

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi thứ nhất: 15/9/2026

Đề thi gồm 04 bài, trong 01 trang

Bài 1. (5,0 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = (n^2 + 1) \cdot x_1 x_2 \dots x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$.

a) Chứng minh rằng $x_n \geq 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ là một số vô tỉ.

Bài 2. (5,0 điểm) Cho n là một số nguyên dương lẻ. Xét các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)f(y+x) = x^n f(f(y)) + (f(x))^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (1).

a) Giả sử f không là hàm hằng. Chứng minh rằng:

i) $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

ii) f là một đơn ánh.

b) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn (1).

Bài 3. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AH . Gọi X, Y là hai điểm phân biệt thay đổi trên cạnh BC sao cho $\widehat{CAX} = \widehat{BAY}$; K, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của B lên AX, AY ; T, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của C lên AX, AY .

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, TL, SK đồng quy.

b) Chứng minh rằng giao điểm của KL và ST thuộc một đường thẳng cố định khi X, Y thay đổi trên cạnh BC .

Bài 4. (5,0 điểm) Cho các số nguyên dương m, n . Xét một bảng ô vuông kích thước $3m \times 6n$ (gồm $3m$ hàng và $6n$ cột). Trên bảng đó một số ô có màu trắng và các ô còn lại màu đỏ. Gọi T là số bộ ba (C_1, C_2, C_3) gồm các ô, trong đó hai ô đầu tiên nằm trên cùng một hàng và hai ô cuối cùng nằm trên cùng một cột, với C_1 và C_3 là ô trắng còn C_2 là ô đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T .

-----HẾT-----

* Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu;

* Giám thi **KHÔNG** rời thích ời thêm.

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi thứ hai: 16/9/2026

Đề thi gồm 03 bài, trong 01 trang

Bài 5. (6,0 điểm)

Cho số nguyên dương n . Xét các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $|x_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$; và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, đặt $S_k = x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k$.

a) Chứng minh rằng tồn tại các số $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ (không nhất thiết phân biệt) sao cho $S_p \leq 0$ và $|S_q| \leq \frac{2q+1}{4}$.

b) Khi $n \geq 3$, chứng minh rằng tồn tại các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán sao cho với mọi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ta đều có $|S_k| \geq \frac{2k+1}{4}$.

Bài 6. (7,0 điểm)

a) Với mỗi số nguyên dương n , gọi $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của n . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho n là ước của $2^{\sigma(n)} - 1$.

b) Cho dãy số nguyên dương $(a_n)_{n \geq 1}$ và dãy các số nguyên tố $(p_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $p_n | a_n$ và $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1013} - 1)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho a_m chia hết cho 2026.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) , có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Các đoạn thẳng AG, BG, CG theo thứ tự cắt đường tròn (DEF) tại I, J, K . Các đường tròn $(AID), (BJE), (CKF)$ cắt lại đường tròn (O) tại các điểm thứ hai tương ứng là X, Y, Z .

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OH .

b) Đường thẳng AC cắt đường tròn (AHB) tại điểm thứ hai là N ; đường thẳng AB cắt đường tròn (AHC) tại điểm thứ hai là M . Đường tròn (HMN) cắt lại các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là S, T . Chứng minh ST vuông góc với OH .

-----HẾT-----

* Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu;

* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

CHỌN ĐTQG NINH BÌNH 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P1)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = (n^2 + 1)x_1x_2 \cdots x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$.

- 1 Chứng minh rằng $x_n \geq 2^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.
- 2 Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ là một số vô tỉ.

 Lời giải.

(Lời giải của bạn Trí Dũng)

- 1 Vì $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = (n^2 + 1)x_1x_2 \cdots x_n \geq 2x_n$, nên bằng quy nạp, $x_n \geq 2^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

$$\text{Do đó } 0 < y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} < 2.$$

Dễ thấy rằng (y_n) tăng và bị chặn trên. Vì vậy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

- 2 Đặt $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Giả sử $L = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Vì $x_n = ((n-1)^2 + 1)x_1x_2 \cdots x_{n-1}$, nên $x_i \mid x_n$ với mọi $i \leq n$, suy ra $x_n y_n \in \mathbb{Z}$.

