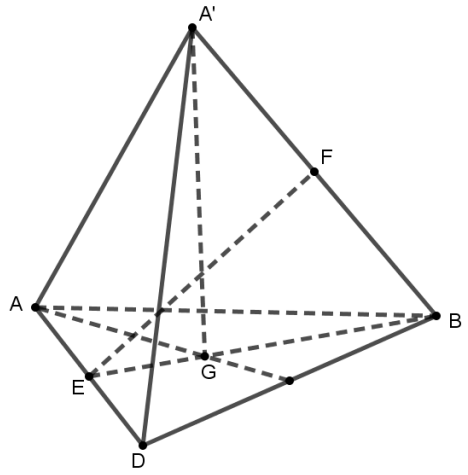
Câu 2: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018)** Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AA'=AD=a$ và $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A





Theo bài ra thì $A'ABD$ là tứ diện đều cạnh bằng a. Khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$ là EF.

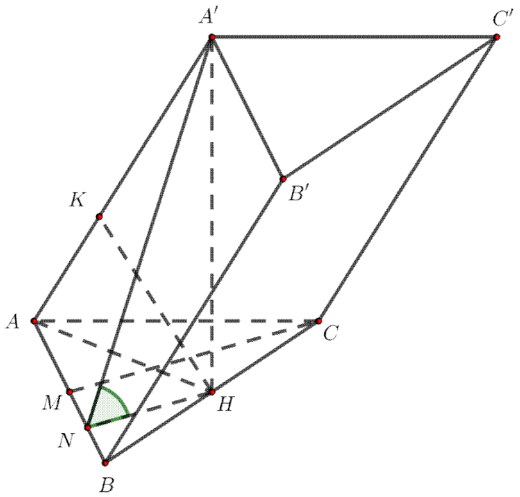
Ta có: $EF=\sqrt{EB^2-BF^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng $60°$.

A. $d=\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. **B.** $d=\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $d=\frac{3a}{4}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BC, theo giả thiết $A'H\perp(ABC)$.

Vì ΔABC là tam giác đều nên $AH\perp BC$. Vậy $BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp AA'$.

Gọi M là trung điểm AB, N là trung điểm MB. Ta có $CM\perp AB$, NH là đường trung bình ΔBCM nên $HN//CM\Rightarrow HN\perp AB$. Mà góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'NH}=60°$.

Vì $AA'//BB'$ nên $d(AA';B'C')=d(AA';(BCC'B'))$

Trong mặt phẳng $(A'AH)$, kẻ $HK \perp AA'$ tại K. Ta thấy $HK \perp AA'$ mà $AA'//BB'$

$\Rightarrow HK \perp BB'$, $HK \perp BC$ nên $HK \perp (BCC'B')$.

Vì $AA'//BB'$ nên $d(AA';B'C') = d(AA';(BCC'B')) = d(K;(BCC'B')) = HK$.

Ta có $HN = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = NH.\tan 60° = \frac{3a}{4}$.

Trong $\Delta A'AH$ có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'H = \frac{3a}{4}$ nên $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{9a^2}$

$\Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

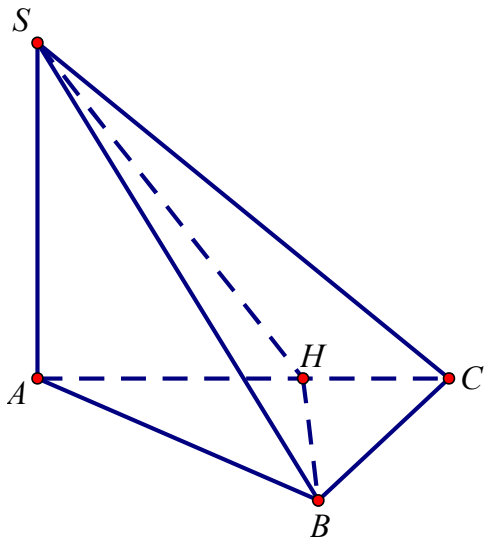
Câu 4: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 2a.$ Tam giác ABC vuông tại B $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc φ tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{5}}$. **B.** $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{5}}$. **C.** $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$. Áp dụng công thức $S' = S\cos\varphi$ trong đó $S' = dt(SHC)$, $S = dt(SBC)$, φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SAC)

Dễ thấy tam giác SBC vuông tại B và $SB = a\sqrt{5}$. $dt(SBC) = \frac{a^2\sqrt{15}}{2}$

$\mathrm{CH} = \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{2}\mathrm{a}$, $dt(SHC) = \frac{3}{2}a^2$. Vậy $\cos\varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Cách 2:

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho

$A(a;0;0)$, $B(0;0;0)$, $S(a;0;2a)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$.

$\overrightarrow{SA}=(0;0;-2a)\rightarrow$Chọn $\overrightarrow{u_1}=(0;0;1)$ cùng phương với $\overrightarrow{SA}$

$\overrightarrow{SC}=(-a;a\sqrt{3};-2a)\rightarrow$Chọn $\overrightarrow{u_2}=(-1;-\sqrt{3};-2)$ cùng phương với $\overrightarrow{SC}$

$\overrightarrow{SB}=(-a;0;-2a)\rightarrow$Chọn $\overrightarrow{u_3}=(1;0;2)$ cùng phương với $\overrightarrow{SB}$

$\vec{n}_{(SAC)}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-\sqrt{3};-1;0)$

$\vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3}\right]=(2\sqrt{3};0;-\sqrt{3})$

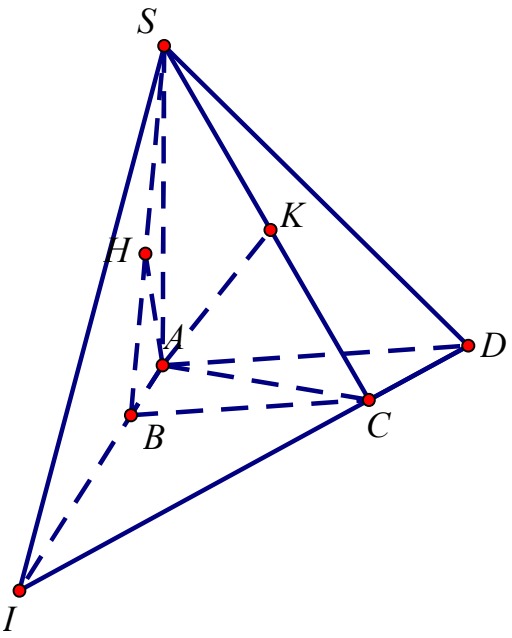
$\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}_{(SAC)}.\vec{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SAC)}\right|\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|}=\dfrac{6}{2\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

Câu 5: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a, AD=2a$. Biết $SA=\sqrt{3}a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC). Tính khoảng cách d từ H đến mặt phẳng (SCD).

A. $d=\dfrac{3\sqrt{15}a}{60}$. **B.** $d=\dfrac{3\sqrt{30}a}{40}$. **C.** $d=\dfrac{3\sqrt{10}a}{20}$. **D.** $d=\dfrac{3\sqrt{50}a}{80}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Kẻ $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SB$. Ta có $d=\dfrac{HS}{BS}d(B,(SCD))=\dfrac{HS}{BS}.\dfrac{BI}{AI}d(A,(SBC))$

mà $\dfrac{SH}{SB}=\dfrac{SH.SB}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{3a^2}{4a^2}=\dfrac{3}{4}$;

Tam giác ADI có BC là đường trung bình nên $\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $d=\dfrac{3}{8}d(A,(SCD))=\dfrac{3}{8}d(A,SC)=\dfrac{3}{8}\dfrac{SA.SC}{\sqrt{SA^2+SC^2}}=\dfrac{3}{8}\dfrac{a\sqrt{3}.a\sqrt{2}}{\sqrt{3a^2+2a^2}}=\dfrac{3a\sqrt{30}}{40}$

Cách 2: Dùng phương pháp thể tích:

$d=\dfrac{3V_{H.SCD}}{dt(SCD)}$; $\dfrac{\mathrm{V_{S.HCD}}}{\mathrm{V_{S.BCD}}}=\dfrac{\mathrm{SH}}{\mathrm{SB}}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow$

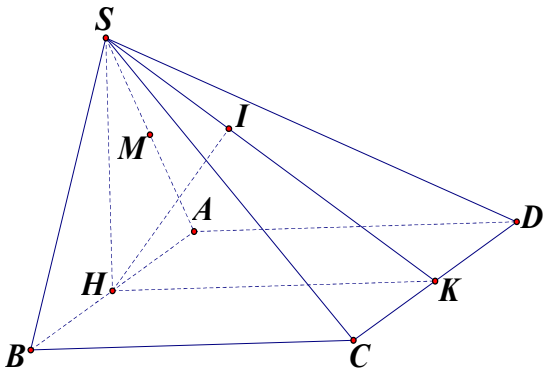
$V_{S.HCD}=\dfrac{3}{4}V_{S.BCD}=\dfrac{1}{8}SA.AB.BC=\dfrac{\sqrt{3}}{8}a^3$; $dt(SCD)=\dfrac{1}{2}SC.CD=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{2}\Rightarrow d=\dfrac{3a\sqrt{30}}{40}$.

Câu 6: (THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tam giác SAB đều, M là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



* Gọi H là trung điểm của AB và K là trung điểm của CD. Ta có $SH\perp(ABCD)$ và $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Hạ $HI\perp SK$.

* Khi đó $d\left(M;(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A;(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(H;(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}HI$.

* Lại có $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{7}{3a^2}$.

* Suy ra $HI=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Vậy $d\left(M;(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 7: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BB'. côsin của góc hợp bởi MN và AC' là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Chọn hệ véc tơ cơ sở là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ .Giả sử độ dài cạnh của hình lập phương là a.

Ta có:

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}, AC' = a\sqrt{3}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{MN}\right) = \frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)}{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Vậy côsin của góc hợp bởi MN và AC' là $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Cách 2:

Gọi độ dài cạnh hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là a

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $A' \in Oz$.

Khi đó, tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C(a;a;a)$.

M là trung điểm của $AD \Rightarrow M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

N là trung điểm của $BB' \Rightarrow N\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(a;-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC'} = (a;a;a)$

Cosin góc giữa $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MN}$ là

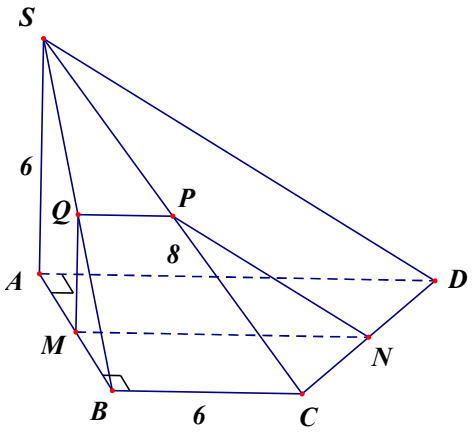
$$\cos(MN, AC') = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}\right)\right| = \left|\frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|}\right| = \frac{a^2}{a\sqrt{3}.a\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 8: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng:

A. 20. **B.** 16. **C.** 30. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D



Gọi N, P và Q lần lượt là trung điểm của CD, SC và SB.

Ta có: $(P)\cap(SAB)=MQ$, $(P)\cap(ABCD)=MN$, $(P)\cap(SCD)=NP$.

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang vuông tại M, Q và $MQ=PQ=3$, $MN=7$.

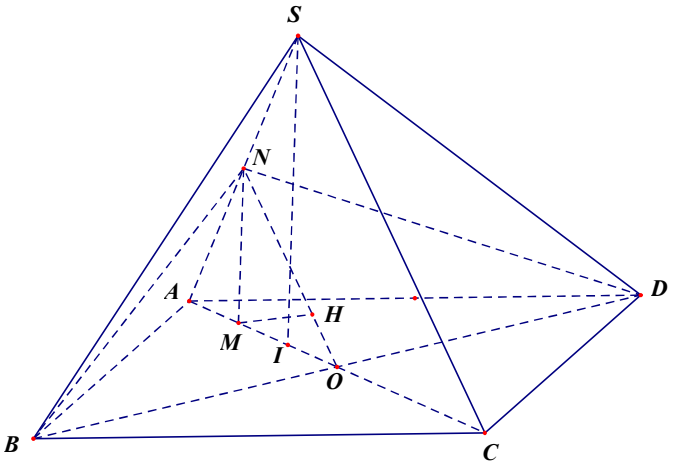
Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là: $S_{MNPQ}=\dfrac{MQ.(MN+PQ)}{2}=\dfrac{3.(7+3)}{2}=15$.

Câu 9: **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết rằng tứ diện $SABD$ là tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng:

A. $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O=AC\cap BD$, I là trọng tâm của tam giác ABD; gọi M, N lần lượt là trung điểm của AI và SA; gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên NO.

Khi đó, ta có: $d(SC,BD)=d(SC,(NBD))=d(C,(NBD))=\dfrac{3}{2}d(M,(NBD))=\dfrac{3}{2}MH$.

Do $SI\perp(ABCD)$, suy ra ΔSIA vuông tại I.

Khi đó, ta có: $SI=\sqrt{SA^2-AI^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong tam giác vuông NMO vuông tại M, có: $OM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

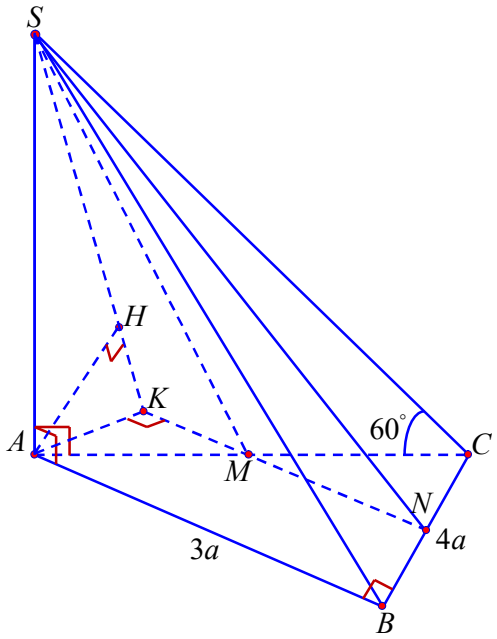
Suy ra $\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MN^2}+\frac{1}{MO^2}=\frac{6}{a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{9}{a^2}\Rightarrow MH=\frac{a}{3}\Rightarrow d\left(SC,BD\right)=\frac{3}{2}.\frac{a}{3}=\frac{a}{2}$.

Câu 10: **(THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3a$, $BC=4a$ và $SA\perp\left(ABC\right)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

A. $5\sqrt{3}a$. **B.** $\frac{5a}{2}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}a}{\sqrt{79}}$. **D.** $\frac{10\sqrt{3}a}{\sqrt{79}}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$, kẻ $MN//AB$ cắt

BC tại $N\Rightarrow AB//\left(SMN\right)$.

Ta có $d\left(AB,SM\right)=d\left(AB,\left(SMN\right)\right)=d\left(A,\left(SMN\right)\right)$.

Hạ đường cao từ A xuống MN tại K.

Kẻ $AH\perp SK=\left\{H\right\}$.

Khi đó $AH\perp\left(SMN\right)\Rightarrow AH=d\left(A,\left(SMN\right)\right)$.

Ta có $AC=\sqrt{BC^2+BA^2}=5a$.

Ta lại có $SA=AC.\tan 60°=5\sqrt{3}a$.

Do $MN//AB\Rightarrow BN\perp MN$, tứ giác $ABNK$ có:

$\widehat{B}=\widehat{N}=\widehat{K}=90°$ suy ra $ABNK$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow AK = BN = \dfrac{1}{2}BC = 2a$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{SA.AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}}$.

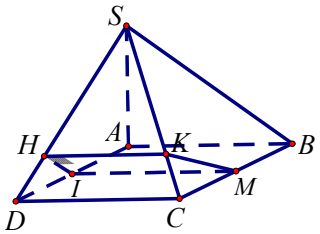
$\Rightarrow AH = \dfrac{5\sqrt{3}a.2a}{\sqrt{75a^2 + 4a^2}} = \dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Câu 11: **(THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD, mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{3\sqrt{5}a^2}{16}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{16}$. **C.** $\dfrac{15\sqrt{3}a^2}{16}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $IM // CD$ với $M \in BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix} IM \perp SA \\ IM \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow IM \perp (SAD) \Rightarrow IM \perp SD \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = IM$.

- Kẻ $IH \perp SD$ với $H \in SD \Rightarrow (P) \cap (SAD) = IH$.
- $\left.\begin{matrix} IM // CD \\ IM \subset (P) \\ CD \subset (SCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P) \cap (SCD) = HK$ với $HK // IM\,(// CD)$ và $K \in SC$.
- $(P) \cap (SBC) = KM$.

Vì $IM \perp (SAD)$ nên $IM \perp IH$. Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang $IHKM$ vuông tại I và H.

Ta có $IM = AB = 2a$.

Xét ΔSAD có: $\tan \widehat{SAD} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{2a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60°$.

Xét ΔDHI có: $\sin \widehat{HDI} = \dfrac{HI}{ID} \Rightarrow HI = ID.\sin 60° = a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSAD có: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

Xét ΔDHI có: $HD = \sqrt{ID^2 - IH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SH = SD - HD = 4a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{7a}{2}$.

Vì $HK//CD$ nên theo Talet ta có $\frac{HK}{CD}=\frac{SH}{SD}=\frac{\frac{7a}{2}}{4a}=\frac{7}{8}\Rightarrow HK=\frac{7}{8}CD=\frac{7}{8}.2a=\frac{7a}{4}$.

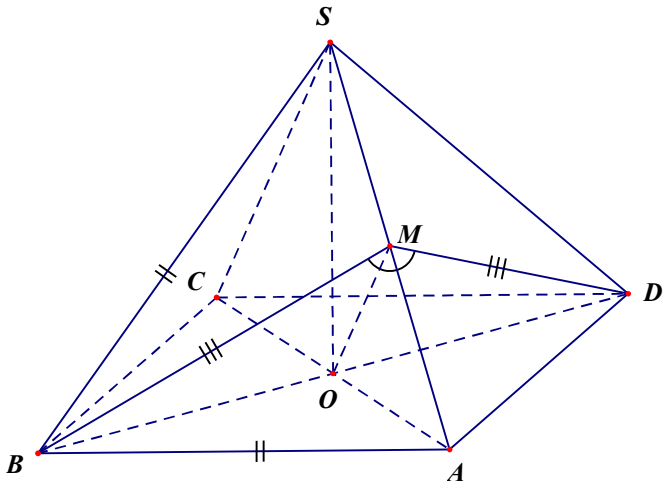
Do đó diện tích thiết diện là $S_{IHKM}=\frac{(IM+HK).IH}{2}=\frac{\left(2a+\frac{7a}{4}\right).\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{15\sqrt{3}a^2}{16}$.

Câu 12: **(THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của SA.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\BM\perp SA;DM\perp SA\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=(BM,DM)$.

Trong ΔSBO vuông tại O, có $OB=\sqrt{SB^2-SO^2}=\sqrt{a^2-\frac{6a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có $OA=SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SA=OA\sqrt{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác, có $DM=BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông BOM vuông tại O, có $\sin\widehat{BMO}=\frac{OB}{BM}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{3}{a\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{BMO}=45°$.

Vậy góc $\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=90°$.

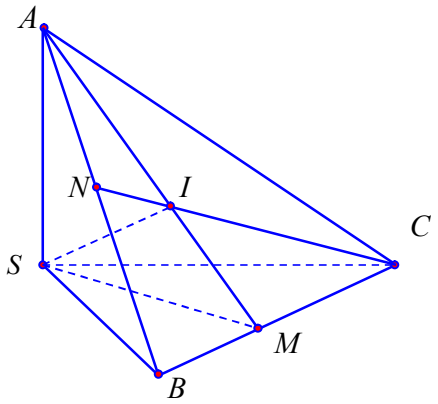
Câu 13: **(THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a+b+c}{3}$.

C. $\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$. **D.** $\dfrac{abc}{bc+ca+ab}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng (ABC) suy ra $SI \perp (ABC)$.

Gọi $M = AI \cap BC$, $N = CI \cap AB$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $SC \perp AB$, mà hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC) là CI nên $AB \perp CI$ (định lí ba đường vuông góc) hay $AB \perp CN$.

Do đó I là trực tâm của tam giác ABC.

Ta có $\dfrac{1}{SM^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2}$

và $\dfrac{1}{SI^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SM^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{SB^2.SC^2 + SC^2.SA^2 + SA^2.SB^2}{SA^2.SB^2.SC^2}$.

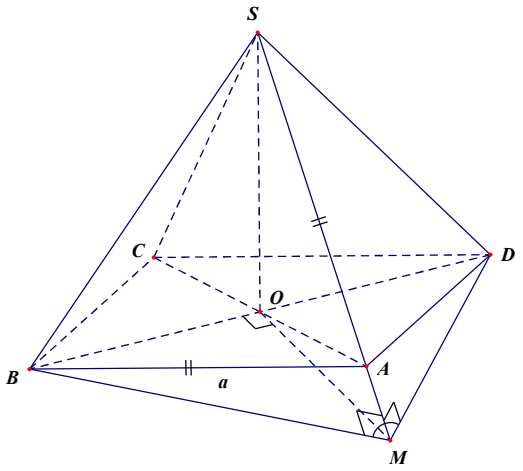
Vậy khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

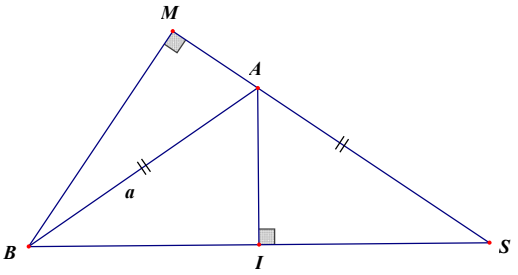
Câu 14: **(THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SA = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD). (Câu này là phiên bản 2 của câu 16, do GV dùng sai giả thiết dẫn đến đáp án D, do thấy lời giải hay nên giữ lại để ae dùng)

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D





Gọi M là hình chiếu của B lên SA.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\ BM\perp SA;DM\perp SA\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=(BM,DM)$.

Trong ΔSAO vuông tại O, có $OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{6a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSOB vuông tạo O, ta có $OB=SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SB=OB\sqrt{2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi I là trung điểm SB, suy ra $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách 1:

Mặt khác, ta có $\Delta SBM\backsim\Delta SAI$ nên $\dfrac{SB}{SA}=\dfrac{BM}{AI}\Rightarrow BM=\dfrac{SB.AI}{SA}=\dfrac{\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Trong tam giác vuông OBM, có $\sin\widehat{BMO}=\dfrac{OB}{MB}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{3}{2a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{BMO}=60°$.

Suy ra $\widehat{BMD}=120°$. Vậy góc $\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=60°$.

Cách 2:

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ sao cho:

$A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right),B\left(0;\dfrac{a\sqrt{6}}{3};0\right),D\left(0;\dfrac{-a\sqrt{6}}{3};0\right),S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

$\overrightarrow{SA}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;\dfrac{-a\sqrt{6}}{3}\right)$,chọn $\overrightarrow{u_1}=\left(\sqrt{3};0;-\sqrt{6}\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{SA}$

$\overrightarrow{SB}=\left(0;\dfrac{a\sqrt{6}}{3};\dfrac{-a\sqrt{6}}{3}\right)$,chọn $\overrightarrow{u_2}=\left(0;\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{SD}=\left(0;\dfrac{-a\sqrt{6}}{3};\dfrac{-a\sqrt{6}}{3}\right)$,chọn $\overrightarrow{u_3}=\left(0;\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{SC}$

$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\left(6;\sqrt{18}\sqrt{18}\right)$ là vtpt của mp(SAB)

$\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_3}\right]=\left(6;-\sqrt{18}\sqrt{18}\right)$ là vtpt của mp(SAD)

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD)

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{36}{72}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{\circ}.$$

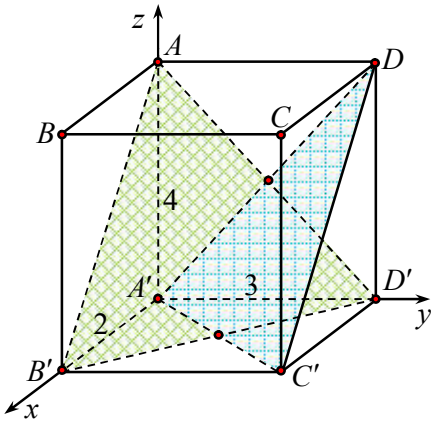
Câu 15: ----------**HẾT**----------**(THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2$, $AD=3$, $AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. $61,6^{\circ}$. **B.** $38,1^{\circ}$. **C.** $45,2^{\circ}$. **D.** $53,4^{\circ}$.

Lời giải

Chọn A

❍ Cách 1:



Chọn hệ trục $A'xyz$ như hình vẽ

Ta có $A'(0;0;0)$, $B'(2;0;0)$, $D'(0;3;0)$, $C'(2;3;0)$, $A(0;0;4)$, $D(0;3;4)$

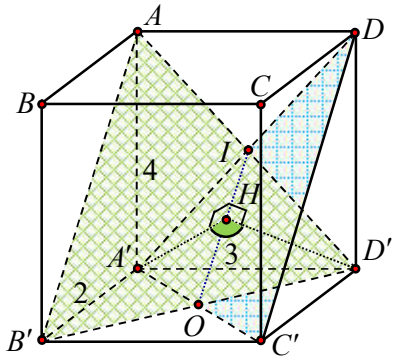
$\overrightarrow{AB'}=(2;0;-4)$; $\overrightarrow{AD'}=(0;3;-4)\Rightarrow$ VTPT của mp$(AB'D')$ là $\vec{n}_1=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB'}\wedge\overrightarrow{AD'}\right)=(6;4;3)$.

$\overrightarrow{A'D}=(0;3;4)$; $\overrightarrow{A'C'}=(2;3;0)\Rightarrow$ VTPT của mp$(A'C'D)$ là $\vec{n}_2=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'C'}\wedge\overrightarrow{A'D}\right)=(6;-4;3)$.

Khi đó góc α giữa hai mặt phẳng phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{9}{61}\Rightarrow\alpha\approx61,6^{\circ}.$$

❍ Cách 2:



Gọi O,I lần lượt là tâm các hình chữ nhật $A'B'C'D'$ và $ADD'A'$.

Ta có $(AB'D')\cap(A'C'D)=OI$

$\Delta OIA'=\Delta OID'\Rightarrow$ các đường cao HA' và HD' bằng nhau

$\Rightarrow \left(\widehat{(AB'D'),(A'C'D)}\right) = \widehat{A'HD'}$

Mặt khác

$OI = \frac{1}{2}AB' = \sqrt{5}$; $ID' = \frac{1}{2}AD' = \frac{5}{2}$; $OD' = \frac{1}{2}B'D' = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Diện tích tam giác OID' là $S_{OID'} = \sqrt{p(p-OI)(p-ID')(p-OD')}$, với $p = \frac{OI + ID' + OD'}{2}$

$\Rightarrow S_{OID'} = \frac{\sqrt{61}}{4}$

Mà $S_{OID'} = \frac{1}{2}HD'.OI \Rightarrow HD' = \frac{2S_{OID'}}{OI} = \frac{\sqrt{305}}{10}$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác $HA'D'$ ta có $\cos\widehat{A'HD'} = \frac{-29}{61} \Rightarrow \widehat{A'HD'} \approx 118,4°$

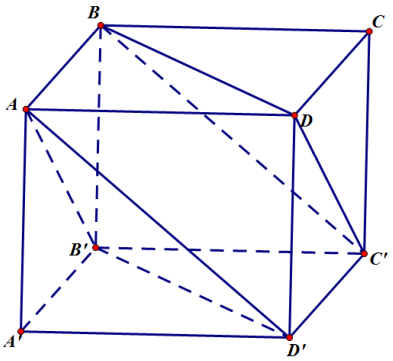
Mà góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn nên $\alpha = 180° - \widehat{A'HD'} = 61,6°$.

Câu 16: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(AB'D') \parallel (BDC')$.

Do đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng khoảng cách từ D' đến $(BC'D)$.

Ta có: $V_{D'.BDC'} = V_{B.D'DC'} = \frac{1}{3}BC.S_{D'DC'} = \frac{1}{6}BC.S_{DCC'D'} = \frac{1}{6}2.2^2 = \frac{4}{3}$.

$\Delta BDC'$ đều cạnh $2\sqrt{2}$ nên $S_{BDC'} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$

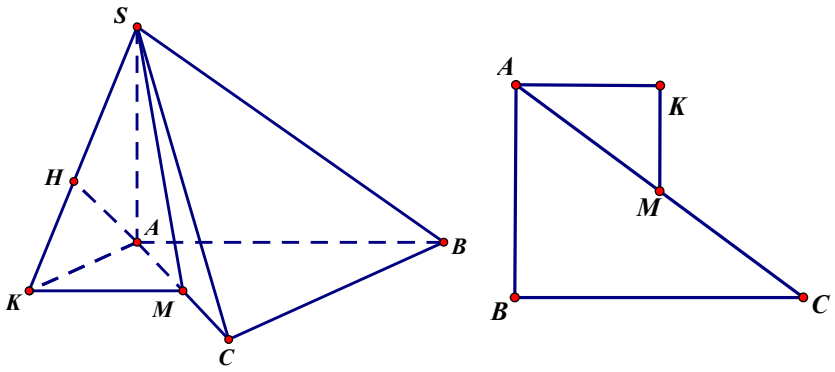
Mặt khác: $V_{D'BDC'} = \frac{1}{3}d\left(D',(BC'D)\right).S_{\Delta BDC'} \Rightarrow d\left(D',(BDC')\right) = \frac{3V}{S_{\Delta BDC'}} = \frac{3.\frac{4}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 17: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 2 năm học 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng:

A. $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{13}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn A



Từ M dựng $Mx//AB$.

Ta có $AB//(SMx)$ vậy $d(AB,SM)=d\left(AB,(SMx)\right)=d\left(A,(SMx)\right)$.

Dựng $AK\perp Mx$, $AH\perp AK$.

Dễ thấy $AH\perp(AKM)\Rightarrow d\left(A,(SMx)\right)=d\left(A,(SMK)\right)=AH$.

$AK=\dfrac{1}{2}BC=a$, $SK=a\sqrt{13}$.

Vậy $AH.SK=SA.AK\Rightarrow AH=\dfrac{SA.AK}{SK}\Rightarrow AH=\dfrac{2a\sqrt{3}.a}{a\sqrt{13}}=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

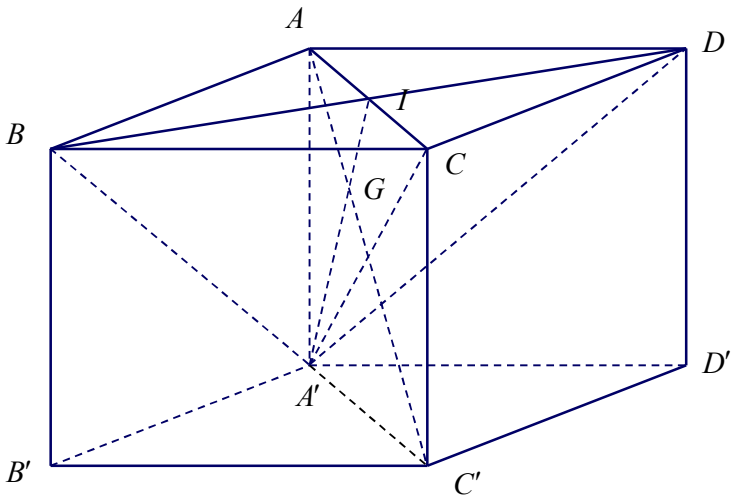
----------HẾT----------

Câu 18: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau và bằng a, $\widehat{BAD}=\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BD bằng

A. a. **B.** $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$, I là trung điểm BD.

Ta có tứ diện $ABDA'$ là tứ diện đều cạnh a nên $AG\perp(AB'D)$

Suy ra $AC'\perp(A'BD)\Rightarrow AC'\perp GI$

$AC\perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi)

$$\left.\begin{matrix}BD\perp AG\\BD\perp AC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(ACA')\Rightarrow BD\perp GI$$

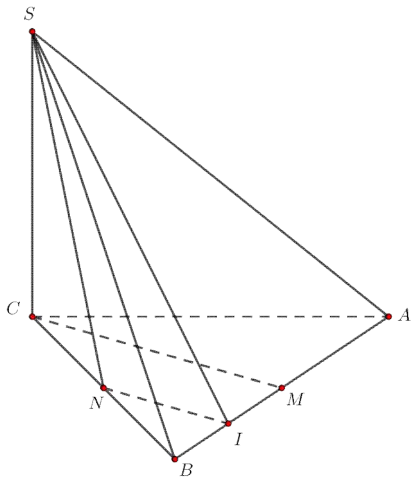
Vậy $d(AC',BD)=GI=\frac{1}{3}A'I=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 19: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a=4\sqrt{2}\,\text{cm}$, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC=2\,\text{cm}$. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC. Góc giữa hai đường thẳng SN và CM là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của BM, ta có $NI//CM$ nên góc giữa SN và CM là góc giữa SN và NI. Xét tam giác SNI có $SN=\sqrt{SC^2+CN^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$; $NI=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{2}4\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$;

$CI=\sqrt{CM^2+MI^2}=\sqrt{24+2}=\sqrt{26}\Rightarrow SI=\sqrt{SC^2+CI^2}=\sqrt{4+26}=\sqrt{30}$.

Vậy $\cos\widehat{SNI}=\frac{SN^2+NI^2-SI^2}{2SN.NI}=\frac{12+6-30}{2.2\sqrt{3}.\sqrt{6}}=\frac{-12}{3\sqrt{2}.4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{SNI}=135°$.

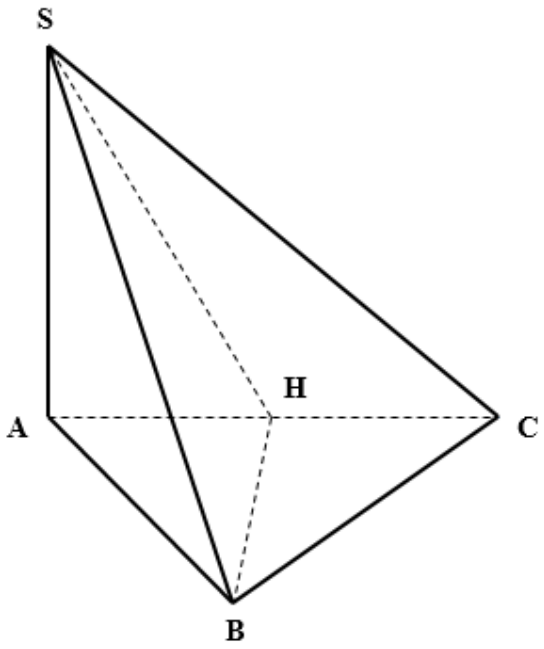
Vậy góc giữa SN và CM bằng $45°$.

Câu 20: **(THPT Chuyên ĐHSP-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=60°$ và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH\perp AC$

Mà $BH\perp SA\Rightarrow BH\perp(SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, $BH = AB.\sin 60^\circ = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AH = AB.\cos 60^\circ = 2a.\dfrac{1}{2} = a$.

Xét tam giác SAH vuông tại S, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H.

Vậy $\widehat{BSH} = 45^\circ$.

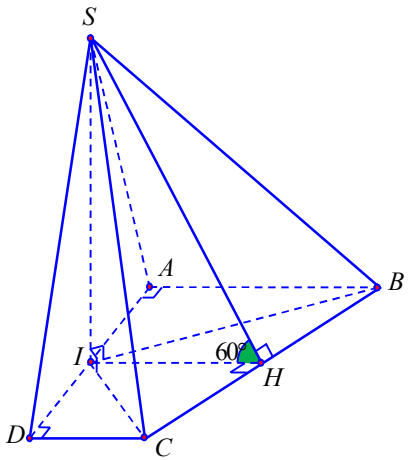
Câu 21: **(THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, $DC = a$. Điểm I là trung điểm đoạn AD, mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60°. Tính khoảng cách từ D đến (SBC) theo a.

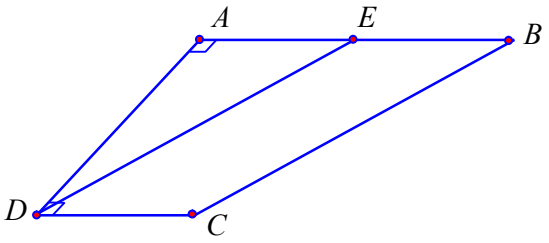
A. $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{9a\sqrt{15}}{10}$. **C.** $\dfrac{9a\sqrt{15}}{20}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:





Ta có $\begin{cases}(SIB)\perp(ABCD)\\(SIC)\perp(ABCD)\\(SIB)\perp(SIC)=SI\end{cases} \Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Trong mp$(ABCD)$, kẻ $IH\perp BC$ thì $BC\perp(SIH) \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABCD)}\right) = \widehat{SHI}$.

Mặt khác

$S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{ICD} - S_{IAB} \Leftrightarrow S_{IBC} = \dfrac{1}{2}AD(AB+CD) - \dfrac{1}{2}ID.DC - \dfrac{1}{2}IA.AB \Leftrightarrow S_{IBC} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Lại có $S_{IBC} = \dfrac{1}{2}IH.BC \Rightarrow IH = \dfrac{2S_{IBC}}{BC} \Leftrightarrow IH = \dfrac{2S_{IBC}}{\sqrt{AB^2+DE^2}} \Leftrightarrow IH = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SHI vuông tại I có $SI = IH.\tan 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ và $SH = \dfrac{6a}{\sqrt{5}}$

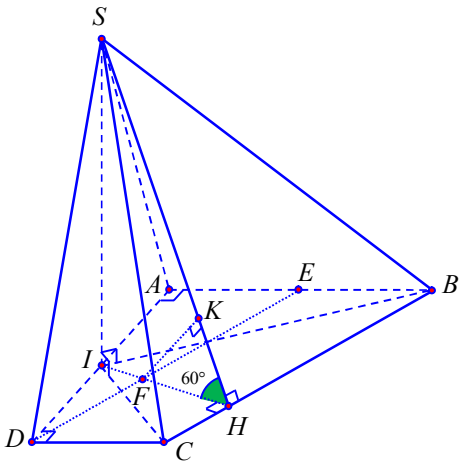
Khi đó

$V_{S.DBC}=V_{D.SBC}\Leftrightarrow d\left(D,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{SI.S_{BCD}}{S_{SBC}}$

Mà $S_{BCD}=S_{ABCD}-S_{ABD}=a^2$; $S_{SBC}=\dfrac{1}{2}SH.BC=3a^2$

$\Rightarrow d\left(D,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Cách 2:



Ta có $\begin{cases}\left(SIB\right)\perp\left(ABCD\right)\\\left(SIC\right)\perp\left(ABCD\right)\\\left(SIB\right)\perp\left(SIC\right)=SI\end{cases}\Rightarrow SI\perp\left(ABCD\right)$.

Trong mp$\left(ABCD\right)$, kẻ $IH\perp BC$ thì $BC\perp\left(SIH\right)\Rightarrow\left(\widehat{\left(SBC\right),\left(ABCD\right)}\right)=\widehat{SHI}$.

Mặt khác:

$S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{ICD}-S_{IAB}\Leftrightarrow S_{IBC}=\dfrac{1}{2}AD\left(AB+CD\right)-\dfrac{1}{2}ID.DC-\dfrac{1}{2}IA.AB\Leftrightarrow S_{IBC}=\dfrac{3a^2}{2}$.

Lại có $S_{IBC}=\dfrac{1}{2}IH.BC\Rightarrow IH=\dfrac{2S_{IBC}}{BC}\Leftrightarrow IH=\dfrac{2S_{IBC}}{\sqrt{AB^2+DE^2}}\Leftrightarrow IH=\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SHI vuông tại I có $SI=IH.\tan 60^\circ=\dfrac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ và $SH=\dfrac{6a}{\sqrt{5}}$.

Gọi E là trung điểm cạnh AB và F là giao điểm của DF và IH

Vì $BCDF$ là hình bình hành nên $DF//BC\Rightarrow d\left(D,\left(SBC\right)\right)=d\left(F,\left(SBC\right)\right)=KF$.

Hai tam giác DFI và DAE đồng dạng nên $IF=\dfrac{DI.AE}{DE}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}\Rightarrow FH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Hai tam giác HKF và HIS đồng dạng nên $KF=\dfrac{SI.HF}{SH}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

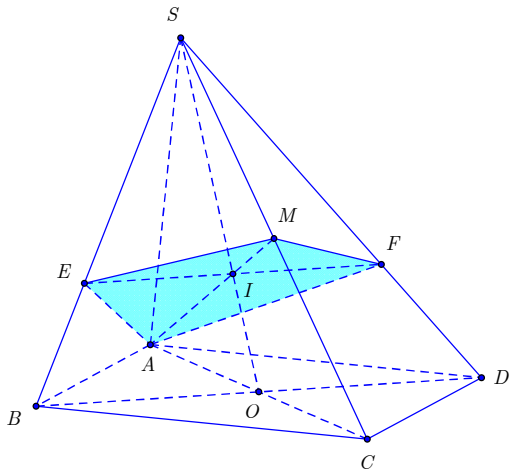
Vậy $d\left(D,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 22: **(SGD Bắc Ninh năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, $\left(\alpha\right)$ là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4a^2}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap AM$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF // BD$, khi đó ta có $(AEMF) \equiv (\alpha)$ là mặt phẳng chứa AM và song song với BD. Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AEMF$.

Ta có: $\begin{cases} FE // BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow FE \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp AM$.

Mặt khác ta có:

* $AC = 2a = SA$ nên tam giác SAC vuông cân tại A, suy ra $AM = a\sqrt{2}$.

* I là trọng tâm tam giác SAC, mà $EF // BD$ nên tính được $EF = \frac{2}{3}BD = \frac{4a}{3}$.

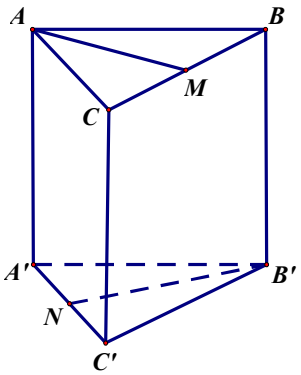
Tứ giác $AEMF$ có hai đường chéo $FE \perp AM$ nên $S_{AEMF} = \frac{1}{2}FE.AM = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23: **(THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'N$ bằng

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Do mặt phẳng $(ABC)//(A'B'C')$ mà $AM \subset (ABC), B'N \subset (A'B'C')$

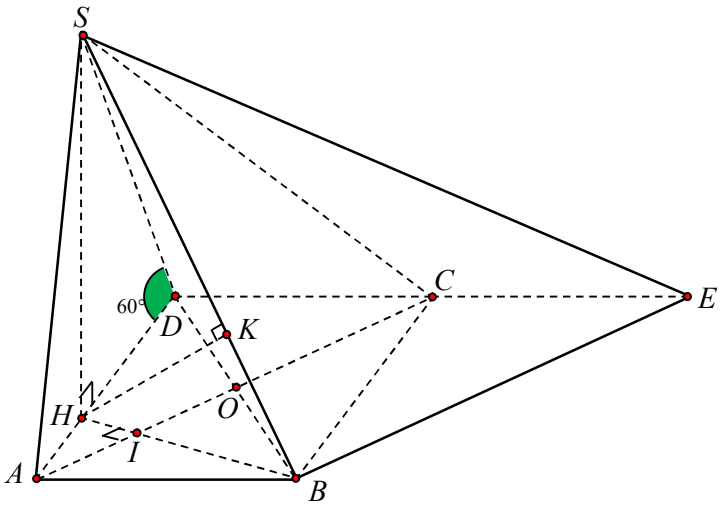
Nên $d(AM, B'N) = d((ABC),(A'B'C')) = 2a$.

