

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo thành với nhau một góc  $120^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ . Khi đó  $|\vec{a} + \vec{b}|$  và  $|\vec{a} - \vec{b}|$  lần lượt bằng

- A. 19 và 49.      B. 49 và 19.      C.  $\sqrt{19}$  và 7.      D. 7 và  $\sqrt{19}$ .

**Câu 2.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $2a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{3}$  và  $AD' \perp BA'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD'$  và  $BA'$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .      C.  $a$ .      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 3.** Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

- A.  $\frac{1}{5}$ .      B.  $\frac{3}{20}$ .      C.  $\frac{2}{15}$ .      D.  $\frac{1}{6}$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{2025}{f^2(x) - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

|         |           |   |           |           |
|---------|-----------|---|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | -         | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 3 | $-\infty$ | $-\infty$ |

- A. 6.      B. 4.      C. 8.      D. 5.

**Câu 5.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng  $CC'$  sao cho  $C'I = \frac{2}{5}C'C$ . G là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ . Biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{GI}$  qua các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} - 2\vec{a}\right)$       B.  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}\right)$ .  
C.  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{c} - 2\vec{b}\right)$       D.  $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$ .

**Câu 6.** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

- A. 64800.      B. 36000.      C. 72000.      D. 60000.

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$  thẳng hàng. Khi đó  $3x+2y$  bằng

A.  $3x+2y=\frac{7}{5}$ .

B.  $3x+2y=17$ .

C.  $3x+2y=-\frac{11}{5}$ .

D.  $3x+2y=\frac{11}{5}$ .

**Câu 8.** Biết hàm số  $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$  luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $m$  thuộc  $[a;b]$ . Tính  $a+b$ ?

A.  $-\frac{10}{3}$ .

B.  $\frac{10}{3}$ .

C. 3.

D.  $-\frac{5}{3}$ .

**Câu 9.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu tiên là  $S_n=6^n-1, n \in \mathbb{N}^*$ . Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân đã cho. Tính  $S=q^2-1$ .

A.  $S=24$ .

B.  $S=8$ .

C.  $S=35$ .

D.  $S=3$ .

**Câu 10.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $BC$ . Biết rằng góc giữa  $MN$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ , cosin góc giữa  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng:

A.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

B.  $\frac{\sqrt{41}}{41}$ .

C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

D.  $\frac{2\sqrt{41}}{41}$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(5;-3;2), B(2;1;-2)$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm phân biệt thay đổi thoả mãn  $BM=BN=2$  và  $A, M, N$  thẳng hàng. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S=2.AM+5.AN$  có dạng  $7\sqrt{m}-n$  với  $m, n$  là số tự nhiên. Tính giá trị  $m-n$ .

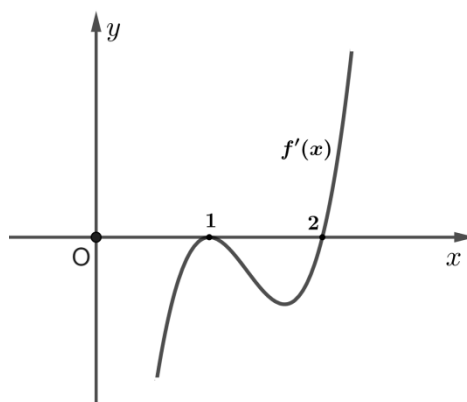
A. 43.

B. 37.

C. 35.

D. 41.

**Câu 12.** Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hình bên là đồ thị của hàm số  $y=f'(x)$ . Hỏi hàm số  $y=f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(0;1)$  và  $(2;+\infty)$ .

B.  $(1;3)$ .

C.  $(-\infty;2)$ .

D.  $(0;+\infty)$ .

**Câu 13.** Nghiệm của phương trình  $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}=0$  là:

A. 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B. 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C. 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D. 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 14.** Cho  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tổng  $S = a^2 + b^2$  bằng

A.  $S = 1$ .

B.  $S = 4$ .

C.  $S = 13$ .

D.  $S = 9$ .

**Câu 15.** Tổng các số nguyên  $x$  thỏa mãn  $\left[ \log_2(x^2 + 1) - \log_2(x + 31) \right] (32 - 2^{x-1}) \geq 0$

A.  $-480$ .

B.  $27$ .

C.  $-449$ .

D.  $28$ .

**Câu 16.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút) | $[20; 25)$ | $[25; 30)$ | $[30; 35)$ | $[35; 40)$ | $[40; 45)$ |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 6          | 7          | 5          | 6          | 4          |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A.  $27,5$ .