Bởi vậy $A_n := bx_n(L - y_n) = ax_n - bx_n y_n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Lại có $x_{m+1} \geq 2x_m$, nên $x_{n+j} \geq 2^{j-1}x_{n+1}$ với mọi $j \geq 1$.

$$\text{Do đó } 0 < L - y_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_{n+j}} \leq \frac{1}{x_{n+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{2}{x_{n+1}}.$$

$$\text{Suy ra } 0 < A_n \leq \frac{2bx_n}{x_{n+1}} = \frac{2b}{(n^2 + 1)x_1x_2 \cdots x_{n-1}} \leq \frac{2b}{n^2 + 1} < 1 \text{ khi } n \text{ đủ lớn.}$$

Từ đó ta có mâu thuẫn với $A_n \in \mathbb{Z}_{>0}$, vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \notin \mathbb{Q}$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P2)

Cho n là một số nguyên dương lẻ. Xét các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y+x) = x^n f(f(y)) + (f(x))^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- 1 Giả sử f không là hàm hằng. Chứng minh rằng:

- a) $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;
- b) f là một đơn ánh.

- 2 Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn (1).

(Lời giải của bạn Trí Dũng)

Kí hiệu mệnh đề $P(x, y) : f(x)f(x+y) = x^n f(f(y)) + f(x)^2$.

Trước hết, nếu $f \equiv c$ là hàm hằng thì từ $P(x, y)$ ta có $c^2 = x^n c + c^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $c = 0$.

Vậy $f \equiv 0$ là một nghiệm. Sau đây ta sẽ giả sử f không hằng.

① a) Từ $P(0, y)$, ta có $f(0)f(y) = f(0)^2$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Vì f không hằng nên suy ra $f(0) = 0$.

Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$.

Khi đó từ $P(a, y)$, $a^n f(f(y)) = 0$ với mọi y , nên $f(f(y)) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Vì f không hằng nên tồn tại c sao cho $f(c) \neq 0$. Từ $P(c, y)$, ta được $f(c)f(c+y) = f(c)^2$, hay $f(c+y) = f(c)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$, mâu thuẫn với giả thiết f không hằng.

Vậy $f(x) = 0 \iff x = 0$.

b) Giả sử $f(a) = f(b)$. Lấy $P(x, a) - P(x, b)$, ta được $f(x)(f(x+a) - f(x+b)) = 0$.

Theo câu trên, với mọi $x \neq 0$ ta có $f(x) \neq 0$, nên $f(x+a) = f(x+b)$.

Với $x = 0$ thì đẳng thức trên cũng đúng do $f(a) = f(b)$.

Vì vậy $f(x+a) = f(x+b)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $b-a$ là một chu kỳ của f , suy ra $f(b-a) = f(0) = 0$.

Theo câu trên, $b-a = 0$, tức là $a = b$. Vậy f là đơn ánh.

② Với $x \neq 0$, từ $P(x, -x)$ và $P(-x, x)$, do n lẻ, ta có

$$f(f(-x)) = -\frac{f(x)^2}{x^n}, \quad f(f(x)) = \frac{f(-x)^2}{x^n}. \quad (2)$$

Mặt khác, từ $P(x, x)$ và $P(-x, -x)$, kết hợp với (2), ta được

$$\begin{aligned} f(x)f(2x) &= f(x)^2 + f(-x)^2, \\ f(-x)f(-2x) &= f(x)^2 + f(-x)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ $P(x, -2x)$ và $P(-x, 2x)$, kết hợp với (2), ta có

$$\begin{aligned} f(x)(f(x) - f(-x)) &= \frac{f(2x)^2}{2^n}, \\ f(-x)(f(-x) - f(x)) &= \frac{f(-2x)^2}{2^n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Vì $x \neq 0$ nên $f(x), f(-x), f(2x), f(-2x)$ đều khác 0. Chia hai đẳng thức trong (4), ta được

$$-\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{f(2x)^2}{f(-2x)^2}. \quad (5)$$