Câu 24: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác ASO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(SAD) \perp (ABCD)$, $(SAD) \cap (ABCD) = AD$; trong mp(SAD), kẻ $SH \perp AD$ thì $SH \perp (ABCD)$

Mặt khác

Gọi I là trung điểm OA, vì tam giác ASO cân tại S nên $AO \perp SI$, $AO \perp SH \Rightarrow HI \perp OA$

Tam giác ADC vuông tại D có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 2a$ và $\tan \widehat{DAC} = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = 30°$

Tam giác AHI vuông tại I có $AH = \frac{AI}{\cos 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ABH vuông tại A có $HB = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $AB^2 = IB.HB \Rightarrow IB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng hình bình hành $ABEC$ thì $BE // AC$, $BE \subset (SBE)$

$\Rightarrow AC // (SBE)$ $d(SB, AC) = d(AC,(SBE)) = d(I,(SBE))$

Mà $\frac{IB}{HB} = \frac{3}{4}$ nên $d(I,(SBE)) = \frac{3}{4} d(H,(SBE))$

Lại có tam giác OAB là tam giác đều cạnh a nên $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp BE$, $BE \perp SH$

$\Rightarrow BE \perp (SBH)$

$\Rightarrow (SBE) \perp (SBH)$ và $(SBE) \cap (SBH) = SB$

Trong mặt phẳng (SBH), kẻ $HK \perp SB$ thì $HK \perp (SBE) \Rightarrow HK = d(H,(SBE))$

Tam giác SBH vuông tại H có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} \Rightarrow HK = a$.

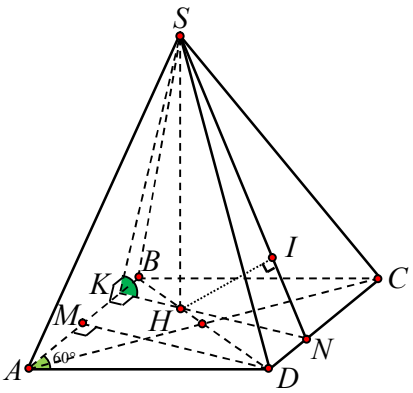
Vậy $d(H,(SBE)) = HK = a$ và $d(I,(SBE)) = \frac{3}{4} d(H,(SBE)) = \frac{3a}{4}$.

Câu 25: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm AB

Ta có tam giác ABD là tam giác đều $\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BD = a$

Kẻ $HK \perp AB \Rightarrow HK // DM \Rightarrow \frac{HK}{DM} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow HK = DM.\frac{BH}{BD} = \frac{1}{3} DM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $AB \perp HK$, $AB \perp SK$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SKH}$

Tam giác SHK vuông tại H có $SH = HK.\tan 60° = \frac{a}{2}$.

Gọi N là giao điểm của HK và CD

Ta có $\begin{cases} HN \perp CD \\ SH \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHN)$; $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SCD) \perp (SHN)$ và $(SHN) \cap (SCD) = SN$

Trong mặt phẳng (SHN) kẻ $HI \perp SN$ thì $HI \perp (SCD) \Rightarrow HI = d(H,(SCD))$

Tam giác SHN vuông tại H có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2}$, với $HN = \frac{2}{3} DM = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

Lại có $\frac{BD}{HD}=\frac{3}{2}\Rightarrow d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\frac{3}{2}d\left(H,\left(SCD\right)\right)$

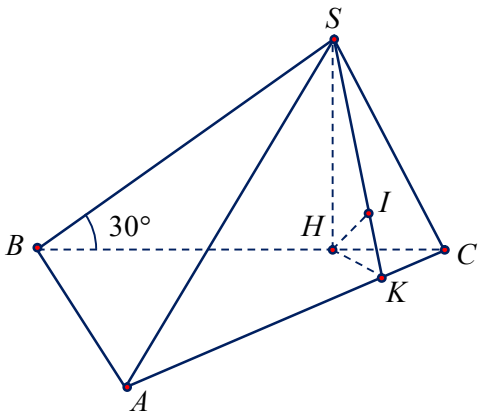
Vậy $d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\frac{a\sqrt{7}}{14}$.

Câu 26: **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3a$, $BC=4a$, mặt phẳng $\left(SBC\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Biết $SB=2\sqrt{3}a$, $\widehat{SBC}=30°$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$.

A. $6\sqrt{7}a$. **B.** $\frac{6\sqrt{7}a}{7}$. **C.** $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B



Trong $\left(SBC\right)$, kẻ $SH\perp BC$ tại H. Ta có $\left(SBC\right)\perp\left(ABC\right)$ nên $SH\perp\left(ABC\right)$.

Ta có ΔSBH vuông tại H có $SH=SB.\sin 30°=a\sqrt{3}$; $BH=SB.\cos 30°=3a$;
$HC=BC-BH=a$.

Khi đó $BH=4HC$ nên $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=4d\left(H,\left(SAC\right)\right)$

Trong $\left(ABC\right)$, kẻ $HK\perp AC$; trong $\left(SHK\right)$, kẻ $HI\perp SK$.

Ta có $SH\perp AC$ nên $AC\perp\left(SHK\right)$ suy ra $AC\perp HI$ hay $HI=d\left(H,\left(SAC\right)\right)$.

$\Delta CKH\backsim\Delta CBA$ nên $\frac{HK}{AB}=\frac{CH}{CA}\Rightarrow HK=\frac{CH.AB}{\sqrt{AB^2+BC^2}}=\frac{3a}{5}$.

Tam giác SHK vuông tại H có $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}\Rightarrow HI=\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

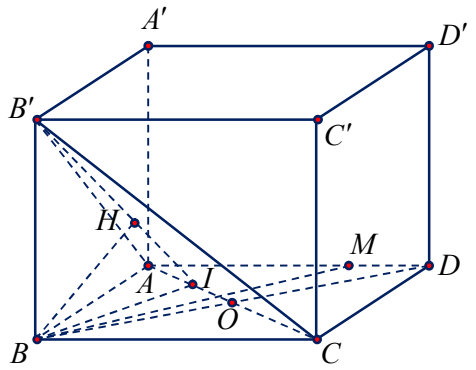
Vậy $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=\frac{6\sqrt{7}a}{7}$.

Câu 27: **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=a$. Gọi M là điểm trên đoạn AD với $\frac{AM}{MD}=3$. Gọi x là độ dài khoảng cách giữa hai đường thẳng AD', $B'C$ và y là độ dài khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$. Tính giá trị xy.

A. $\frac{5a^5}{3}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{3a^2}{4}$. **D.** $\frac{3a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \,//\, A'D \Rightarrow B'C \,//\, (ADD'A') \subset AD' \Rightarrow d(B'C, AD') = d\left(C,(ADD'A')\right) = CD = a$.

Suy ra $x = a$.

Lại có: $\dfrac{MA}{DA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow d\left(M,(AB'C)\right) = \dfrac{3}{4} d\left(D,(AB'C)\right) = \dfrac{3}{4} d\left(B;(AB'C)\right)$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B lên AC ta có: $\begin{cases} AC \perp BI \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'I)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên $B'I$ ta có:

$\begin{cases} BH \perp B'I \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (B'AC) \Rightarrow d\left(B,(AB'C)\right) = BH$.

Trong tam giác ABC, ta có: $AB.BC = AC.BI \Rightarrow BI = \dfrac{AB.BC}{AC} = \dfrac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác $BB'I$, ta có: $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BI^2} + \dfrac{1}{BB'^2} \Rightarrow BH = \dfrac{BI.BB'}{\sqrt{BI^2 + BB'^2}} = \dfrac{2a}{3}$

$\Rightarrow d\left(B,(AB'C)\right) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{2a}{3} = \dfrac{a}{2}$. Suy ra $y = \dfrac{a}{2}$

Vậy $x.y = \dfrac{a^2}{2}$.

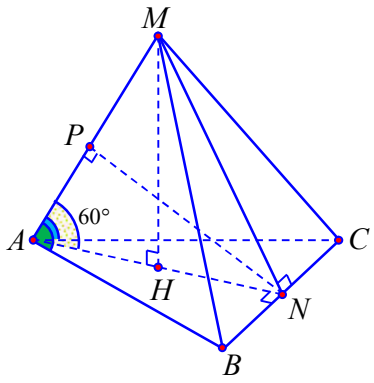
----------HẾT----------

Câu 28: **(THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018)** Đường thẳng AM tạo với mặt phẳng chứa tam giác đều ABC một góc $60°$. Biết rằng cạnh của tam giác đều ABC bằng a và $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm BC.

Ta có $\widehat{MAB}=\widehat{MAC}$, $AB=AC$.

$\Rightarrow \Delta MAB=\Delta MAC \Rightarrow MB=MC \Rightarrow \Delta MBC$ cân tại M

$\Rightarrow \begin{cases} BC\perp MN \\ BC\perp AN \end{cases} \Rightarrow BC\perp (AMN)$.

Trong mặt phẳng (AMN), dựng $NP\perp MA$ thì $NP\perp BC \Rightarrow NP=d(AM,BC)$.

Trong mặt phẳng (AMN), dựng $MH\perp AN$ thì $MH\perp (ABC)\Rightarrow (AM,(ABC))=\widehat{MAN}=60^\circ$.

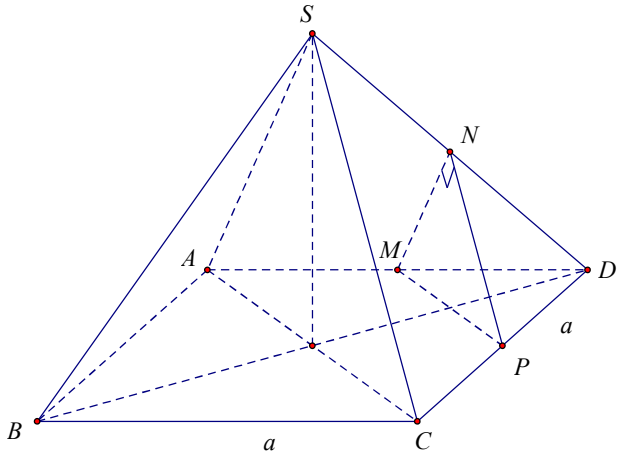
Mặt khác tam giác ANP vuông tại P có $NP=AN.\sin 60^\circ=\dfrac{3a}{4}$ vì $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 29: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và SC là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi P là trung điểm của CD.

Ta có: $NP\,//\,SC\Rightarrow (MN,SC)=(MN,NP)$.

Xét tam giác MNP ta có: $MN=\dfrac{a}{2}$, $NP=\dfrac{a}{2}$, $MP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow MN^2+NP^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a^2}{2}=MP^2\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại N

$\Rightarrow \widehat{MNP}=90^\circ \Rightarrow (MN,SC)=(MN,NP)=90^\circ$.

Câu 30: **(THPT Chuyên Thái Bình-lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD. Đặt $BM=x$, $DN=y$ $(0<x,\ y<a)$. Hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là:

A. $x^2+a^2=a(x+2y)$.

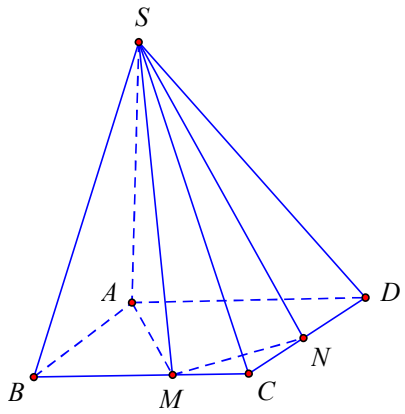
B. $x^2+a^2=a(x+y)$.

C. $x^2+2a^2=a(x+y)$.

D. $2x^2+a^2=a(x+y)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Tọa độ hóa với $O\equiv A$, $Ox\equiv AD$, $Oy\equiv AB$, $Oz\equiv AS$.

Đặt $SA=z>0$, ta có $S(0;0;z)$, $M(x;a;0)$, $N(a;y;0)$.

Do đó $\begin{cases}\overrightarrow{AS}=(0;0;z)\\ \overrightarrow{AM}=(x;a;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right]=(-az;xz;0)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{SM}=(x;a;-z)\\ \overrightarrow{SN}=(a;y;-z)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=(yz-az;xz-az;xy-a^2)$.

Mặt phẳng (SAM) nhận $\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right]=(-az;xz;0)$ là một VTPT.

Mặt phẳng (SMN) nhận $\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=(yz-az;xz-az;xy-a^2)$ là một VTPT.

Ta có $(SAM)\perp(SMN)\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right].\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right]=0$

$\Leftrightarrow az(az-yz)+xz(xz-az)=0\Leftrightarrow a(a-y)+x(x-a)=0\Leftrightarrow x^2+a^2=a(x+y)$.

Câu 31: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

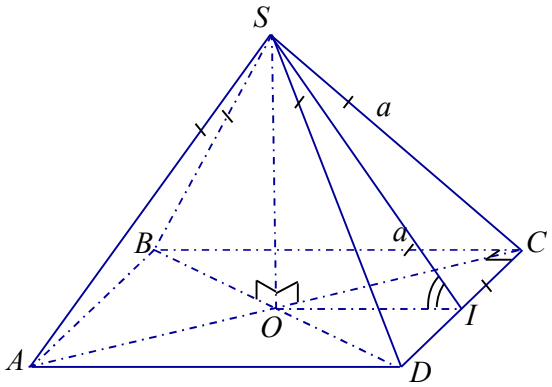
B. $\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi O là tâm của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và các mặt bên là các tam giác đều cạnh a.

+ Gọi I là trung điểm cạnh CD.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ OI \perp CD \\ SI \perp CD \end{cases}$

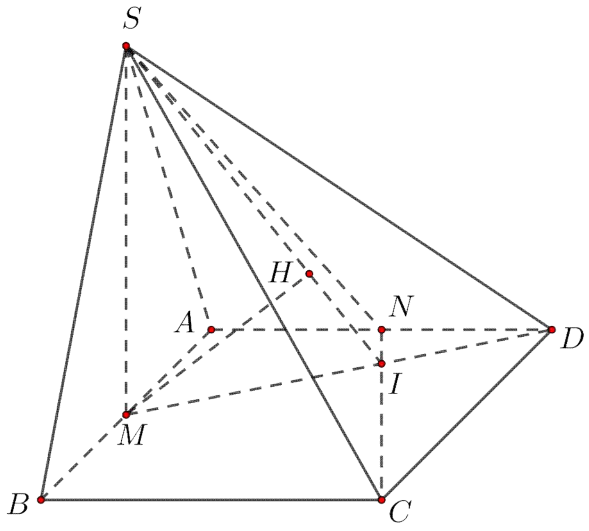
nên góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng OI và SI bằng góc $\widehat{SIO}$. Khi đó: $\cos\widehat{SIO} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \cos\widehat{SIO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 32: **(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SCN) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



M là trung điểm của AB thì $SM \perp (ABCD)$. Ta có $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là giao điểm của NC và MD. Ta có $d\left(D;(SCN)\right)=\dfrac{ID}{IM}d\left(M;(SCN)\right)$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $NC\perp DM$ tại I. $ID.CN=DN.DC$

$$\Leftrightarrow ID=\frac{DN.DC}{CN}=\frac{\frac{a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow IM=DM-ID=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a\sqrt{5}}{5}=\frac{3a\sqrt{5}}{10}\Rightarrow\frac{ID}{IM}=\frac{2}{3}.$$

Do $\begin{cases}IM\perp CN\\CN\perp SM\end{cases}\Rightarrow CN\perp(SMI)$. Kẻ $MH\perp SI$, vì $CN\perp MH$ nên $MH\perp(SCN)$

$\Rightarrow MH=d\left(M;(SCN)\right)$.

Trong tam giác SMI có $\dfrac{1}{MH^2}=\dfrac{1}{SM^2}+\dfrac{1}{MI^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{20}{9a^2}=\dfrac{32}{9a^2}$.

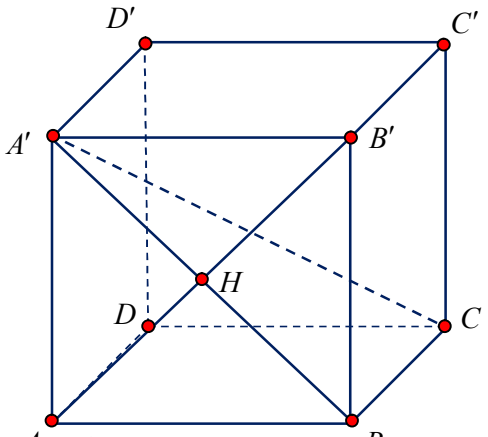
Vậy $MH=\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}\Rightarrow d\left(D;(SCN)\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 33: **(THPT Hoài Ân-Hải Phòng năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng $(AA'B'B)$, dựng AH vuông góc với $A'B$ tại H.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BC\perp(AA'B'B)$, suy ra $BC\perp AH$.

Ta có: $\left.\begin{matrix}AH\perp A'B\subset(A'BC)\\AH\perp BC\subset(A'BC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\perp(A'BC)$ tại H.

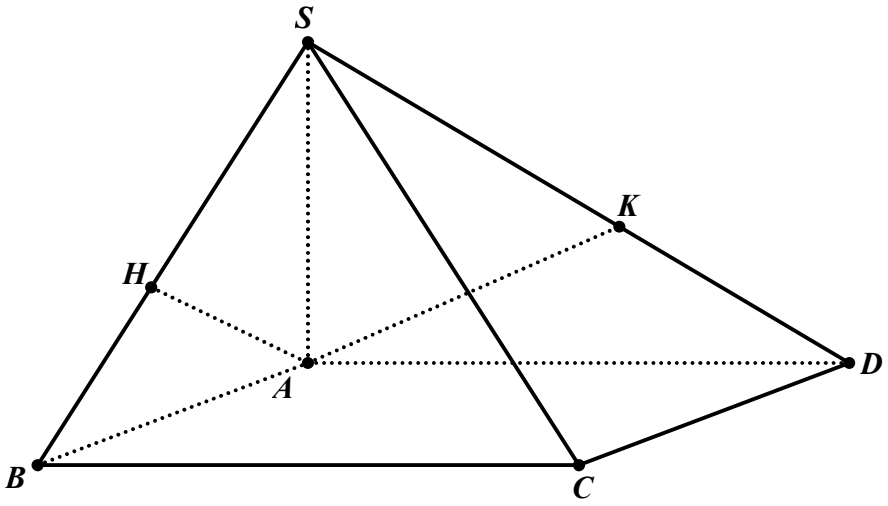
Do đó: $d\left(A;A'BC\right)=AH=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34: **(THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. $y'=3x^2-6mx$, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x=0\\x=2m\end{matrix}\right.$. Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. $AK \perp BD$. **B.** $BC \perp AH$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $SA \perp AC$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy nên $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$ (**D** đúng).

+ Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (**B** đúng).

+ Vì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SC \end{cases} \Rightarrow AH \perp SC$, tương tự ta có $AK \perp SC$ nên $HK \perp SC$ (**C** đúng).

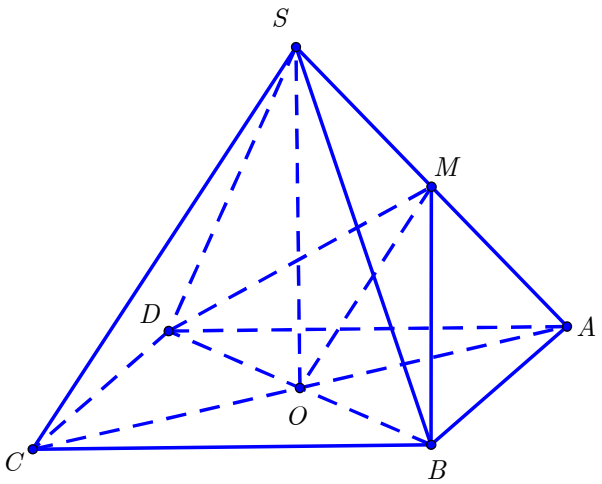
+ Giả sử $AK \perp BD$ mà $BD \perp SA$ suy ra $BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AD$ vô lý nên **A** sai.

Câu 35: **(THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Do $SO \perp BD \Rightarrow SD = SB = a$;

Gọi M là trung điểm của SA.

Ta có ΔABS cân tại B nên $BM \perp SA$, ΔADS cân tại D nên $DM \perp SA$;

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc $\widehat{BMD}$.

Ta có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$;

Do $OM \perp SA \Rightarrow \Delta SOA$ vuông cân tại $O \Rightarrow SA = SO\sqrt{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

Khi đó $DM = BM = \sqrt{AB^2 - MA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lại có $BD^2 = BM^2 + DM^2 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta MBD$ vuông cân tại M;

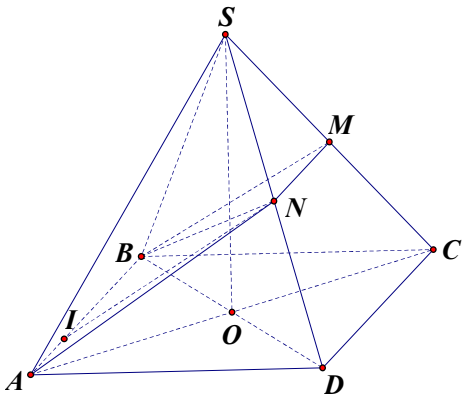
Vậy góc cần tìm bằng $90°$.

Câu 36: **(THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = 8a$, $SA = SB = SC = SD = 8a$. Gọi N là trung điểm cạnh SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ABN).

A. $12a^2$. **B.** $6a^2\sqrt{11}$. **C.** $24a^2$. **D.** $12a^2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (ABN) chứa $AB//CD$ nên cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến $NM//CD$ và M cũng là trung điểm của SC. Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang cân $ABMN$.

Hạ $NI \perp AB$. Ta có $NI^2 = AN^2 - AI^2$ với $AN = \dfrac{8a\sqrt{3}}{2} = 4a\sqrt{3}$.

$2AI = AB - MN = 8a - 4a = 4a \Rightarrow AI = 2a$. Từ đó suy ra $NI = 2a\sqrt{11}$.

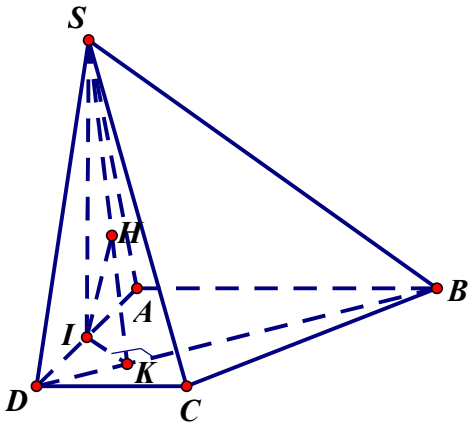
Vậy $S_{ABMN} = \dfrac{1}{2}(AB + MN).NI = \dfrac{1}{2}(8a + 4a)2a\sqrt{11} = 12a^2\sqrt{11}$.

Câu 37: **(THPT Quãng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2AD = 2CD$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AD. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD) bằng $1(\text{cm})$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

A. $\dfrac{5}{3}(\text{cm}^2)$. **B.** $\dfrac{200}{27}(\text{cm}^2)$. **C.** $\dfrac{10}{3}(\text{cm}^2)$. **D.** $\dfrac{19}{2}(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn D



* Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên BD, SK ta có $d\left(I;\left(SBD\right)\right)=IH=1$,

mà tam giác SAD đều nên ta có $SI=\dfrac{AD\sqrt{3}}{2}$, gọi J là hình chiếu vuông góc của A lên BD ta

có: $\dfrac{1}{AJ^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{5}{4AD^2}\Rightarrow AJ=\dfrac{2AD}{\sqrt{5}}\Rightarrow IK=\dfrac{AJ}{2}=\dfrac{AD}{\sqrt{5}}$.

* Do tam giác SIK vuông tại I nên ta có:

$\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{SI^2}+\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{4}{3AD^2}+\dfrac{5}{AD^2}=\dfrac{19}{3AD^2}=1\Rightarrow AD=\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$

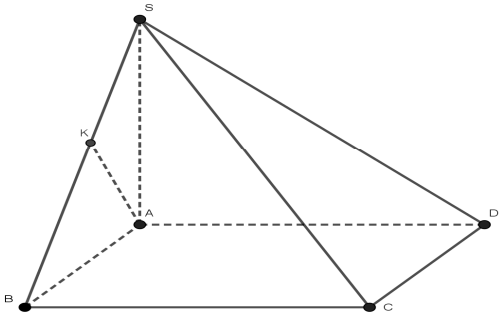
$\Rightarrow \mathrm{S}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{AD\left(AB+DC\right)}{2}=\dfrac{3.AD^2}{2}=\dfrac{19}{2}\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

Câu 38: **(THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right)$, $SA=a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AD và SB bằng:

A. $\dfrac{2\sqrt{3}.a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}.a}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}.a}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}.a}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng AK là đường cao của tam giác SAB.

Ta có: $AK=\dfrac{SA.AB}{SB}=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3a^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}.a}{\sqrt{7}}$.

$\left.\begin{array}{l}AD\perp AB\\AD\perp SA\\AB\cap SA=A\end{array}\right\}\Rightarrow AD\perp\left(SAB\right)\Rightarrow AD\perp AK$.

$\left.\begin{array}{l} AK \perp AD \\ AK \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow d\left(AD, SB\right) = AK = \dfrac{2\sqrt{3}.a}{\sqrt{7}}$.

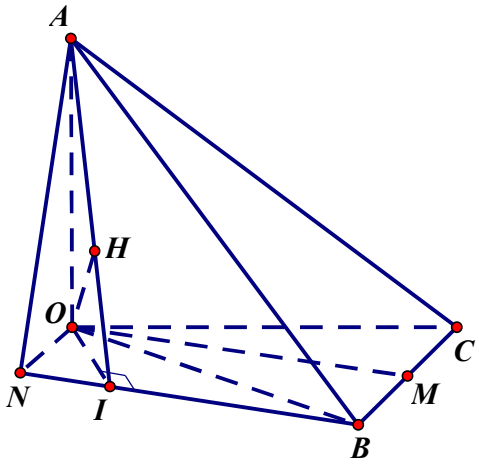
Câu 39: (THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018) Cho hình tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$. Cạnh OA vuông góc với mặt phẳng $\left(OBC\right)$, $OA = a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và OM.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Trong mặt phẳng $\left(OBC\right)$ dựng hình bình hành $OMBN$, kẻ $OI \perp BN$.



Kẻ $OH \perp AI$. Nhận xét $OM // \left(ABN\right)$ nên khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và OM bằng khoảng cách giữa đường thẳng OM và mặt phẳng $\left(ABN\right)$, bằng khoảng cách từ O đến mặt phẳng $\left(ABN\right)$. Suy ra $h = d\left(O, \left(ABN\right)\right) = OH$.

Tam giác OBI có $OB = a$, $\widehat{BOM} = 60^{\circ}$ nên $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác AOI vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

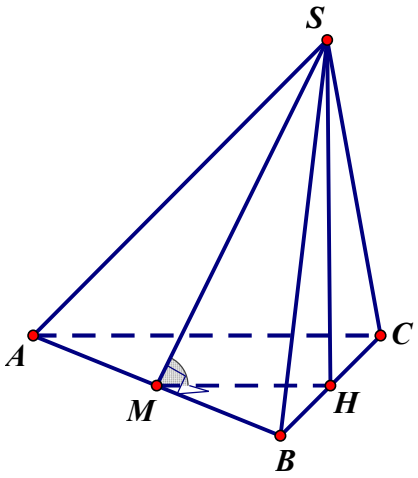
Câu 40: (THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A, cạnh $BC = a$, $AC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ các cạnh bên $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên $\left(SAB\right)$ và mặt phẳng đáy $\left(ABC\right)$.

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên hình chiếu của S trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy ABC. Nhận xét H là trung điểm BC.



Gọi M là trung điểm AB, nhận xét $AB \perp (SMH)$ nên góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) là góc $\widehat{SMH}$.

Xét tam giác SBH có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

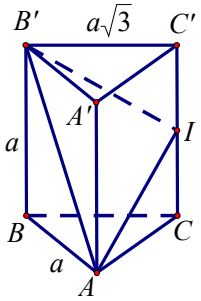
Xét tam giác SMH có $\tan \widehat{M} = \dfrac{SH}{MH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{M} = 60^\circ$.

Câu 41: **(THPT Lương Văn ChasnhPhus Yên năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $B'AB$ có $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông IAC có $IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông $IB'C'$ có $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét tam giác $IB'A$ có $B'A^2+IA^2=2a^2+\dfrac{5a^2}{4}=\dfrac{13a^2}{4}=B'I^2\Rightarrow \Delta IB'A$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{IB'A}=\dfrac{1}{2}AB'.AI=\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}a.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α.

Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

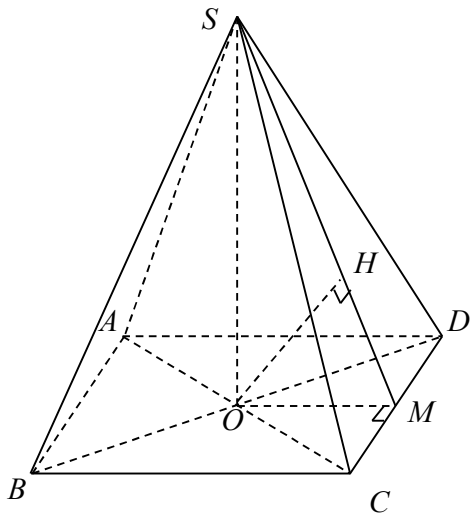
Do đó $S_{ABC}=S_{IB'A}.\cos\alpha\Rightarrow\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 42: **(THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều $S.ABCD$ bằng a. Gọi O là tâm đáy. Tính khoảng cách từ O tới mp(SCD).

A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn A



Tính khoảng cách từ O tới $mp(SCD)$:

Gọi M là trung điểm của CD.

Theo giả thiết $SO\perp(ABCD)\supset CD$.

$$\Rightarrow\begin{cases}CD\perp SO\subset(SOM)\\CD\perp OM\subset(SOM)\\OM\cap SO=O\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SOM)\text{ mà }CD\subset(SCD)\Rightarrow(SCD)\perp(SOM).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $SM\Rightarrow OH\perp SM=(SCD)\cap(SOM)$, suy ra $OH\perp(SCD)$ nên $d(O,(SCD))=OH$.

Ta có $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

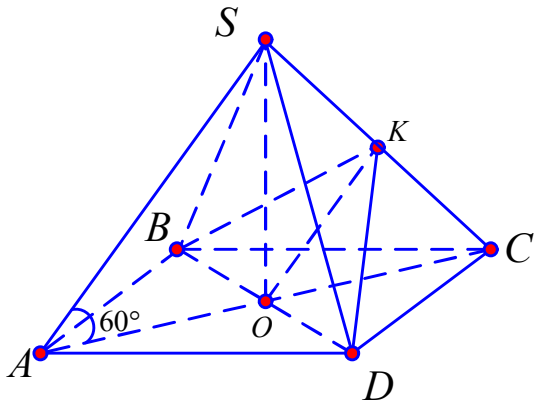
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{6}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{6}}\Rightarrow d\left(O,\left(SCD\right)\right)=OH=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 43: **(THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết các cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Giá trị lượng giác tang của góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SCD\right)$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OK\perp SC$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều và $ABCD$ là hình vuông nên $SO\perp\left(ABCD\right)$;

$BD\perp\left(SAC\right)\Rightarrow SC\perp BD$. Suy ra $SC\perp\left(BKD\right)\Rightarrow KD\perp SC$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SCD\right)$ là $\widehat{OKD}$ và $\tan\widehat{OKD}=\frac{OD}{OK}$ (do ΔKOD vuông ở O): $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC=2a\Rightarrow OA=OC=OD=a$.

Trong hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$ nên $\widehat{SAC}=60°$

$\Rightarrow SO=OA.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Ta có $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow OK=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\tan\widehat{OKD}=\frac{OD}{OK}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

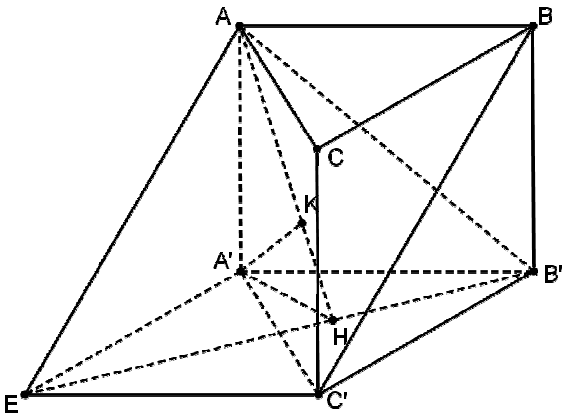
Câu 44: **(THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $AA'=h\left(a,h>0\right)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB', BC'.

A. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. **B.** $\frac{ah}{\sqrt{5a^2+h^2}}$. **C.** $\frac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. **D.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.



Dựng hình bình hành $A'B'C'E$. Khi đó EC' vừa song song vừa bằng với $AB = A'B'$ nên $ABC'E$ là hình bình hành. Suy ra $AE//BC'$ hay $BC'//(AB'E)$ chứa AB'.

Ta có: $d(AB', BC') = d(BC', (AB'E)) = d(C', (AB'E))$. Do $A'C'$ cắt $(AB'E)$ tại trung điểm của $A'C'$ nên $d(C', (AB'E)) = d(A', (AB'E))$.

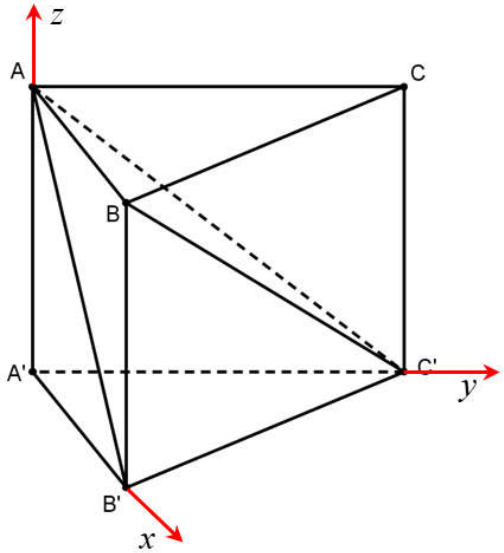
Dựng $A'H \perp B'E$ tại H và $A'K \perp AH$ tại K. Ta chứng minh được $A'K \perp (AB'E)$.

Suy ra $d(AB', BC') = A'K$.

Ta có: $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}A'C'\right)^2} + \dfrac{1}{A'B'^2} = \dfrac{5}{a^2}$ và $\dfrac{1}{A'K^2} = \dfrac{1}{A'H^2} + \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{5}{a^2} + \dfrac{1}{h^2}$

Vậy $A'K = \sqrt{\dfrac{a^2h^2}{a^2+5h^2}} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$.

Cách 2.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó: $A'(0;0;0)$, $B'(a;0;0)$, $C'(0;a;0)$, $A(0;0;h)$, $B(a;0;h)$, $C(0;a;h)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB'} = (a;0;-h)$, $\overrightarrow{BC'} = (-a;a;-h)$, $\overrightarrow{B'C'} = (-a;a;0)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right] = (ah; 2ah; a^2)$

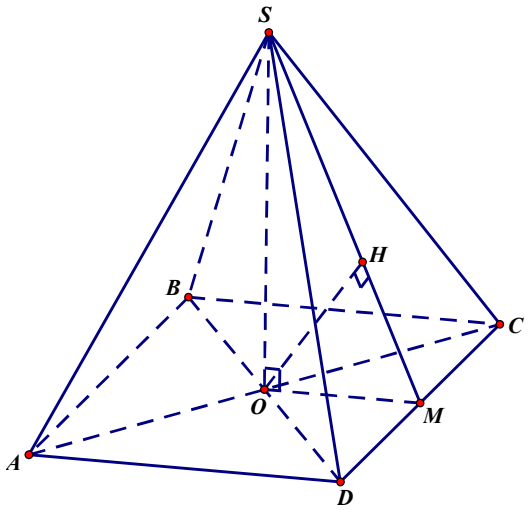
Do đó: $d\left(AB',BC'\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{B'C'}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right]\right\|}=\dfrac{a^2h}{\sqrt{a^2h^2+4a^2h^2+a^4}}=\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$.

Câu 45: **(THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Tính khoảng cách giữa SC và AB biết rằng $SO=a$ và vuông góc với mặt đáy của hình chóp.

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a}{5}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết suy ra hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Ta có $AB//CD\Rightarrow AB//\left(SCD\right)$ nên $d\left(SC;AB\right)=d\left(AB;\text{mp}\left(SCD\right)\right)=d\left(A;\text{mp}\left(SCD\right)\right)$.

Mặt khác O là trung điểm AC nên $d\left(A;\text{mp}\left(SCD\right)\right)=2d\left(O;\text{mp}\left(SCD\right)\right)$.

Như vậy $d\left(SC;AB\right)=2d\left(O;\text{mp}\left(SCD\right)\right)$.

Gọi M là trung điểm CD, ta có $OM\perp CD$ và $OM=\dfrac{a}{2}$. Kẻ $OH\perp SM$, với $H\in SM$, thì $OH\perp\text{mp}\left(SCD\right)$.

Xét tam giác SOM vuông tại O, ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OM^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{a^2}$.

Từ đó $OH=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

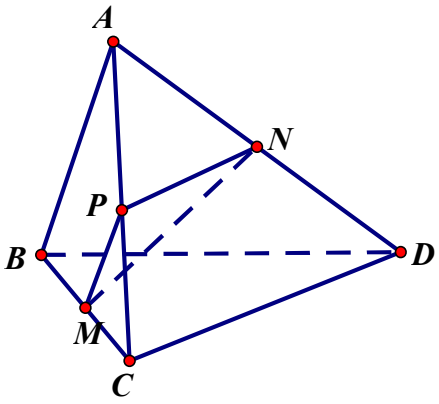
Vậy $d\left(SC;AB\right)=2d\left(O;\text{mp}\left(SCD\right)\right)=2.OH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 46: **(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $MN=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $MP // AB$, $NP // CD$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa MP và NP.

$\cos\widehat{MPN} = \dfrac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2.MP.NP} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ$.

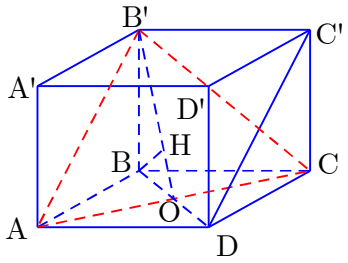
Vậy góc giữa AB và CD bằng $60°$.

Câu 1: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC' bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $DC'//AB' \Rightarrow DC'//(B'AC)$ chứa AC.

Khi đó ta có $d(AC;DC') = d(D;(B'AC)) = d(B;(B'AC))$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'O)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $B'O$ ta có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp B'O \end{cases} \Rightarrow BH \perp (B'AC)$.

Suy ra $d(B,(B'AC)) = BH$.

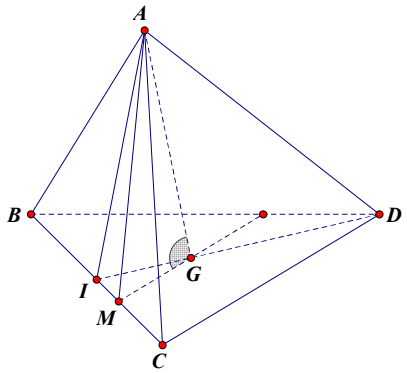
Trong tam giác $B'BO$ ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BO^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} \Leftrightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 2: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60°$; $\widehat{BAD} = 90°$; $\widehat{DAC} = 120°$. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD.

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



* ΔABC đều $\Rightarrow BC = 1$.

* ΔACD cân tại A có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos 120°} = \sqrt{3}$.

* ΔABD vuông cân tại A có $BD=\sqrt{2}$.

* ΔBCD có $CD^2=BC^2+BD^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.

Dựng đường thẳng d qua G và song song CD, cắt BC tại M.

Ta có $MG // CD \Rightarrow (AG,CD)=(AG,MG)$.

Gọi I là trung điểm của BC, xét ΔBDI vuông tại B có $DI=\sqrt{BD^2+BI^2}=\sqrt{2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{IM}{IC}=\frac{MG}{CD}=\frac{IG}{ID}=\frac{1}{3} \Rightarrow IM=\frac{1}{3}.IC=\frac{1}{3}.\frac{BC}{2}=\frac{1}{6}$; $MG=\frac{1}{3}.CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $IG=\frac{1}{3}.ID=\frac{1}{2}$.

Xét ΔAIM vuông tại I có $AM=\sqrt{AI^2+IM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

$$\cos\widehat{AID}=\frac{AI^2+ID^2-AD^2}{2AI.ID}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG=\sqrt{AI^2+IG^2-2AI.IG.\cos\widehat{AID}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét ΔAMG có

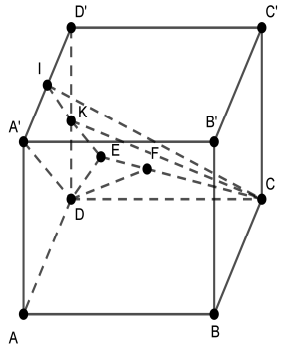
$$\cos(AG,MG)=\left|\cos\widehat{AGM}\right|=\left|\frac{AG^2+GM^2-AM^2}{2.AG.GM}\right|=\left|\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|=\frac{1}{6}.$$

Câu 3: **(THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK, $A'D$.

A. a. **B.** $\frac{2a}{5}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Trong $(ADD'A')$: Gọi $O=AD'\cap A'D$; $H=IK\cap AD'$; I là trung điểm của $A'D'$.

Ta có $IK // AD' \Rightarrow AD' // (IKC) \Rightarrow d(CK,A'D)=d(A'D,(IKC))=d(D,(IKC))$.

Kẻ $DF\perp CE$, ta có:

$\square$ $\left.\begin{array}{l} DF \perp CE \\ DF \perp EI \end{array}\right\} \Rightarrow DF \perp (CEI) \Rightarrow d\left(D,(IKC)\right) = DF$.

$\square$ $ED = OH = \frac{1}{4} AD' = \frac{1}{4} a\sqrt{2}$.

$\square$ $DF = \sqrt{\frac{CD^2.ED^2}{CD^2 + ED^2}} = \sqrt{\frac{a^2.\frac{a^2}{8}}{a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a}{3}$.

Vậy $d\left(CK, A'D\right) = \frac{a}{3}$.

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ: $D(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $C(a;0;0)$, $D'(0;0;a)$.

Ta có: $K\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{CK} = \left(-a;0;\frac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{A'D} = (0;-a;-a)$.

$\overrightarrow{CK} \wedge \overrightarrow{A'D} = \left(\frac{a}{2};-a;a\right)$.

$\overrightarrow{DC} = (a;0;0)$.

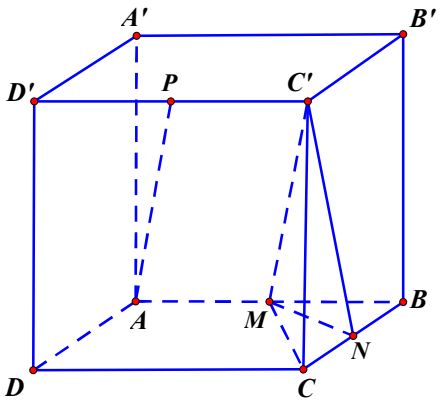
$$d\left(CK, A'D\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right]\right|} = \frac{\left|\frac{a^2}{2}\right|}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + a^2}} = \frac{a}{3}.$$

Câu 4: **(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. $60°$. **B.** $90°$ **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tứ giác $AMC'P$ là hình bình hành nên $AP // MC' \Rightarrow \left(\widehat{MN, AP}\right) = \left(\widehat{MN, MC'}\right) = \widehat{NMC'}$.

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng a.

Xét tam giác $C'CM$ vuông tại C có $C'M = \sqrt{C'C^2 + MC^2} = \sqrt{C'C^2 + BC^2 + MB^2} = \frac{3a}{2}$.