B.  $12,2$ .

C.  $\frac{165}{14}$ .

D.  $\frac{155}{13}$ .

**Câu 17.** Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

| Thu nhập (triệu đồng) | $[5; 8)$ | $[8; 11)$ | $[11; 14)$ | $[14; 17)$ | $[17; 20)$ |
|-----------------------|----------|-----------|------------|------------|------------|
| Số người              | 30       | 55        | 45         | 30         | 20         |

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng).

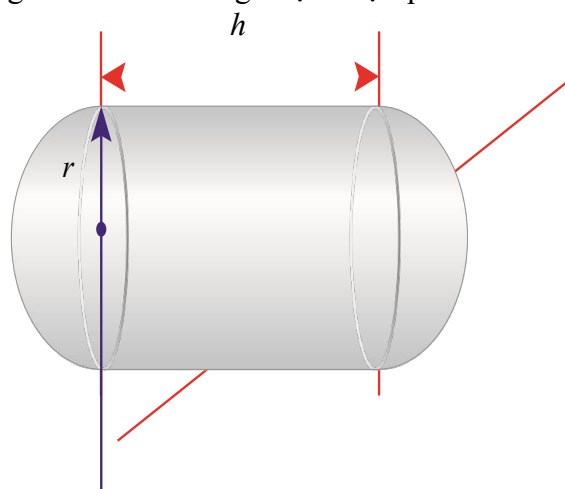
A.  $12,5$ .

B.  $11,75$ .

C.  $11$ .

D.  $10,5$ .

**Câu 18.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài  $h$  mét ( $h > 0$ ) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính  $r$  ( $r > 0$ ) (Hình vẽ). Biết rằng thể tích của thùng chứa là  $144000\pi \text{ m}^3$ . Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần  $20000$  đồng cho  $1 \text{ m}^2$ , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần  $10000$  đồng cho  $1 \text{ m}^2$ . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất thì  $r$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của đơn vị mét), biết rằng bán kính  $r$  không được vượt quá  $50 \text{ m}$ ?



A.  $36,5$ .

B.  $38,1$ .

C.  $35,7$ .

D.  $37,8$ .

**Câu 19.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 9}{x + 1}$  bằng

- A.  $4\sqrt{5}$ .                      B.  $2\sqrt{2}$ .                      C.  $6\sqrt{5}$ .                      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 20.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết:  $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$  ( $k \in \mathbb{R}$ );  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$ . Giá trị  $k$  thích hợp để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  là:

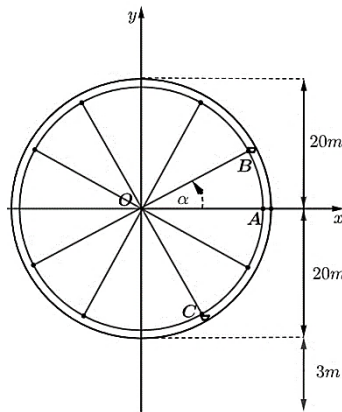
- A.  $k = -2$ .                      B.  $k = 2$ .                      C.  $k = 14$ .                      D.  $k = 6$ .

## PHẦN II: TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng 3,  $SA = SB = SD = \sqrt{6}$  và tam giác  $ABD$  đều. Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua  $B$  và vuông góc với mặt phẳng  $(SCD)$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(P)$ .

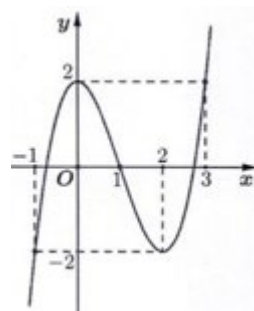
- a)  $SH \perp (ABCD)$ .  
b) Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\frac{3}{2}$ .  
c) Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ .  
d) Giá trị lớn nhất của  $\sin \alpha$  bằng  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

**Câu 2.** Một mô hình trò chơi vòng quay ở công viên có chiều cao tối đa 23 m so với mặt đất, bán kính vòng quay là 20 m. Hai bạn Hoa và Mai cùng chơi chung lượt quay và ngồi trong hai ca bin  $B, C$  mà góc  $\widehat{BOC} = 90^\circ$  (hình vẽ);  $\alpha$  là một góc lượng giác hợp bởi tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$ .



- a) Khi  $\alpha = 45^\circ$  thì chiều cao của  $B$  so với mặt đất là 37,14 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).  
b) Chiều cao của  $B$  so với mặt đất là  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha$  (mét).  
c) Chiều cao của  $C$  so với mặt đất là  $h_C = 23 - 20 \cos \alpha$  (mét)  
d) Khi  $B$  ở vị trí có độ cao 33 m thì  $C$  ở độ cao 13 m so với mặt đất?