Từ (3) ta có $\frac{f(2x)}{f(-2x)} = \frac{f(-x)}{f(x)}$ và thay vào (5), ta được $-\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{f(-x)^2}{f(x)^2}$ suy ra $f(-x)^3 = -f(x)^3$.

Do đó $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \neq 0$.

Đẳng thức cũng đúng với $x = 0$, nên f là hàm lẻ. Từ (2), suy ra với mọi $x \neq 0$,

$$f(f(x)) = \frac{f(x)^2}{x^n}. \quad (6)$$

Với $x, y \neq 0$, từ $P(x, y)$ và (6), ta được

$$f(x+y) = f(x) + \frac{x^n f(y)^2}{y^n f(x)}. \quad (7)$$

Đổi vai trò x, y trong (7) rồi so sánh hai biểu thức của $f(x+y)$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{x^n} - \frac{f(y)}{y^n}\right) \left(\frac{f(x)^2}{x^n} + \frac{f(y)^2}{y^n}\right) = 0. \quad (8)$$

Với $x, y > 0$, thừa số thứ hai trong (8) dương, nên $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f(y)}{y^n}$.

Lấy $y = 1$ và đặt $c = f(1) \neq 0$, ta được $f(x) = cx^n$ với mọi $x > 0$.

Vì f là hàm lẻ và n lẻ nên

$$f(x) = cx^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Thay (9) vào phương trình ban đầu, với $x, y \neq 0$, rồi rút gọn, ta được

$$(x+y)^n = x^n + c^{n-1}y^{n^2}. \quad (10)$$

Nếu $n > 1$, cho $y = 1$ trong (10), ta có $(x+1)^n - x^n = c^{n-1}$ với mọi $x \neq 0$. Vế trái không thể là một hằng số khi $n > 1$, chẳng hạn, lần lượt lấy $x = 1$ và $x = -1$, ta được

$$2^n - 1 = c^{n-1}, \quad -(-1)^n = c^{n-1}.$$

Vì n lẻ nên đẳng thức thứ hai cho $c^{n-1} = 1$, trong khi đẳng thức thứ nhất cho $c^{n-1} = 2^n - 1 > 1$, mâu thuẫn. Vậy với $n \geq 3$ lẻ, không tồn tại nghiệm không hằng. Do đó chỉ có nghiệm $f \equiv 0$.

Nếu $n = 1$, trực tiếp kiểm tra thấy $f(x) = cx$ thỏa mãn phương trình với mọi $c \in \mathbb{R}$.

Vậy tất cả các nghiệm cần tìm là

$$\begin{cases} f(x) = cx, & c \in \mathbb{R}, \quad n = 1, \\ f(x) = 0, & n \geq 3 \text{ lẻ.} \end{cases}$$