Xét tam giác $C'CN$ vuông tại C có $C'N = \sqrt{C'C^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Mà $MN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác $C'CM$ có $\cos\widehat{NMC'}=\dfrac{MC'^2+MN^2-C'N^2}{2MC'.MN}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{NMC'}=45^\circ \Rightarrow \left(\widehat{MN,AP}\right)=45^\circ$.

Câu 5: **(THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA\perp(ABC)$ nên $\left(\widehat{SB;(ABC)}\right)=\left(\widehat{SB;AB}\right)=\widehat{SBA}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$.

$SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC//(SBD)$ nên:

$d(AC;SB)=d\left(AC;(SBD)\right)=d\left(A;(SBD)\right)$

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD\perp AM$. Từ $SA\perp(ABC)$ ta có $BD\perp SA$, do đó $BD\perp(SAM)$. Kẻ $AH\perp SM$ ($H\in SM$) thì $BD\perp AH$.

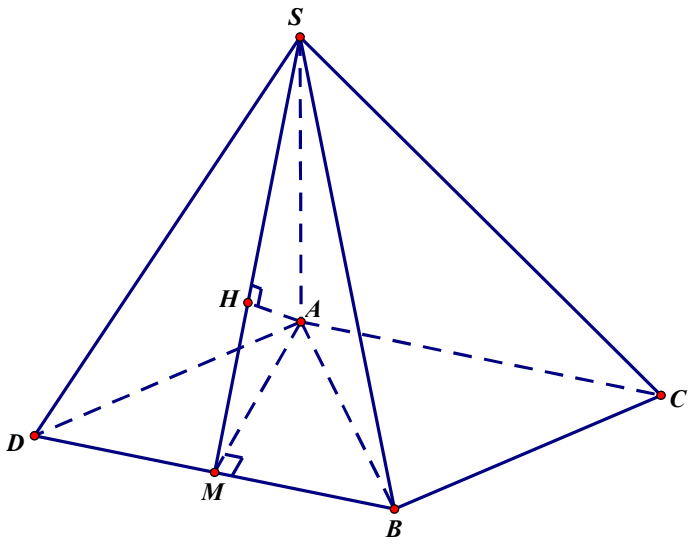
Từ $BD\perp AH$ và $AH\perp SM$ suy ra $AH\perp(SBD)$. Nên $d\left(A;(SBD)\right)=AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $d(AC;SB)=d\left(A;(SBD)\right)=AH=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

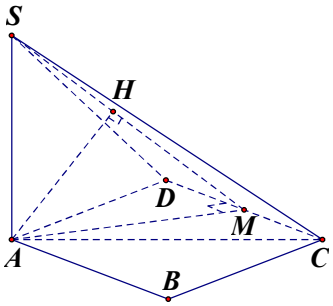


Câu 6: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với (ABC) và $SA=a$. Tính khoảng cách giữa SC và AB.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ đỉnh D của hình bình hành $ABCD$. Khi đó, $AB//DC \Rightarrow AB//(SDC)$.

Do đó $d(AB;SC)=d(AB;(SDC))=d(A;(SDC))$.

Gọi M là trung điểm CD, vì ΔACD đều nên $CD\perp AM$ mà $CD\perp SA \Rightarrow CD\perp(SAM)$ $\Rightarrow (SCD)\perp(SAM)$. Kẻ $AH\perp SM$ tại H. Suy ra $AH\perp(SCD)\Rightarrow d(A;(SDC))=AH$.

Tam giác SAM vuông tại A có $SA=a$, $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

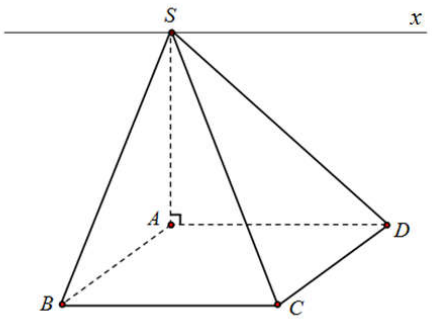
Vậy $d(AB;SC)=AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 7: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$ (hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $(SBC)\cap(SAD)=Sx\ //\ BC\ //\ AD$.

Ta chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow Sx\perp SB$.

Lại có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AD\Rightarrow SA\perp Sx$.

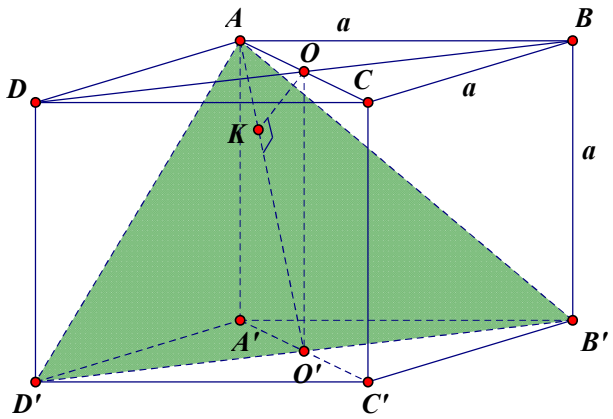
Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA}=45°$.

Câu 8: (THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(AD'B')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn A



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có $BO\ //\ B'O'\subset(AB'D')\Rightarrow BO\ //\ (AB'D')$.

Dựng $OK\perp AO'$, ta có $\begin{cases}B'D'\perp A'C'\\ B'D'\perp AA'\end{cases}\Rightarrow B'D'\perp(AA'C'C)\supset OK\Rightarrow B'D'\perp OK$.

$\Rightarrow OK\perp(AB'D')$.

$\Rightarrow d(B,(AB'D'))=d(O,(AB'D'))=OK$.

Xét $\Delta AOO'$ vuông tại O có OK là đường cao.

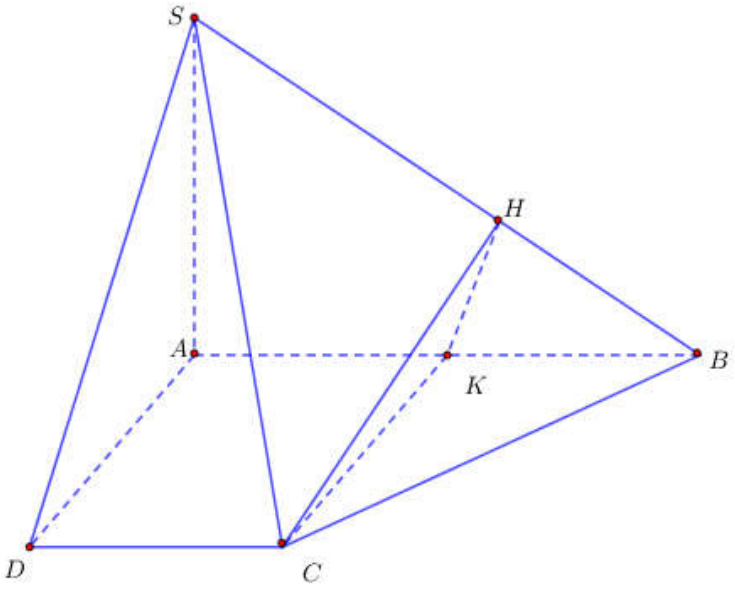
$\Rightarrow\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OO'^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow OK=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Cho biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC).

A. $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm của AB và H là hình chiếu của C lên SB.

Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp SB$. Do đó $\begin{cases} SB \perp CH \\ SB \perp CK \end{cases} \Rightarrow HK \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ CH \perp SB \\ HK \perp SB \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) là góc $\widehat{CHK}$.

Ta có $\begin{cases} AC = a\sqrt{2} \\ BC = a\sqrt{2} \\ KB = a \end{cases}$ suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} CB \perp AC \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp SC$ nên $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CS^2} \Rightarrow CH = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Mặt khác $CK = AD = a$.

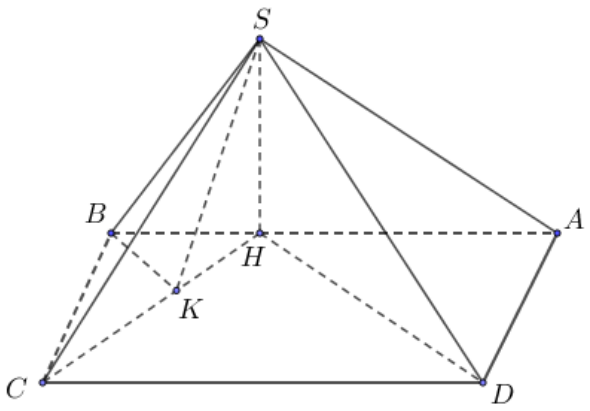
Xét tam giác CHK vuông tại K có $\sin\widehat{CHK} = \frac{CK}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{CHK} = 60°$.

Câu 10: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 1$. Hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh đáy AB sao cho $AH = 2HB$. Tính khoảng cách từ A đến (SHC).

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



Vẽ $BK \perp HC \ (K \in HC) \Rightarrow BK \perp (SHC) \Rightarrow \dfrac{d(A,(SHC))}{d(B,(SHC))} = \dfrac{AH}{BH} = 2$

$\Rightarrow d(A,(SHC)) = 2d(B,(SHC))$, ΔBHC vuông cân cho ta $BK = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(A,(SHC)) = \sqrt{2}$.

Câu 11: **(THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD) đôi một vuông góc.

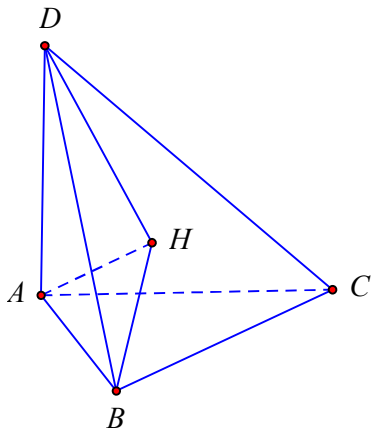
B. Tam giác BCD vuông.

C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD.

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Lời giải

Chọn B



□ Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp AC \end{cases} \Rightarrow DA \perp (ABC)$.

Mà $DA \subset (ABD) \Rightarrow (ABD) \perp (ABC)$.

Tương tự $(ACD) \perp (ABC)$, $(ACD) \perp (ABD)$ do đó A đúng.

□ Nếu ΔBCD vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$ mà $BC \perp DA$

$\Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$, điều này không thể xảy ra vì $AB \perp AC$ nên B sai.

□ Kẻ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH \quad (1)$

Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được C đúng.

□ Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.

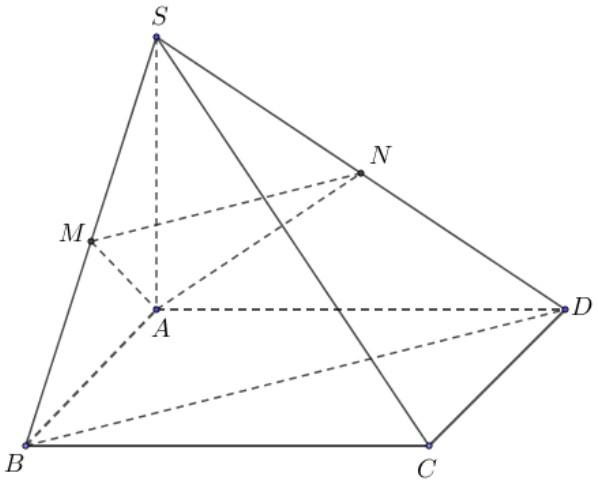
Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, do đó D đúng.

Câu 12: **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) là

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(SCD) \perp (SAD)$, vẽ $AN \perp SD\ (N \in SD) \Rightarrow AN \perp (SCD)$

$(SAB) \perp (SBC)$, vẽ $AM \perp SB\ (M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SBC)$

$\Rightarrow \widehat{((SCD),(SBC))} = \widehat{(AM,AN)} = \widehat{MAN}$.

Ta có MN là đườngg trung bình của $\Delta SBD \Rightarrow MN = a\sqrt{2}$.

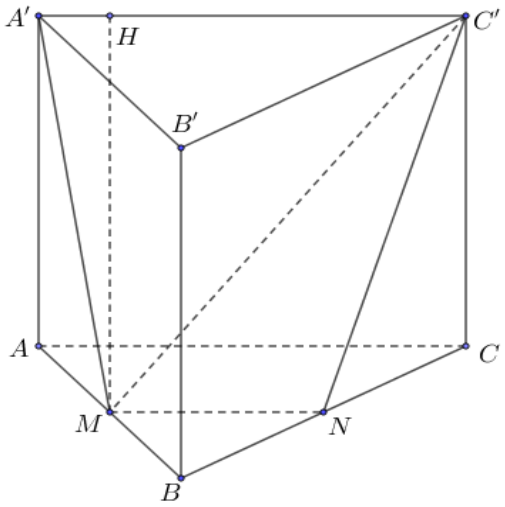
Các $\Delta SAD, \Delta SAB$ vuông cân cho ta $AM = AN = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta AMN$ đều nên $\widehat{MAN} = 60°$.

Câu 13: **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2a$. M là trung điểm của AB. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng $(A'C'M)$. Diện tích của thiết diện là

A. $3\sqrt{7}a^2$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{7}a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $6\sqrt{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $M \in (ABC) \cap (A'C'M)$, $AC \;//\; A'C' \Rightarrow (ABC) \cap (A'C'M) = Mx \;//\; AC$. Gọi N là giao điểm của Mx với $BC \Rightarrow (ABC) \cap (A'C'M) = MN$. Thiết diện là hình thang $MNC'A'$.

$MN = \dfrac{AC}{2} = 2a$, $A'M = 2a\sqrt{2}$. Vẽ $MH \perp A'C' \; (H \in A'C') \Rightarrow MH = a\sqrt{7}$.

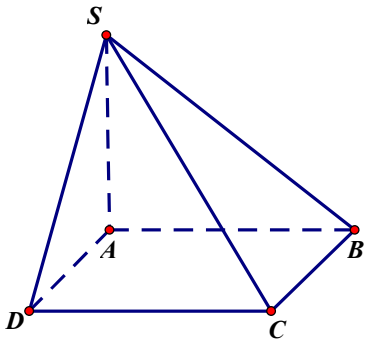
Vậy diện tích thiết diện $S_{MNC'A'} = \dfrac{1}{2}.MH.(MN + A'C') = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{7}.6a = 3\sqrt{7}a^2$.

Câu 14: **(THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $CD // AB$ nên $d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = BC = 2a$.

Câu 15: **(THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Tập xác định của hàm số $y = (x-2)^{\frac{4}{3}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **B.** $D = \mathbb{R}$. **C.** $D = (2; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

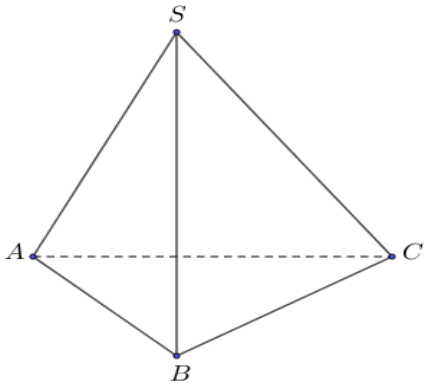
Điều kiện xác định của hàm số $y = (x-2)^{\frac{4}{3}}$ là $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Câu 16: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A, C. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0;0)$, $A(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$, $S(x;y;z)$.

Ta có $(ABC):z=0$, $\overrightarrow{AS}=(x-a\sqrt{2};y;z)$, $\overrightarrow{CS}=(x;y-a\sqrt{2};z)$

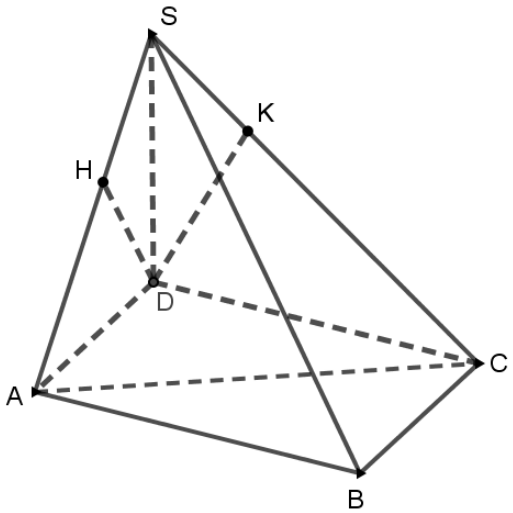
Do $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow(x-a\sqrt{2})a\sqrt{2}=0\Rightarrow x=a\sqrt{2}$, $d(S,(ABC))=2a\Rightarrow z=2a$ $(z>0)$

$\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow(y-a\sqrt{2})a\sqrt{2}=0\Rightarrow y=a\sqrt{2}\Rightarrow S(a\sqrt{2};a\sqrt{2};2a)$.

Ta có $\overrightarrow{AS}=(0;a\sqrt{2};2a)$, $\overrightarrow{CS}=(a\sqrt{2};0;2a)$, $\overrightarrow{BS}=(a\sqrt{2};a\sqrt{2};2a)$.

(SBC) có 1 vtpt $\vec{n}=(-\sqrt{2};0;1)$, (SAB) có 1 vtpt $\vec{m}=(0;\sqrt{2};-1)\Rightarrow\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

Cách 2: Gọi D là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC).



Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp AD$, tương tự: $BC \perp CD$. Vậy $ABCD$ là hình vuông.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D trên SA, SC. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) là góc giữa hai đường thẳng DH và DK.

Tính được $DH = DK = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; $\frac{SH}{SA} = \frac{SD^2}{SA^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3} AC = \frac{4a}{3}$.

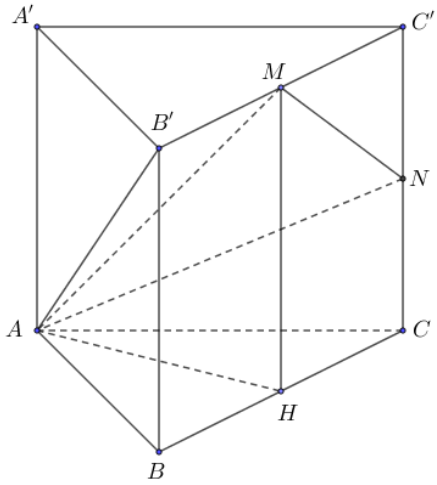
Tứ đó ta có: $\cos \widehat{HDK} = \frac{HD^2 + KD^2 - HK^2}{2HD.KD} = \frac{1}{3}$

Câu 17: (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120°$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm BC, $BC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$M(0;0;a)$, $N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC).

(AMN) có một vtpt $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

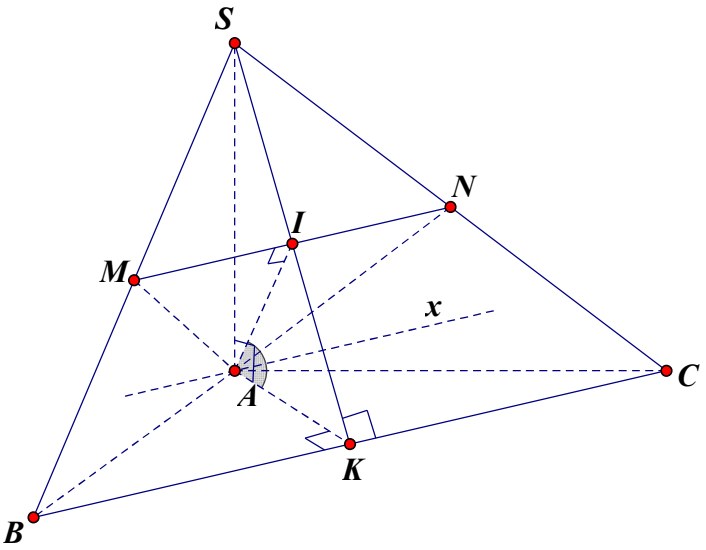
(ABC) có một vtpt $\overrightarrow{HM} = (0;0;1)$, từ đó $\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{HM}\right|}{|\vec{n}|HM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1.1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC=a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNA) và (ABC) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và BC.

$\Rightarrow$ I là trung điểm của SK.

Ta có $(AMN)\cap(ABC)=Ax\,//\,MN\,//\,BC$.

ΔABC cân tại A $\Rightarrow AK\perp BC\Rightarrow AK\perp Ax$.

ΔAMN cân tại A $\Rightarrow AI\perp MN\Rightarrow AI\perp Ax$.

Do đó $((AMN),(ABC))=(AI,AK)=\widehat{IAK}$ hoặc bù với góc $\widehat{IAK}$

ΔABC vuông tại A có AK là đường trung tuyến nên $AK=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAK vuông tại A có AI là đường trung tuyến nên

$$AI=IK=\frac{SK}{2}=\frac{\sqrt{SA^2+AK^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

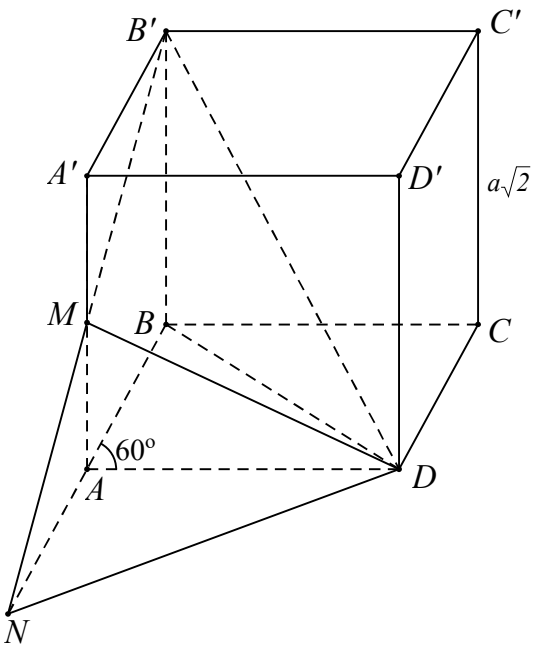
Xét ΔAIK có $\cos\widehat{IAK}=\frac{IA^2+AK^2-IK^2}{2IA.AK}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19: (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60°$, $AA'=a\sqrt{2}$. M là trung điểm của AA'. Gọi φ của góc giữa hai mặt phẳng $(B'MD)$ và $(ABCD)$. Khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $N = B'M \cap BA$, khi đó $(B'MD) \cap (ABCD) = DN$.

Vì $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 60°$ nên tam giác ABD đều cạnh a.
AM là đường trung bình của tam giác NBB' nên $AN = AB = a$, suy ra ΔADN cân tại A, $\widehat{DAN} = 180° - \widehat{BAD} = 120°$. Do đó $\widehat{ADN} = 30°$. Suy ra $\widehat{NDB} = 60° + 30° = 90°$ hay $BD \perp DN$.
Theo định lý ba đường vuông góc ta có $B'D \perp DN$, do đó góc giữa mặt phẳng $(B'MD)$ và $(ABCD)$ là góc giữa $B'D$ và BD là $\widehat{B'DB}$.

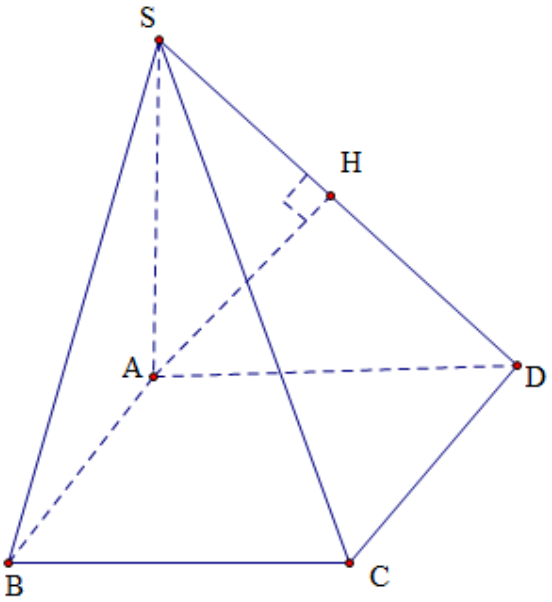
Xét tam giác $B'DB$ vuông tại B, $\cos\widehat{B'DB} = \dfrac{BD}{B'D} = \dfrac{BD}{\sqrt{BD^2 + BB'^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20: **(THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AB//CD$ nên $d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$.

Trong tam giác SAD, kẻ $AH\perp SD$ tại H.

Dễ thấy $\left(SAD\right)\perp\left(SCD\right)$ theo giao tuyến SD. Do đó: $AH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AH$

Ta có $AH=\dfrac{SA.AD}{SD}=\dfrac{a.a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H, K lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $BH=3HA$, $AK=3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH}=30°$. Gọi E là giao điểm của CH và BK. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC.

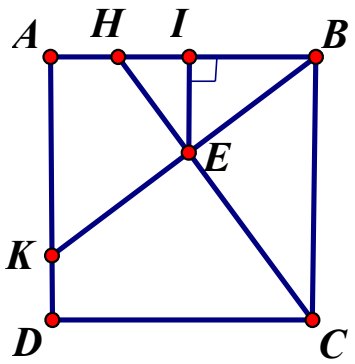
A. $\dfrac{28}{5\sqrt{39}}$. **B.** $\dfrac{18}{5\sqrt{39}}$. **C.** $\dfrac{36}{5\sqrt{39}}$. **D.** $\dfrac{9}{5\sqrt{39}}$.

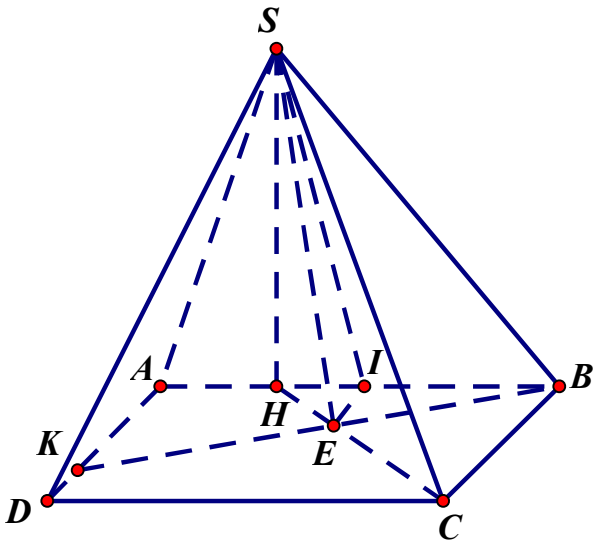
Lời giải

Chọn B

Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\Delta ABD=\Delta BCH$.

$\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{BCH}\Rightarrow\widehat{HEB}=90°$.





Ta có: $\cos\left(SE;BC\right)=\cos\left(SE;EI\right)=\left|\cos\widehat{SEI}\right|$, $SH=BH.\tan 30^\circ=a\sqrt{3}$.

$\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{HE}{HB}\Rightarrow HE=\dfrac{HB^2}{HC}=\dfrac{9a}{5}$, $SE=\sqrt{SH^2+HE^2}=\sqrt{3a^2+\dfrac{81a^2}{25}}=\dfrac{2a\sqrt{39}}{5}$.

$\dfrac{HE}{HB}=\dfrac{HI}{HE}\Rightarrow HI=\dfrac{HE^2}{HB}=\dfrac{27a}{25}$, $SI=\sqrt{SH^2+HI^2}=\sqrt{3a^2+\left(\dfrac{27a}{25}\right)^2}=\dfrac{2a\sqrt{651}}{25}$.

$\dfrac{EI}{BC}=\dfrac{HI}{HB}=\dfrac{9}{25}\Rightarrow EI=\dfrac{36a}{25}$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

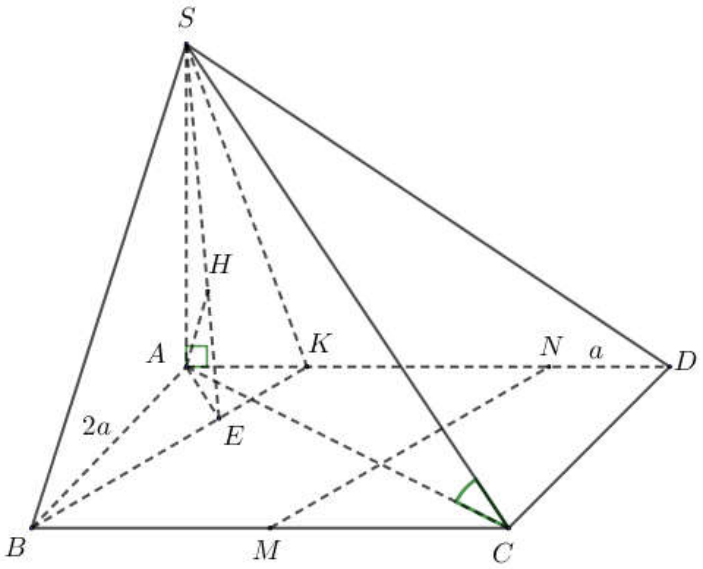
$$\cos\widehat{SEI}=\frac{SE^2+EI^2-SI^2}{2.SE.EI}=\frac{\left(\dfrac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2+\left(\dfrac{36a}{25}\right)^2-\left(\dfrac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2.\dfrac{2a\sqrt{39}}{5}.\dfrac{36a}{25}}=\frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

Câu 22: **(THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=2a$, $AD=4a$, $SA\perp\left(ABCD\right)$, cạnh SC tạo với đáy góc 60°. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh AD sao cho $DN=a$. Khoảng cách giữa MN và SB là

A. $\dfrac{2a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{95}}{19}$. **D.** $\dfrac{8a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Lấy K trên AD sao cho $AK=a$ thì $MN \,//\, (SBK)$. $AC=2a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow d(MN,SB)=d(MN,(SBK))=d(N,(SBK))=2d(A,(SBK))$.

Vẽ $AE\perp BK$ tại E, $AH\perp SE$ tại H.

Ta có $(SAE)\perp(SBK)$, $(SAE)\cap(SBK)=SE$, $AH\perp SE$

$\Rightarrow AH\perp(SBK)\Rightarrow d(A,(SBK))=AH$. $SA=AC.\sqrt{3}=2a\sqrt{15}$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AB^2}.=\frac{1}{\left(2a\sqrt{15}\right)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}.=\frac{1}{\left(2a\sqrt{15}\right)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}$$

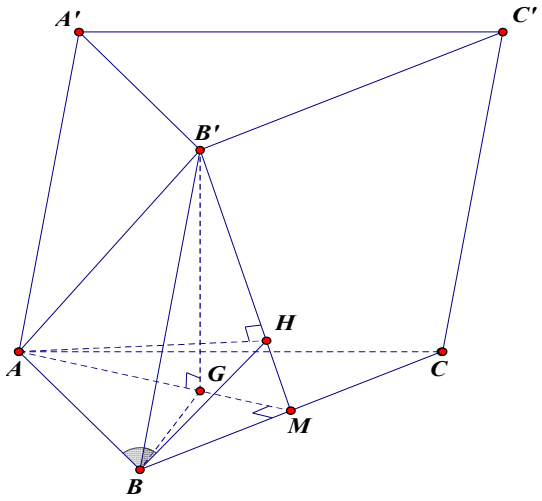
$$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{285}}{19}\Rightarrow d(MN,SB)=\frac{2a\sqrt{285}}{19}.$$

Câu 23: **(THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Cạnh bên hợp với (ABC) góc $60°$. Sin của góc giữa AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{3}{2\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $B'G \perp (ABC)$ nên BG là hình chiếu của BB' lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow (BB',(ABC)) = (BB',BG) = \widehat{B'BG} = 60°$.

Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên $B'M$, ta có

$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp B'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AB'M) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp B'M$ nên $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó HB là hình chiếu của AB lên mặt phẳng $(BCC'B')$.

$\Rightarrow (AB,(BCC'B')) = (AB,HB) = \widehat{ABH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H có $\sin\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB}$.

$B'G = BG.\tan 60° = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{3}.\sqrt{3} = a$.

$B'M = \sqrt{B'G^2 + GM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $\Delta AHM \sim \Delta B'GM \Rightarrow AH = \dfrac{AM.B'G}{B'M} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{39}}{6}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

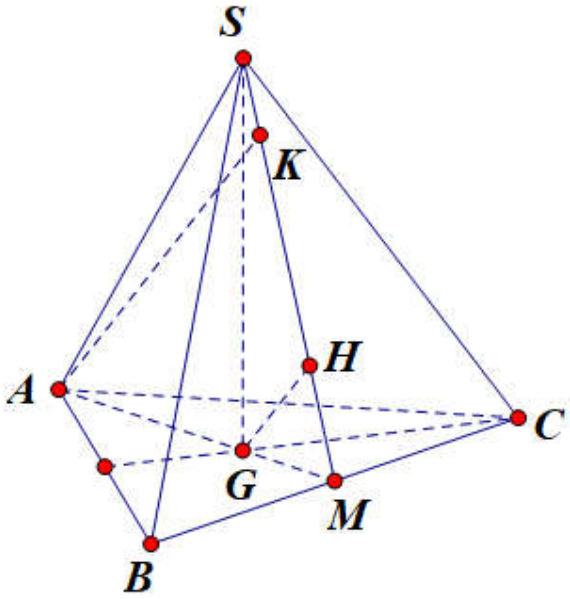
Vậy $\sin\widehat{ABH} = \dfrac{\dfrac{3a}{\sqrt{13}}}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Câu 24: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{165}}{30}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{165}}{45}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{165}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{165}}{15}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do hình chóp $S.ABC$ đều nên $SO \perp (ABC)$

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3};\ GM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

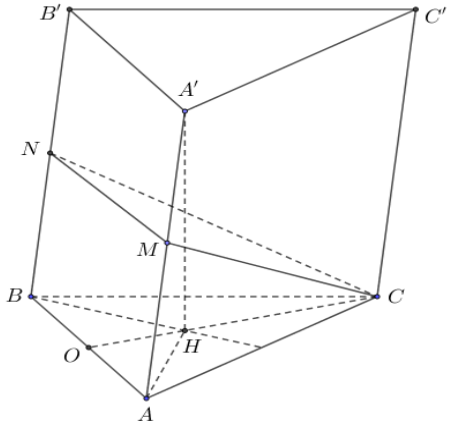
$$d\left(A,(SBC)\right) = 3d\left(G,(SBC)\right) = \frac{3SG.GM}{\sqrt{SG^2 + GM^2}} = \frac{a\sqrt{165}}{15}.$$

Câu 25: **(THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của AB. Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right),\ B\left(-\frac{1}{2};0;0\right),\ C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right),\ A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

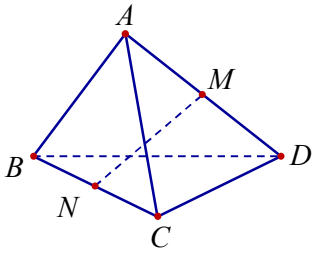
M là trung điểm $AA'\Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB'\Rightarrow N\left(\frac{-3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\overrightarrow{MN}=(-1;0;0)$, $\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{4};\frac{-5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow (CMN)$ có vtpt $\overrightarrow{n_2}=\left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(0;2\sqrt{2};5\right)$

$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{33}}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

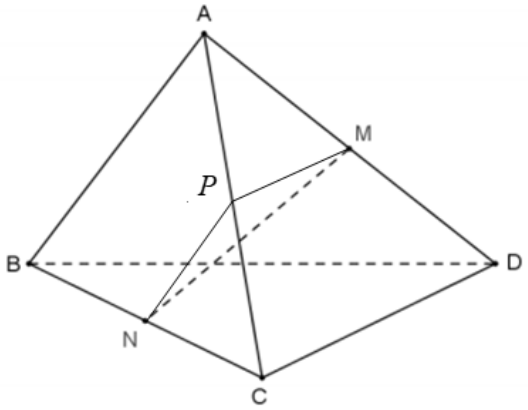
Câu 26: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.



A. $MN=\frac{a}{2}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=\frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của AC. Suy ra $PM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=PN$. Do đó tam giác PMN cân tại P. Lại có góc giữa AB và MN bằng $30°$ nên góc giữa MN và PN bằng $30°$. Vậy tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng $120°$.

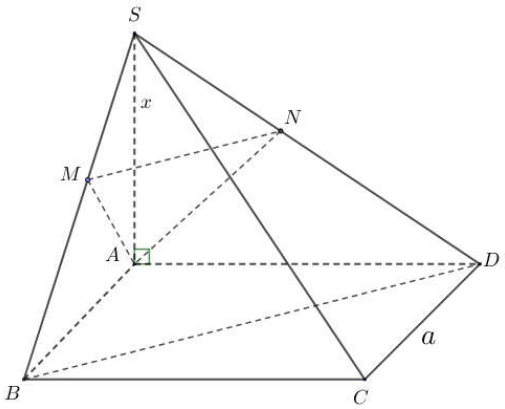
Ta có $PN.\sqrt{3}=MN$ nên $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc $60°$.

A. $x = a\sqrt{3}$. **B.** $x = a$. **C.** $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $x = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(SCD) \perp (SAD)$, vẽ $AN \perp SD$ tại $N \Rightarrow AN \perp (SCD)$.

$(SAB) \perp (SBC)$, vẽ $AM \perp SB$ tại $M \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(SCD))}\ AM = AN = \widehat{MAN}$.

Ta có $SB = SD = \sqrt{x^2 + a^2}$, $AM = AN = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{MN}{BD} \Rightarrow MN = \dfrac{SM.BD}{SB}$

$$SM = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow MN = \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}.a\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow MN = \frac{x^2 a\sqrt{2}}{x^2 + a^2}.$$

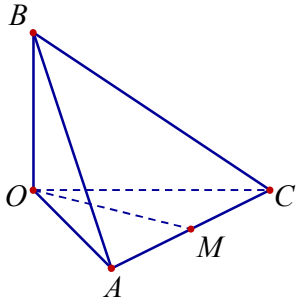
ΔAMN đều cho ta $MN = AM \Rightarrow \dfrac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{x^2 a\sqrt{2}}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = x\sqrt{2} \Leftrightarrow x = a$.

Câu 28: (THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = OB = OC = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và OB.

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn C



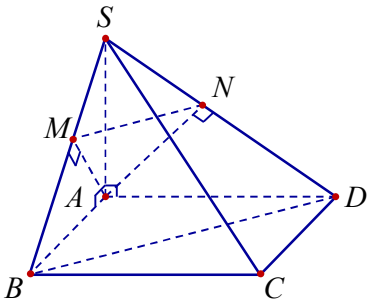
Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow AC \perp OM \Rightarrow OM$ là đường vuông góc chung của AC và OB, $AC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow OM = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29: **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và (AMN).

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;1;0)$, $\overrightarrow{SC} = (1;1;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0;1;-\sqrt{2})$. Do $(AMN) \perp SC$ nên (AMN) có vtpt $\overrightarrow{SC}$

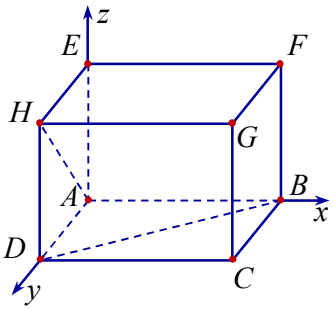
$\sin\varphi = \dfrac{|3|}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Câu 30: **(THPT Chuyên Hạ Long-Quãng Ninh lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AH và BD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), H(0;a;a)$ khi đó

$\overrightarrow{AH} = (0;a;a)$ $\overrightarrow{BD} = (-a;a;0)$, $\overrightarrow{AD}(0;a;0)$; $\left[\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BD}\right] = (-a^2;-a^2;a^2)$

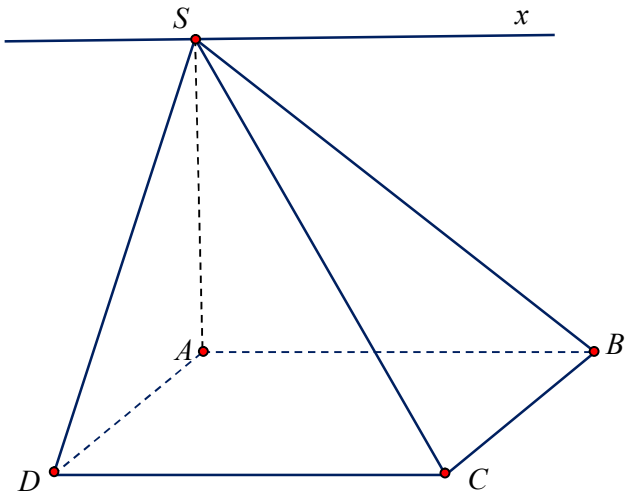
$$d\left(AH,BD\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BD}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 31: **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $\left(ABCD\right)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SCD\right)$ bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\left(SAB\right)\cap\left(SCD\right)=Sx\ //\ AB\ //\ CD$.

Ta chứng minh được:

$CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp SD\Rightarrow SD\perp Sx$.

$SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp AB\Rightarrow SA\perp Sx$.

Do đó: $\left(\widehat{\left(SAB\right);\left(SCD\right)}\right)=\left(\widehat{SD;SA}\right)=\widehat{ASD}$.

Tam giác SAD vuông tại A nên: $\tan\widehat{ASD}=\frac{AD}{SA}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

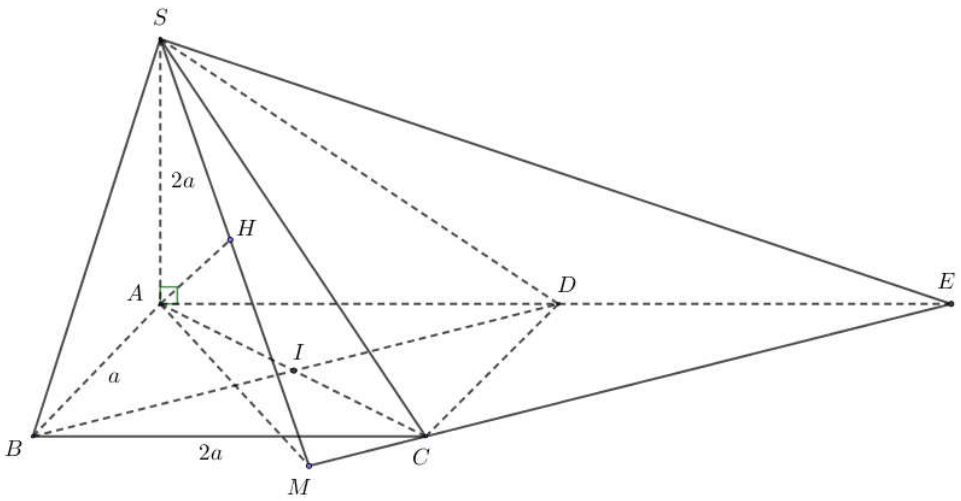
Vậy $\left(\widehat{\left(SAB\right);\left(SCD\right)}\right)=30°$.

Câu 32: **(THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, $BC=2a$ và $SA\perp\left(ABCD\right)$, $SA=2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{2}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng hình bình hành $BCED$, gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, vẽ AM vuông góc CE tại M vẽ AH vuông góc SM tại H.

Ta có $BD \,//\, (SCE) \Rightarrow d(BD,SC) = d(BD,(SCE)) = d(I,(SCE)) = \frac{1}{2}d(A,(SCE))$

Ta có $ME \perp (SAM) \Rightarrow ME \perp AH \Rightarrow AH \perp (SME) \Rightarrow d(A,(SCE)) = AH$

Ta có $AM.CE = CD.AE \Rightarrow AM = \frac{CD.AE}{CE} = \frac{a.4a}{a\sqrt{5}} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.

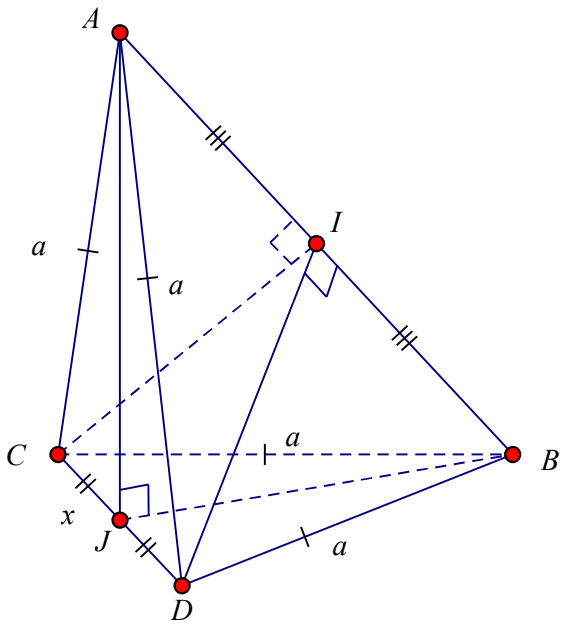
$AH = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{4a}{3} \Rightarrow d(BD,SC) = \frac{2a}{3}$.

Câu 33: **(THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$?

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x = a$. **C.** $x = a\sqrt{3}$. **D.** $x = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}(ACD)\perp(BCD)\\(ACD)\cap(BCD)=CD\Rightarrow AJ\perp(BCD)\Rightarrow AJ\perp BJ.\\AJ\perp CD\end{cases}$

$\Delta ACD=\Delta BCD$ (c.c.c)

$\Rightarrow AJ=BJ\Rightarrow AB=AJ\sqrt{2}=\sqrt{2\left(AC^2-CJ^2\right)}=\sqrt{2\left(a^2-x^2\right)}\ \ (0<x<a)$

$\Rightarrow AI=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2-x^2\right)}$

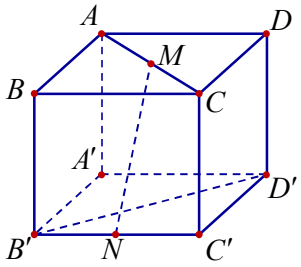
Dễ thấy ΔCAB và ΔDAB bằng nhau và cân tại các đỉnh C và D.

$\Rightarrow DI=CI=\sqrt{AC^2-AI^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{\left(a^2-x^2\right)}{2}}=\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{2}}.$

Có $\begin{cases}CI\perp AB\\DI\perp AB\end{cases}$, nên để $(ABC)\perp(ABD)$ thì $CI\perp DI$ hay ΔICD vuông tại I.

$\Leftrightarrow CD=CI\sqrt{2}\Leftrightarrow 2x=\sqrt{a^2+x^2}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Câu 34: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

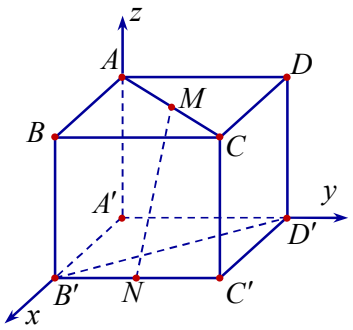


A. $\sqrt{5}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $3a$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Gắn hình lập phương vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.

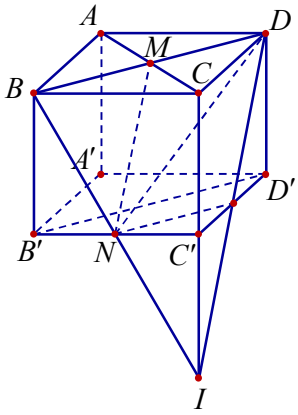


Ta có: $A'(0;0;0)$, $B'(a;0;0)$, $D'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right)$, $N\left(a;\frac{a}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{B'D'}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{-a}{2};0;a\right)$, $\overrightarrow{B'N}=\left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

$$d\left(B'D';MN\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{B'N}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{MN}\right]\right|}=\frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^4+a^4+\frac{a^2}{4}}}=\frac{a}{3}.$$

Cách 2:



Ta có $B'D'\ //\ BD\Rightarrow B'D'\ //\ (NBD)$

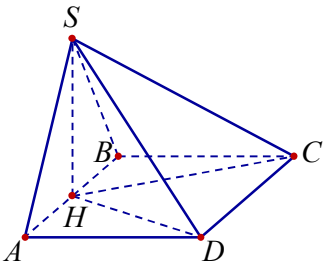
$$d\left(MN,B'D'\right)=d\left(B'D',\left(NDB\right)\right)=d\left(B',\left(NDB\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,\left(NBD\right)\right)$$

Gọi h là khoảng cách từ C đến (NBD), $I=CC'\cap BN$

Ta có $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{CB^2}+\frac{1}{CD^2}+\frac{1}{CI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{9}{4a^2}\Rightarrow h=\frac{2a}{3}$.

Vậy $d\left(B'D',MN\right)=\frac{a}{3}$.

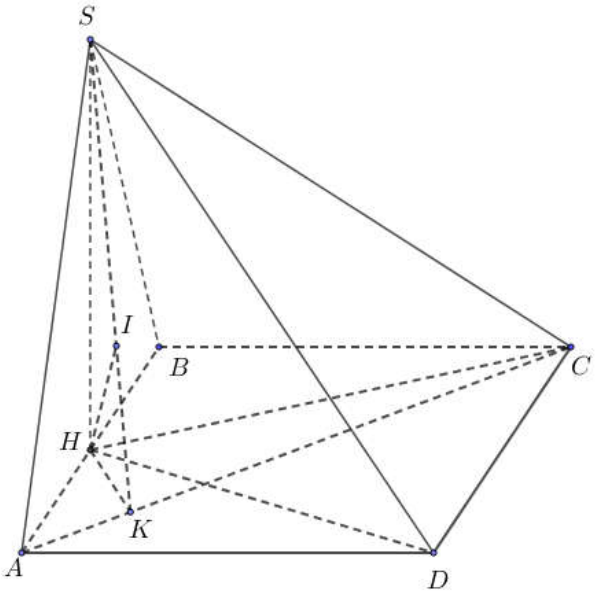
Câu 35: (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết $SD=2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).



A. $h=\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $h=\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **D.** $h=\dfrac{4a\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(SAB)\perp(ABCD)$, $(SAB)\cap(ABCD)=AB$, $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow$ góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH}=30°$.

$d\left(B,(SAC)\right)=2d\left(H,(SAC)\right)$. Vẽ $HK\perp AC$ tại K, $HI\perp SK$ tại I,

Ta có $AC\perp(SHK)\Rightarrow AC\perp HI\Rightarrow HI\perp(SAC)$.

Đặt $HC=HD=x$, $SH=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. Ta có phương trình $\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2+x^2=\left(2a\sqrt{3}\right)^2\Leftrightarrow x=3a$

$\Rightarrow SH=a\sqrt{3}$, $AB=2a$, $AD=2a\sqrt{2}$, $AC=2a\sqrt{3}$.

Ta có $HK.AC=AH.BC\Rightarrow HK=\dfrac{AH.BC}{AC}=\dfrac{a.2a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

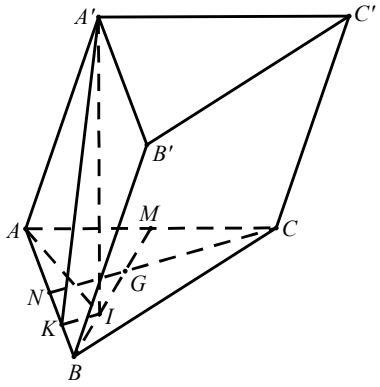
$HI=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}\Rightarrow h=\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 36: **(THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{95}}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{165}}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{134}}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{126}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,AB. Gọi I là trung điểm của BG.

Qua I kẻ đường thẳng song song với CN cắt AB tại K thì $IK\perp AB$ (do $CN\perp AB$) (1).

Vì $A'I\perp(ABC)$ nên $A'I\perp AB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AB\perp(A'KI)$. Do đó $\varphi=\widehat{A'KI}$.

Vì I là trung điểm BG nên suy ra $IK=\dfrac{1}{2}GN=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}CN=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{4\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông AIM ta có $AI^2=AM^2+MI^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{7a^2}{12}$.

Trong tam giác vuông $A'AI$ ta có $A'I^2=A'A^2-AI^2=(2a)^2-\dfrac{7a^2}{12}=\dfrac{41a^2}{12}$.

Trong tam giác vuông $A'KI$ ta có $A'K^2=A'I^2+KI^2=\dfrac{41a^2}{12}+\left(\dfrac{a}{4\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{165a^2}{48}$.

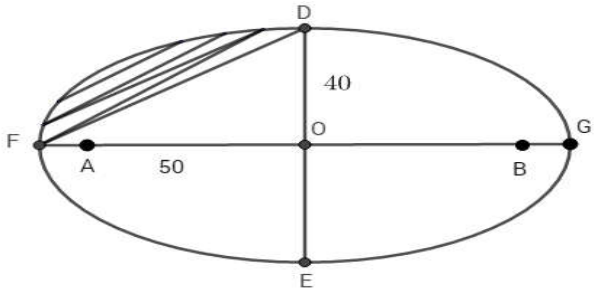
Suy ra $A'K=\dfrac{a\sqrt{165}}{4\sqrt{3}}$. Từ đó ta có $\cos\varphi=\dfrac{KI}{A'K}=\dfrac{\dfrac{a}{4\sqrt{3}}}{\dfrac{a\sqrt{165}}{4\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{165}}$.

Câu 37: **(THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018)** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100(\text{m})$ và trục nhỏ bằng $80(\text{m})$ được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến phần nghìn).

A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Lời giải

Chọn B



Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết, ta có $2a=100\Rightarrow a=50$; $2b=80\Rightarrow b=40$.

Diện tích phần trồng cây con (phần gạch sọc) bằng $\frac{1}{4}$ diện tích của elip trừ đi diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng cây con là $S_1=\frac{\pi ab}{4}-\frac{ab}{2}\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích phần trồng rau (phần không gạch sọc) bằng $\frac{3}{4}$ diện tích elip cộng với diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng rau là $S_2=\frac{3\pi ab}{4}+\frac{ab}{2}\left(\text{m}^2\right)$.

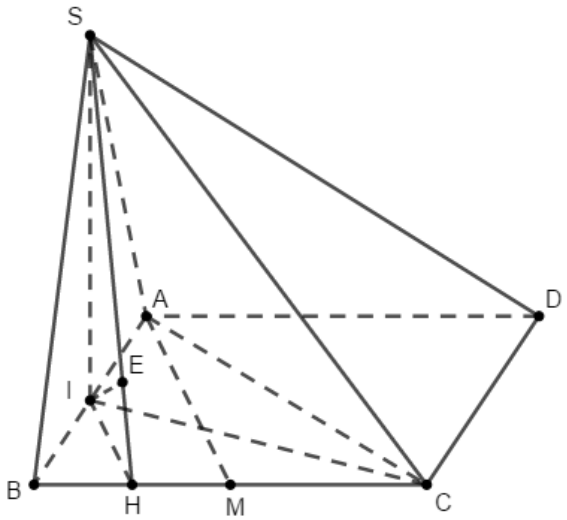
Thu nhập của cả mảnh vườn là $\left(\frac{\pi ab}{4}-\frac{ab}{2}\right)\cdot 2000+\left(\frac{3\pi ab}{4}+\frac{ab}{2}\right)\cdot 4000\approx 23991000$.

Câu 38: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $AC=a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{26}}{13}$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **D.** $1<m\le 5$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC và BM. Do ΔABC là tam giác đều nên $AM\perp BC$. Mà HI là đường trung bình nên $HI\perp BC$.

Kẻ $IE \perp SH$ tại E. Ta chứng minh được $IE \perp (SBC)$ tại E.

Suy ra: $d(I,(SBC)) = IE$.

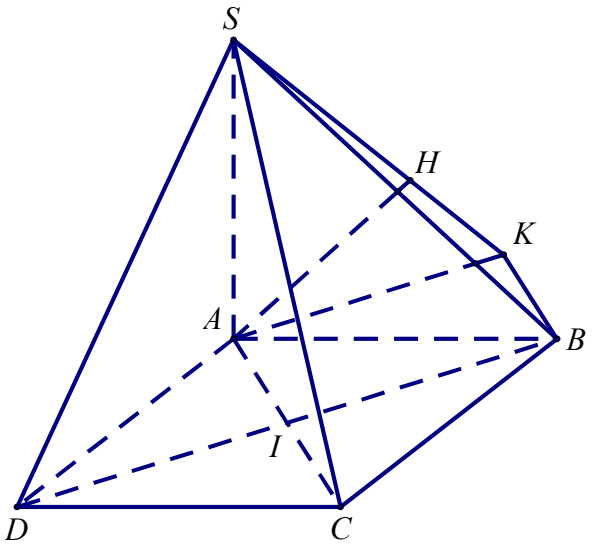
Ta có: $IE = \dfrac{IS.IH}{\sqrt{IS^2 + IH^2}} = \dfrac{IC.\tan 60°.\dfrac{AM}{2}}{\sqrt{(IC.\tan 60°)^2 + \left(\dfrac{AM}{2}\right)^2}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}$.

Câu 39: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt cạnh của hình vuông $ABCD$ là x, $x > 0$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCA.

Vậy $\widehat{SCA} = 45°$. Do đó tam giác SAC vuông cân tại A. Suy ra $SA = AC = x\sqrt{2}$.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.x\sqrt{2}.x^2 = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{3}$.

Theo bài ra thì $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Vậy $x = a$.

Cách 1: Qua B dựng đường thẳng d song song với AC, qua A dựng đường thẳng d' song song với BD. Gọi K là giao điểm của d và d'. Ta có $AC // (SKB)$.

Do đó $d(AC,SB) = d(AC,(SKB)) = d(A,(SKB))$.

Trong mặt phẳng (SAK) dựng AH vuông góc với SK tại H (1).

Vì $AC \perp BD$ nên suy ra $AK \perp KB$ (2). Mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp KB$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $KB \perp (SAK)$. Do đó ta có $KB \perp AH$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $AH \perp (SKB)$. Vậy $AH = d(A,(SKB))$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có tứ giác $AKBI$ hình chữ nhật nên $AK = BI = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAK có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2a^2}$.

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. Vậy $d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Cách 2: (tọa độ hóa):

Gán hệ trục tọa độ như sau: $A(0;0;0)$, $D(a;0;0)$, $B(0;a;0)$ và $S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Khi đó $C(a;a;0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB} = \left(0;a;-a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{AS} = \left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right] = \left(-a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};a^2\right)$, $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{AS} = a^3\sqrt{2}$.

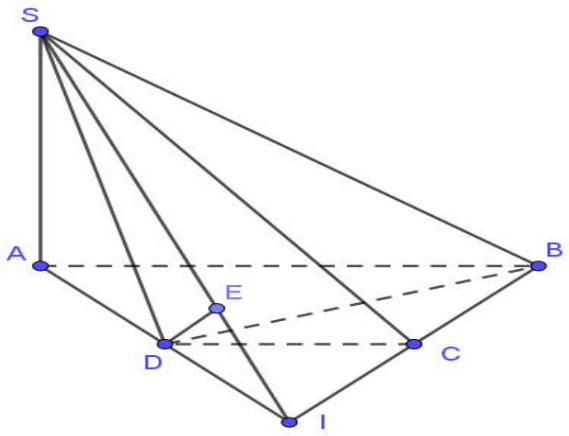
Từ đó ta có $d(AC,SB) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\right|} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 40: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $ABCD$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = AD \cap BC$.

ta có: $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Kẻ $DE \perp SI$, ta có: $\begin{cases} SI \perp BD \\ SI \perp DE \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE) \Rightarrow \widehat{((SAD),(SBC))} = \widehat{(DE,BE)}$.

Ta có: $\sin \widehat{AIS} = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

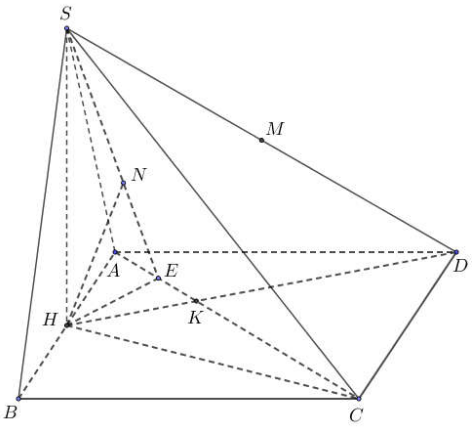
Mà $\sin \widehat{AIS} = \dfrac{DE}{DI} \Rightarrow DE = DI \sin \widehat{AIS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \tan \widehat{DEB} = \dfrac{DB}{ED} = \sqrt{7} \Rightarrow \cos \widehat{DEB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 41: (Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải

Chọn D



$AB = a$, $BC = 2a$, $HB = \dfrac{a}{2}$, $HC = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, $AC = a\sqrt{5}$.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi K là giao điểm của HD và AC. Theo Talet $\dfrac{DK}{HK} = \dfrac{DC}{AH} = 2 \Rightarrow DK = 2HK$.

Vẽ $HE \perp AC$ tại $E \Rightarrow AC \perp (SHE) \Rightarrow (SAC) \perp (SHE)$.

Vẽ $HN \perp AE$ tại $N \Rightarrow HN \perp (SAC)$

$\Rightarrow d(M,(SAC)) = \dfrac{1}{2} d(D,(SAC)) = d(H,(SAC)) = HN$.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH} \Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân $\Rightarrow SH = HC = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Ta có $HE.AC = CB.AH \Rightarrow HE = \dfrac{2a.\dfrac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $d\left(M,\left(SAC\right)\right)=HN=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{17}}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\dfrac{17a^2}{4}+\dfrac{a^2}{5}}}=\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD=a$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(SCD\right)$.

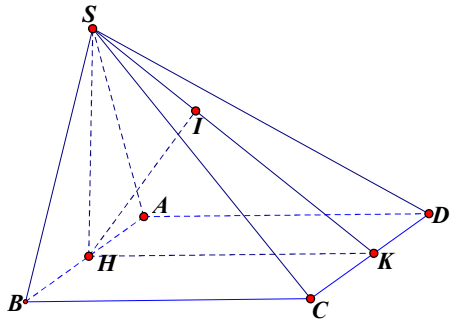
A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 44: (THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB.

Ta có $\left(SAB\right)\perp\left(ABCD\right)$ theo giao tuyến AB. Trong $\left(SAB\right)$ có $SH\perp AB$ nên $SH\perp\left(ABCD\right)$.

Kẻ $HK\,//\,AD\ \left(K\in CD\right)\Rightarrow HK\perp CD$

mà $SH\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow CD\perp SH$. Do đó $CD\perp\left(SHK\right)$.

Suy ra $\left(SCD\right)\perp\left(SHK\right)$ theo giao tuyến SK.

Trong $\left(SHK\right)$, kẻ $HI\perp SK$ thì $HI\perp\left(SCD\right)$.

Ta có: $AB\,//\,\left(SCD\right)$ nên $d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(H,\left(SCD\right)\right)=HI$.

Tam giác SAB vuông cân có $AB=2a\Rightarrow SH=a$.

Tam giác SHK có $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}\Rightarrow HI=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

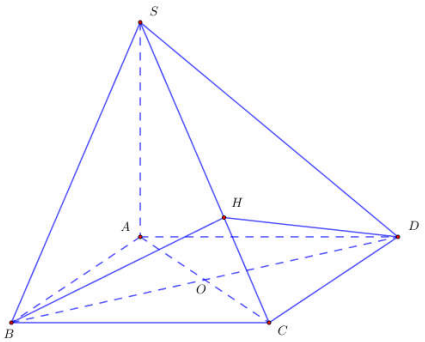
Câu 45: (THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là

hình thoi cạnh a, $BD=a$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.

Vì tam giác ABD đều nên $AC=2.AO=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=a\sqrt{3}$.

Suy ra $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Kẻ $BH\perp SC$, ta có $\begin{cases}SC\perp BD\\SC\perp BH\end{cases}\Rightarrow SC\perp HD$.

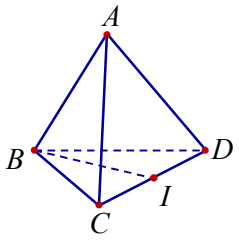
Như vậy $\begin{cases}(SBC)\cap(SCD)=SC\\BH\perp SC\\DH\perp SC\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)$.

Xét tam giác SBC ta có $\cos\widehat{C}=\dfrac{HC}{BC}=\dfrac{BC^2+SC^2-SB^2}{2BC.SC}\Rightarrow HC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $HD=HB=\sqrt{BC^2-HC^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\cos\widehat{BHD}=\dfrac{HB^2+HD^2-BD^2}{2HB.HD}=0\Rightarrow\widehat{BHD}=90°$. Vậy $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)=90°$.

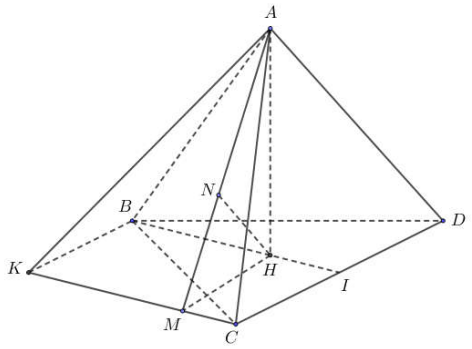
Câu 46: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm cạnh CD (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI.



A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng hình bình hành $BICK \Rightarrow BICK$ là hình chữ nhật do $BI \perp CD$. Gọi H là tâm ΔBCD.

Vẽ $HM \perp KC$ tại M, $HN \perp AM$ tại N.

Ta có $CK \perp (AHM) \Rightarrow CK \perp HN \Rightarrow HN \perp (ACK)$.

Ta có $BI \,//\, (ACK) \Rightarrow d(AC, BI) = d(BI, (ACK)) = d(H, (ACK)) = HN$.

Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{11 - \left(\frac{\sqrt{11}.\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{66}}{3}$, $HM = CI = \frac{\sqrt{11}}{2}$

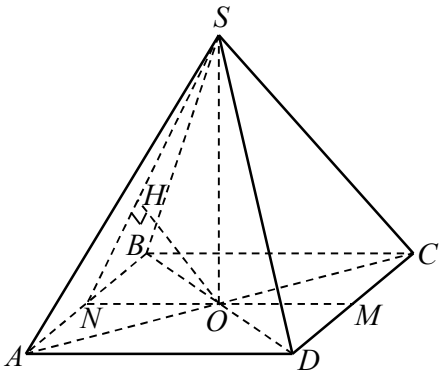
$$HN = \frac{AH.HM}{\sqrt{AH^2 + HM^2}} = \frac{\frac{\sqrt{66}}{3}.\frac{\sqrt{11}}{2}}{\sqrt{\frac{22}{3} + \frac{11}{4}}} = \sqrt{2} \Rightarrow d(AC, BI) = \sqrt{2}.$$

Câu 47: **(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, SA tạo với đáy một góc $30°$. Tính theo a khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $d = \frac{3\sqrt{14}a}{5}$. **B.** $d = \frac{2\sqrt{10}a}{5}$. **C.** $d = \frac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $d = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa SA và đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SAO} = 30°$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Trong (SON), kẻ $OH \perp SN$ thì $OH \perp (SAB)$.

Ta có $CD \,//\, (SAB)$ nên $d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(M, (SAB)) = 2d(O, (SAB)) = 2OH$.

$AO=\frac{1}{2}.AC=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}a=\sqrt{2}a$ suy ra $SO=AO.\tan 30^\circ=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$ON=\frac{1}{2}.AB=\frac{1}{2}.2a=a$.

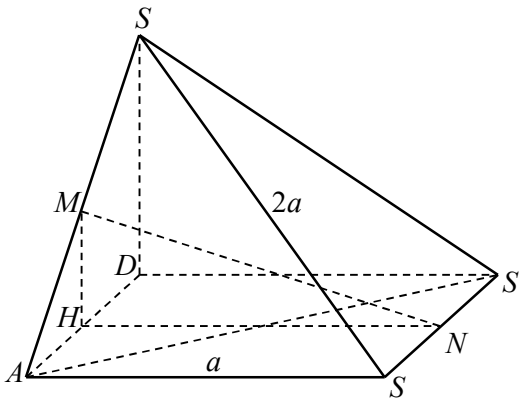
Tam giác SON vuông tại O có $OH=\sqrt{\frac{ON^2.OS^2}{ON^2+OS^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}a$. Vậy $d\left(CD,SA\right)=\frac{2\sqrt{10}}{5}a$.

Câu 48: **(THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018)**Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$, $SA\perp AB$, $SC\perp BC$, $SB=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Gọi α là góc giữa MN với $\left(ABC\right)$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S lên $\left(ABC\right)$, ta có:

$\begin{cases}BC\perp SC\\BC\perp SD\end{cases}\Rightarrow BC\perp CD$ và $\begin{cases}AB\perp SA\\AB\perp SD\end{cases}\Rightarrow AB\perp AD$.

Mà ABC là tam giác vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

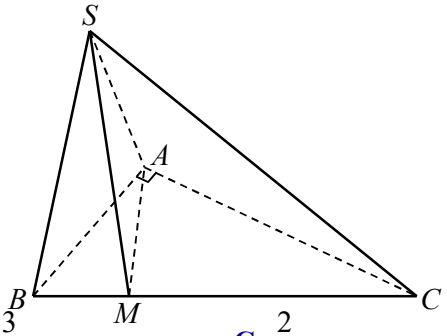
Gọi H là trung điểm của AD, ta có $MH\,//\,SD\Rightarrow MH\perp\left(ABCD\right)$.

Do đó HN là hình chiếu của MN lên $\left(ABC\right)\Rightarrow\alpha=\left(MN,\left(ABC\right)\right)=\left(MN,NH\right)=\widehat{MNH}$.

$SC=\sqrt{SB^2-BC^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$; $SD=\sqrt{SC^2-DC^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

$\tan\alpha=\frac{MH}{NH}=\frac{\frac{1}{2}.SD}{AB}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

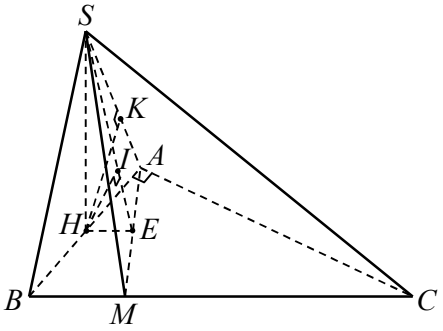
Câu 49: **(THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018)**Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác vuông tại A, $AB=2a$, $AC=2a\sqrt{3}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm trên đoạn BC sao cho $BM=\frac{1}{4}BC$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SAM\right)$ bằng



A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB. Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\Rightarrow SH\perp(ABC).\\SH\perp AB\end{cases}$

Mà $\begin{cases}AC\perp AB\\AC\perp SH\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SAB),\ AC\subset(SAC)\Rightarrow(SAC)$ và (SAB) vuông góc với nhau theo giao tuyến SA.

Hạ $HK\perp SA$ khi đó $HK\perp(SAC)$ (1)

Mà $BM=\frac{1}{4}BC=\frac{1}{4}\sqrt{AB^2+AC^2}=\frac{1}{4}.4a=a$.

Tam giác ABC vuông tại A có $\tan B=\frac{AC}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{ABC}=60°$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM ta có:

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos 60°\Rightarrow AM=a\sqrt{3}$

Mà $AM^2+BM^2=AB^2$ nên tam giác ABM vuông tại M;

Gọi E là trung điểm AM thì $\begin{cases}HE\,//\,BM\\BM\perp AM\end{cases}\Rightarrow HE\perp AM$; $AM\perp SH\Rightarrow AM\perp(SHE)$

Lại có $AM\subset(SAM)\Rightarrow(SAM)\perp(SHE)$ theo giao tuyến SE.

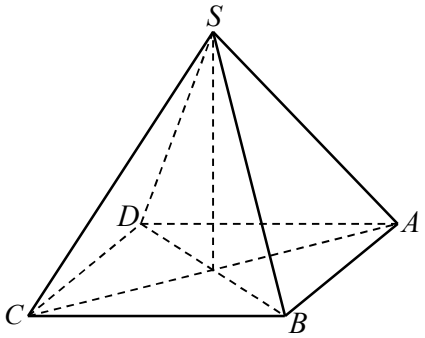
Trong mặt phẳng (SHE), kẻ $HI\perp SE$ thì $HI\perp(SAM)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}HK\perp(SAC)\\HI\perp(SAM)\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SAC),(SAM)}\right)=\left(\widehat{HK,HI}\right)=\widehat{KHI}$

Dễ thấy $AM \perp BC$ nên $HE = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tính được: $KH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HI = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. Do đó $\cos \widehat{KHI} = \dfrac{HI}{KH} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

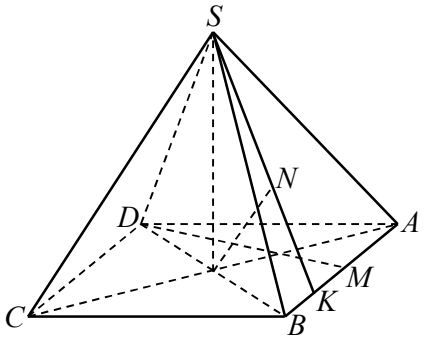
Câu 50: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60°$, cạnh đáy bằng a, thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Biết hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của hình thoi (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB.AD\sin\hat{A} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Độ dài đường cao $SH = \dfrac{3V}{S_{ABCD}} = \dfrac{3.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Gọi M là trung điểm AB, K là trung điểm của BM

Ta có $DM \perp AB \Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK \,//\, DM$ và $HK = \dfrac{DM}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $AB \perp (SHK) \Rightarrow (SAB) \perp (SHK)$, $(SAB) \cap (SHK) = SK$

Vẽ $HN \perp SK$ tại $N \Rightarrow HN \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HN$.

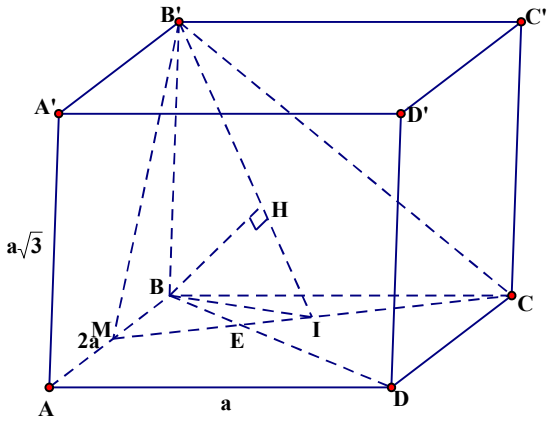
$HN = \dfrac{HK.HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, $d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB)) = 2HN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 51: **(THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a$, $AD=a$, $AA'=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(B'MC)$

A. $h=\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $h=\dfrac{a}{\sqrt{21}}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $h=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $MC \Rightarrow BI \perp MC$.

Kẻ $BH \perp B'I \Rightarrow BH \perp (B'MC) \Rightarrow d(B,(B'MC))=BH$

Ta có tam giác BMC vuông cân tại B nên $BI=\dfrac{MC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$BH=\frac{BB'.BI}{\sqrt{BB'^2+BI^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d(B,(MB'C))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Mặt khác gọi E là giao điểm của BD và $MC \Rightarrow \dfrac{d(D,(MB'C))}{d(B,(MB'C))}=\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{DC}{MB}=2$.

$$\Rightarrow d(D,(MB'C))=2d(B,(MB'C))=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

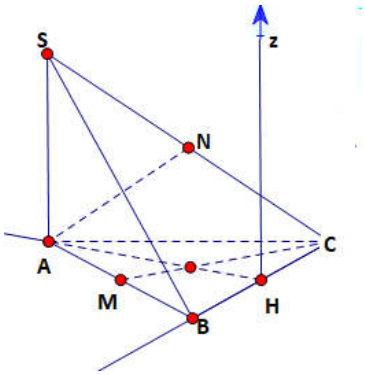
✍ **Chú ý:** Có thể giải nhanh bằng phương pháp tọa độ bằng cách chọn $A\equiv O(0;0;0)$, $AB\equiv Ox$, $AD\equiv Oy$, $AD\equiv Oy$.

Câu 52: **(SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, SC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN bằng

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{37}}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{37}}{74}$. **D.** $\dfrac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn trung điểm H của BC là gốc tọa độ tia HB là trục hoành, HA là trục tung.

Ta có $A\left(0;a\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $M\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};3a\right)$, $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{3a}{2}\right)$

$\overrightarrow{CM}=\left(\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$; $\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{3a}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

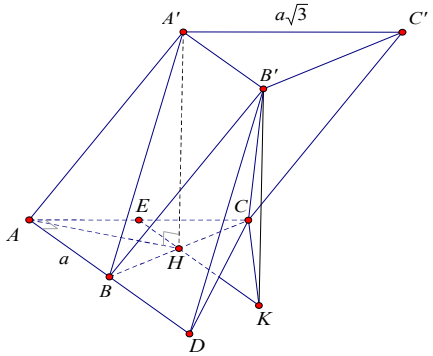
$$d\left(CM,AN\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AN}\right]\right|}=\frac{3a}{\sqrt{37}}.$$

Câu 53: **(SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của BC, $A'H=a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi=\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của AC; D và K là các điểm thỏa $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{A'B'}$.

Ta có $B'K\perp\left(ABC\right)$ và $B'D//A'B\Rightarrow\left(A'B,B'C\right)=\left(B'D,B'C\right)=\widehat{DB'C}$.

Ta tính được $BC=2a\Rightarrow BH=a$; $B'D=A'B=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}=2a.$

$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=\sqrt{3a^2+4a^2}=a\sqrt{7}$; $CK=\sqrt{CE^2+EK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}=a\sqrt{3}.$

$B'C = \sqrt{B'K^2 + CK^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}.$

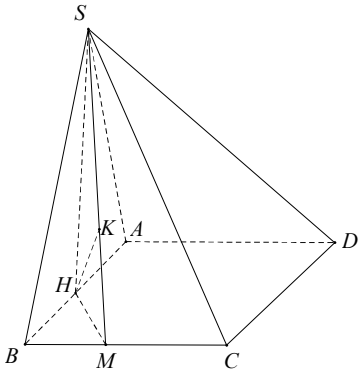
$\cos\widehat{CB'D} = \dfrac{B'D^2 + B'C^2 - CD^2}{2.B'D.B'C} = \dfrac{4a^2 + 6a^2 - 7a^2}{2.2a.a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}.$

Câu 54: **(ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của AB, dựng $SH \perp (ABCD)$ với $SH = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{8a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{66}}{23}$. **D.** $\dfrac{10a\sqrt{5}}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $HM \perp BC (M \in BC)$; $SH \perp BC \Rightarrow (SHM) \perp (SBC)$; $(SHM) \cap (SBC) = SM$.

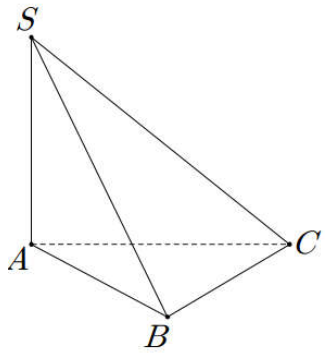
Trong mặt phẳng (SHM), dựng $HK \perp SM$ $(K \in SM) \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H,(SBC))$.

Ta có: $d(A,(SBC)) = 2d(H,(SBC))$.

$HM = BH \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{19}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2HK = \dfrac{a\sqrt{57}a}{19}$.

Câu 55: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $60°$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



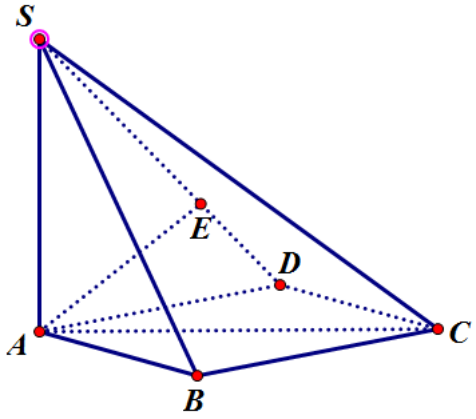
A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là góc $\widehat{SBA} = 60°$. Do đó $SA = a.\tan 60° = a\sqrt{3}$.



Dựng D sao cho $ABCD$ là hình vuông. Dựng $AE \perp SD$ tại E.

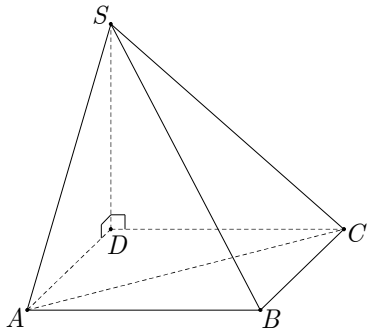
Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AE$.

Mà $AE \perp SD$ suy ra $AE \perp (SCD)$.

Ta có $d(AB;SC) = d(AB;(SCD)) = d(A;(SCD)) = AE$.

Mà $AE = \dfrac{AS.AD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(AB;SC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

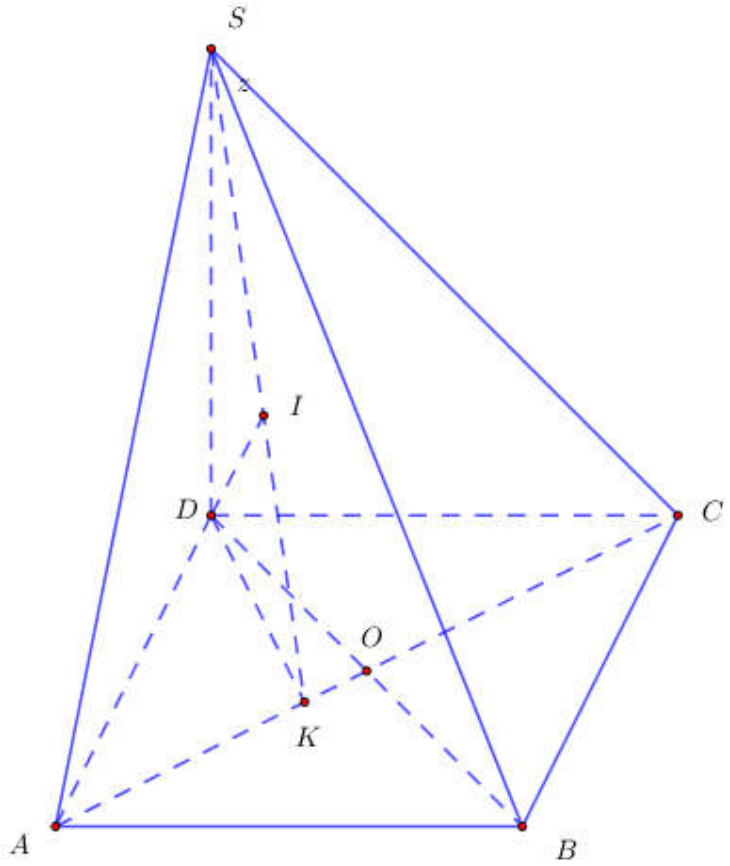
Câu 56: **(THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ bên). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)



A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\sin\widehat{\left(SB;\left(SAC\right)\right)}=\dfrac{d\left(B;\left(SAC\right)\right)}{SB}=\dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}$.

Xét tam giác ABC ta có $AC=\sqrt{BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\widehat{BAC}}=a\sqrt{7}$.

$BO=\sqrt{\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4a^2+a^2}{2}-\dfrac{7a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BD=a\sqrt{3}$ và $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{3a^2+3a^2}=a\sqrt{6}$.

Xét tam giác ADC ta có $\dfrac{AD}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{D}}\Rightarrow\sin\widehat{C}=\dfrac{AD.\sin\widehat{D}}{AC}=\dfrac{a.\sin120°}{a\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK. Ta có $\begin{cases}AC\perp DK\\AC\perp SD\end{cases}\Rightarrow AC\perp DI$. Do đó $\begin{cases}DI\perp SK\\DI\perp AC\end{cases}\Rightarrow d\left(D;\left(SAC\right)\right)=DI$.

Mặt khác $\sin\widehat{C}=\dfrac{DK}{DC}\Rightarrow DK=DC.\sin\widehat{C}=2a.\dfrac{\sqrt{21}}{14}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác SDK ta có $DI=\dfrac{SD.DK}{\sqrt{SD^2+DK^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2+\dfrac{21}{49}a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Vậy $\sin\widehat{\left(SB;\left(SAC\right)\right)}=\dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}=\dfrac{DI}{SB}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}$.

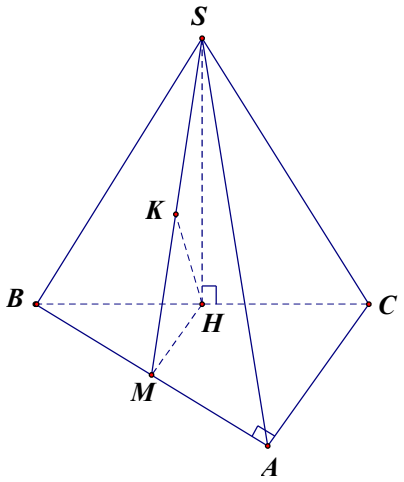
Trong mặt phẳng $\left(SDK\right)$ kẻ $DI\perp SK$ suy ra $d\left(D;\left(SAC\right)\right)=DI$.

Câu 57: **(SGD Nam Định – năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

A. $h=\dfrac{a\sqrt{39}}{26}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $h=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{39}}{52}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của BC, AB. Gọi K là hình chiếu của H trên SM.

Khi đó : $d\left(C,(SAB)\right)=2d\left(H,(SAB)\right)$.

Do tam giác SBC đều nên $SH\perp BC$.

Lại do $(SBC)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)$.

Ta có :

$\square$ $\left.\begin{matrix}AB\perp SH\\ AB\perp HM\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp(SHM)$

$\square$ $\left.\begin{matrix}HK\perp SM\\ HK\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow HK\perp(SAB)$.

Suy ra $d\left(H;(SAB)\right)=HK$.

Mặt khác, ta có :

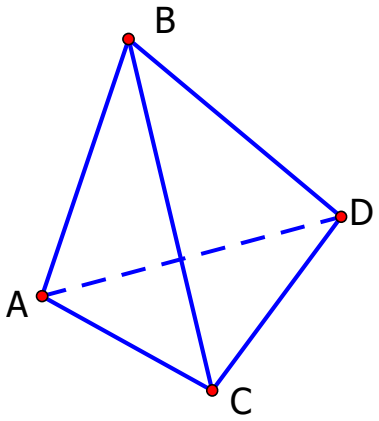
$\square$ $HM=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}.BC.\sin 30^\circ=\dfrac{a}{4}$.

$\square$ $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\square$ $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HM^2}=\dfrac{52}{3a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{39}}{26}$.

Suy ra $d\left(C;(SAB)\right)=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

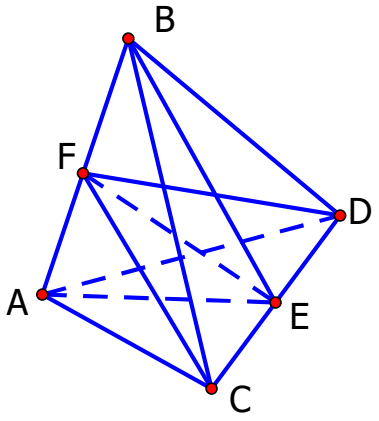
Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$, $(ACD)\perp(BCD)$. Tìm giá trị của x để $(ABC)\perp(ABD)$?



A. $x=a$. **B.** $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $x=a\sqrt{2}$. **D.** $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải :

Chọn D



Gọi E ; F lần lượt là trung điểm CD và AB $\Leftrightarrow\begin{cases}AE\perp CD\\BE\perp CD\end{cases}$ (Tính chất tứ diện đều)

Đồng thời $(BCD)\cap(ACD)=CD$ $\Leftrightarrow\left(\widehat{(BCD),(ACD)}\right)=\widehat{BEA}=90°$

Ta có $\begin{cases}CF\perp AB\\DF\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(CFD)\Leftrightarrow\left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right)=\left(\widehat{CF,FD}\right)$

Vậy để $(ABC)\perp(ABD)$ thì $\left(\widehat{CF,FD}\right)=90°=\widehat{CFD}\Rightarrow$ trung tuyến FE của tam giác CFD bằng nửa cạnh huyền $\Leftrightarrow FE=\dfrac{1}{2}CD$

Ta có ΔEAB vuông cân tại E $\Rightarrow EF=\dfrac{AE}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{AC^2-CE^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{2}}$

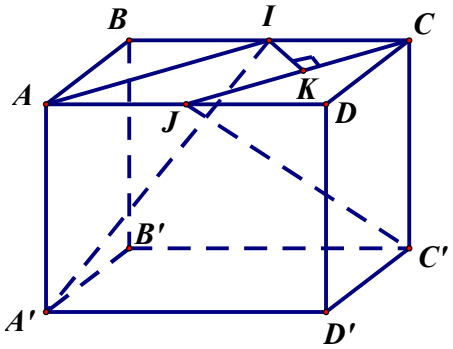
Vậy $x=\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{2}}$ $\Leftrightarrow x^2=\dfrac{a^2-x^2}{2}$ $\Leftrightarrow x^2=\dfrac{a^2}{3}$ $\Leftrightarrow x=a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: **(THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (AIA') và (CJC').