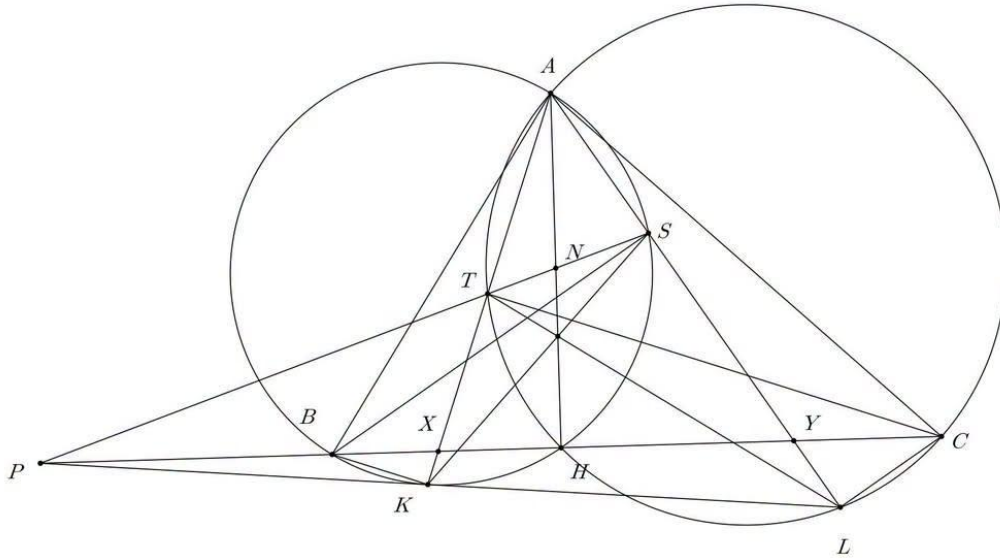
Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P3)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AH . Gọi X, Y là hai điểm phân biệt thay đổi trên cạnh BC sao cho $\widehat{CAX} = \widehat{BAY}$; K, S tương ứng là hình chiếu vuông góc của B lên AX, AY ; T, L tương ứng là hình chiếu vuông góc của C lên AX, AY .

- ① Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, TL, SK đồng quy.
- ② Chứng minh rằng giao điểm của KL và ST thuộc một đường thẳng cố định khi X, Y thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải.

- ① Ta có $AK \cdot AT = (AB \cdot \cos BAK) \cdot (AC \cdot \cos TAC)$ và $AS \cdot AL = (AB \cdot \cos BAS) \cdot (AC \cdot \cos CAL)$.
 $\Rightarrow AK \cdot AT = AS \cdot AL \Rightarrow STKL$ nội tiếp
 $\Rightarrow AH, TL, SK$ đồng quy tại tâm đẳng phương của $(STKL), (AB), (AC)$.
- ② Ta có $\angle AHS = \angle AKS = \angle ALT = \angle AHT \Rightarrow HA$ là phân giác $\angle THS$.
 Gọi AH cắt TS tại N , TS cắt BC tại $P \Rightarrow H(NPTS) = -1 \Rightarrow (NPTS) = -1$.
 Gọi TS cắt KL tại $P' \Rightarrow (P'NTS) = -1$ theo hàng điểm tứ giác toàn phần,
 $\Rightarrow (PNTS) = (P'NTS) \Rightarrow P'$ trùng P hay KL cắt ST trên BC cố định.



Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P4)

Cho các số nguyên dương m, n . Xét một bảng ô vuông kích thước $3m \times 6n$ (gồm $3m$ hàng và $6n$ cột). Trên bảng đó một số ô có màu trắng và các ô còn lại màu đỏ. Gọi T là số bộ ba (C_1, C_2, C_3) gồm các ô, trong đó hai ô đầu tiên nằm trên cùng một hàng và hai ô cuối cùng nằm trên cùng một cột, với C_1, C_3 là ô trắng còn C_2 là ô đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T .

Lời giải.

Đặt $R = 3m$, $C = 6n$. Gọi w_i là số ô trắng ở hàng i và v_j là số ô trắng ở cột j .

Với mỗi ô đỏ (i, j) được chọn làm C_2 , có đúng w_i cách chọn C_1 và v_j cách chọn C_3 . Vì thế

$$T = \sum_{(i,j) \text{ đỏ}} w_i v_j.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$T^2 \leq \left(\sum_{(i,j) \text{ đỏ}} w_i^2 \right) \left(\sum_{(i,j) \text{ đỏ}} v_j^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^R (C - w_i) w_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^C (R - v_j) v_j^2 \right).$$