A. $d = 2a\sqrt{\frac{5}{2}}$. **B.** $d = 2a\sqrt{5}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases} AA' \,//\, CC' \\ AI \,//\, CJ \\ AA' \cap AI = A \\ AA', AI \subset (AIA') \end{cases} \Rightarrow (AIA') \,//\, (CJC')$.

$\Rightarrow d\left((AIA'), (CJC')\right) = d\left(I, (CJC')\right)$.

Kẻ $IK \perp CJ\ (1)$.

Lại có $\begin{cases} CC' \perp IK \\ CC' \cap CJ = C \\ CC', CJ \subset (CJC') \end{cases} (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $IK \perp (CJC')$ hay $d\left(I, (CJC')\right) = IK$.

Xét tam giác CJI vuông tại I: $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IJ^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2}$

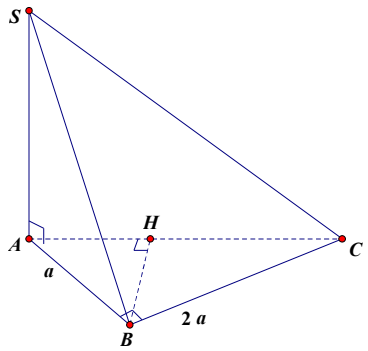
$\Leftrightarrow IK^2 = \frac{a^2}{5} \Leftrightarrow IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 3: **(THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $2AB = BC = 2a$. Gọi d_1 là khoảng cách từ C đến mặt (SAB) và d_2 là khoảng cách từ B đến mặt (SAC). Tính $d = d_1 + d_2$.

A. $d = 2\left(5+\sqrt{2}\right)a$. **B.** $d = 2\left(\sqrt{5}+2\right)a$. **C.** $d = \frac{2\left(5+\sqrt{5}\right)a}{5}$. **D.** $d = \frac{2\left(5+\sqrt{2}\right)a}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow d_1 = d(C,(SAB)) = CB = 2a$.

Gọi H là hình chiếu của B lên (SAC).

Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \\ AC \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d_2 = d(B,(SAC)) = BH$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có BH là đường cao.

Ta có: $BH = \dfrac{AB.BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d_2 = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

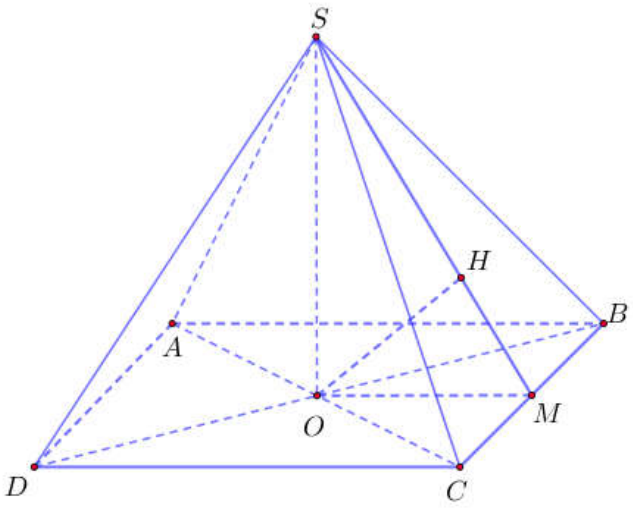
Vậy $d = d_1 + d_2 = 2a + \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\left(5+\sqrt{5}\right)a}{5}$.

Câu 4: **(THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, cạnh SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách từ O đến (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{18}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{45}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{52}}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $OM \perp BC$ tại M thì $(SMO) \perp BC \Rightarrow (SMO) \perp (SBC)$, vẽ $OH \perp SM$ tại H

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$

Ta có $AC = a\sqrt{3}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OB = \dfrac{a}{2}$, $OM.BC = OB.OC \Rightarrow OM = \dfrac{OB.OC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

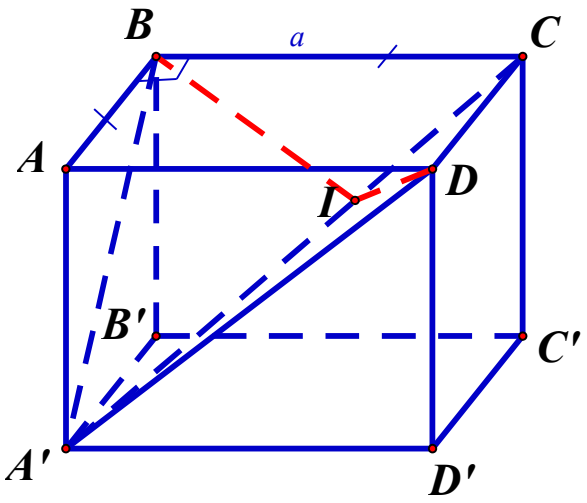
$$OH = \frac{SO.MO}{\sqrt{SO^2 + MO^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 5: **(THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo của góc giữa $(BA'C)$ và $(DA'C)$:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $(BA'C) \cap (DA'C) = A'C$.

Kẻ $BI \perp A'C$. Do $\Delta BA'C = \Delta DA'C$ nên $DI \perp A'C$.

Do đó: $\left[\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right] = \left(\widehat{BI,DI}\right)$.

Tam giác BID có $BD = a\sqrt{2}$, $BI = DI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\cos\left(\widehat{BI,DI}\right) = \dfrac{BI^2 + DI^2 - BD^2}{2.BI.DI} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{BI,DI}\right) = 120°$.

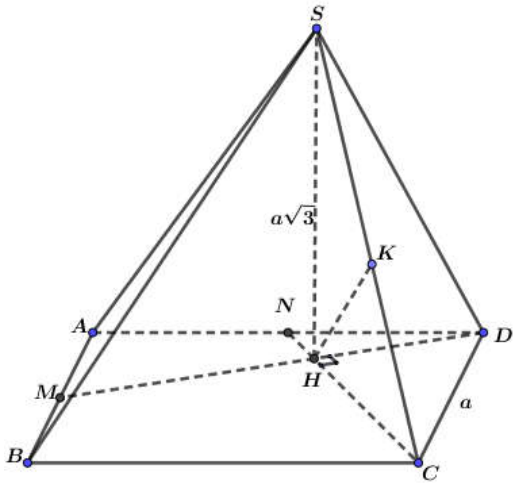
Vậy $\left[\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right] = 60°$.

Câu 6: **(THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{19}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{19}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của H trên SC.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $DM \perp CN$.

Có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DM$.

Suy ra $DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp HK$.

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

Có DH là đường cao của tam giác vuông CDN nên $CH.CN = DC^2 \Rightarrow CH = \dfrac{DC^2}{CN} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lại có HK là đường cao trong tam giác vuông SHC nên

$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Vậy $d(SC, DM) = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 7: **(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho $f(x) = a\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + b\sin x + 6$ với a, $b \in \mathbb{R}$.

Biết $f(\log(\log e)) = 2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $x_0 = \log(\log e)$

Có: $f(x_0) = a\ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right) + b\sin x_0 + 6 = 2$

Ta có $f(\log(\ln 10)) = f\left(\log\left(\dfrac{1}{\log e}\right)\right) = f(-\log(\log e)) = f(-x_0)$

$f(-x_0) = a\ln\left(\sqrt{x_0^2+1} - x_0\right) + b\sin(-x_0) + 6 = -a\ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right) - b\sin x_0 + 6$

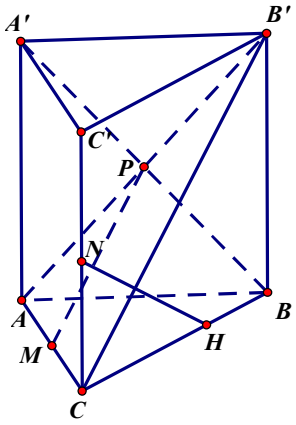
$= -\left[a\ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1} \right) + b\sin x_0 + 6 \right] + 12 = -f\left(x_0 \right) + 12 = 10$.

Câu 8: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, CC', $A'B$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa MP và NH.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Vì $A'B'BA$ là hình bình hành nên P cũng là trung điểm của AB'. Do đó $MP//B'C$. Mặt phẳng $BCC'B'$ chứa NH và song song với MP nên

$$\mathrm{d}\left(MP, NH \right) = \mathrm{d}\left(MP, \left(BCC'B' \right) \right) = \mathrm{d}\left(M, \left(BCC'B' \right) \right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(A, \left(BCC'B' \right) \right) = \frac{1}{2}AH.$$

Tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$ suy ra $AC = a\sqrt{3}$

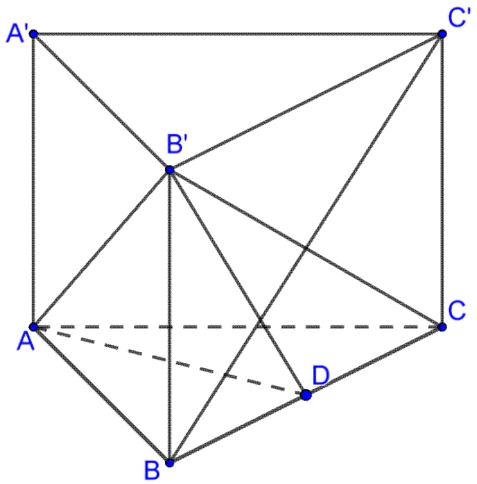
$$\Rightarrow AH = \frac{AC.AB}{BC} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{Vậy } \mathrm{d}\left(MP, NH \right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 9: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính độ dài cạnh bên theo a ta được?

A. $3a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là trung điểm $BC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD \perp (BCC'B') \Rightarrow AD \perp BC'$.

Mà $BC' \perp AB'$ nên $BC' \perp (AB'D) \Rightarrow BC' \perp B'D$ tại I.

Lại có I là trọng tâm $\Delta BCB' \Rightarrow \dfrac{B'I}{BD} = \dfrac{2}{3}$.

Xét $\Delta BB'D$ có BI là đường cao: $BB'^2 = B'I.BD \Rightarrow \dfrac{BB'^2}{BD^2} = \dfrac{B'I}{BD} = \dfrac{2}{3}$

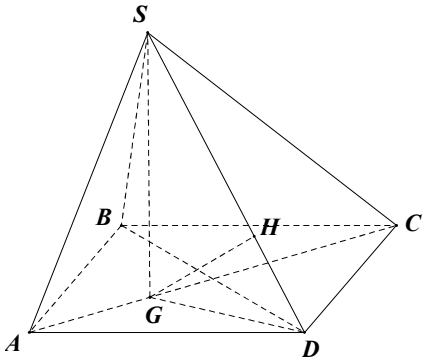
$\Rightarrow BB'^2 = \dfrac{2}{3}.(BB'^2 + BD^2) \Rightarrow \dfrac{1}{3}BB'^2 = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{6} \Rightarrow BB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10: **(THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60°$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



Dễ thấy hình chóp $S.ABD$ đều. Gọi G là trọng tâm của ΔABD. Khi đó $SG \perp (ABCD)$.

Do ΔABD đều nên $GD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SGD)$. Kẻ $GH \perp SD$, $(H \in SD)$.

Khi đó: $GH \perp (SCD) \Rightarrow d(G;(SCD)) = GH$.

Ta có: $GD = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = \sqrt{SD^2 - GD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét ΔSGD vuông tại G: $GH.SD = SG.GD \Rightarrow GH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Mà $d(A;(SCD)) = \dfrac{AC}{GC}.d(G;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A lên (SCD). Khi đó góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) là $\widehat{ASK}$.

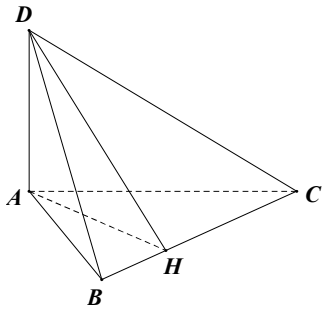
Xét ΔASK vuông tại K thì: $\sin SAK = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SAK} = 45°$.

Câu 11: **(THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90°$, $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Do $DA \perp AB$, $DA \perp AC \Rightarrow DA \perp BC$.

Mà $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (AHD)$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là $\widehat{DHA}$.

Xét ΔABC vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

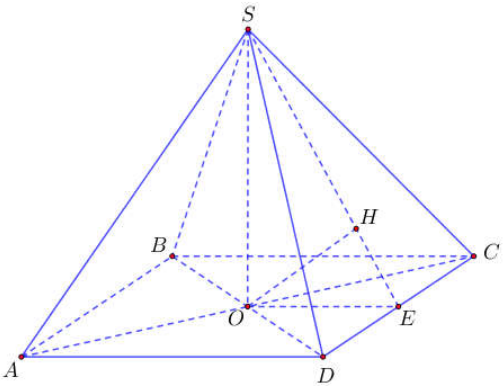
Xét ΔSAH vuông tại A: $\cos DHA = \dfrac{AH}{DH} = \dfrac{AH}{\sqrt{DA^2 + AH^2}} = \dfrac{2}{7}$.

Câu 12: **(THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $AB = a$, đường cao SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB là

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



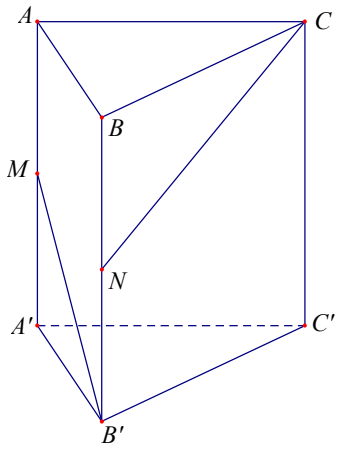
Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow OE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOE) \Rightarrow (SCD) \perp (SOE)$.

Vẽ $OH \perp SE$ tại $H \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OH$.

Ta có $OH = \dfrac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(SC, AB) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD)) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 13: **(THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách của hai đường thẳng $B'M$ và CN.



A. $d\left(B'M,CN\right)=\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{12a^2+4b^2}}$.

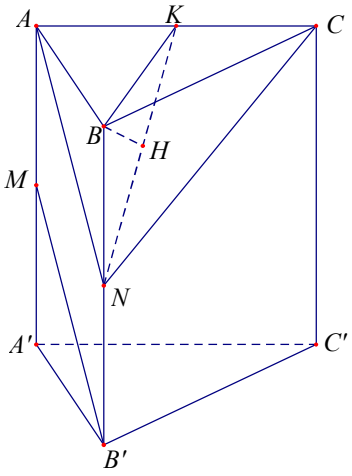
B. $d\left(B'M,CN\right)=\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{4a^2+12b^2}}$.

C. $d\left(B'M,CN\right)=\dfrac{a}{2}$.

D. $d\left(B'M,CN\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $\left(NAC\right)//B'M$ nên $d\left(B'M,CN\right)=d\left(B'M,\left(NAC\right)\right)=d\left(B',\left(NAC\right)\right)=d\left(B,\left(NAC\right)\right)$

Gọi K là trung điểm của AC, kẻ $BH\perp NK$ tại H.

Khi đó $AC\perp BN$ nên $AC\perp\left(BNK\right)$, suy ra $AC\perp BH$, từ đó $d\left(B,\left(NAC\right)\right)=BH$.

Xét tam giác NBK vuông tại B, $BK=\dfrac{BN.BK}{\sqrt{BN^2+BK^2}}=\dfrac{\dfrac{b}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\dfrac{ab\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2+3a^2}}$.

Câu 14: **(SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, $SA=2a$ và vuông góc với $\left(ABCD\right)$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CM.

A. $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

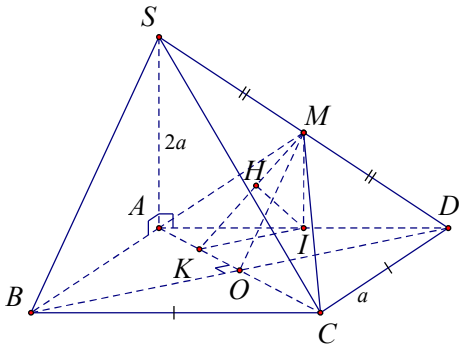
B. $d=\dfrac{a}{6}$.

C. $d=\dfrac{2a}{3}$.

D. $d=\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



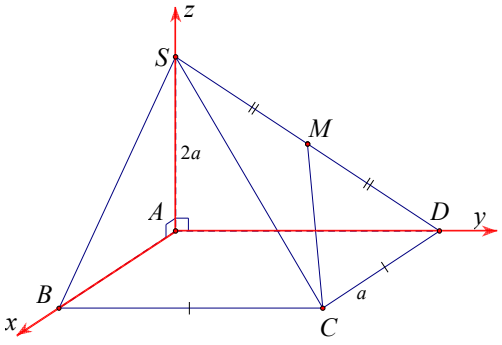
Gọi $O = AC \cap BD$; I và K lần lượt là trung điểm của AD và OA; H là hình chiếu vuông góc của I lên MK, ta có $SB \parallel MO \subset (MAC) \Rightarrow SB \parallel (MAC) \supset MC$.

Do đó $d(SB;CM) = d(SB;(MAC)) = d(B;(MAC)) = d(D;(MAC)) = 2d(I;(MAC))$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AC \perp MI \\ AC \perp KI \end{cases} \Rightarrow AC \perp (MKI)$. Suy ra $IH \perp (MAC)$ hay $d(I;(MAC)) = IH$.

Vậy $d(SB;CM) = 2IH = 2.\dfrac{MI.IK}{\sqrt{MI^2 + IK^2}} = 2.\dfrac{MI.IK}{\sqrt{MI^2 + IK^2}} = \dfrac{2a}{3}$.

Lưu ý: Ta có thể sử dụng phương pháp tọa độ hóa, cụ thể như sau:



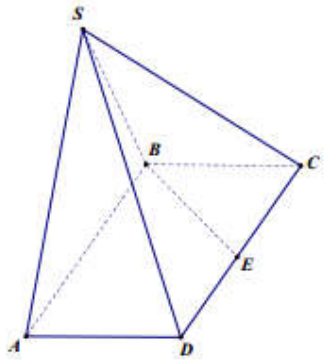
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $S(0;0;2a)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$ và $M\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;0;-2a)$, $\overrightarrow{CM} = \left(-a;-\dfrac{a}{2};a\right)$ và $\overrightarrow{SC} = (a;a;-2a)$.

Vậy $d(SB;CM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{CM}\right]\right|} = \dfrac{2a}{3}$.

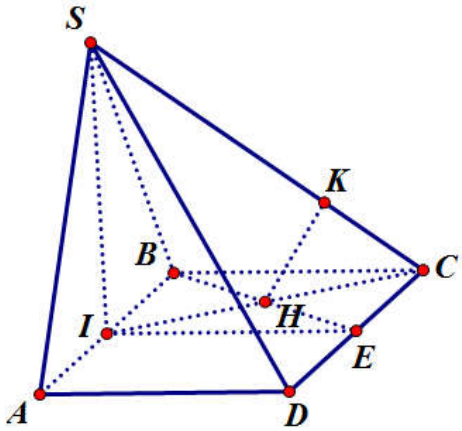
Câu 15: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của CD. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và SC.

A. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** a.



Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB ta có: $SI \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$.

Gọi H là giao điểm của IC và BE, kẻ $HK \perp SC$ tại K. Khi đó :

$IBCE$ là hình vuông nên $BE \perp IC$ mà $BE \perp SI$ do đó $BE \perp (SIC)$.

Suy ra $BE \perp HK$ mà $HK \perp SC$ nên $d(BE;SC) = HK$.

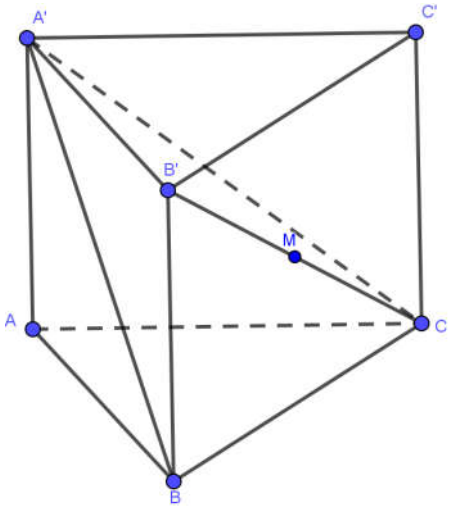
Do tam giác CKH và CIS đồng dạng nên

$$\frac{HK}{IS} = \frac{CH}{CS} \Rightarrow HK = \frac{CH.IS}{CS} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Cách khác: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv I$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt là IE, IB, IS.

Sau đó tính khoảng cách bằng công thức: $d(BE;SC) = \frac{\left|\overrightarrow{BS}.\left[\overrightarrow{BE};\overrightarrow{SC}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BE};\overrightarrow{SC}\right]\right|}$.

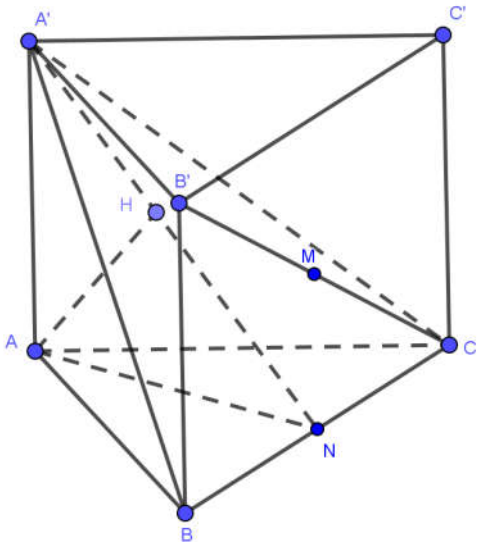
Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Biết góc giữa 2 mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng $60°$, M là trung điểm của $B'C$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$.



A. $\frac{3a}{8}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của BC

Có: $\begin{cases} (A'BC)\cap(ABC)=BC \\ AN\perp BC \\ A'N\perp BC\left(BC\perp(A'AN)\right) \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left[(A'BC),(ABC)\right]}=\widehat{A'NA}=60°$

Ta có: $d\left[M,(A'BC)\right]=\frac{1}{2}d\left[B',(A'BC)\right]=\frac{1}{2}d\left[A,(A'BC)\right]$

Dựng $AH\perp A'N$ và $AH\perp BC$

Suy ra: $AH\perp(A'BC)$. Do đó $d\left(M,(A'BC)\right)=\frac{1}{2}AH$.

$AH=\sin 60°.AN=\frac{\sqrt{3}}{2}.a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{4}$.

Vậy $d\left(M,(A'BC)\right)=\frac{1}{2}AH=\frac{3a}{8}$.

Câu 17: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

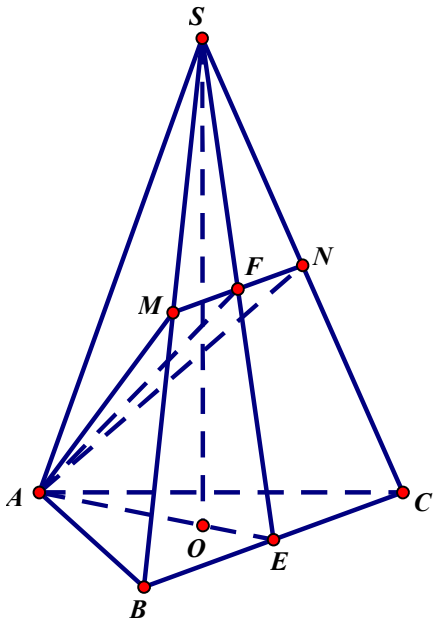
A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ABC là tam giác đều và hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC.

Gọi E là trung điểm của BC, $F = MN \cap SE$.

MN là đường trung bình tam giác $SBC \Rightarrow SNEM$ là hình bình hành

$\Rightarrow F$ là trung điểm MN và SE.

Vì $AM = AN$ (hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác bằng nhau SAB và SAC) nên tam giác AMN cân tại A, mà AF là đường trung tuyến

$\Rightarrow AF \perp MN$

$\Rightarrow AF \perp (SBC)$ (1) (vì $(AMN) \perp (SBC)$

$\Rightarrow AF \perp SE$

Tam giác SAE có AF vừa là trung tuyến vừa là đường cao

$\Rightarrow SAE$ là tam giác cân tại A

$\Rightarrow AS = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O, $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$

Tam giác SOA vuông tại O, $SE=\sqrt{SO^2+EO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{6}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $AF.SE=SO.AE\ \ (=2S_{SAE})$

$\Rightarrow AF=\frac{SO.AE}{SE}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$

$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AF.MN=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB=AC=AD=BC=BD=a$ và $CD=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

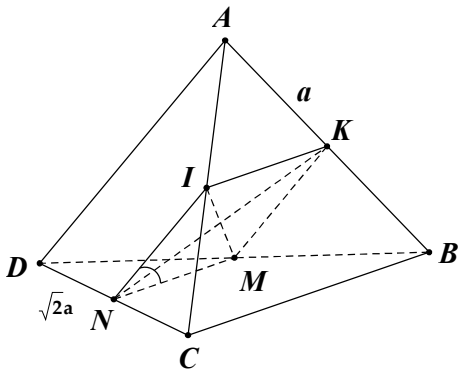
A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB=AC=AD=BC=BD=a$ và $CD=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N, I, K lần lượt là trung điểm các cạnh BD, DC, AC, AB thì $MNIK$ là hình thoi. ΔKCD cân tại K nên $KN\perp CD\Rightarrow KN=\sqrt{KD^2-ND^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow \Delta NIK$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{NIK}=60°\Rightarrow\left(\widehat{AD,BC}\right)=\left(\widehat{IN,IK}\right)=\widehat{NIK}=60°$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

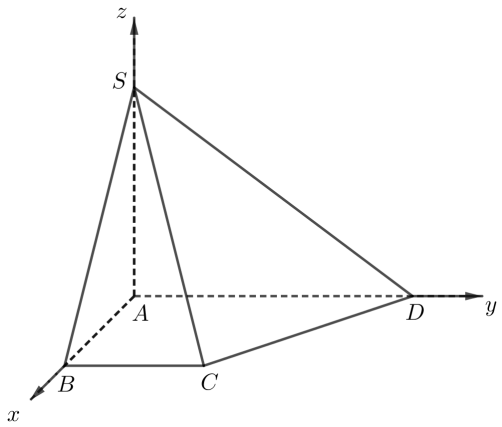
A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Cho $a=1$. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có:

$A\equiv O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;2;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

VTPT của mặt phẳng (SBC) là: $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(\sqrt{3};0;1\right)$

VTPT của mặt phẳng (SCD) là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{CD}\right]=\left(\sqrt{3};\sqrt{3};2\right)$

Ta có: $\cos\left((SBC);(SCD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{5}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 23: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a$, $AD=3a$, $AA'=4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{29}{61}$. **B.** $\frac{27}{34}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{137}{169}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=AB=\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

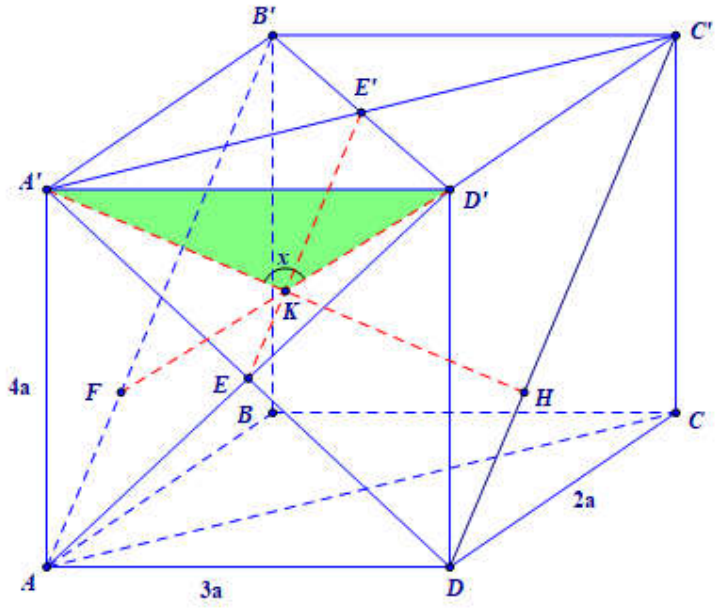
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a$, $AD=3a$, $AA'=4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{29}{61}$. **B.** $\frac{27}{34}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{137}{169}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A'$, $A'B'C'D'$.

Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.

Dựng $A'H$, $D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C'$, $AB'D'$.

Dễ thấy: $A'H, D'F, EE'$ đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE' \end{cases}$.

Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.

Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.

Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.

Suy ra: $S_{\Delta DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \dfrac{2S_{\Delta DA'C'}}{DC'} = \dfrac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $D'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.

Trong tam giác $A'D'K$ có: $\cos x = \dfrac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\dfrac{29}{61}$.

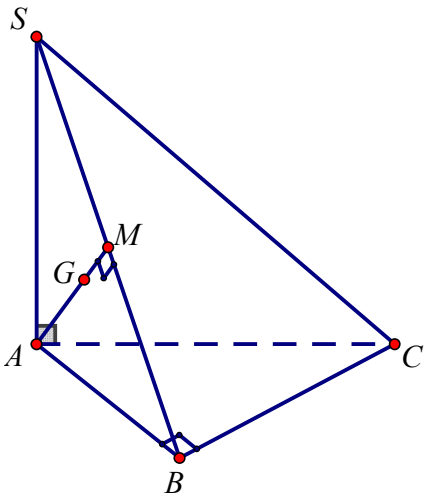
$\Rightarrow \cos\alpha = |\cos x| = \dfrac{29}{61}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = AB = \sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của $SB \Rightarrow AM \perp SB$ (vì tam giác SAB cân).

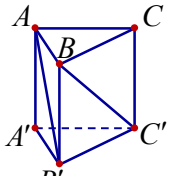
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Và $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow GM \perp (SBC)$ tại M.

Do đó $\mathrm{d}(G,(SBC)) = GM$.

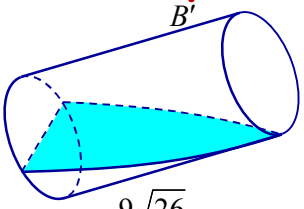
$SB = AB\sqrt{2} = \sqrt{6}$, $AM = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow GM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}\,a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



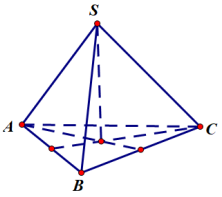
A. $60°$. **B.** $45°$.
C. $90°$. **D.** $30°$.

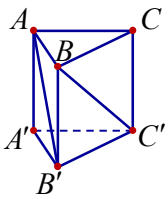
Câu 28: Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy 6 cm, chiều cao 15 cm chứa đầy nước. Nghiêng cốc cho nước chảy từ từ ra ngoài đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy cốc. Khi đó diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng



A. $\dfrac{9\sqrt{26}}{10}\pi$ cm^2. **B.** $9\sqrt{26}\pi$ cm^2. **C.** $\dfrac{9\sqrt{26}}{2}\pi$ cm^2. **D.** $\dfrac{9\sqrt{26}}{5}\pi$ cm^2.

Câu 29: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{}$ lường thẳng AB' và BC' bằng

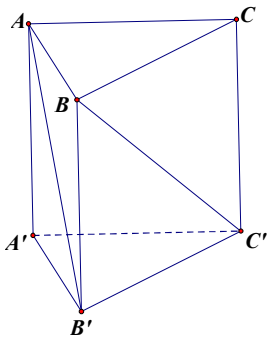




A. $60°$. **B.** $45°$.
C. $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A

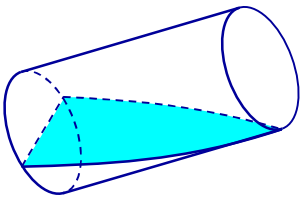


Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}=-\dfrac{a^2}{2}+0+0+2a^2=\dfrac{3a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{AB',BC'}\right)=60°$.

Câu 30: Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy 6 cm, chiều cao 15 cm chứa đầy nước. Nghiêng cốc cho nước chảy từ từ ra ngoài đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy cốc. Khi đó diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng



A. $\dfrac{9\sqrt{26}}{10}\pi$ cm^2.

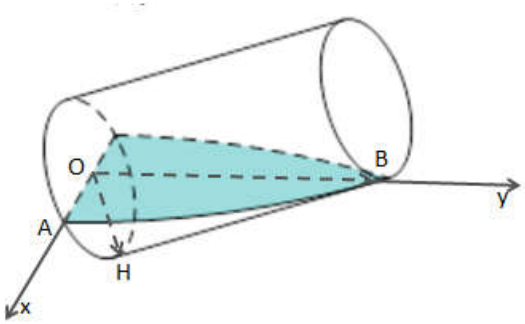
B. $9\sqrt{26}\pi$ cm^2.

C. $\dfrac{9\sqrt{26}}{2}\pi$ cm^2.

D. $\dfrac{9\sqrt{26}}{5}\pi$ cm^2.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $OH=3$, $OB=\sqrt{OH^2+HB^2}=3\sqrt{26}$, $\cos\widehat{HOB}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Áp dụng công thức hình chiếu về diện tích của hình phẳng ta có: $S'=S.\cos\widehat{HOB}$

$\Rightarrow S=\dfrac{S'}{\cos\widehat{HOB}}=\dfrac{\frac{1}{2}\pi.3^2}{\frac{1}{\sqrt{26}}}=\dfrac{9\sqrt{26}\pi}{2}$ cm^2.

Cách khác là dùng diện tích hình elip.

$$S=\frac{1}{2}S_{(E)}=\frac{1}{2}\pi ab=\frac{1}{2}\pi.3.\sqrt{15^2+3^2}=\frac{1}{2}\pi.3.3\sqrt{26}=\frac{9\sqrt{26}\pi}{2}\text{ cm}^2.$$

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $EF=a\sqrt{3}$, tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

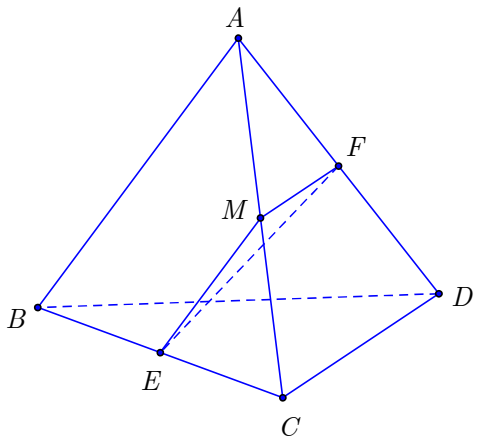
A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $EF=a\sqrt{3}$, tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AC.

Suy ra: $ME\,//\,AB$, $ME=\frac{1}{2}AB=a$ và $MF\,//\,CD$, $MF=\frac{1}{2}CD=a$.

Suy ra: $\varphi=\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{ME,MF}\right)$

Ta có: $\cos\widehat{EMF}=\dfrac{ME^2+MF^2-EF^2}{2ME.MF}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{EMF}=120°$

Vậy $\varphi=\left(\widehat{AB,CD}\right)=180°-\widehat{EMF}=60°$.

Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng thuộc $[0°;90°]$; còn góc giữa hai vector thuộc $[0°;180°]$.

Câu 33: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=6\,\text{cm}$, $BC=BB'=2\,\text{cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC. Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC', hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F. Khoảng cách DF bằng

A. $3\,\text{cm}$. **B.** $2\,\text{cm}$. **C.** $6\,\text{cm}$. **D.** $1\,\text{cm}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	A	A	C	D	D	A	B	A	A	A	D	C	D	D	C	D	C	A	D	B	A	C	A

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	C	C	B	D	C	D	A	D	C	B	C	C	D	C	D	A	A	B	C	B	D	B	B

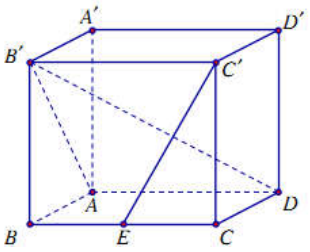
HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 34: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=6\,\text{cm}$, $BC=BB'=2\,\text{cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC. Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC', hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F. Khoảng cách DF bằng

A. $3\,\text{cm}$. **B.** $2\,\text{cm}$. **C.** $6\,\text{cm}$. **D.** $1\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B



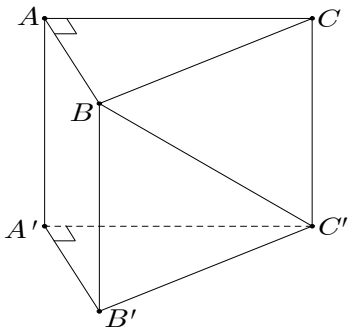
Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN\perp PQ$ hay $EC'\perp B'F$.

Ta có: $\overrightarrow{B'F}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA'}+k\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA'}+k\overrightarrow{B'C'}$.

Và $\overrightarrow{EC'}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CC'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}-\overrightarrow{B'B}$.

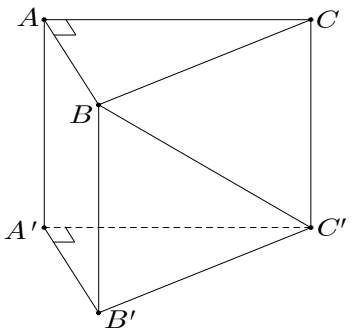
Khi đó $\overrightarrow{EC'}.\overrightarrow{B'F}=-B'B^2+\dfrac{k}{2}B'C'^2=-4+\dfrac{k}{2}.4=0\Rightarrow k=2$.

Câu 35: Vậy $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AD}$ suy ra D là trung điểm của AF. Do đó $DF=BC=2\text{cm}$.Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' là



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **B.** a. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' là



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **B.** a. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $AB \perp AC$, $AB \perp BB' \Rightarrow d\left(AC, BB'\right) = AB = a$.

Câu 37: Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = BC = CA = 4$, $AD = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng?

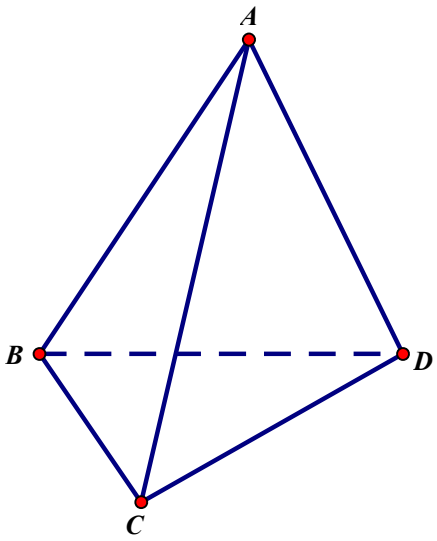
A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = BC = CA = 4$, $AD = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng?

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CD} = CB.CD.\cos\widehat{BCD} - CA.CD.\cos\widehat{ACD}$

$= CB.CD.\frac{CB^2 + CD^2 - BD^2}{2.CB.CD} - CA.CD.\frac{CA^2 + CD^2 - AD^2}{2.CA.CD} = \frac{CB^2 + AD^2 - BD^2 - CA^2}{2} = -12$

Suy ra $\cos\left(AB, CD\right) = \left|\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}\right| = \frac{12}{4.6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{AB, CD}\right) = 60°$.

Câu 39: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

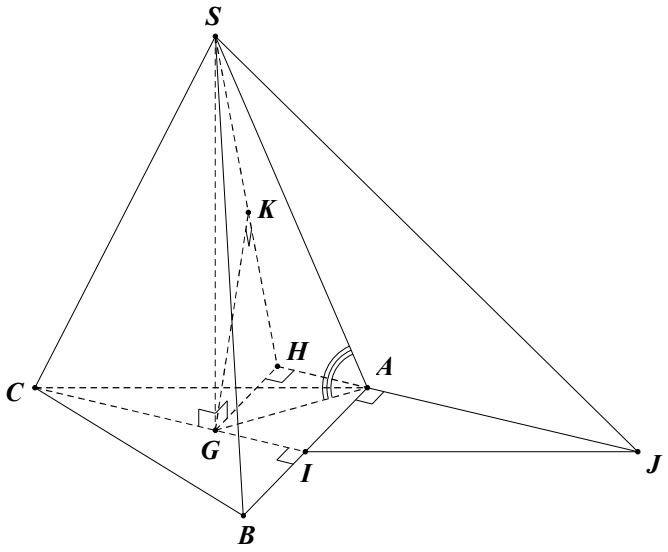
A. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{a}{5}$.

Câu 40: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ GA = GB = GC \end{cases}$ nên SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó $SG \perp (ABC)$ (1).

Ta có: $(SA;(ABC)) = \widehat{SAG} = 60°$.

Gọi I là trung điểm AB.

Trong $(ABCD)$: Kẻ AJ sao cho $ACIJ$ là hình bình hành.

Suy ra $CI // AJ$, do đó $CI // (SAJ)$.

Suy ra $d(GC;SA) = d(CI;(SAJ)) = d(G;(SAJ))$ (do $G \in CI$).

Trong $(ABCD)$: Kẻ $GH \perp AJ$ tại H.

Mà $SG \perp AJ$ (do (1)).

Nên $AJ \perp (SGH)$.

Suy ra $(SAJ) \perp (SGH)$.

Mà $\begin{cases} (SAJ) \cap (SGH) = SH \\ \text{Trong } (SGH): \text{ Keû } GK \perp SH \text{ taïi } K \end{cases}$ nên $GK \perp (SAJ)$.

Do đó $d\left(G;\left(SAJ\right)\right)=GK$.

Ta có: $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $SG=AG.\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^\circ=a$.

Mặt khác: $GH=AI=\dfrac{a}{2}$.

Do đó $\dfrac{1}{GK^2}=\dfrac{1}{SG^2}+\dfrac{1}{GH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{a^2}$.

Suy ra $GK=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d\left(GC;SA\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=7a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G, I, J thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, SAD và trung điểm của CD. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $\left(GIJ\right)$ bằng

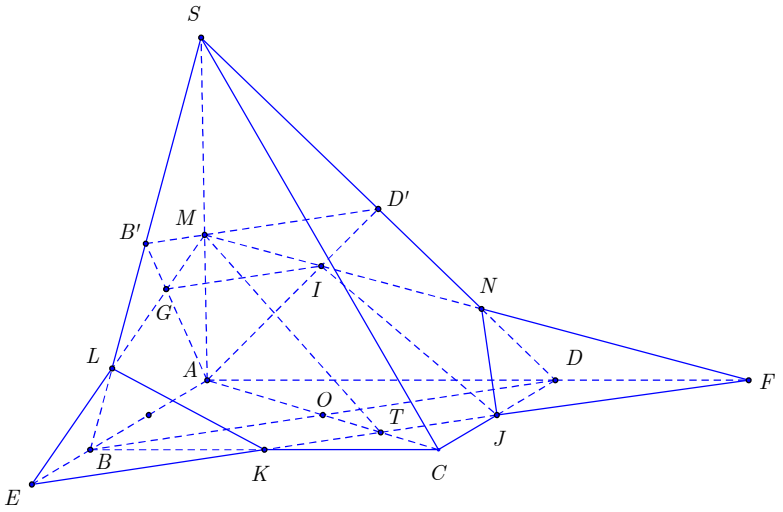
A. $\dfrac{93a^2}{40}$. **B.** $\dfrac{23a^2}{60}$. **C.** $\dfrac{31\sqrt{33}a^2}{45}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{33}a^2}{8}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=7a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G, I, J thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, SAD và trung điểm của CD. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $\left(GIJ\right)$ bằng

A. $\dfrac{93a^2}{40}$. **B.** $\dfrac{23a^2}{60}$. **C.** $\dfrac{31\sqrt{33}a^2}{45}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{33}a^2}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $GI\,//\,B'D'$ nên $GI\,//\,BD$ (với B', D' lần lượt là trung điểm của SB và SD).

Suy ra $\left(GIJ\right)$ cắt $\left(ABCD\right)$ theo giao tuyến là đường thẳng d đi qua J và song song với BD.

Trong $\left(ABCD\right)$ có d cắt BC tại K, cắt AD tại F, cắt AB tại E.

Do J là trung điểm của CD nên K là trung điểm của BC và $\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{1}{3}$.

Trong $\left(SAB\right)$: đường thẳng EG cắt SA tại M, cắt SB tại L.

Định lí mê nê la uyt cho tam giác $B'AB$ và cát tuyến $\overline{G,L,E}$ ta được $\frac{LB'}{LB}=\frac{2}{3}$.

Định lí mê nê la uyt cho tam giác $B'AS$ và cát tuyến $\overline{G,L,M}$ ta được $\frac{MS}{MA}=\frac{4}{3}$.

Tương tự ta có FI đi qua M và cắt SD tại N thỏa mãn $\frac{DN}{DS}=\frac{1}{5}$.

Định lí mê nê la uyt cho tam giác MAF và cát tuyến $\overline{D,N,S}$ ta được $\frac{MN}{NF}=\frac{8}{7}$.

Thiết diện cần tìm là $MNJKL$.

Gọi $S=S_{MEF}$. Ta có $\frac{S_{FNJ}}{S_{FME}}=\frac{FN}{FM}\cdot\frac{FJ}{FE}=\frac{7}{45}\Rightarrow S_{FNJ}=\frac{7}{45}S$.

Tương tự suy ra $S_{ELK}=\frac{7}{45}S$. Do đó $S_{MNJKL}=\frac{31}{45}S$.

Gọi $T=AC\cap KJ\ \Rightarrow AT=\frac{3}{4}AC=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$. Suy ra $MT=\sqrt{AM^2+AT^2}=\frac{9a}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $S_{MEF}=\frac{1}{2}MT.EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{9a}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{2}=\frac{27a^2}{8}$.

Vậy diện tích thiết diện bằng $\frac{93}{40}a^2$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{13}$.

D. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

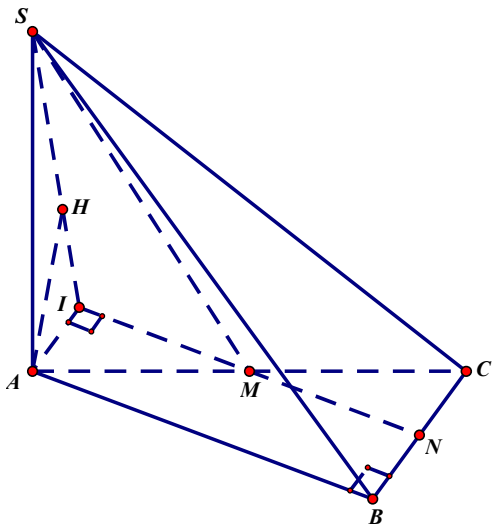
Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng:

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{13}$.

D. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm cạnh BC suy ra $AB//(SMN)$.

Khi đó, $d(AB,SM)=d(AB,(SMN))=d(A,(SMN))$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $AI\perp MN$ suy ra $(SAI)\perp(SMN)=SI$.

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH\perp SI$ suy ra $AH\perp(SMN)$.

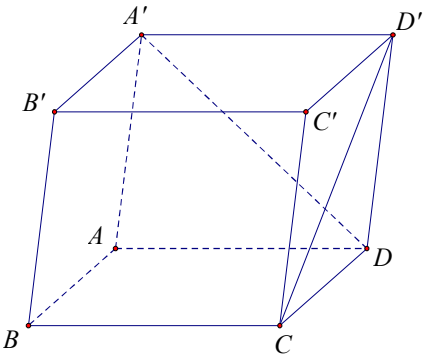
Suy ra $d(AB,SM)=AH$.

Ta có $AI=BN=a$.

Lại có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{12a^2}=\frac{13}{12a^2}$.

Vậy $d(AB,SM)=AH=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 45: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, $\widehat{BCD}=\widehat{A'D'D}=\widehat{BB'A'}=60^o$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D$ và CD' bằng.

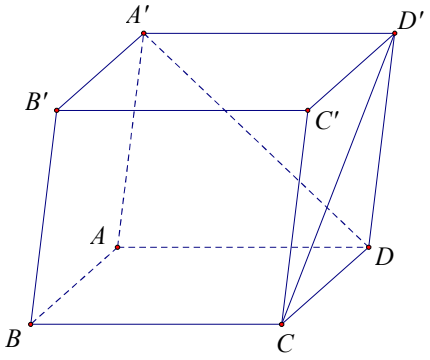


A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

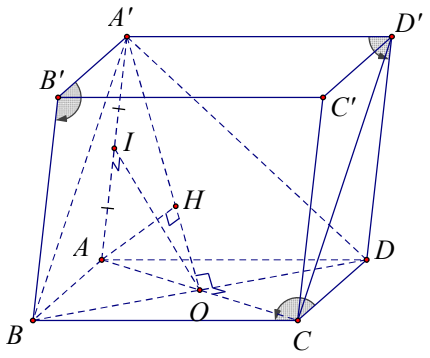
Câu 47: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, $\widehat{BCD} = \widehat{A'D'D} = \widehat{BB'A'} = 60^o$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D$ và CD' bằng.



A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

Mặt khác $\Delta A'B'B = \Delta A'D'D$ nên $A'B = A'D$. Suy ra $BD \perp (A'AO)$.

Kẻ $AH \perp A'O$ tại H, ta có $AH \perp (A'BD)$.

Vì $CD' // A'B \subset (A'BD)$ nên $CD' // (A'BD)$.

Do đó $d(A'D;CD') = d(CD';(A'BD)) = d(C;(A'BD)) = d(A;(A'BD)) = AH$.

Ta có $A'B = A'D = BD = a$ nên $A'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; mà $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\Delta OA'A$ cân tại O. Suy ra $OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

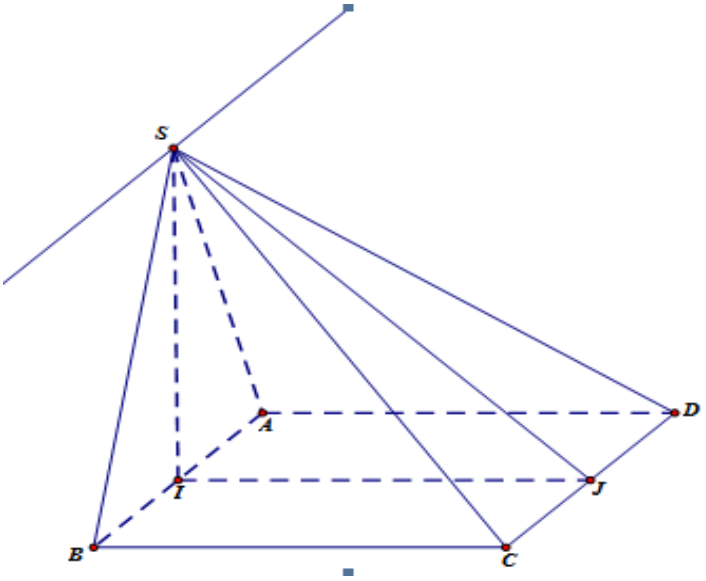
Mặt khác $AH.OA' = OI.A'A$ nên $AH = \frac{OI.A'A}{OA'} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(A'D;CD') = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = a \Rightarrow AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SI \perp AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Nhận xét: $(SAB) \cap (SCD) = d$ với giao tuyến d là đường thẳng đi qua điểm chung S và $d // AB // CD$. (1)

Trong mp (SAB) có: $SI \perp d$ tại S (vì $SI \perp AB, AB // d$) (2)

$$\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp IJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ)$$

$\Rightarrow AB \perp SJ$ Mà $AB // d$ nên $SJ \perp d$ tại S (3)

Từ (1),(2), (3) $\Rightarrow \big((SAB),(SCD)\big) = \big(SI, SJ\big) = \widehat{ISJ}$

Xét ΔISJ vuông tại I, có: $\tan \widehat{ISJ} = \dfrac{IJ}{SI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{ISJ} = 45^0$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh $2a$, hình chiếu của S trên mặt đáy trùng với điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BH} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BD}$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB và AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC biết $SH = 2a\sqrt{13}$.

A. $\dfrac{38a\sqrt{2}}{13}$. **B.** $\dfrac{19a\sqrt{2}}{13}$. **C.** $\dfrac{19a\sqrt{26}}{26}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{26}$.

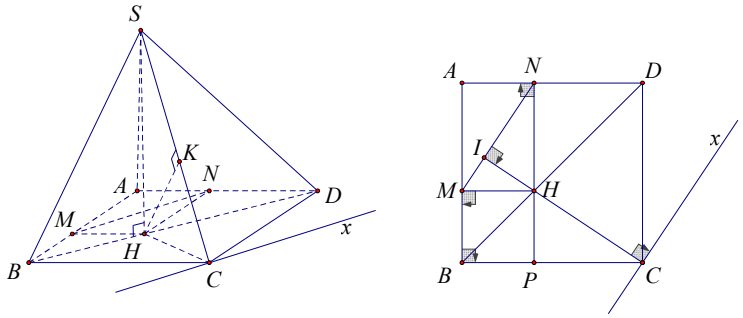
Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh $2a$, hình chiếu của S trên mặt đáy trùng với điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BH} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BD}$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H

trên các cạnh AB và AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC biết $SH = 2a\sqrt{13}$.

A. $\frac{38a\sqrt{2}}{13}$. **B.** $\frac{19a\sqrt{2}}{13}$. **C.** $\frac{19a\sqrt{26}}{26}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Qua C dựng tia $Cx \in MN$, gọi $I = CH \cap MN$ và K là hình chiếu của H lên SC ta có $IC \perp MN$ và $HK \perp (SC; Cx) \equiv (\alpha)$.

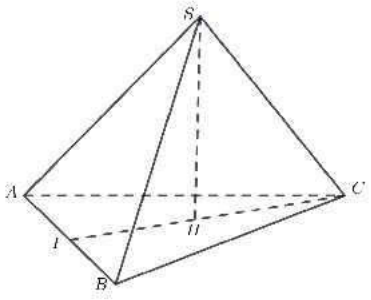
Tính được $MH = HP = \frac{4a}{5}$, $NH = \frac{6a}{5}$. Suy ra $IH = \frac{12a\sqrt{13}}{65}$, $HC = \frac{2a\sqrt{13}}{5}$ nên $\frac{IC}{HC} = \frac{19}{13}$.

Vì $MN \in (\alpha)$ nên $d(MN; SC) = d(MN; (\alpha)) = d(I; (\alpha)) = \frac{19}{13} d(H; (\alpha)) = \frac{19}{13} HK$.

Trong tam giác vuông SHC, đường cao $HK = \frac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = a\sqrt{2}$.

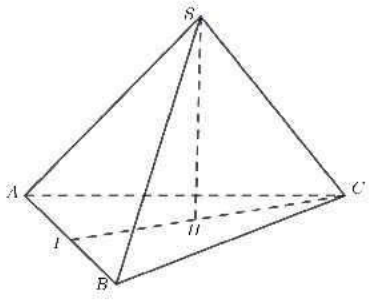
Vậy $d(MN; SC) = \frac{19a\sqrt{2}}{13}$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của AB. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 60^0 (tham khảo hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng



A. $a\frac{\sqrt{21}}{5}$. **B.** $a\frac{\sqrt{57}}{19}$. **C.** $a\frac{\sqrt{7}}{4}$. **D.** $a\frac{\sqrt{42}}{8}$.

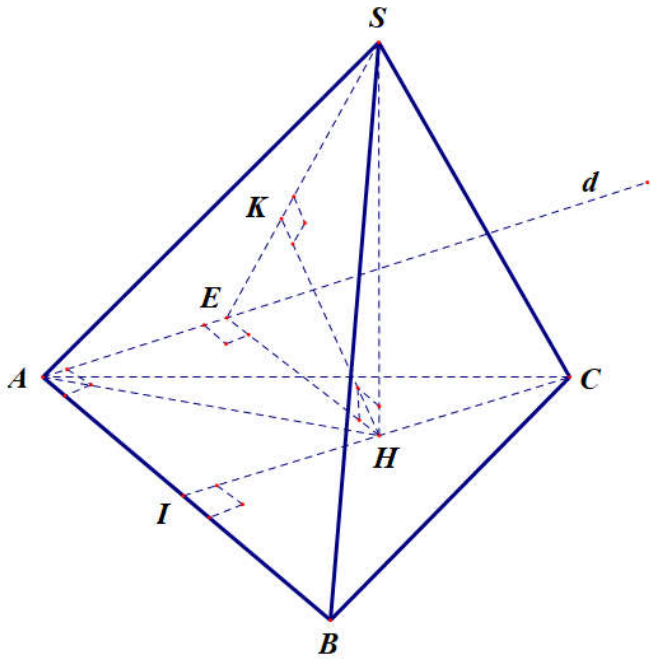
Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của AB. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 60^0 (tham khảo hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng



A. $a\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. **B.** $a\dfrac{\sqrt{57}}{19}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **D.** $a\dfrac{\sqrt{42}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



$$AH=\sqrt{AI^2+IH^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=a\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Góc giữa SA và mặt đáy là $\widehat{SAH}=60^0\Rightarrow SH=AH.\tan 60^0=a\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

Trong $mp(ABC)$ kẻ đường thẳng d đi qua A và song song với CI, kẻ $HE\perp d$ tại E,

Trong $mp(SHE)$ kẻ $HK\perp SE$ tại K

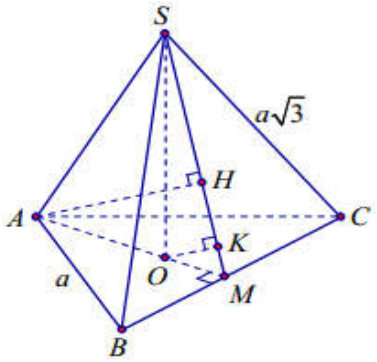
Khi đó $d(SA,CI)=d\left(CI,(S,d)\right)=d\left(H,(S,d)\right)=HK$

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HE^2}$, với $HE=AI=a$

Ta tính được $HK=a\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

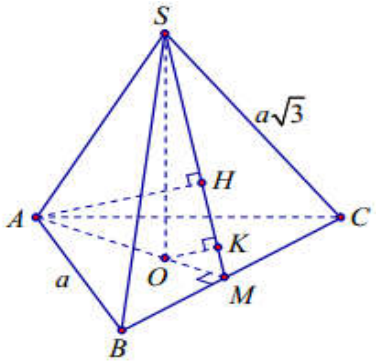
Vậy $d(SA,CI)=HK=a\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Câu 53: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ A và O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.



A. $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{33}$. **B.** $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. **D.** $d = \dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$.

Câu 54: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ A và O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.



A. $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{33}$. **B.** $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. **D.** $d = \dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Từ đó ta có $d = d_1 + d_2 = 3d_2 + d_2 = 4d_2 = 4OK = \dfrac{4SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{8a\sqrt{22}}{3}$.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABC$, có các cạnh bên SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và đều bằng $45°$. Biết $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính khoảng cách d từ C đến mặt phẳng (SAB).

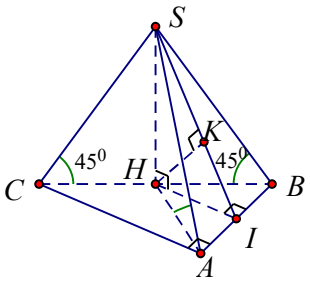
A. $d = \dfrac{20\sqrt{41}}{41}$. **B.** $d = \dfrac{15\sqrt{46}}{46}$. **C.** $d = \dfrac{5\sqrt{46}}{46}$. **D.** $d = \dfrac{10\sqrt{41}}{41}$.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABC$, có các cạnh bên SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và đều bằng $45°$. Biết $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính khoảng cách d từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $d=\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$. **B.** $d=\dfrac{15\sqrt{46}}{46}$. **C.** $d=\dfrac{5\sqrt{46}}{46}$. **D.** $d=\dfrac{10\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt (ABC). Mà $SA=SB=SC\Rightarrow \Delta SAH=\Delta SBH=\Delta SCH$

$\Rightarrow HA=HB=HC\Rightarrow H$ là tâm tam giác ABC.

Mặt khác $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A\Rightarrow H$ là trung điểm của BC.

Ta có $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=\widehat{SAH}=\widehat{SBH}=\widehat{SCH}=45°$.

Khi đó ΔSBC vuông cân $\Rightarrow SH=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Lấy I là trung điểm của $AB\Rightarrow AB\perp(SHI), HI=\dfrac{AC}{2}=2$.

Dựng $HK\perp SI$ tại $K\Rightarrow HK\perp(SAB)\Rightarrow d(H,(SAB))=HK$.

Do H là trung điểm của $BC\Rightarrow d(C,(SAB))=2d(H,(SAB))=2HK$.

Trong ΔSHI có: $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{41}{100}\Rightarrow HK=\dfrac{10}{\sqrt{41}}\Rightarrow d(C,(SAB))=\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD=2\,\text{cm}$, $DC=1\,\text{cm}$, $\widehat{ADC}=120°$. Cạnh bên $SB=\sqrt{3}\,\text{cm}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$.

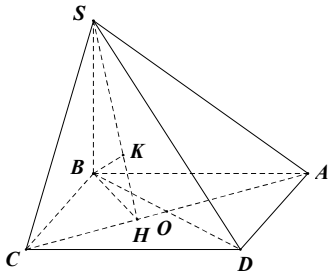
A. $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD=2\,\text{cm}$, $DC=1\,\text{cm}$, $\widehat{ADC}=120°$. Cạnh bên $SB=\sqrt{3}\,\text{cm}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ thấy $SB \perp (ABCD)$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60°} = \sqrt{3} \Rightarrow SD = \sqrt{6}$.

$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2 + 2AB.AD.\cos 60°} = \sqrt{7}$.

Gọi H là hình chiếu của B trên AC, K là hình chiếu của B trên SH. Khi đó $BH \perp (SAC)$.

Do $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH.AC = \frac{1}{2} AB.BC.\sin 120° \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BS^2} \Rightarrow BK = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow d(B,(SAC)) = d(D,(SAC)) = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Dễ thấy $\sin\alpha = \frac{d(D,(SAC))}{SD} = \frac{1}{4}$.

Câu 59: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O. Dựng đường thẳng Δ qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đường thẳng Δ lấy hai điểm S và S' đối xứng nhau qua O sao cho $SA = S'A = a$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(S'AB)$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{3a}{2}$.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Khoảng cách từ điểm O đến (SBC) bằng

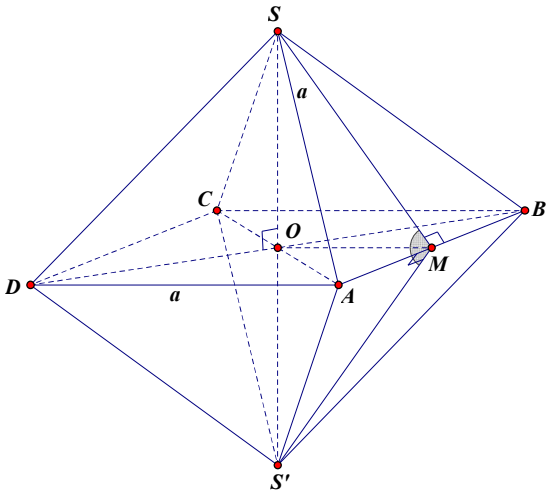
A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{3a}{8}$. **C.** $\frac{5a}{8}$. **D.** $\frac{5a}{4}$.

Câu 61: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O. Dựng đường thẳng Δ qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đường thẳng Δ lấy hai điểm S và S' đối xứng nhau qua O sao cho $SA = S'A = a$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(S'AB)$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

$(SAB)\cap(S'AB)=AB$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có:

* ΔSAB cân tại S nên $SM\perp AB$.

* $\Delta S'AB$ cân tại S nên $S'M\perp AB$.

Do đó $((SAB),(S'AB))=(SM,S'M)$.

Xét $\Delta SMS'$, ta có $\cos(SM,S'M)=\left|\cos\widehat{SMS'}\right|=\left|\dfrac{SM^2+S'M^2-SS'^2}{2SM.S'M}\right|$.

Vì $SA=S'A$ nên ta có

* $\Delta S'AB=\Delta SAB\Rightarrow S'M=SM=\sqrt{SA^2-AM^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

* $SO=S'O\Rightarrow SS'^2=2.SO=2.\sqrt{SM^2-OM^2}=2\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=a\sqrt{2}$.

Vậy $\cos(SM,S'M)=\dfrac{1}{3}$.

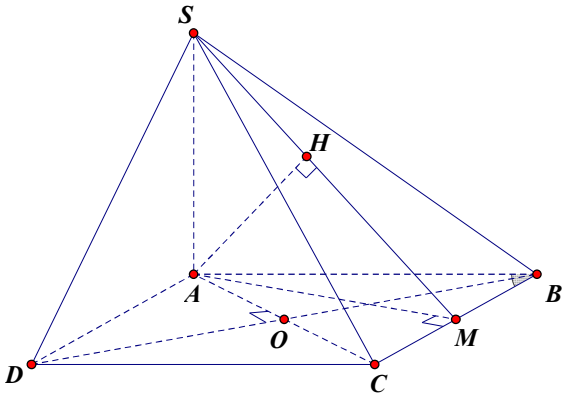
Câu 62: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $SA\perp(ABCD)$, $SA=\dfrac{3a}{2}$.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Khoảng cách từ điểm O đến (SBC) bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{8}$. **C.** $\dfrac{5a}{8}$. **D.** $\dfrac{5a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC; H là hình chiếu của A lên SM.

Vì $AB = BC = a$, $\widehat{ABC} = 60°$ nên ΔABC đều.

Do đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$ theo giao tuyến là SM.

Mà $AH \perp SM$ nên $AH \perp (SBC)$.

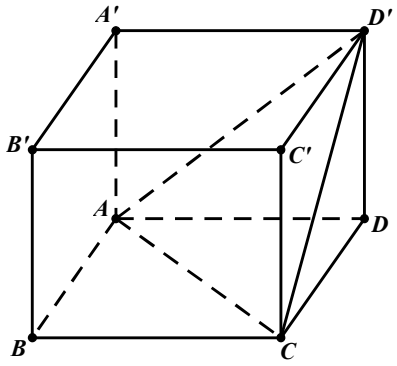
Ta có $OC = \frac{1}{2} AC$ nên $d(O,(SBC)) = \frac{1}{2} d(A,(SBC)) = \frac{1}{2} AH$.

Xét ΔSAM: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{16}{9a^2}$.

$\Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$.

Vậy $d(O,(SBC)) = \frac{3a}{8}$.

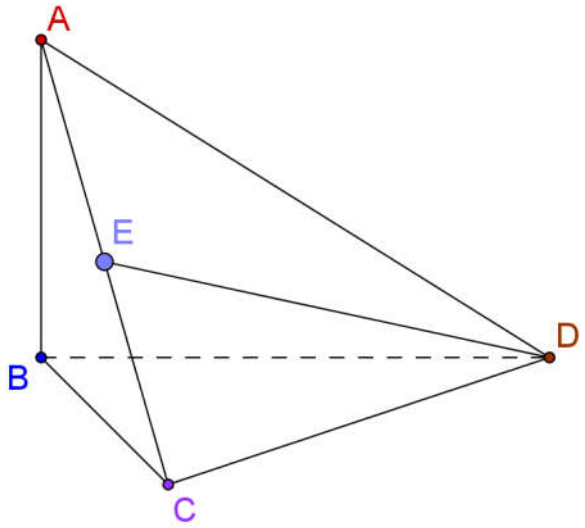
Câu 63: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ **(tham khảo hình vẽ)**.



Giá trị $\tan\alpha$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

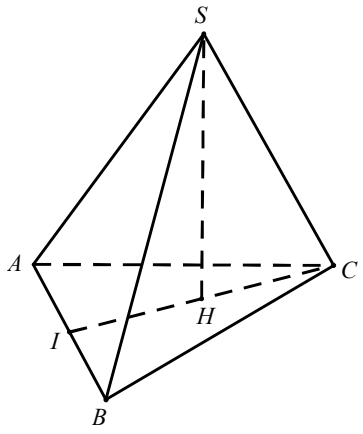
Câu 64: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC **(tham khảo hình vẽ bên)**.



Góc giữa đường thẳng AB và DE bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

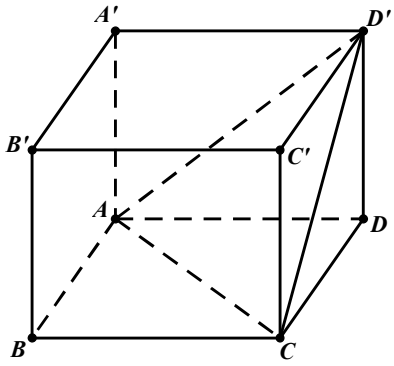
Câu 65: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a; gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° **(tham khảo hình vẽ bên dưới)**.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 66: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$; $BC=a\sqrt{2}$; $AA'=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ).



Giá trị $\tan\alpha$ bằng:

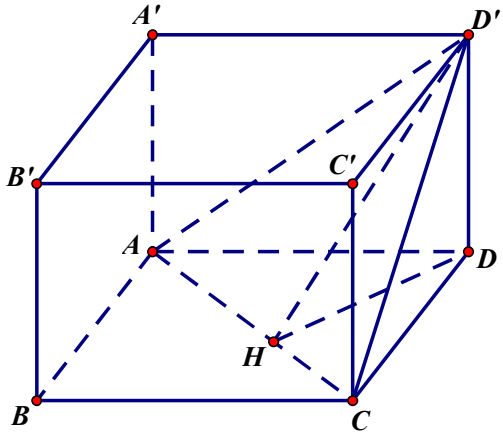
A. 2. **B.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

+ Kẻ $DH \perp AC$ $(H \in AC)$. Khi đó ta có $D'H \perp AC$. Vì thế góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ là góc $\widehat{D'HD}$.



+ Xét tam giác ADC vuông tại D ta có:

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow DH^2=\frac{2a^2}{3}\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

+ Trong tam giác DHD vuông tại D ta có:

$$\tan\widehat{D'HD}=\frac{D'D}{DH}=a\sqrt{3}.\frac{3}{a\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Cách 2: (Dùng công thức diện tích hình chiếu)

Ta có: $S_{ACD}=S_{ACD'}.\cos\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{S_{ACD}}{S_{ACD'}}$

Ta có: $S_{ACD}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

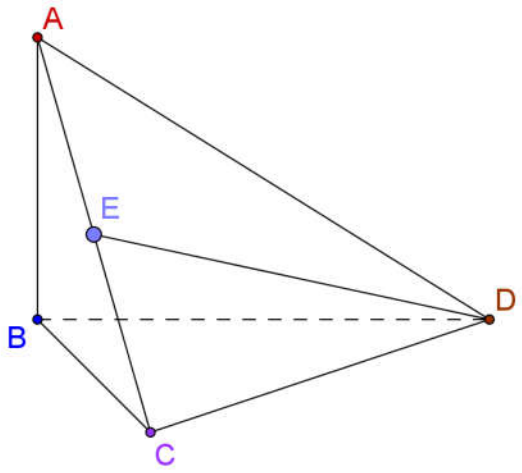
Xét $\Delta ACD'$ có $AC=a\sqrt{3}$, $AD'=a\sqrt{5}$, $CD'=2a$, $p=\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{5}+2a}{2}$. Suy ra:

$$S_{ACD'}=\sqrt{p\left(p-a\sqrt{3}\right)\left(p-a\sqrt{5}\right)(p-2a)}=\frac{\sqrt{11}}{2}a^2.$$

Do đó: $\cos\alpha=\frac{S_{ACD}}{S_{ACD'}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Vậy $\tan\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

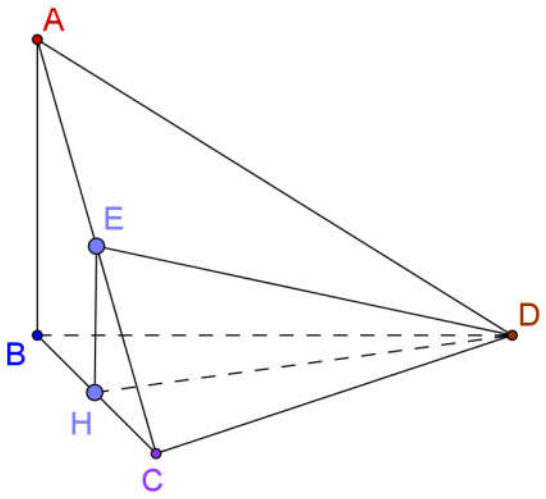
Câu 67: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC=a\sqrt{2}$, $CD=a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng AB và DE bằng



A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B

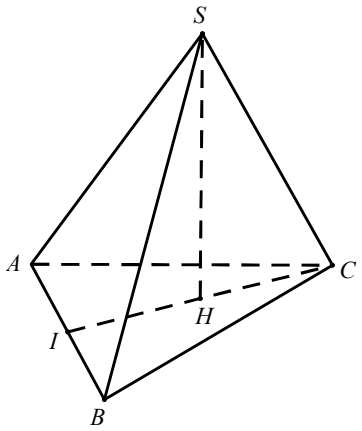


Gọi H là trung điểm BC. Vì $AB // HE \Rightarrow (AB;DE) = (HE;DE) = \widehat{DEH}$

Ta có: $HE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$; $DH = \sqrt{HC^2 + CD^2} = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

$\tan \widehat{DEH} = \dfrac{DH}{HE} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{DEH} = 60^\circ$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a; gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng $45°$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).

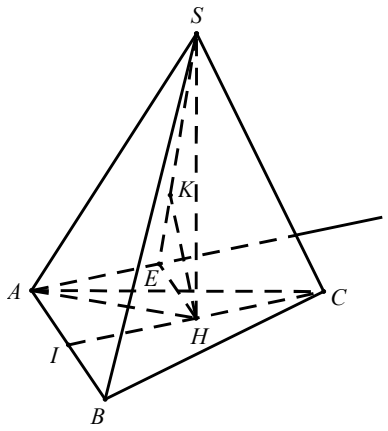


Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{8}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\widehat{(SA,(ABC))}=\widehat{(SA,AH)}=\widehat{SAH}=45°$. Dựng hình bình hành $AIHE$.

$CI//(SAE)\Rightarrow d(SA,CI)=d(CI,(SAE))=d(H,(SAE))$.

Do tam giác ABC đều và I là trung điểm của AB nên $CI\perp AB$.

Suy ra $AIHE$ là hình chữ nhật có $HE=AI=\dfrac{a}{2}$.

Do đó: $\begin{cases}SH\perp HE\\ AE\perp HE\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SHE)\Rightarrow AE\perp(SHE)\Rightarrow(SAE)\perp(SHE)$.

Trong mặt phẳng (SHE), dựng K là hình chiếu của H trên đường thẳng SE thì ta có $HK\perp(SAE)\Rightarrow d(H,(SAE))=HK$.

Tam giác SAH vuông cân tại $S\Rightarrow SH=AH=\sqrt{AI^2+HI^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Tam giác SHE vuông tại H, có HE là đường cao nên $HK=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.

Câu 69: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$. Biết $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$, $SA=a\sqrt{3}$. Tính φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

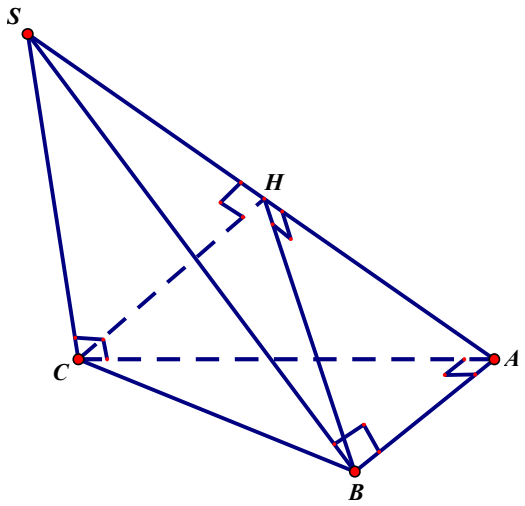
A. $\varphi=90°$. **B.** $\varphi=30°$. **C.** $\varphi=45°$. **D.** $\varphi=60°$.

Câu 70: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$. Biết $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90°$, $SA=a\sqrt{3}$. Tính φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\varphi=90°$. **B.** $\varphi=30°$. **C.** $\varphi=45°$. **D.** $\varphi=60°$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $CH \perp SA$, dễ dàng chứng minh được $BH \perp SA$.

Do đó, góc tạo bởi giữa hai mặt phẳng $\left((SAB),(SAC)\right)=(CH,BH)$.

Ta có, $CH=\dfrac{CA.CS}{SA}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $CB=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác CHB, có $\cos H=\dfrac{CH^2+BH^2-BC^2}{2.HB.HC}=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\left((SAB),(SAC)\right)=(CH,BH)=60^\circ$.

Câu 71: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=9a, AB=6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM=\dfrac{1}{2}MC$. Côsin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Câu 72: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a$.

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SB=BC=2a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC}=45^\circ$, $\widehat{BSA}=\alpha$. Tính giá tị α để góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 45°.

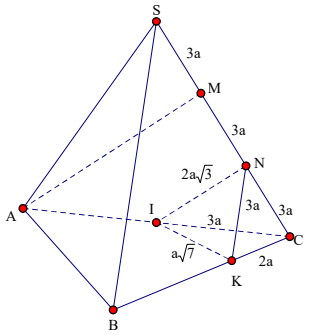
A. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

Câu 74: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=9a, AB=6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM=\dfrac{1}{2}MC$. Côsin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của MC, I là trung điểm AC, K trên CB sao cho $CK = 2a$.

Khi đó ta có $\begin{cases} AM // NI \\ SB // NK \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AM, SB}\right) = \left(\widehat{NI, NK}\right)$.

Trong tam giác $SAC \cos C = \dfrac{CA^2 + CS^2 - SA^2}{2CA.CS} = \dfrac{1}{3}$

Trong tam giác CNI ta có $IN = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN.CI.\cos C} = 2a\sqrt{3}$.

Trong tam giác CIK ta có $IK = \sqrt{CI^2 + CK^2 - 2CI.CK.\cos 60°} = a\sqrt{7}$.

Trong tam giác NIK có $\cos \widehat{INK} = \dfrac{NI^2 + NK^2 - IK^2}{2NI.NK} = \dfrac{7\sqrt{3}}{18}$.

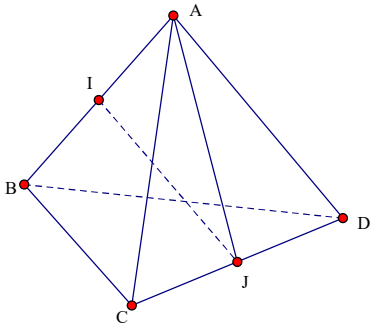
Vậy côsin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng $\dfrac{14}{3\sqrt{48}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{18}$.

Câu 75: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD.

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên tam giác AJB cân tại J và tam giác CID cân tại I.

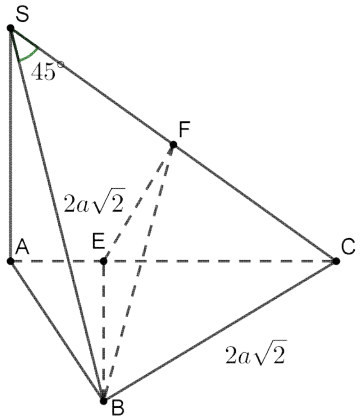
Suy ra $\begin{cases} IJ \perp AB \\ IJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow d\left(AB, CD\right) = IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 76: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp \left(ABC\right)$, $SB = BC = 2a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45°$, $\widehat{BSA} = \alpha$. Tính giá tị α để góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBC\right)$ bằng $45°$.

A. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $BE \perp AC \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC$.

Kẻ $EF \perp SC \Rightarrow SC \perp (BEF) \Rightarrow BF \perp SC$.

Mà ΔSBC cân tại B $\left(SB = SC = 2a\sqrt{2}\right)$ có $\widehat{BSC} = 45°$ nên ΔSBC vuông cân tại B.

Nên F là trung điểm của SC.

$\Rightarrow BF = SF = FC = 2a$.

Lại có $\begin{cases}(SAC)\cap(SBC) = SC\\ EF \perp SC, BF \perp SC\end{cases} \Rightarrow \left((SAC);(SBC)\right) = \widehat{BFE} = 45°$.

$\Rightarrow \Delta BEF$ vuông cân tại $E \Rightarrow BE = EF = a\sqrt{2}$

Lại có $\begin{cases}BC \perp SB\\ BC \perp SA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B

$\Rightarrow \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{BE^2} \Rightarrow AB = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Nên $\sin\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$. Tam giác SAB có $\widehat{ABS} = 60^o$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC) theo a.

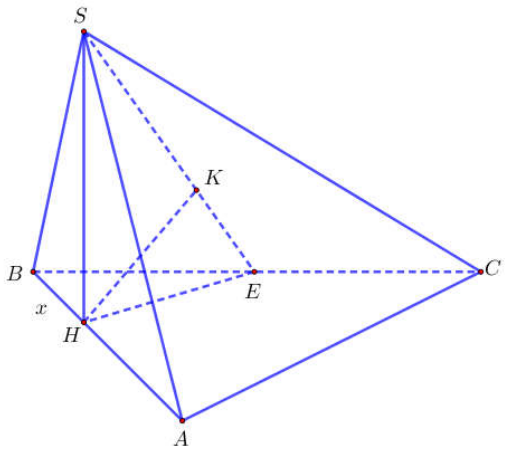
A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = a\sqrt{3}$. **C.** $d = 2a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$. Tam giác SAB có $\widehat{ABS} = 60^o$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC) theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = a\sqrt{3}$. **C.** $d = 2a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $SH \perp AB$ tại $H \Rightarrow SH \perp (ABC)$, vẽ $HE \perp BC$ tại $E \Rightarrow (SHE) \perp BC \Rightarrow (SHE) \perp (SBC)$

Vẽ $HK \perp SE$ tại $K \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Đặt $BH = x$, $SH = x\sqrt{3}$, $HE = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Ta có $HK = \dfrac{HE.HS}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3x^2 + \dfrac{x^2}{2}}} = \dfrac{x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3x^2 + \dfrac{x^2}{2}}} = \dfrac{x\sqrt{21}}{7}$.

Ta có $\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(H,(SBC)\right)} = \dfrac{AB}{HB} \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{AB}{HB}.d\left(H,(SBC)\right) = \dfrac{a}{x}.\dfrac{x\sqrt{21}}{7} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 79: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa AM và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 80: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm SD. Tính $d\left(M,(SAC)\right)$.

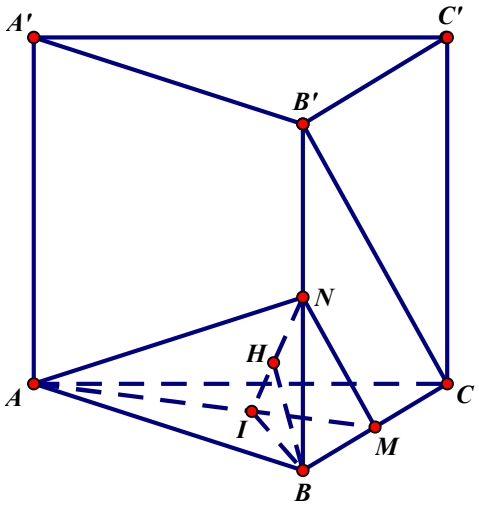
A. $\dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 81: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa AM và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $MN \,//\, B'C \Rightarrow B'C \,//\, (AMN)$

Kẻ $BI \perp AM$, $BH \perp NI \Rightarrow BH \perp (ANM)$.

Suy ra $d(B'C, AM) = d(C,(ANM)) = d(B,(ANM)) = BH$.

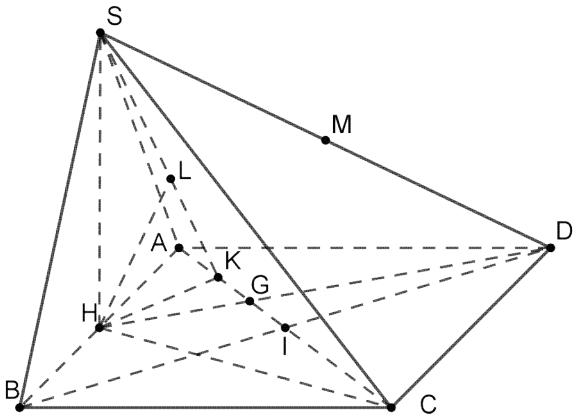
Ta có $BI = \dfrac{BA.BM}{AM} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BH = \dfrac{BI.BN}{IN} = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 82: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm SD. Tính $d(M,(SAC))$.

A. $\dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB, I là tâm hình chữ nhật $ABCD$ và G là giao điểm của AC và DH.

ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$, mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCH} = 45° \Rightarrow SH = HC.\tan 45° = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$.

$MD \cap (SAC) = \{S\} \Rightarrow \dfrac{d(M;(SAC))}{d(D;(SAC))} = \dfrac{MS}{DS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2d(M;(SAC)) = d(D;(SAC))$.

Ta có G là trọng tâm $\Delta ABD \Rightarrow \dfrac{HG}{DG}=\dfrac{1}{2}$.

$HD\cap(SAC)=\{G\}\Rightarrow \dfrac{d\left(H;(SAC)\right)}{d\left(D;(SAC)\right)}=\dfrac{HG}{DG}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(H;(SAC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(D;(SAC)\right)=d\left(M;(SAC)\right)$.

Kẻ $HK\perp AC\Rightarrow AC\perp(SHK)\Rightarrow(SAC)\perp(SHK)$.

Kẻ $HL\perp SK=(SHK)\cap(SAC)\Rightarrow HL\perp(SAC)\Rightarrow HL=d\left(H;SAC\right)$.

Xét ΔAHI có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HA^2}+\dfrac{1}{HI^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Xét ΔSHK có $\dfrac{1}{HL^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HK^2}\Rightarrow HL=a\sqrt{\dfrac{17}{89}}=\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

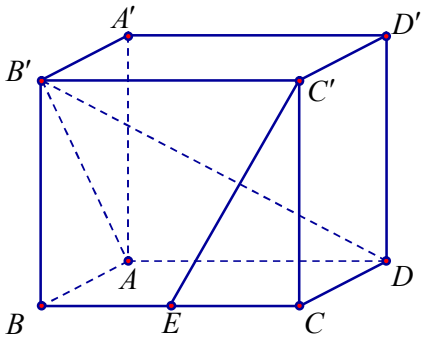
Vậy $d\left(M;(SAC)\right)=\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = 6\text{cm}$, $BC = BB' = 2\text{cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC. Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng $C'E$, hai đỉnh P, Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F. Khoảng cách DF bằng

A. 1cm. **B.** 2cm. **C.** 3cm. **D.** 6cm.

Lời giải

Chọn B



Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN \perp PQ$ hay $EC' \perp BF$.

Ta có: $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'B} + k\overrightarrow{B'C'}$

Và $\overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}$

Khi đó, $\overrightarrow{EC'}.\overrightarrow{BF} = -B'B^2 + \frac{k}{2}B'C'^2 = -4 + \frac{k}{2}.4 = 0 \Rightarrow k = 2$. Vậy $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$

Vậy F là điểm trên AD sao D là trung điểm của AF.

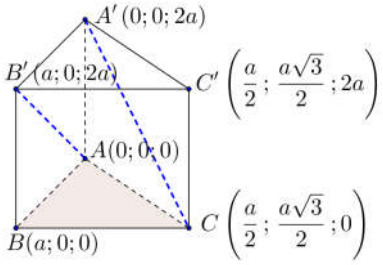
Do đó $DF = BC = 2\text{cm}$.