Với $0 \leq u \leq C$ thì $(C - u)u^2 \leq \frac{4C^3}{27}$ và $(R - v)v^2 \leq \frac{4R^3}{27}$, do đó

$$T \leq \sqrt{R \cdot \frac{4C^3}{27} \cdot C \cdot \frac{4R^3}{27}} = \frac{4}{27} R^2 C^2 = 48m^2 n^2.$$

Để đạt dấu bằng, chia $3m$ hàng thành ba nhóm, mỗi nhóm m hàng; chia $6n$ cột thành ba nhóm, mỗi nhóm $2n$ cột. Tô đỏ ba khối nằm trên đường chéo tạo bởi các cặp nhóm cùng chỉ số và tô trắng các ô còn lại. Khi đó mỗi hàng có $2n$ ô đỏ, $4n$ ô trắng; mỗi cột có m ô đỏ, $2m$ ô trắng. Có $6mn$ ô đỏ và mỗi ô đỏ đóng góp $(4n)(2m) = 8mn$ bộ ba. Bởi vậy $T = 6mn \cdot 8mn = 48m^2 n^2$.

Do đó giá trị lớn nhất cần tìm là **$48m^2 n^2$**

CHỌN ĐTQG NINH BÌNH 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P5)

Cho số nguyên dương n . Xét các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $|x_i| \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, đặt $S_k = x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k$.

- ① Chứng minh rằng tồn tại các số $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ (không nhất thiết phân biệt) sao cho

$$S_p \leq 0 \quad \text{và} \quad |S_q| \leq \frac{2q+1}{4}.$$

- ② Khi $n \geq 3$, chứng minh rằng tồn tại các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán sao cho với mọi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ta đều có

$$|S_k| \geq \frac{2k+1}{4}.$$

 Lời giải.

Đặt thêm $S_0 = 0$.

- ① Với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$, từ $S_k - S_{k-1} = kx_k$ ta có $x_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{k}$.

$$\text{Do đó } \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \frac{S_n}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \sum_{k=1}^n x_k = 0, \text{ suy ra } \frac{S_n}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)} = 0.$$

Các hệ số trong vế trái đều dương, vì vậy không thể có $S_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Suy ra tồn tại $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $S_p \leq 0$.

Bây giờ ta chứng minh tồn tại q thỏa mãn $|S_q| \leq \frac{2q+1}{4}$.

Nếu $S_1 = 0$ thì chỉ cần chọn $q = 1$. Nếu $S_1 \neq 0$, do việc thay đồng thời x_i bởi $-x_i$ không làm thay đổi các số $|S_k|$, ta có thể giả sử $S_1 = x_1 > 0$.

Từ kết quả vừa chứng minh, tồn tại một chỉ số $k \geq 2$ sao cho $S_k \leq 0$.

Chọn k nhỏ nhất có tính chất này. Khi đó $S_{k-1} > 0$.

Nếu $S_k = 0$ thì chọn $q = k$ là xong.

Xét $S_k < 0$. Khi đó $S_{k-1} > 0$, nên $|S_k| + |S_{k-1}| = |S_k - S_{k-1}| = k|x_k| \leq k$.

$$\text{Mặt khác, } k = \frac{2k+1}{4} + \frac{2(k-1)+1}{4}.$$

Vì vậy phải có ít nhất một trong hai bất đẳng thức $|S_k| \leq \frac{2k+1}{4}$ hoặc $|S_{k-1}| \leq \frac{2(k-1)+1}{4}$.

Chọn tương ứng $q = k$ hoặc $q = k-1$.

Vậy tồn tại $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn $S_p \leq 0$ và $|S_q| \leq \frac{2q+1}{4}$.

2 Trường hợp 1. n lẻ.

Chọn $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ và $x_k = (-1)^k$ với $3 \leq k \leq n$.

Rõ ràng $|x_k| \leq 1$ với mọi k . Vì n lẻ nên $\sum_{k=3}^n (-1)^k = -1$, do đó $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0$.