Câu 2: (THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Lời giải

Chọn D



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ trùng với A; trục Ox nằm trên AB; trục Oz nằm trên AA'; trục Oy vuông góc với Ox và nằm trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó tọa độ các đỉnh lăng trụ như hình vẽ.

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d\left(\Delta,\Delta'\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$

Với $\vec{u}=\overrightarrow{AB'}=\left(a;0;2a\right);\vec{u'}=\overrightarrow{A'C}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right);\overrightarrow{MM_0}=\overrightarrow{AA'}=\left(0;0;2a\right).$

Câu 3:

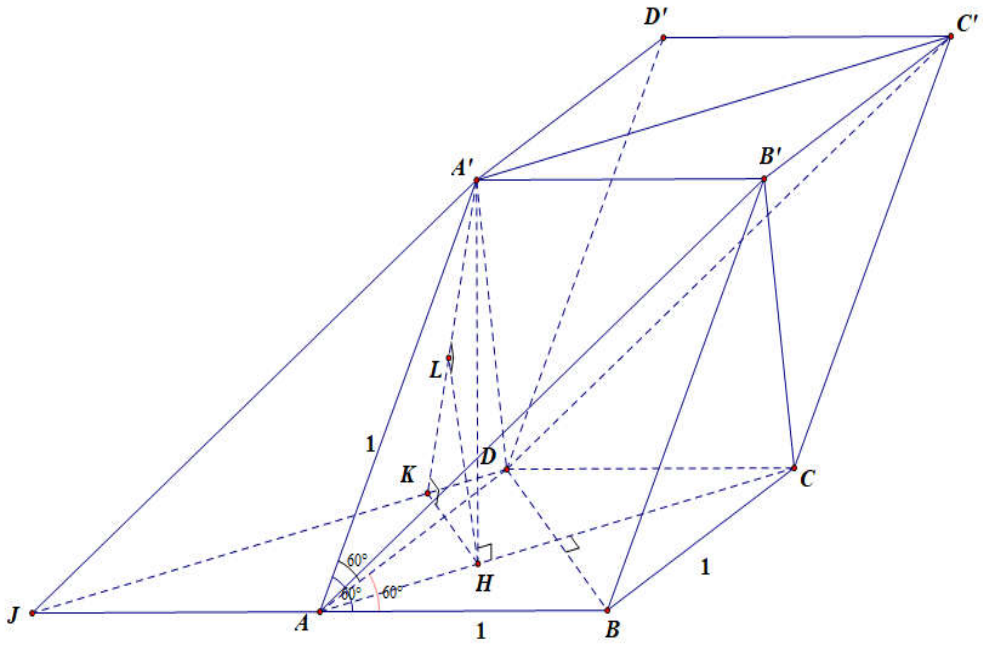
$\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=\left(a^2\sqrt{3};3a^2;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right);\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}=a^3\sqrt{3}\Rightarrow d\left(AB',A'C\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}.($

THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình hộp $ABCD.A'B'CD'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và các góc phẳng đỉnh A đều bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$

A. $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\dfrac{2}{11}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{11}$. **D.** $\dfrac{3}{11}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=\widehat{BAD}=60°$ và $AB=AD=AA'=1$.

Khi đó ΔABD, $\Delta ADA'$ và $\Delta ABA'$ đều cạnh bằng 1.

$\Rightarrow A'D=A'A=A'B=1$. Suy ra hình chiếu của A' lên $\left(ABCD\right)$ là tâm H của ΔABD đều.

Ta có $AB'\,//\,DC'\Rightarrow d\left(AB';A'C'\right)=d\left(AB';\left(DA'C'\right)\right)=d\left(H;\left(DA'C'\right)\right)$.

Dựng hình bình hành $DCAJ$. Từ H kẻ $HK\perp DJ\left(K\in DJ\right)$, ta có $HK\,//\,DB$.

Từ H kẻ $HL\perp A'K\left(L\in A'K\right)\Rightarrow HL\perp\left(DA'C'\right)\Rightarrow d\left(H;\left(DA'C'\right)\right)=HL$.

Ta có: $HK=\frac{1}{2}$, $A'H=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác $A'HK$: $\frac{1}{HL^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{A'H^2}\Rightarrow HL=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 4: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có $AB=BC=a$, $AD=2a$, có SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

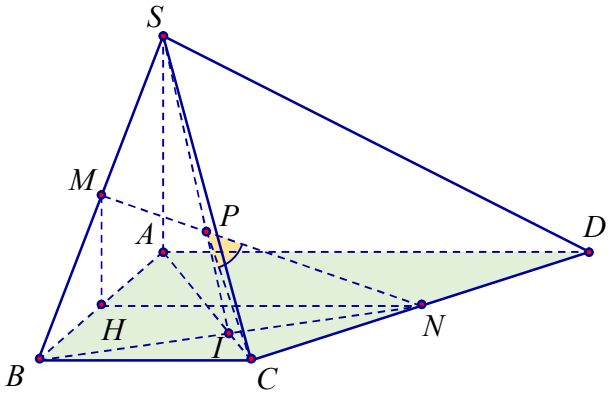
- Xác định giao điểm của MN *và* (SAC)*:*
  - ✓ Chọn mp chứa MN là mp(SBN)
  - ✓ Giao tuyến $(SBN)\cap(SAC)=SI$ (với $I=AC\cap BN$

    Trong (SBN) gọi $SI\cap MN=P$, suy ra $P=MN\cap(SAC)$.
- Xác định góc $\widehat{(MN,(SAC))}$*:*

- Ta có $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2$; $CD^2=CK^2+KD^2=2a^2$; $AD^2=(2a)^2=4a^2$

$\Rightarrow AC^2+CD^2=AD^2\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại $C\Rightarrow CD\perp AC$ mà $CD\perp SA$ nên $CD\perp(SAC)$

- Góc $\widehat{(MN,(SAC))}=\widehat{(MN,PC)}=\widehat{NPC}$



- Tính góc $\widehat{NPC}$:
  - ✓ Ta có $NC=\frac{CD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
  - ✓ Ta có I là trung điểm BN và M là trung điểm SB suy ra P là trọng tâm ΔSBN

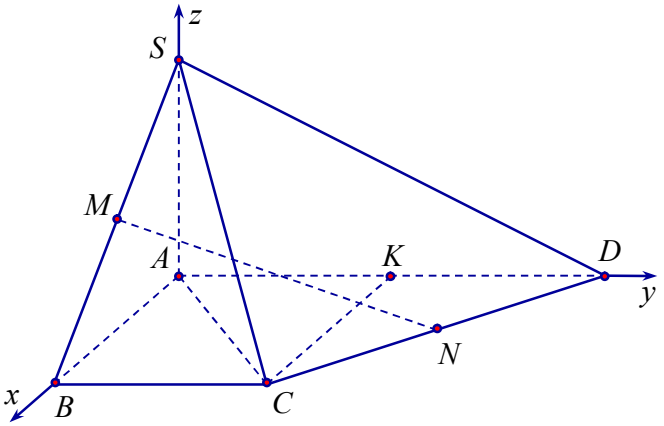
    $\Rightarrow PN=\frac{2}{3}MN$
  - ✓ Gọi H trung điểm AB suy ra $MH//SA$ do đó ΔMNH vuông tại H.

    $\Rightarrow MN=\sqrt{MH^2+HN^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$ do đó $PN=\frac{2}{3}MN=\frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Từ đó suy ra $PC=\sqrt{PN^2-NC^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{22}}{6}$

- Cosin của góc $\widehat{NPC}$: $\cos\widehat{NPC}=\frac{PC}{PN}=\frac{\frac{a\sqrt{22}}{6}}{\frac{a\sqrt{10}}{3}}=\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{3a}{2};\frac{-a}{2}\right)\Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{u_1}=(0;3;-1)$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Do $CK=AB=a=\frac{1}{2}CD$ với K là trung điểm của AD nên tam giác ACD vuông tại C.

Vì $\begin{cases}CD\perp AC\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAC)$ nên $\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)$ là vtpt của mp(SAC)

Chọn $\overrightarrow{n_1}=(-1;1;0)$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$.

Gọi α là góc giữa MN và mp (SAC).

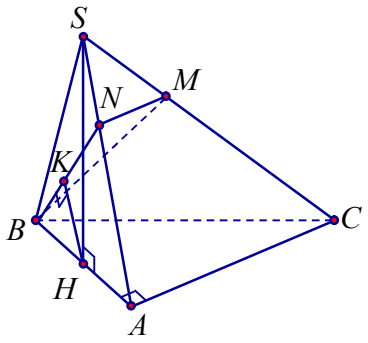
Ta có: $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{3\sqrt{5}}{10}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 5: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=4\,\text{cm}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Lấy M thuộc SC sao cho $CM=2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là

A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}\text{cm}$. **B.** $\frac{8\sqrt{21}}{21}\text{cm}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}\text{cm}$. **D.** $\frac{2\sqrt{21}}{3}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp (ABC)$.

Trong (SAC) từ M dựng $MN // AC$, gọi K là hình chiếu của H trên BN.

Ta có $AC \perp (SAB)$ mà $MN // AC \Rightarrow MN \perp (SAB)$

$\begin{cases} HK \perp BN \\ HK \perp MN \end{cases} \Rightarrow HK \perp (BMN)$.

Vì $(BMN) // AC$ suy ra khoảng cách giữa hai đường AC và BM là

$d(A,(BMN)) = 2d(H,(BMN)) = 2HK = 2BH \sin \widehat{ABN}$

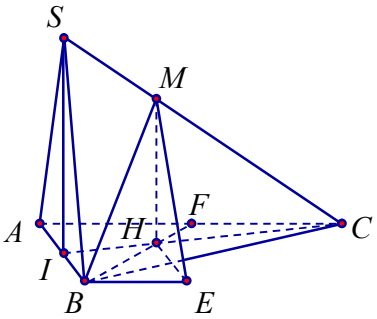
Trong tam giác SAB hạ $NF \perp AB$, suy ra $NF = \frac{2}{3}SH = \frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, và

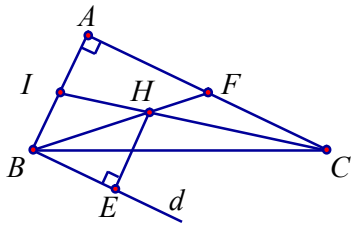
$BF = BH + HF = BH + \frac{1}{3}AH = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

Vậy $BN = \sqrt{BF^2 + NF^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$, $\frac{BN}{\sin 60°} = \frac{AN}{\sin \widehat{ABN}} \Leftrightarrow \sin \widehat{ABN} = \frac{\frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Suy ra $d(A,(BMN)) = 2.2.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2. Gọi I là trung điểm của AB suy ra $SI \perp (ABC)$.





Gọi H là hình chiếu của M trên (ABC), Trong (ABC) từ B dựng đường thẳng $d // AC$.

Gọi F là trung điểm của AC, E là hình chiếu của H trên d, ta có:

$MH = \frac{2}{3}SI = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $HE = \frac{2}{3}AB = \frac{8}{3}$.

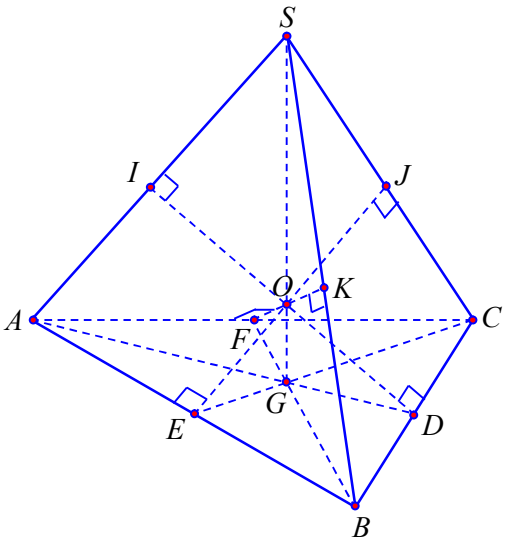
Khi đó $d\left(BM,AC\right)=\frac{3}{2}d\left(H,\left(BME\right)\right)=\frac{3}{2}\frac{MH.HE}{\sqrt{MH^2+HE^2}}=\frac{3}{2}\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}.\frac{8}{3}}{\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}}=\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Câu 6: (THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-nawm-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=BC=CA=a$, $SA=SB=SC=a\sqrt{3}$, M là điểm bất kì trong không gian. Gọi d là tổng khoảng cách từ M đến tất cả các đường thẳng AB, BC, CA, SA, SB, SC. Giá trị nhỏ nhất của d bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có khối chóp $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó SG là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm của BC,AB,CA và I,J,K lần lượt là hình chiếu của D,E,F trên SA,SC,SB.

Khi đó DI,EJ,FK tương ứng là các đường vuông góc chung của các cặp cạnh SA và BC, SC và AB, SB và CA.

Ta có $DI=EJ=FK$. Do đó $\Delta SID=\Delta SJE$ nên $SI=SJ$.

Suy ra $ED\parallel IJ$ (cùng song song với AC). Do đó bốn điểm D,E,I,J đồng phẳng.

Tương tự ta có bộ bốn điểm D,F,I,K và E,F,J,K đồng phẳng.

Ba mặt phẳng $\left(DEIJ\right),\left(DFIK\right),\left(EFJK\right)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến DI, EJ, FK. Suy ra DI,EJ,FK đồng quy tại điểm O thuộc SG.

Xét điểm M bất kì trong không gian.

Ta có $\begin{cases}d\left(M,SA\right)+d\left(M,BC\right)\ge DI\\d\left(M,SC\right)+d\left(M,AB\right)\ge EJ\\d\left(M,SB\right)+d\left(M,AC\right)\ge FK\end{cases}\Rightarrow d\ge DI+EJ+FK$.

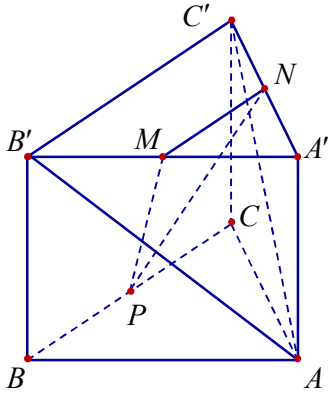
Do đó d nhỏ nhất bằng $DI+EJ+FK=3DI$ khi $M\equiv O$.

Ta có $AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG=\frac{2}{3}AD=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$, $\sin\widehat{SAG}=\frac{SG}{SA}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $DI = AD.\sin\widehat{SAD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $3DI = 3\frac{a\sqrt{6}}{3} = a\sqrt{6}$.

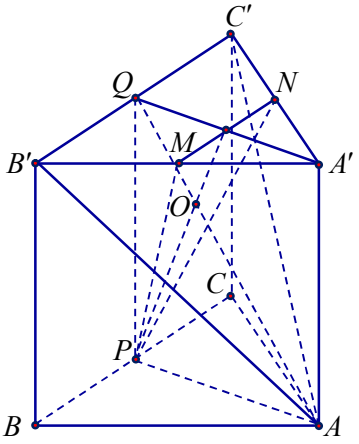
Câu 7: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của MN, $B'C'$. Gọi $O = PI \cap AQ$.

Khi đó $\begin{cases} O \in (AB'C') \cap (MNP) \\ B'C' \,//\, MN \\ B'C' \subset (AB'C'), MN \subset (MNP) \end{cases}$ nên giao tuyến của $(AB'C')$ và (MNP) là đường thẳng d qua O và song song MN, $B'C'$.

Tam giác $AB'C'$ cân tại A nên $AQ \perp B'C' \Rightarrow AQ \perp d$.

Tam giác PMN cân tại P nên $PI \perp MN \Rightarrow PI \perp d$.

Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) là góc giữa AQ và PI.

Ta có $AP = 3$, $AQ = \sqrt{13}$, $IP = \frac{5}{2}$.

Vì $\Delta OAP \backsim \Delta OQI$ và $\frac{AP}{IQ}=2$ nên $OA=\frac{2}{3}AQ=\frac{2\sqrt{13}}{3}$; $OP=\frac{2}{3}IP=\frac{5}{3}$.

$\cos\left(\widehat{(AB'C'),(MNP)}\right)=\cos\left(\widehat{AQ,PI}\right)=\left|\cos\left(\widehat{AOP}\right)\right|=\frac{OA^2+OP^2-AP^2}{2OA.OP}=\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 1: **(THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC=a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC, biết góc giữa đường thẳng SD và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\frac{a\sqrt{609}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{609}}{29}$. **C.** $\frac{a\sqrt{600}}{29}$. **D.** $\frac{a\sqrt{906}}{29}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó, ta có: $SI\perp(ABCD)$.

Do $AD//BC$ nên $d(AD,SC)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))=2d(I,(SBC))$

Xét ΔABD có DI là trung tuyến nên $DI=\sqrt{\frac{DA^2+DB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $SI=DI.\tan 60°=\frac{a\sqrt{21}}{2}$.

Từ I kẻ IE vuông góc với BC. Từ I kẻ IH vuông góc với SE. Khi đó, ta chứng minh được $IH=d(I,(SBC))$.

Do I là trung điểm AB trong ΔABC đều nên $IE=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IS^2}+\frac{1}{IE^2}=\frac{116}{21a^2}$ hay $IH=\frac{\sqrt{609}}{58}$.

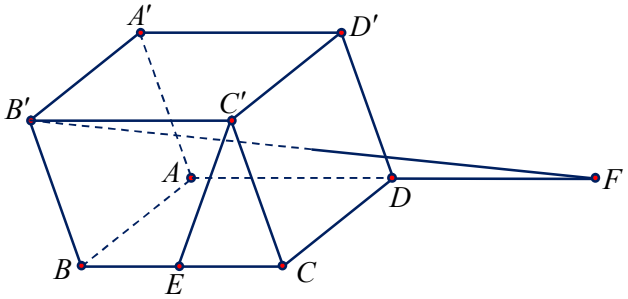
Kết luận: $d(AD,SC)=\frac{\sqrt{609}}{29}$.

Câu 2: ----------**HẾT**----------**(THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $AB=6$ cm, $BC=BB'=2$ cm. Điểm E là trung điểm cạnh BC. Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng $C'E$, hai đỉnh P, Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F. Khoảng cách DF bằng

A. 1 cm. **B.** 3 cm. **C.** 2 cm. **D.** 6 cm.

Lời giải

Chọn C



Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN\perp PQ$ hay $EC'\perp B'F$.

Ta có: $\overrightarrow{B'F}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{B'B}+k\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{B'B}+k\overrightarrow{B'C'}$

Và $\overrightarrow{EC'}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}-\overrightarrow{B'B}$

Khi đó $\overrightarrow{EC'}.\overrightarrow{BF}=-B'B^2+\frac{k}{2}B'C'^2=-4+\frac{k}{2}.4=0\Rightarrow k=2$ nên $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AD}$

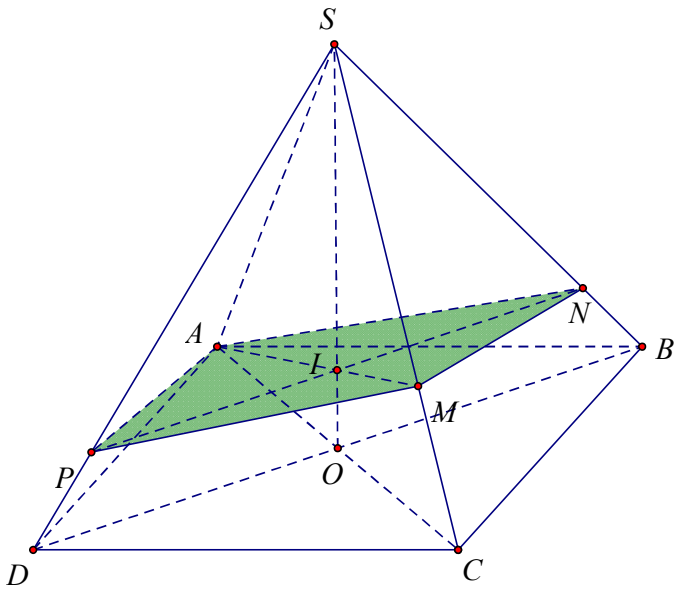
Vậy F là điểm trên AD sao D là trung điểm của AF.
Do đó $DF = BC = 2$ cm.

Câu 3: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **B.** $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **C.** $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = AM \cap SO$.

Trong (SBD) từ I kẻ đường thẳng Δ song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại N, P.

Suy ra thiết diện là tứ giác $ANMP$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác: $BD // NP$.

$\Rightarrow AM \perp NP$.

$\Rightarrow S_{ANMP} = \frac{1}{2} NP.AM$.

+ Tính AM:

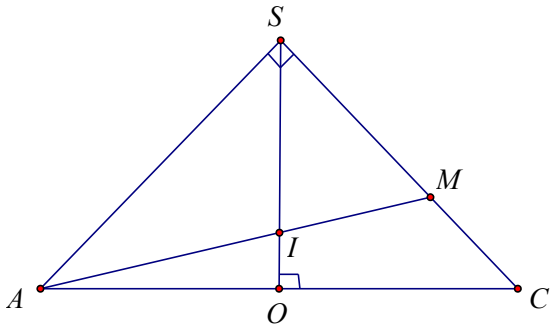
Ta có: $\begin{cases} SA = SC = a \\ AC = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại S.

$\Rightarrow AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

+ Tính AM :

Ta có: $NP // BD \Rightarrow \frac{NP}{BD} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow NP = \frac{SI.BD}{SO}$.

- Tính $\frac{SI}{SO}$:



Gọi $\frac{SI}{SO} = k$.

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO}$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$.

A, I, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = l\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO} = -l\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}l\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\right) = -l\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}l\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k + l = 1 \\ \frac{1}{2}k - \frac{2}{3}l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ l = \frac{3}{5} \end{cases}$.

$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow NP = \frac{4}{5}BD = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

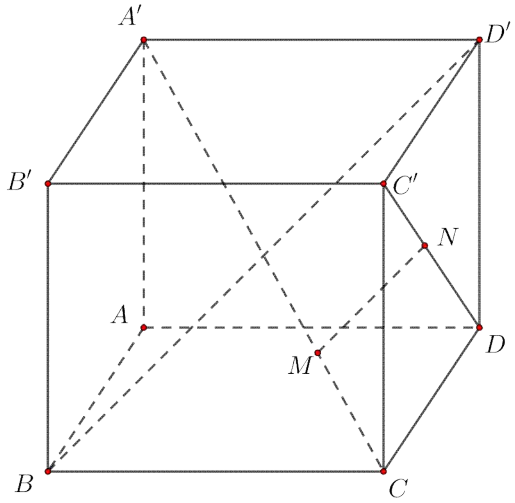
$\Rightarrow S_{ANMP} = \frac{1}{2}NP.AM = \frac{1}{2}.\frac{4a\sqrt{2}}{5}.\frac{a\sqrt{13}}{3} = \frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

Câu 4: **(THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA'} = k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $k - l = -\frac{3}{2}$. **B.** $k + l = -3$. **C.** $k + l = -4$. **D.** $k + l = -2$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{MA'}=k.\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AM}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AA'}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}=\dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}$.

và $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AN}=l.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=\dfrac{\overrightarrow{AC'}-l\overrightarrow{AD}}{1-l}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$

$=\left(-\dfrac{k}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{a}+\left(-\dfrac{k}{1-k}-1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{c}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Để $MN//BD'$ thì $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BD'} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{k}{1-k}+\dfrac{1}{1-l}=-\dfrac{k}{1-k}-1\\ -\dfrac{k}{1-k}-1=\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2k}{1-k}+\dfrac{1}{1-l}=-1\\ \dfrac{k+1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}=-1\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3k+1}{1-k}=-2 \Leftrightarrow k=-3$. Từ đó ta có: $\dfrac{1}{1-l}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow l=-1$.

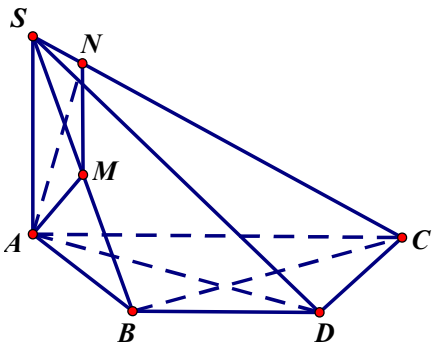
Vậy $k+l=-4$.

Câu 5: **(THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=2BC$ và $\widehat{BAC}=120°$. Hình chiếu vuông góc của A lên các đoạn SB và SC lần lượt là M và N. Góc của hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $15°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90°$.

Ta có $\begin{cases}BD\perp BA\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAB)$ hay $BD\perp AM$ và $AM\perp SB$ hay

$AM\perp(SBD)\Rightarrow AM\perp SD$. Chứng minh tương tự ta được $AN\perp SD$. Suy ra $SD\perp(AMN)$,

mà $SA\perp(ABC)\Rightarrow((ABC),(AMN))=(SA,SD)=\widehat{DSA}$.

Ta có $BC=2R\sin A=AD.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SA=2BC=AD\sqrt{3}$.

Vậy $\tan\widehat{ASD}=\dfrac{AD}{SA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{ASD}=30°$.

Câu 6: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng $60°$, cạnh SC vuông góc với đáy và $SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Giá trị lượng giác cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $SC\perp(ABCD)\Rightarrow SC\perp BD$.

Từ $\begin{cases}BD\perp SC\\BD\perp AC\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$.

Kẻ $CK\perp SO$, từ $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp CK$. Như vậy $CK\perp(SBD)\Rightarrow CK\perp SD$.

Kẻ $CH\perp SD$, do $CK\perp SD$ nên suy ra $SD\perp(CHK)$.

Mặt khác $(CHK)\cap(SBD)=HK$ và $(CHK)\cap(SCD)=CK$ nên góc giữa hai mặt phẳng

(SBD) và (SCD) bằng $\widehat{CHK}$.

Trong tam giác SCD vuông tại C, ta có:

$$\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CD^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng $60°$ nên $CO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SCO vuông tại C, ta có:

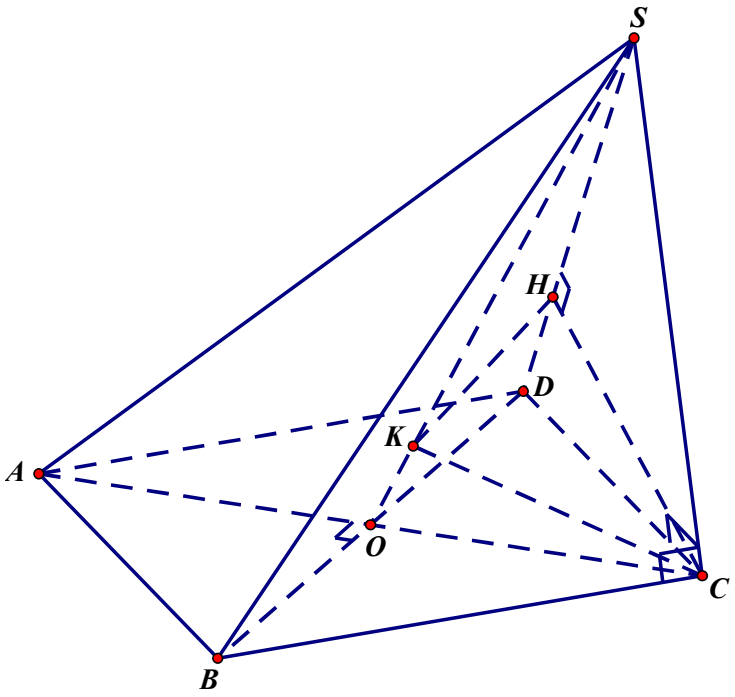
$$\frac{1}{CK^2}=\frac{1}{CO^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow CK=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Xét tam giác CHK vuông tại K, ta có

$$HK=\sqrt{CH^2-CK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{5}-\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{10}}.$$

$$\cos\widehat{CHK}=\frac{HK}{CH}=\frac{a}{\sqrt{10}}:\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy, cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

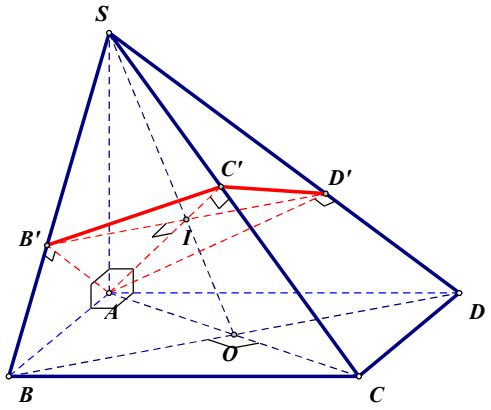


Câu 7: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45^0. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy $\widehat{SBA}=45°$. Ta có $B'D'\perp SC$ và $BD\perp SC$ và SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD), suy ra $BD//B'D'$. Nên từ $I=SO\cap AC'$ nên từ I kẻ $B'D'//BD$ cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

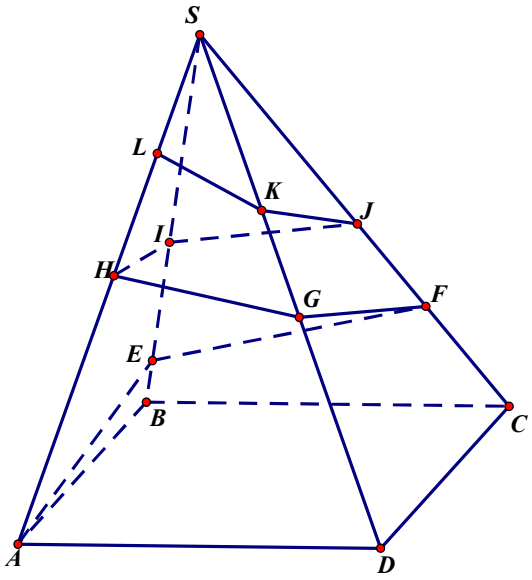
Từ trên suy ra $B'D'\perp AC'$ và $\begin{cases}AB'\perp SC\\AB'\perp BC\end{cases}\Rightarrow AB'\perp SB$.

Suy ra $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'$. Mà $AC'=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $\frac{B'D'}{BD}=\frac{SB'}{SB}=\frac{a\sqrt{2}}{2.a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow B'D'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

Câu 8: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Người ta cần trang trí một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $200\,\text{m}$, góc $\widehat{ASB}=15°$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định và $LS=40\,\text{m}$. Hỏi khi đó cần dung ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

A. $40\sqrt{67}+40$ mét. **B.** $20\sqrt{111}+40$ mét. **C.** $40\sqrt{31}+40$ mét. **D.** $40\sqrt{111}+40$ mét.

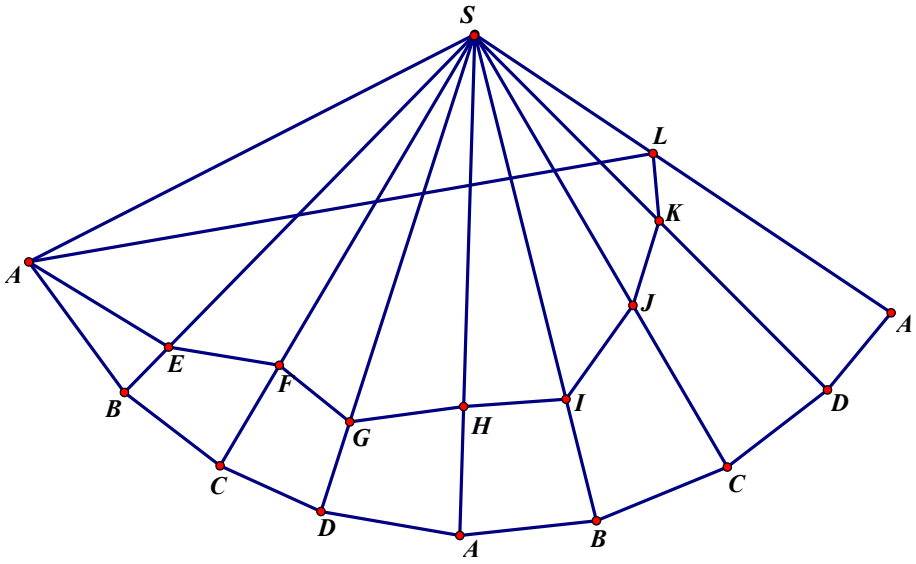


Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta sử dụng phương pháp trải đa diện

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải ra mặt phẳng hai lần, ta có hình vẽ sau



Từ đó suy ra chiều dài dây đèn led ngắn nhất là bằng $AL + LS$.

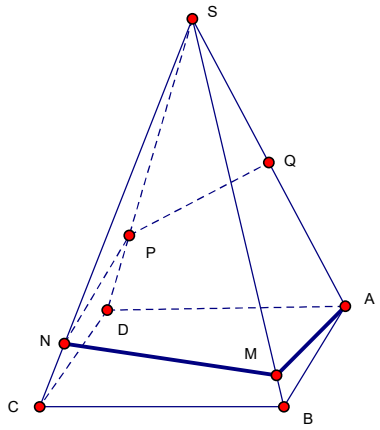
Từ giả thiết về hình chóp đều $S.ABCD$ ta có $\widehat{ASL} = 120°$.

Ta có $AL^2 = SA^2 + SL^2 - 2SA.SL.\cos\widehat{ASL} = 200^2 + 40^2 - 2.200.40.\cos 120° = 49600$.

Nên $AL = \sqrt{49600} = 40\sqrt{31}$.

Vậy, chiều dài dây đèn led cần ít nhất là $40\sqrt{31} + 40$ mét.

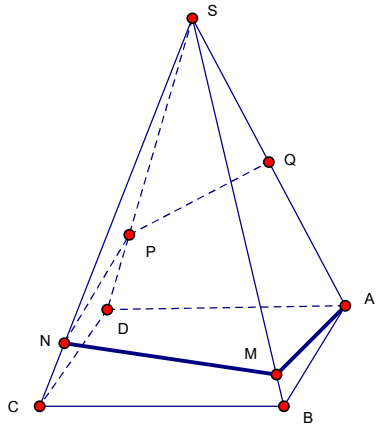
Câu 1: **(THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018)** Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một ngọn tháp đèn lộng lẫy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA=600$ mét, $\widehat{ASB}=15°$. Do có sự cố đường dây điện tại điểm Q (là trung điểm của SA) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn thẳng: AM, MN, NP, PQ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q ngắn nhất. Tính tỉ số $k=\dfrac{AM+MN}{NP+PQ}$.



A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

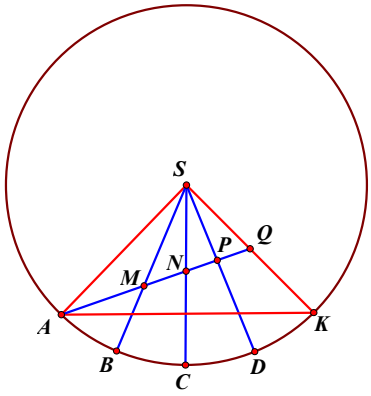
Lời giải

Chọn A



Giả sử trải các mặt hình chóp đều trên đường tròn tâm S và bán kính $R=SA$. Ta có $\Delta SAA'$ có $\widehat{ASA'}=15°.4=60°\Rightarrow \Delta SAA'$ đều.

Mà đoạn đường AQ ngắn nhất khi A, M, N, P, Q thẳng hàng. Khi đó N là trọng tâm $\Delta SAA'$. Suy ra $k=\dfrac{AM+MN}{NP+PQ}=\dfrac{AN}{NQ}=2$.

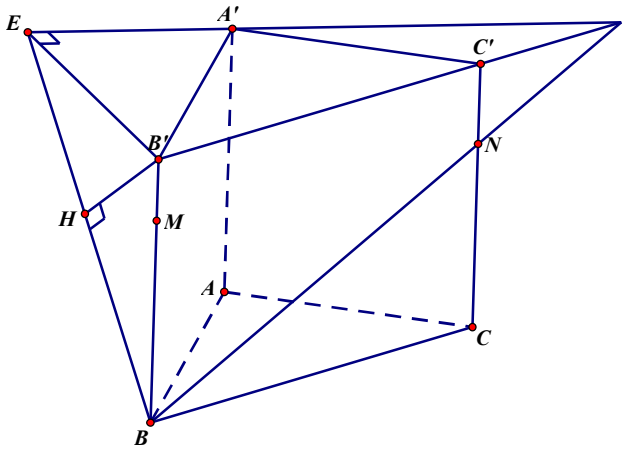


Câu 2: **(THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=1$, $AC=2$, $AA'=3$ và $\widehat{BAC}=120°$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM=3B'M$; $CN=2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

A. $\dfrac{9\sqrt{138}}{184}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{138}}{46}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{138}}{46}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC\cos\widehat{BAC}=1^2+2^2-2.1.2.\cos120°=7$. Suy ra $BC=\sqrt{7}$.

Ta cũng có $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{1^2+\sqrt{7}^2-2^2}{2.1.\sqrt{7}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, suy ra $\cos\widehat{A'B'C}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Gọi $D=BN\cap B'C'$, suy ra $\dfrac{DC'}{DB'}=\dfrac{C'N}{B'B}=\dfrac{1}{3}$, nên $DB'=\dfrac{3}{2}B'C'=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

Từ đó, ta có

$$A'D^2=A'B'^2+B'D^2-2.A'B'.B'D.\cos\widehat{A'B'D}=1^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2-2.1.\frac{3\sqrt{7}}{2}.\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{43}{4}.$$

Hay $A'D=\dfrac{\sqrt{43}}{2}$.

Kẻ $B'E\perp A'D$ và $B'H\perp BE$, suy ra $B'H\perp(A'BN)$, do đó $d\left(B';(A'BN)\right)=B'H$.

Từ $\cos \widehat{A'B'C} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \widehat{A'B'C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Do đó $S_{A'B'D} = \frac{1}{2}.A'B'.B'D.\sin \widehat{A'B'D} = \frac{1}{2}.1.\frac{3\sqrt{7}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2.\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$.

$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{BB'^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}$.

Từ $BM = 3B'M$ suy ra

$d\left(M;\left(A'BN\right)\right) = \frac{3}{4}d\left(B';\left(A'BN\right)\right) = \frac{3}{4}.B'H = \frac{3}{4}.\sqrt{\frac{27}{46}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}$.

Cách 2:

Trong ΔABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

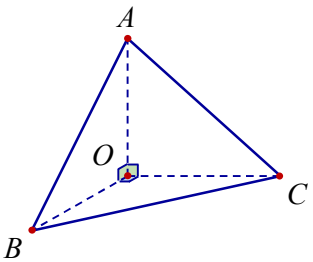
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A \Rightarrow \begin{cases} AH = \frac{\sqrt{21}}{7} \\ BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ CH = \frac{5\sqrt{7}}{7} \end{cases}$.

Gắn hình lăng trụ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ(☹Vẽ hình nhé)

Ta có: $H\left(0;0;0\right)$, $A\left(0;-\frac{\sqrt{21}}{7};0\right)$, $B\left(\frac{2\sqrt{7}}{7};0;0\right)$, $C\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7};0;0\right)$, $A'\left(0;-\frac{\sqrt{21}}{7};3\right)$,

$M\left(\frac{2\sqrt{7}}{7};0;\frac{9}{4}\right)$, $N\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7};0;2\right)$. Khi đó $d\left(M,\left(A'BN\right)\right) = \frac{9\sqrt{138}}{184}$.

Câu 3: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \left(3+\cot^2\alpha\right).\left(3+\cot^2\beta\right).\left(3+\cot^2\gamma\right)$ là

A. Số khác. **B.** $48\sqrt{3}$. **C.** 48. **D.** 125.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có $OH \perp (ABC)$ và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Ta có $\alpha = \widehat{(OA;(ABC))} = \widehat{OAH}$, $\beta = \widehat{(OB;(ABC))} = \widehat{OBH}$, $\gamma = \widehat{(OC;(ABC))} = \widehat{OCH}$.

Nên $\sin\alpha = \frac{OH}{OA}$, $\sin\beta = \frac{OH}{OB}$, $\sin\gamma = \frac{OH}{OC}$.

Đặt $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $h = OH$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ và

$$M = (3 + \cot^2\alpha).(3 + \cot^2\beta).(3 + \cot^2\gamma) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right).\left(2 + \frac{1}{\sin^2\beta}\right).\left(2 + \frac{1}{\sin^2\gamma}\right)$$

$$= \left(2 + \frac{a^2}{h^2}\right).\left(2 + \frac{b^2}{h^2}\right).\left(2 + \frac{c^2}{h^2}\right) = 8 + 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right).\frac{1}{h^2} + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).\frac{1}{h^4} + a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}.$$

Ta có: $\left(a^2 + b^2 + c^2\right).\frac{1}{h^2} = \left(a^2 + b^2 + c^2\right).\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2}.3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}} = 9$.

$$\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).\frac{1}{h^4} = \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2.b^2c^2.c^2a^2}.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^2 = 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}.9\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}} = 27.$$

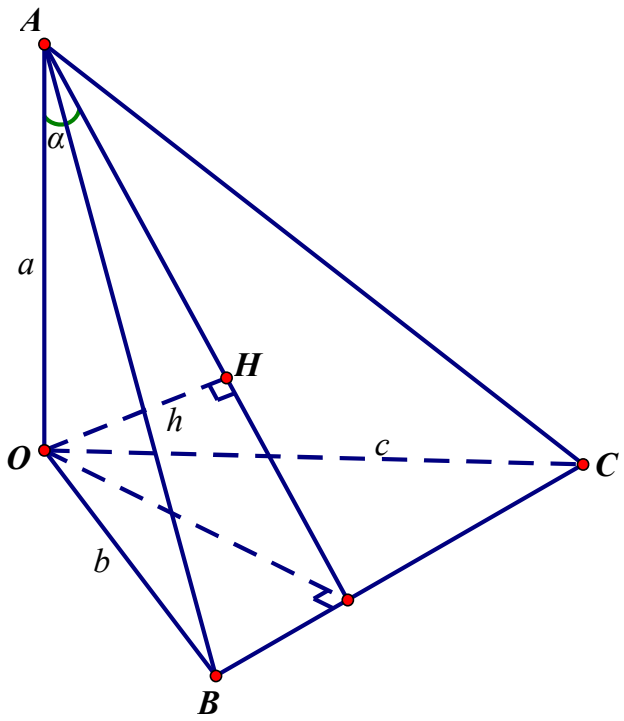
$$a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6} = a^2b^2c^2.\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^3 \geq a^2b^2c^2.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^3 = 27.$$

Do đó: $M = 8 + 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right).\frac{1}{h^2} + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).\frac{1}{h^4} + a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}$

$\geq 8 + 4.9 + 2.27 + 27 = 125$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OA = OB = OC$.

Vậy $\min M = 125$.



Câu 4: **(THPT Hồng Lĩnh-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Khi thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

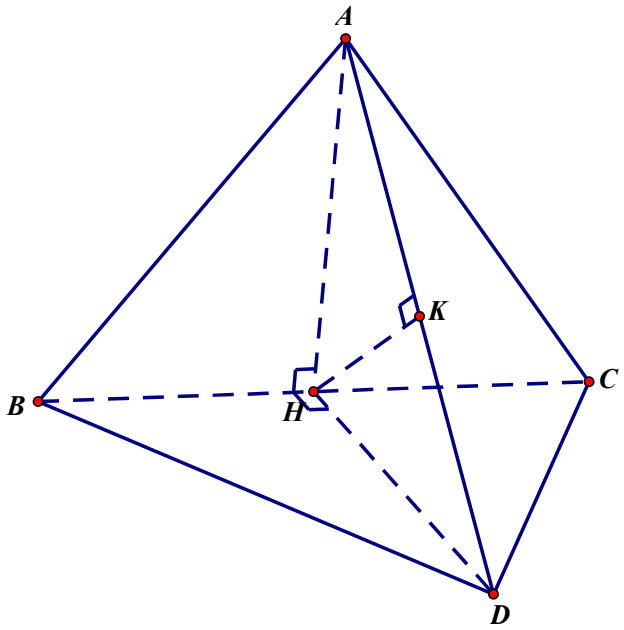
Chọn A

Gọi H, K lần lượt là trung điểm BC, AD.