Ta có $S_1 = \frac{3}{4}$ và $S_2 = \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Khi đó với $k \geq 2$, ta có $S_k = (-1)^k \frac{2k+1}{4}$.

Vì thế $|S_1| = \frac{3}{4}$ và $|S_k| = \frac{2k+1}{4}$ với mọi $2 \leq k \leq n$.

Trường hợp 2. n chẵn.

Vì $n \geq 3$ nên $n \geq 4$. Chọn $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_3 = -1$, $x_4 = -\frac{1}{8}$, và với $5 \leq k \leq n$ đặt $x_k = (-1)^{k+1}$.

Rõ ràng $|x_k| \leq 1$ với mọi k . Ta có $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{8} = 0$ nên

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$

Mặt khác, $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{5}{4}$, $S_3 = -\frac{7}{4}$ và $S_4 = -\frac{9}{4}$ nên với $k \geq 4$, ta có $S_k = (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{4}$.

Do đó $|S_1| = 1 > \frac{3}{4}$, $|S_2| = \frac{5}{4}$, $|S_3| = \frac{7}{4}$ và với mọi $k \geq 4$, $|S_k| = \frac{2k+1}{4}$.

Vậy trong cả hai trường hợp đều tồn tại $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn các điều kiện đề bài.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P6)

- ① Với mỗi số nguyên dương n , gọi $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của n . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho n là ước của $2^{\sigma(n)} - 1$.
- ② Cho dãy số nguyên dương $(a_n)_{n \geq 1}$ và dãy các số nguyên tố $(p_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n \mid a_n, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1013} - 1).$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho a_m chia hết cho 2026.

Lời giải.

- ① Với $0 \leq i \leq k-1$, chọn p_i là ước nguyên tố nào đó của $2^{2^i} + 1$.

Dễ thấy $(2^{2^i} + 1, 2^{2^j} + 1) = 1 \quad \forall i \neq j$ nên các p_i phân biệt.

Chọn $n = p_0 p_1 \dots p_{k-1}$.

$$\Rightarrow p_0 p_1 \dots p_{k-1} \mid (2+1)(2^2+1) \dots (2^{2^{k-1}}+1) = 2^{2^k} - 1.$$

Mà $2^k \mid (p_0+1)(p_1+1) \dots (p_{k-1}+1) = \sigma(n) \Rightarrow n \mid 2^{2^k} - 1 \mid 2^{\sigma(n)} - 1$.

- ② Đặt $q = 1013 \in \mathbb{P}$. Giả sử phản chứng, không tồn tại m để $2q \mid a_m$.

Nhận xét 1: Nếu $p \mid k^{q-1} + k^{q-2} + \dots + k + 1$ thì $p \equiv 0, 1 \pmod{q}$.

Ta có $p \mid x^q - 1$. Gọi $h = \text{ord}_p k$, có $h \mid q \Rightarrow h \in \{1, q\}$.

◇ Nếu $h = 1$ thì $k \equiv 1 \pmod{p}$, suy ra $p = q$.

◇ Nếu $h = q$ thì ta có $k^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$, do đó $q \mid p-1$.

Nhận xét 2: $\forall n \geq 1, p_n \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Nếu tồn tại m để $p_m \equiv 1 \pmod{q}$, ta có p_m lẻ nên $p_m \equiv 1 \pmod{2q} \Rightarrow a_{m+1} = \frac{a_m}{p_m}(p_m^q - 1) \equiv 0 \pmod{2q}$ (vô lý) $\Rightarrow \forall n \geq 1$, ta có $p_n \not\equiv 1 \pmod{q}$.

Nhận xét 3: $\forall n \geq 2, q \nmid a_n$.

Nếu tồn tại n để $q \mid a_n, n \geq 2$. Xét n nhỏ nhất như vậy, ta phải có a_n lẻ.

Ta có $a_n = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}(p_{n-1}^q - 1)$; nếu $p_{n-1} > 2$ thì a_n chẵn (vô lý).