Vì $AB = AC = BD = CD = 1$ nên $AH \perp BC$ và $DH \perp BC$, suy ra $BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp HK$.

Mặt khác $\Delta ABC = \Delta DBC$ nên $AH = DH$, suy ra $HK \perp AD$.

Như vậy, HK là đường vuông góc chung của đường thẳng AD và BC. Bởi vậy $d(AD; BC) = HK$.



Đặt $BC=2x$, $AD=2y$, với $0<x<1$ và $0<y<1$.

Ta có $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1-x^2}$, $HK=\sqrt{AH^2-AK^2}=\sqrt{1-x^2-y^2}$, với $x^2+y^2<1$.

Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ là

$V=V_{B.AHD}+V_{C.AHD}=\frac{1}{3}S_{AHD}.(BH+CH)$

$=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AD.HK.BC=\frac{1}{6}.2y.2x.\sqrt{1-x^2-y^2}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2\left(1-x^2-y^2\right)}$.

Mặt khác $x^2y^2\left(1-x^2-y^2\right)\le\left(\frac{x^2+y^2+\left(1-x^2-y^2\right)}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

Nên $V=\frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2\left(1-x^2-y^2\right)}\le\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

Do đó, thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất là bằng $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ khi và chỉ khi:

$x^2=y^2=1-x^2-y^2.\Rightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

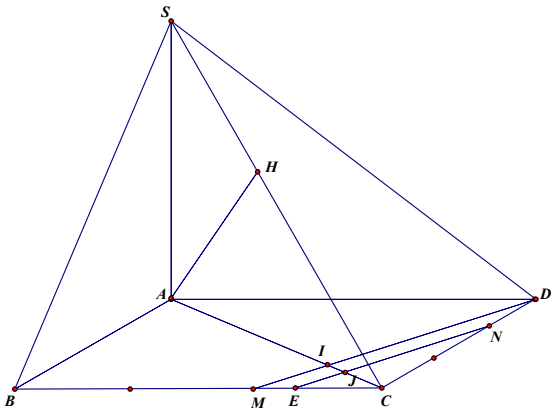
Khi đó $HK=\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ và $d\left(AD;BC\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

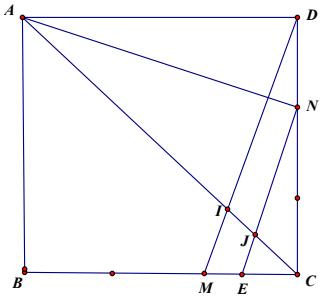
Câu 5: ----------**HẾT**----------**(THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc cạnh đáy BC và CD sao cho $BM=2MC$ và $CN=2ND$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau DM và SN.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{730}}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{370}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{370}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{730}}$.

Lời giải

Chọn B





- Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$ là góc giữa SB và mặt phẳng đáy $\Rightarrow SA = AB.\tan 60° = 3\sqrt{3}$.

- Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $NE \,//\, DM$ cắt BC tại E, cắt AC tại J.

Gọi I là giao điểm của DM và AC.

Ta có: $DM \,//\, NE \Rightarrow DM \,//\, (SNE) \Rightarrow d(DM;SN) = d(DM;(SNE)) = d(I;(SNE))$.

Do $NE \,//\, DM \Rightarrow \dfrac{CJ}{CI} = \dfrac{CE}{CM} = \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ = \dfrac{1}{3}IC$.

Lại có: $BC \,//\, AD \Rightarrow \dfrac{IC}{IA} = \dfrac{CM}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IC = \dfrac{1}{3}IA \Rightarrow IJ = \dfrac{1}{9}IA \Rightarrow IJ = \dfrac{1}{10}AJ$

Mặt khác: $\dfrac{d(I;(SNE))}{d(A;(SNE))} = \dfrac{IJ}{AJ} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow d(I;(SNE)) = \dfrac{1}{10}d(A;(SNE))$.

- Xét tam giác DAN và tam giác CDM có: $DA = CD$, $DN = CM$, $\widehat{ADN} = \widehat{DCM} = 90°$

$\Rightarrow \Delta DAN = \Delta CDM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{CDM} \Rightarrow \widehat{DAN} + \widehat{ADM} = \widehat{CDM} + \widehat{ADM} = 90°$

$\Rightarrow AN \perp DM \Rightarrow AN \perp NE \Rightarrow NE \perp (SAN) \Rightarrow (SNE) \perp (SAN)$ (có giao tuyến là SN).

- Dựng $AH \perp SN$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SNE) \Rightarrow AH = d(A;(SNE))$.

- Ta có: $SA = 3\sqrt{3}$, $AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{10}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{27} + \frac{1}{10} = \frac{37}{270} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{30}}{\sqrt{37}}$$

$$\Rightarrow d(DM;SN) = \frac{1}{10}AH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{370}}.$$

Câu 6: **(THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f(x^2) \Rightarrow y' = (x^2)' f'(x^2)$, hay $y' = 2xf'(x^2)$.

Mặt khác $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$ nên $y'=2xf'(x^2)=2x.(x^2)^2(x^2-9)(x^2-4)^2$.

Do đó $y'=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

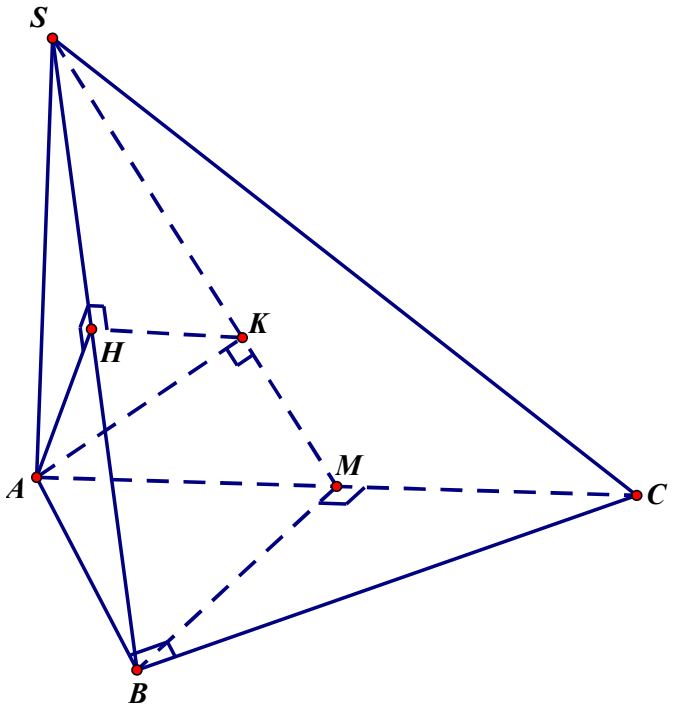
Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

Câu 7: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côtang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH\perp SB$ và $AK\perp SM$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $BC=a$ cùng với $SA\perp(ABC)$ nên suy ra $BM\perp(SAC)$ và $BM=AM=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $BM\perp AK$.

Từ $BM\perp AK$ và $AK\perp SM$ suy ra $AK\perp(SBM)\Rightarrow AK\perp SB$.

Từ $AH\perp SB$ và $AK\perp SB$ ta có $(AHK)\perp SB$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng hoặc bù với góc $\widehat{AHK}$.

Ta có:

$$AH=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$AK=\frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Từ $\left(AHK\right)\perp SB$ ta có $HK\perp SB$ nên $\Delta SHK\sim\Delta SMB$, do đó $\frac{HK}{MB}=\frac{SK}{SB}$.

Mặt khác

$$SK.SM=SA^2\Rightarrow SK=\frac{SA^2}{SM}=\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{3a\sqrt{14}}{7};$$

$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=2a$;

Nên $\frac{HK}{MB}=\frac{SK}{SB}=\frac{3\sqrt{14}}{14}\Rightarrow HK=\frac{3\sqrt{14}}{14}.MB=\frac{3\sqrt{14}}{14}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{3a\sqrt{7}}{14}.$

Trong tam giác AHK ta có:

$$\cos\widehat{AHK}=\frac{AH^2+HK^2-AK^2}{2.AH.HK}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{7}}{14}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBM\right)$ và $\left(SAB\right)$ là α với $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

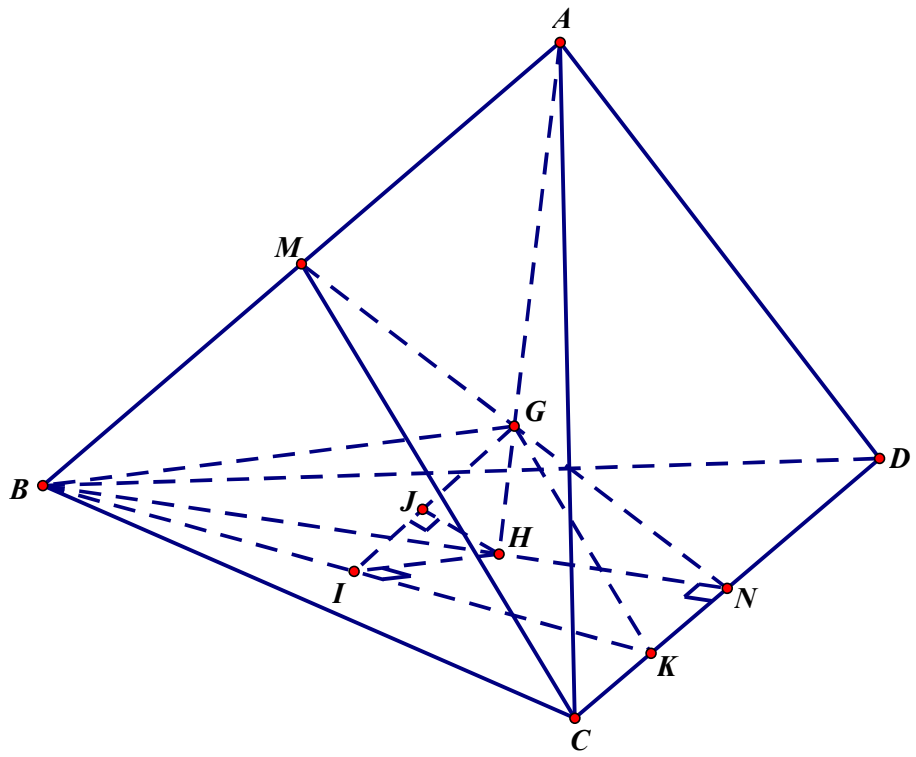
Bởi vậy: $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: **(THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018)** Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và M là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BG và CM bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm CD, khi đó G là trung điểm MN và x đi qua trọng tâm H của tam giác BCD. Ta có $AH \perp (BCD)$ và $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $GH = \frac{1}{4}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Gọi K là trung điểm CN thì $GK // CM$ nên $CM // (BGK)$. Do đó:

$d(BG;CM) = d(C;(BGK)) = d(N;(BGK)) = \frac{3}{2}d(H;(BGK))$.

Kẻ $HI \perp BK$, $HJ \perp GI$ với $I \in BK$, $J \in GI$. Khi đó $HJ \perp (BGK)$ và $HJ = d(H;(BGK))$.

Ta có $BK = \sqrt{BN^2 + NK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ta có $HI = BH.\sin\widehat{KBN} = BH.\frac{KN}{BK} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{26}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}$.

Do đó: $HJ = \frac{HI.HG}{\sqrt{HI^2 + HG^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}.\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$.

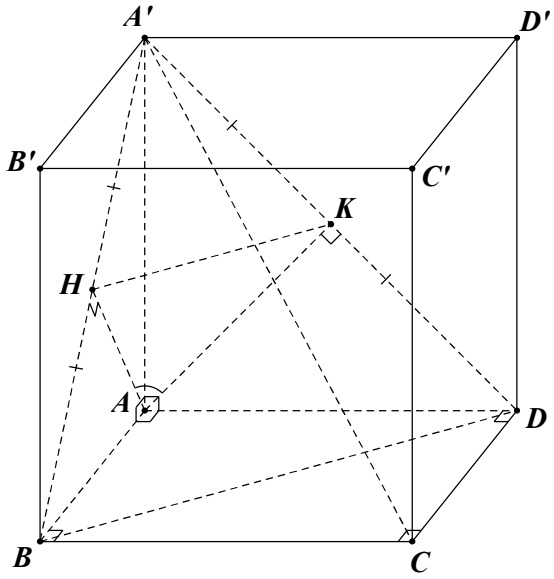
Vậy $d(BG;CM) = \frac{3}{2}d(H;(BGK)) = \frac{3}{2}HJ = \frac{3}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$.

Câu 9: ----------HẾT----------**(THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $120°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AH \perp (BA'C), AK \perp (DA'C)$ với H, K lần lượt là trung điểm của $A'B, A'D$

Suy ra $\widehat{((BA'C);(DA'C))} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK}$

Lại có: HK là đường trung bình của $\Delta A'BD$ nên $HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Mặt khác: $AH = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $AH = AK = HK = a\sqrt{2}$

Suy ra ΔAHK đều

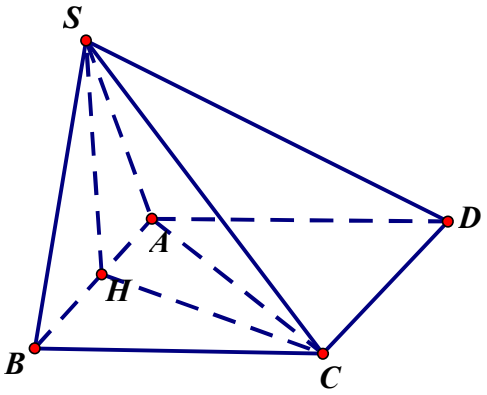
Vậy $\widehat{((BA'C);(DA'C))} = \widehat{HAK} = 60°$.

Câu 10: ----------HẾT----------**(Chuyên ĐB Sông Hồng –Lần 1 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{35}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn B



$\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=\left(SC,CH\right)=\widehat{SCH}=60^0$.

$\cos\left(SB,AC\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}\right|}{SB.AC}$

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{HB}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}AB^2=2a^2$

$AC=a\sqrt{5}$, $CH=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$, $SH=CH.\tan\widehat{SCH}=a\sqrt{6}$.

$SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2+a^2}=a\sqrt{7}$.

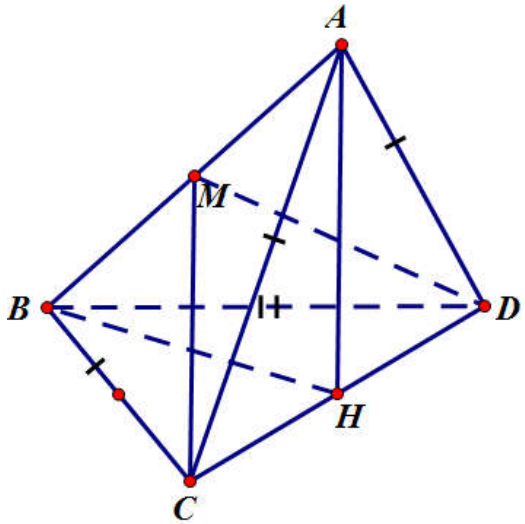
$\cos\left(SB,AC\right)=\dfrac{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}}{SB.AC}=\dfrac{2a^2}{a\sqrt{7}.a\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{35}}$.

Câu 11: ----------**HẾT**----------**(THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=AD=BC=BD=a$ và hai mặt phẳng $\left(ACD\right)$, $\left(BCD\right)$ vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh CD sao cho hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$, $\left(ABD\right)$ vuông góc.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của CD nên $AH \perp CD$

$\Leftrightarrow AH \perp (BCD)$ (do $(ACD) \perp (BCD)$) và $(ACD) \cap (BCD) = CD$

Gọi M là trung điểm của AB nên $CM \perp AB$

Vì $(ABC) \perp (ABD)$ và $(ABC) \cap (ABD) = AB \Rightarrow CM \perp MD$.

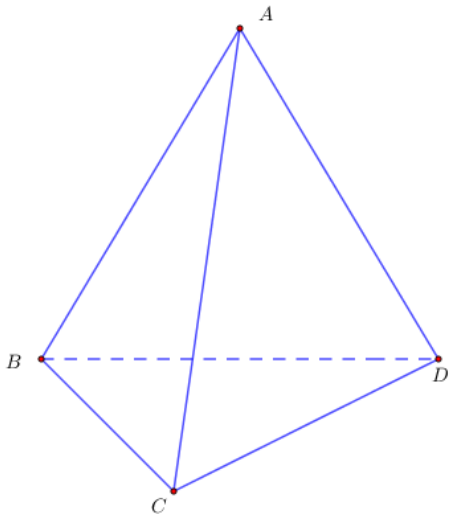
$\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ vuông cân tại M .

Đặt $CD = x \Rightarrow AH^2 = BH^2 = a^2 + \dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2a^2 + \dfrac{x^2}{2}$

Ta có $MH = \dfrac{1}{2} AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + \dfrac{x^2}{2}} \Leftrightarrow MH = \dfrac{\sqrt{2}}{2} CD \Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + \dfrac{x^2}{2}}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x$

$\Leftrightarrow 2a^2 + \dfrac{x^2}{2} = 2x^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 3x^2 x = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

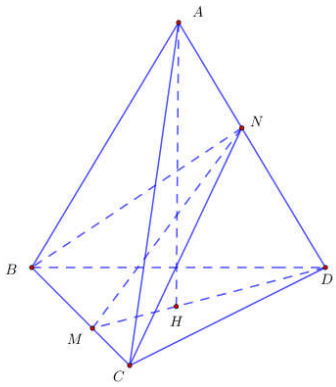
Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=3a$, $AC=a\sqrt{15}$, $BD=a\sqrt{10}$, $CD=4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng $45°$, khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD. Tính độ dài đoạn thẳng AD.



A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2\sqrt{2}a$. **C.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn D



Ta xét tích vô hướng

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}==AD.AC.\cos\widehat{A}-AD.AB.\cos\widehat{A}$

$=AD.AC.\frac{AD^2+AC^2-CD^2}{2AD.AC}-AD.AB.\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD.AB}$

$=\frac{AD^2+AC^2-CD^2}{2}-\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2}.$

$=\frac{AC^2+BD^2-CD^2-AB^2}{2}=\frac{15a^2+10a^2-16a^2-9a^2}{2}=0\Rightarrow AD\perp BC.$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) và $M=DH\cap BC$ suy ra M nằm giữa B và C.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp DM$.

Trong mặt phẳng (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại N, suy ra $\begin{cases} MN \perp BC \\ MN \perp AD \end{cases}$ suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AD và BC, do đó $d(AD;BC) = MN = \dfrac{5a}{4}$.

Vì $AH \perp (BCD)$ nên $\widehat{(AD;(BCD))} = \widehat{ADH} = 45°$. Đồng thời H nằm giữa D và M nên $\widehat{AMD} < 90°$ suy ra N nằm giữa A và D.

Ta có $DM = MN.\sqrt{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \dfrac{a\sqrt{110}}{4}$.

Ta có $\begin{cases} AD \perp MN \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (BNC) \Rightarrow AD \perp BN$.

$\Rightarrow AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{AB^2 - (BM^2 + MN^2)} = \sqrt{9a^2 - \left(\dfrac{110a^2}{16} + \dfrac{25a^2}{16}\right)} = \dfrac{3a}{4}$.

Mặt khác vì tam giác DMN vuông cân tại N nên $DN = MN = \dfrac{5a}{4}$.

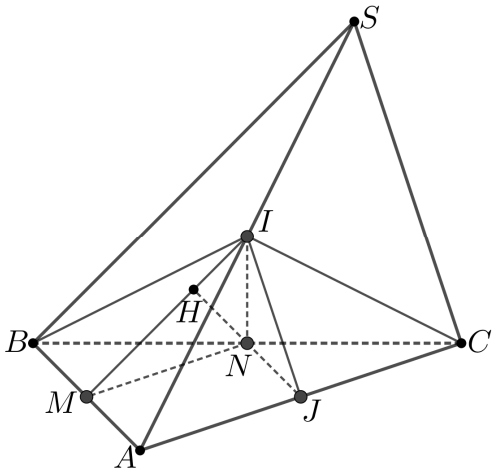
Do đó $AD = AN + DN = 2a$.

Câu 2: **(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. **D.** 1cm.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Xét tam giác ABC vuông tại A:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$V_{mc} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi I, J, M, N lần lượt là trung điểm SA, AC, AB, BC.

Do tam giác SAB, SAC lần lượt vuông góc tại B và C nên $IS = IA = IB = IC$.

Nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $IB = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Và IN vuông góc với (ABC) (do N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Ta có:

$\begin{cases} MN \perp AB \\ IN \perp AB \end{cases} \Rightarrow (IMN) \perp AB \Rightarrow (IMN) \perp (IAB)$

Trong (IMN): Dựng $NH \perp IM \Rightarrow NH \perp (IAB)$

$\Rightarrow d_{(N;(IAB))} = NH = d_{(N;(SAB))}$

$MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $IN = \sqrt{IB^2 - BN^2} = \dfrac{1}{2}$

Ta có $\dfrac{1}{NH^2} = \dfrac{1}{MN^2} + \dfrac{1}{IN^2} = \dfrac{4}{3} + 4 = \dfrac{16}{3} \Rightarrow NH = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

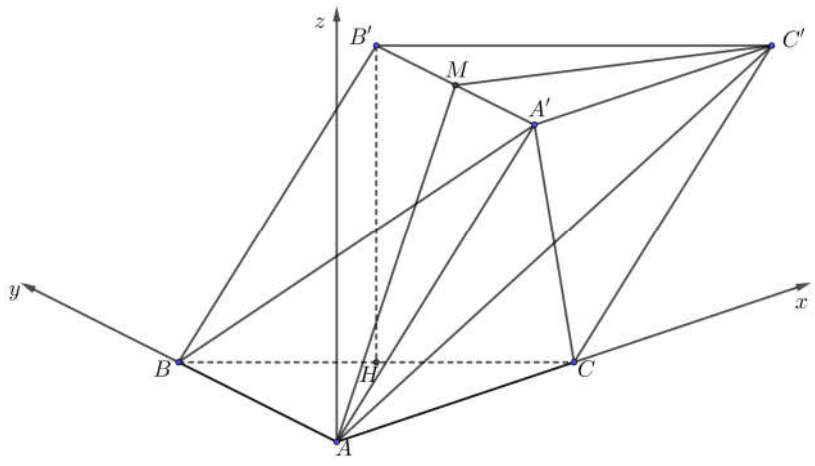
Lại có: $CN \cap (SAB) = B \Rightarrow \dfrac{d_{(C;(SAB))}}{d_{(N;(SAB))}} = \dfrac{BC}{BN} = 2 \Rightarrow d_{(C;(SAB))} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: **(SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC, M là trung điểm cạnh $A'B'$. Cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{11}{\sqrt{3157}}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$ **C.** $\dfrac{33}{\sqrt{3517}}$ **D.** $\dfrac{33}{\sqrt{3157}}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm BC.

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$

Xét tam giác $B'BH$ vuông tại H: $B'H^2 = \sqrt{BB'^2 - B'H^2} = 3$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có A trùng với O như hình vẽ

Với $A(0;0;0)$, $B(0;3;0), C(4;0;0) \Rightarrow H\left(2;\frac{3}{2};0\right)$ là trung điểm $BC \Rightarrow B'\left(2;\frac{3}{2};3\right)$

Do $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'} \Rightarrow A'\left(2;-\frac{3}{2};3\right); C'\left(6;-\frac{3}{2};3\right) \Rightarrow M(2;0;3)$

$\overrightarrow{AM}=(2;0;3); \overrightarrow{AC'}=\left(6;-\frac{3}{2};3\right)$ nên vectơ pháp tuyến (MAC') là $\vec{n}_{(MAC')}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC'}\right]$

$=\left(\frac{9}{2};12;-3\right)$

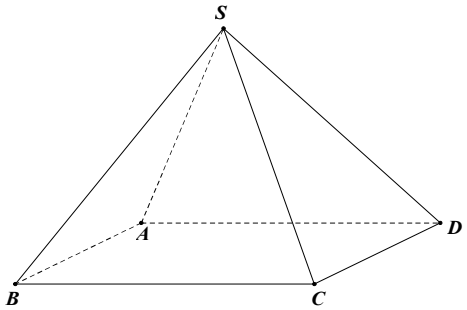
$\overrightarrow{A'B}=\left(-2;\frac{9}{2};-3\right)$; $\overrightarrow{A'C}=\left(2;\frac{3}{2};-3\right)$ nên vectơ pháp tuyến $(A'BC)$ là $\vec{n}_{(A'BC)}=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]$

$=(-9;-12;-12)$

Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$.

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_{(MAC')}.\vec{n}_{(A'BC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(MAC')}\right|.\left|\vec{n}_{(A'BC)}\right|}=\frac{\left|\frac{9}{2}.(-9)+12.(-12)-3.(-12)\right|}{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+12^2+(-3)^2}.\sqrt{(-9)^2+(-12)^2+(-12)^2}}=\frac{33}{\sqrt{3157}}.$$

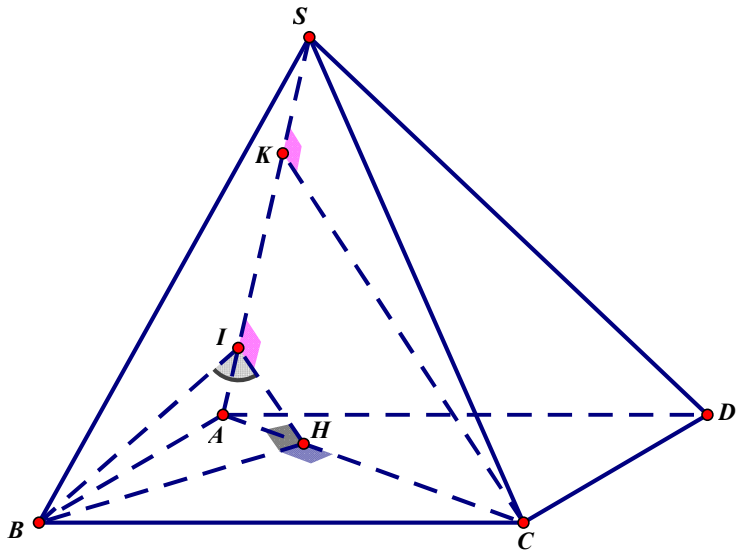
Câu 4: ----------**HẾT**----------**(THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3, BC=4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng:



A. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\frac{3\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\frac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\frac{5\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn B



- Dựng $BH \perp AC$ tại H, theo giả thiết suy ra $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SA$.

- Dựng $HI \perp SA$ tại $I \Rightarrow SA \perp (BHI) \Rightarrow \widehat{BIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

- Dựng $CK \perp SA$ tại $K \Rightarrow CK = 4$ là khoảng cách từ C đến SA.

- Ta có: $BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{3.4}{5} = \dfrac{12}{5} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{9}{5}$.

$IH // CK \Rightarrow \dfrac{HI}{CK} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow HI = \dfrac{9}{25}.CK = \dfrac{36}{25}$

$\Rightarrow \tan \widehat{BIH} = \dfrac{BH}{HI} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \cos \widehat{BIH} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \widehat{BIH}}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

Vậy $\cos \widehat{BIH} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.

Câu 5: Cho hình lập phương, mỗi cặp đỉnh của nó xác định một đường thẳng. Trong các đường thẳng đó, tìm số các cặp đường thẳng (không tính thứ tự) không đồng phẳng và không vuông góc với nhau.

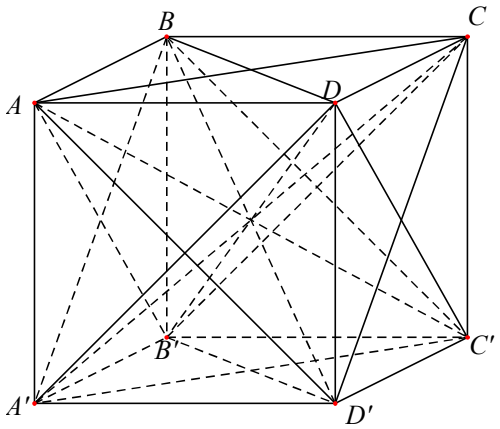
A. 132. **B.** 96. **C.** 192. **D.** 108.

Câu 6: Cho hình lập phương, mỗi cặp đỉnh của nó xác định một đường thẳng. Trong các đường thẳng đó, tìm số các cặp đường thẳng (không tính thứ tự) không đồng phẳng và không vuông góc với nhau.

A. 132. **B.** 96. **C.** 192. **D.** 108.

Lời giải

Chọn B



Chia làm ba loại gồm: 12 cạnh; 12 đường chéo phụ là đường chéo của các hình vuông là mặt của hình lập phương và 4 đường chéo chính của hình lập phương.
+ Nhận thấy các cạnh hoặc đồng phẳng, hoặc là vuông góc nên không có cặp cạnh nào thỏa mãn yêu cầu bài toán. Cả bốn đường chéo chính cũng vậy.
+ Chọn 1 cạnh bất kỳ, tương ứng với cạnh đó có đúng 2 đường chéo chính, và 4 đường chéo phụ kết hợp với cạnh tạo thành cặp đường thẳng thỏa bài toán, do đó có $12.(2+4)=72$ cặp.
+ Đường chéo chính và đường chéo phụ bất kỳ không thỏa mãn bài toán.
+ Chọn một đường chéo phụ bất kỳ, có đúng 4 đường chéo phụ khác kết hợp với đường chéo phụ đã chọn tạo thành cặp đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vì số lần đếm gấp đôi nên số cặp đường chép phụ thỏa bài toán là : $\frac{12.4}{2}=24$ cặp.
Vậy có $72+24=96$ cặp đường thẳng thỏa bài toán.

Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng

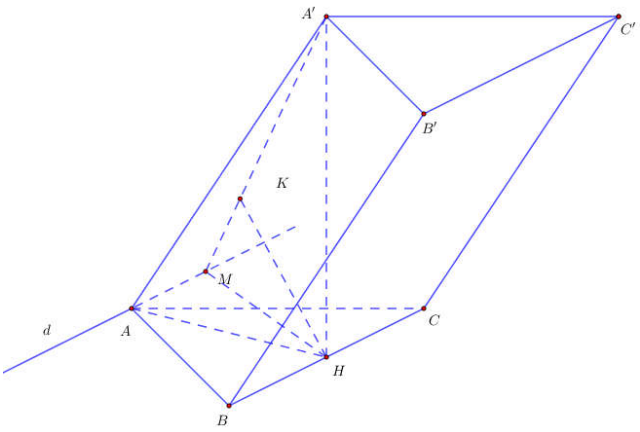
A. $a\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

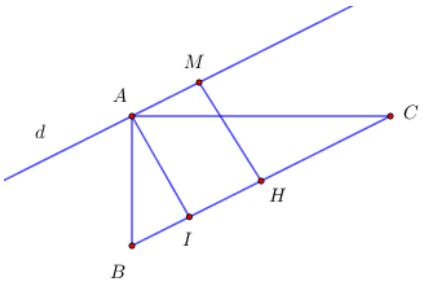
Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng

A. $a\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C





Gọi H là trung điểm của BC

Ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$ suy ra $AH=\dfrac{1}{2}BC=a$ và

$A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{7a^2-a^2}=a\sqrt{6}$

Từ A ta dựng đường thẳng d song song với BC, kẻ $HM\perp d$ tại M và $HK\perp AM$ tại K.

Ta có $\begin{cases}AM\perp MH\\AM\perp A'H\end{cases}\Rightarrow AM\perp(A'MH)\Rightarrow AM\perp HK$.

Ta có $\begin{cases}HK\perp AM\\HK\perp A'M\end{cases}\Rightarrow HK\perp(A'AM)$.

Do đó

$d(AA';B'C')=d(BC;(A'AM))=d(H;(A'AM))=HK$.

Ta có $HM=AI=\sqrt{\dfrac{AB^2.AC^2}{AB^2+AC^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2.3a^2}{a^2+3a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Xét tam giác $A'HM$ vuông tại H ta có

$HK=\sqrt{\dfrac{MH^2.A'H^2}{MH^2.A'H^2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{3}{4}a^2.6a^2}{\frac{3}{4}a^2+6a^2}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (HMN) bằng

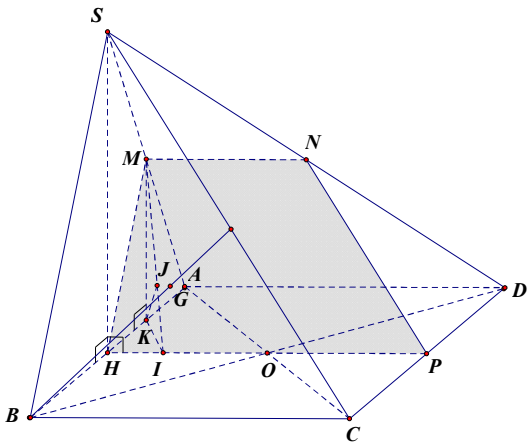
A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{30}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, SD và G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (HMN) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{30}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $MK//SH,\ KI\perp HO,\ KJ\perp MI\Rightarrow KJ\perp (HMN)\equiv(\alpha).$

Chứng minh được $(SBC)//(\alpha)\Rightarrow d(G;(\alpha))=d(S;(\alpha))=d(A;(\alpha))=2d(K;(\alpha))=2KJ.$

Tính được $KI=\frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{8},\ MK=\frac{SH}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$

Suy ra $KJ=\frac{KI.KM}{\sqrt{KI^2+KM^2}}=\frac{a\sqrt{15}}{20}.$ Vậy $d(G;(\alpha))=2KJ=2.\frac{a\sqrt{15}}{20}=\frac{a\sqrt{15}}{10}.$

Câu 11: Cho tam giác ABC có $BC=a$, $\widehat{BAC}=135°$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA=a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

----------HẾT----------

BẢNG ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ 177

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	C	A	A	D	B	D	B	C	B	C	A	C	D	B	C	C	B	A	C	B	B	A	A

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	D	B	C	B	D	A	A	B	D	C	C	C	D	B	A	B	A	A	C	A	D	D	A	B

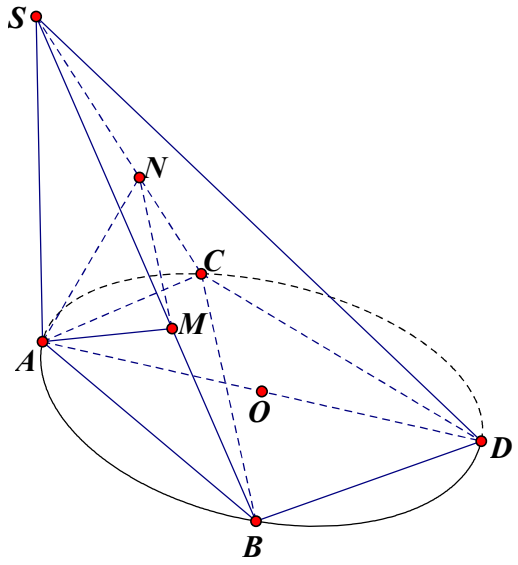
HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 12: Cho tam giác ABC có $BC=a$, $\widehat{BAC}=135°$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA=a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DC \perp AN \\ SC \perp AN \end{array}\right\} \Rightarrow AN \perp (SDC) \Rightarrow AN \perp SD$ (1).

Tương tự: $\begin{cases} SA \perp DB \\ AB \perp DB \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DB \perp AM \\ SB \perp AM \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$. Mà $SA \perp (ABC)$.

Suy ra $((ABC);(AMN)) = (\widehat{SA;SD}) = \widehat{ASD}$.

Ta có: $AD = 2R = \dfrac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}$.

ΔASD có: $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = 1 \Rightarrow \widehat{ASD} = 45°$.

Câu 13: ----------HẾT----------Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $AA' = BD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là điểm H nằm trên đoạn thẳng $B'D'$ sao cho $B'D' = 3B'H$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

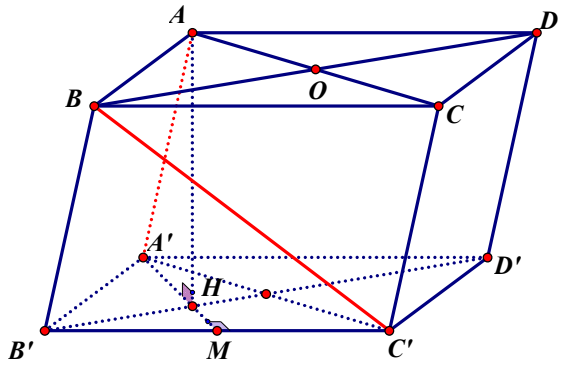
A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $AA' = BD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là điểm H nằm trên đoạn thẳng $B'D'$ sao cho $B'D' = 3B'H$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



$BD = a\sqrt{3} \Rightarrow BO = DO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$\Rightarrow A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ với M là trung điểm $B'C'$.

$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $d(AA', BC') = d\left((ADDA'), (BCC'B')\right) = d\left(A', (BB'C')\right) = d$

$V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.AH = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

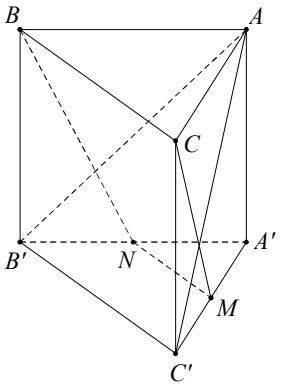
Mặt khác $V_{B.A'B'C'} = V_{A'.BB'C'} = \frac{1}{3}S_{BB'C'}.d\left(A', (BB'C')\right)$.

Xét $\Delta AHD'$ vuông tại H ta có $AD' = \sqrt{AH^2 + HD^2} = 2a$.

Nửa chu vi $\Delta BB'C'$ là $p = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a$.

Suy ra $d = \frac{3V_{A'.BB'C'}}{S_{BB'C'}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.



A. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{130}$. **C.** $-\frac{\sqrt{13}}{130}$. **D.** $-\frac{\sqrt{13}}{65}$.

----------HẾT----------

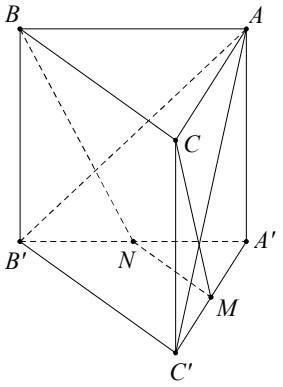
BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	D	B	D	C	D	C	D	C	A	D	A	C	D	C	B	D	A	C	B	C	A	C	D

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	B	D	A	D	A	B	A	B	C	C	D	B	C	B	B	C	A	C	A	D	A	B	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.



A. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{130}$. **C.** $-\frac{\sqrt{13}}{130}$. **D.** $-\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O\equiv N$. Ta có

$N(0;0;0)$, $A\left(0;\sqrt{3};2\right)$, $B'\left(0;-\sqrt{3};0\right)$, $C'(3;0;0)$, $B\left(0;-\sqrt{3};2\right)$.

Suy ra

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB'}=\left(0;-2\sqrt{3};-2\right)\\ \overrightarrow{AC'}=\left(3;-\sqrt{3};-2\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{n_1}=\left(2\sqrt{3};-6;6\sqrt{3}\right)$$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'C')$.

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\left(3;\sqrt{3};0\right)\\ \overrightarrow{BN}=\left(0;\sqrt{3};-2\right)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=\left(-2\sqrt{3};6;3\sqrt{3}\right)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(BCMN\right)$.

Vậy $\cos\left(\left(AB'C'\right),\left(BCMN\right)\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$

$=\dfrac{6}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(-6\right)^2+\left(6\sqrt{3}\right)^2}.\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+\left(6\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=BC=a$ và $\widehat{BAC}=60^{\circ}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(AHK\right)$ và $\left(ABC\right)$.

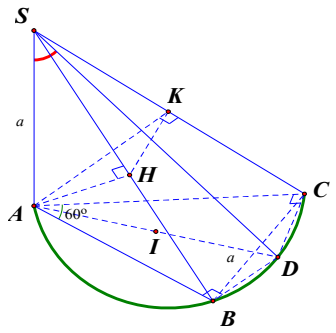
A. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=BC=a$ và $\widehat{BAC}=60^{\circ}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(AHK\right)$ và $\left(ABC\right)$.

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA\perp\left(ABC\right)$ $\left(1\right)$.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, kẻ đường kính AD ta có $BD\perp\left(SAB\right)$ và $CD\perp\left(SAC\right)$.

Từ đó suy ra $AH\perp\left(SBD\right)$ và $AK\perp\left(SCD\right)$. Do đó $SD\perp\left(AHK\right)$ $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $\left(\left(ABC\right);\left(AHK\right)\right)=\left(SA;SD\right)=\widehat{DSA}$.

Trong ΔABC có $\dfrac{BC}{\sin A}=2R$ hay $AD=2R=\dfrac{a}{\sin 60^{\circ}}\Leftrightarrow AD=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Trong ΔASD có $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

Vậy $\cos\left(\left(ABC\right);\left(AHK\right)\right)=\cos\widehat{DSA}=\dfrac{SA}{SD}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a$, $AD=a$. Gọi K là điểm thuộc BC sao cho $3\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK.

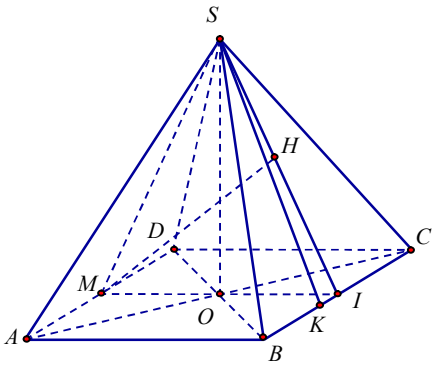
A. $\frac{\sqrt{165}a}{15}$. **B.** $\frac{2\sqrt{165}a}{15}$. **C.** $\frac{2\sqrt{135}a}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{135}a}{15}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a$, $AD=a$. Gọi K là điểm thuộc BC sao cho $3\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK.

A. $\frac{\sqrt{165}a}{15}$. **B.** $\frac{2\sqrt{165}a}{15}$. **C.** $\frac{2\sqrt{135}a}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{135}a}{15}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ thì SO là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{4a^2-\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Do $SK\subset(SBC)$ mà $BC//AD$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK là khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC) không phụ thuộc SK.

Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC, AD suy ra $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Trong tam giác SMI dựng đường cao MH thì MH là khoảng cách cần tìm.

Ta có: $MH.SI=SO.MI\Leftrightarrow MH=\frac{SO.MI}{SI}=\frac{2a\sqrt{165}}{15}$.

Câu 21: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3, CD=4, \widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{ADC}=90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°. Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

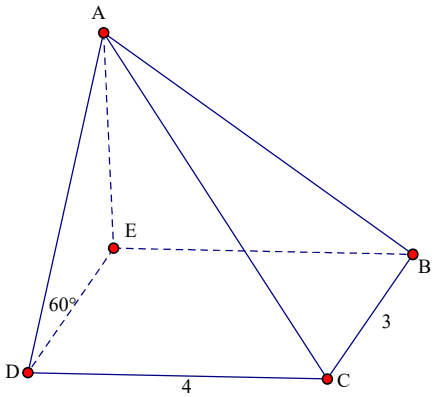
A. $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. **B.** $\frac{\sqrt{43}}{86}$. **C.** $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

Câu 22: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3, CD=4, \widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{ADC}=90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°. Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. **B.** $\frac{\sqrt{43}}{86}$. **C.** $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình chữ nhật $DCBD$. Vì $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{ADC}=90°$ suy ra $AE\perp(DCBE)$.

Khi đó $\left(\widehat{AD,BC}\right)=\left(\widehat{AD,DE}\right)=60°$ nên $AE=AE.\tan 60°=3\sqrt{3}$.

Chọn $E(0;0;0)$, $D(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;0)$, $A(0;0;3\sqrt{3})$.

Mặt phẳng (ADC) có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}\right]=12(\sqrt{3};0;1)$.

Mặt phẳng (ABC) có một véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=-3(0;3\sqrt{3};4)$.

Gọi α là góc hợp bởi giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD), ta có

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{4}{\sqrt{3+1}\sqrt{27+16}}=\frac{2\sqrt{43}}{43}.$$