$\Rightarrow p_{n-1} = 2, a_n = \frac{a_{n-1}}{2}(2^q - 1)$. Có $q \nmid 2^q - 1; q \mid a_n$ nên $q \mid a_{n-1}$.

Mà a_{n-1} chẵn nên $2q \mid a_{n-1}$ (vô lý).

Nhận xét 4: $\forall n \geq 1, p_n \leq a_1$.

Giả sử tồn tại n để $p_n > a_1$. Xét số n nhỏ nhất như vậy, khi đó $n > 1$ và $\forall i < n, p_i < p_n$.

Chú ý $p_n \not\equiv 0, 1 \pmod{q}$.

Ta có $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{2q} - 1) = \dots = a_1 \prod_{i=1}^n \frac{p_i^q - 1}{p_i}$

$\Rightarrow p_n \mid a_1(p_1^q - 1)(p_2^q - 1) \dots (p_n^q - 1)$.

Mà từ nhận xét 1, có $p_n \nmid p_i^{q-1} + \dots + p_i + 1 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Ta cũng có $p_n > a_1, p_n > p_i - 1 \quad \forall i = \overline{1, n}$

$\Rightarrow p_n \nmid a_1(p_1^q - 1)(p_2^q - 1) \dots (p_n^q - 1)$ (vô lý)

Như vậy $p_n \leq a_1$.

Do đó dãy $\{p_n\}$ nhận hữu hạn giá trị, nên tồn tại $p \in \{p_n\}$ để xuất hiện vô hạn lần trong dãy.

Trở lại bài toán ban đầu:

Xét p lớn nhất như vậy, khi đó tồn tại N để $\forall n \geq N, p \geq p_n$.

Ta thấy $\forall n \geq N, p \nmid p_n - 1$ vì $p \geq p_n$.

Ngoài ra $p \not\equiv 0, 1 \pmod{q}$ nên $\forall n \geq N, p \nmid p_n^{q-1} + \dots + 1$ (theo Nhận xét 1)

Vì thế $\forall n \geq N, p \nmid p_n^q - 1$.

$\Rightarrow \forall n \geq N, v_p(a_{n+1}) = v_p(a_n) - v_p(p_n) = \dots = v_p(a_N) - v_p(p_N p_{N-1} \dots p_N)$

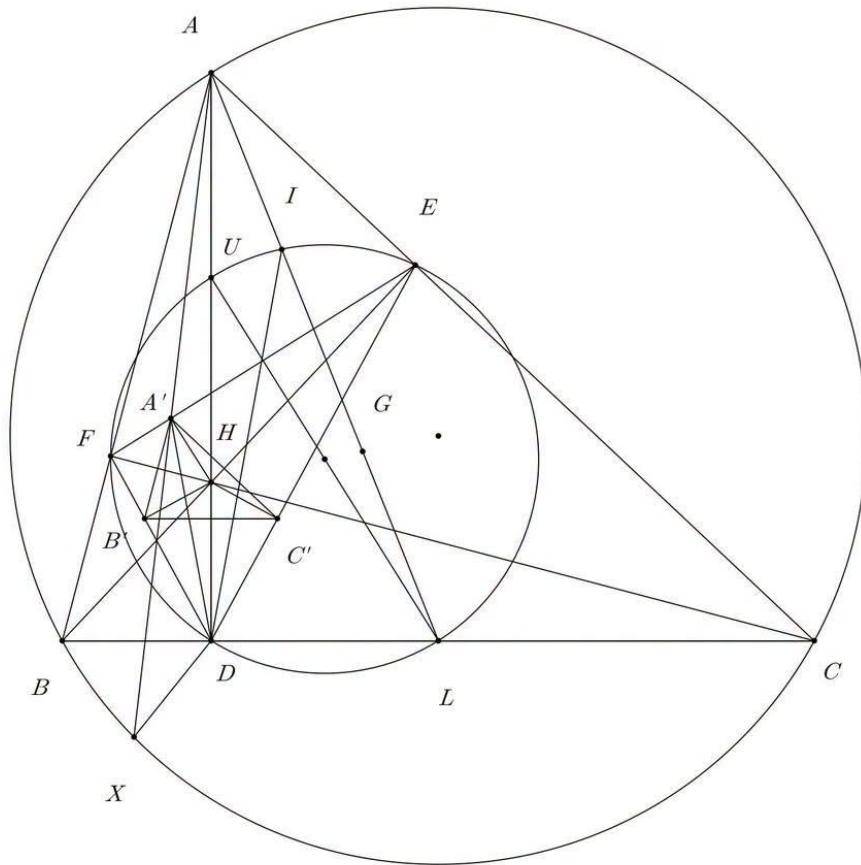
Vì có vô hạn phần tử trong dãy $\{p_n\}$ bằng p , ta chọn được n đủ lớn để trong $p_N, p_{N+1}, \dots, p_n$ có không ít hơn $v_p(a_N) + 1$ số bằng $p \Rightarrow v_p(a_{n+1}) < 0$ (vô lý).

Vậy điều giả sử là sai, ta có tồn tại $m \geq 1$ để $2q \mid a_m$, điều phải chứng minh.

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Ninh Bình TST - P7)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) , có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Các đoạn thẳng AG, BG, CG theo thứ tự cắt đường tròn (DEF) tại I, J, K . Các đường tròn $(AID), (BJE), (CKF)$ cắt lại đường tròn (O) tại các điểm thứ hai tương ứng là X, Y, Z .

- ① Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OH .
- ② Đường thẳng AC cắt đường tròn (AHB) tại điểm thứ hai là N ; đường thẳng AB cắt đường tròn (AHC) tại điểm thứ hai là M . Đường tròn (HMN) cắt lại các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là S, T . Chứng minh $ST \perp OH$.



Lời giải.

- ① Gọi U là trung điểm AH , L là trung điểm $BC \Rightarrow UL$ là đường kính của (DEF) và $UL \perp EF$.

Gọi A' là hình chiếu của H trên EF , Gọi X' là giao điểm của AA' và (O) .

Ta có $\angle AFA' = \angle ACB = \angle AX'B \Rightarrow AA' \cdot AX' = AF \cdot AB = AH \cdot AD \Rightarrow A'HDX'$ nội tiếp.

$\Rightarrow \angle A'X'D = \angle A'HA = \angle HUL = \angle DIL \Rightarrow AIDX'$ nội tiếp $\Rightarrow X'$ trùng X .

Tương tự ta có BY, CZ đi qua các chân hình chiếu từ H xuống DE, DF lần lượt là C', B' .

Ta thấy $A'B' \perp FH \Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow \Delta A'B'C'$ và ΔABC có các cạnh tương ứng song song nên AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự hai tam giác mà H là tâm $(A'B'C')$ và O là tâm $(ABC) \Rightarrow AX, BY, CZ$ đồng quy trên OH .

- ② Ta có $\angle BNE = 180^\circ - \angle AHB = \angle BCA \Rightarrow EN = EC$ và $FB = FM$.

Gọi DE cắt AB tại P , DF cắt AC tại Q ta có ngay $PA.PB = PE.PD$ và $QA.QC = QF.QD$.

$\Rightarrow PQ$ là trục đẳng phương của (DEF) và $(O) \Rightarrow PQ \perp OH$.

Lại có $\angle AFQ = \angle BFD = \angle ACB = \angle ANB \Rightarrow AQ \cdot AN = AF \cdot AB$.

Tương tự ta cũng có $AM \cdot AP = AE \cdot AC \Rightarrow AQ \cdot AN = AP \cdot AM$.

$\Rightarrow NQMP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle APQ = \angle MNT = \angle MST \Rightarrow PQ \parallel ST$ mà $PQ \perp OH \Rightarrow ST \perp OH$.