**Câu 3.** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = f(2) = \frac{1}{2}$  và hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



- a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .
- b) Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  tại  $x = 2$ .
- c) Phương trình  $f'(\sin x) = 0$  có 10 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .
- d) Hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$  có 8 điểm cực trị.

**Câu 4.** Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

| Lớp điểm thi  | $[0; 2)$ | $[2; 4)$ | $[4; 6)$ | $[6; 8)$ | $[8; 10)$ |
|---------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số hs lớp 12E | 3        | 6        | 12       | 24       | 5         |
| Số hs lớp 12F | 4        | 5        | 16       | 18       | 7         |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn 2,9.
- c) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

**Câu 5.** Gọi  $S$  là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số phần tử của  $S$  là 30240.
- b) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $a > b > c > d > e$  là  $\frac{1}{108}$ .
- c) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $c < b < a$  và  $c < d < e$  là  $\frac{1}{18}$ .
- d) Xác suất để lấy được số chia hết cho 25 là  $\frac{1}{486}$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; -1; 2)$ ,  $B(4; 3; -2)$ ,  $C(5; -1; 6)$  và  $D(6; 1; 4)$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều
- b) Độ dài đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  là  $\frac{20\sqrt{2}}{9}$ .
- c) Tọa độ điểm  $M$  thuộc cạnh  $AC$  và cách đều hai đường thẳng  $BA, BC$  là  $(x; y; z)$  thỏa mãn  $x + y + z = \frac{29}{5}$ .
- d) Gọi điểm  $N(a; b; c)$  sao cho  $NA + NB + NC + ND$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + b = \frac{25}{3}$ .

### PHẦN III: TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 4 điểm chia đều cạnh đó thành các phần bằng nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh lấy từ 24 điểm đánh dấu sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho.

**Câu 2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3;0;0), B(-3;0;0)$  và  $C(0;5;1)$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  sao cho  $MA + MB = 10$ , giá trị nhỏ nhất của  $MC$  bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 3.** Có hai vợ chồng đã nghĩ ra một trò chơi đầy trí tuệ như sau: Họ sử dụng hai ly nước giống hệt nhau, mỗi ly chứa tối đa 240 ml nước. Ban đầu, người vợ có một ly nước đầy và người chồng có một cái ly rỗng. Bước thứ nhất người vợ rót  $\frac{1}{2}$  lượng nước trong ly của mình sang ly của người chồng; bước tiếp theo người chồng lại rót  $\frac{1}{3}$  lượng nước trong ly của mình sang cho ly người vợ. Quá trình này cứ tiếp tục mà mỗi lần rót thì mẫu số được cộng thêm 1; trò chơi này hấp dẫn đến mức cả hai người thực hiện đến bước thứ 100 thì dừng lại, hỏi lượng nước trong ly người chồng khi đó là bao nhiêu ml? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, giả sử trong quá trình rót nước không có giọt nước nào tràn ra ngoài)

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có thể tích  $V$ , có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  với  $BA = a, AC = 2a$ . Mặt bên  $(BB'A'A)$  là hình thoi có góc  $\widehat{ABB'} = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC'$ .

Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B'A'$  và  $BI$  bằng  $\frac{3a}{4}$ . Biết rằng  $V < \frac{a^3}{2}$ . Giá trị  $V = x.a^3$  thì  $x$  bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

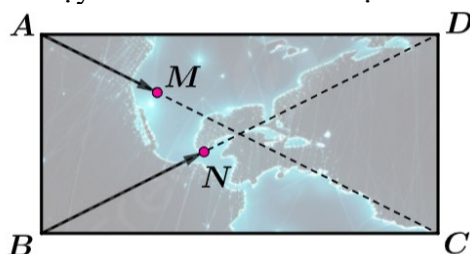
**Câu 5.** Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn  $x + y > 0$  và  $10^{x^2+y^2} + 2.\log \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 100^{x+y} + \log 4$ . Gọi  $M, m$  lần lượt

là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2$ . Tổng  $M + m$ .

**Câu 6.** Trên một **banner quảng cáo du lịch** có bề mặt hình chữ nhật, người ta gắn hai đèn led chạy dọc theo các đường chéo  $AC$  và  $BD$ , khi bật nguồn thì chúng bắt đầu cùng lúc.

**Đèn led thứ nhất có điểm chạy là  $M$ :** chạy từ  $A$  đến  $C$  với tốc độ 2 cm/s.

**Đèn led thứ hai có điểm chạy là  $N$ :** chạy từ  $B$  đến  $D$  với tốc độ 3 cm/s.



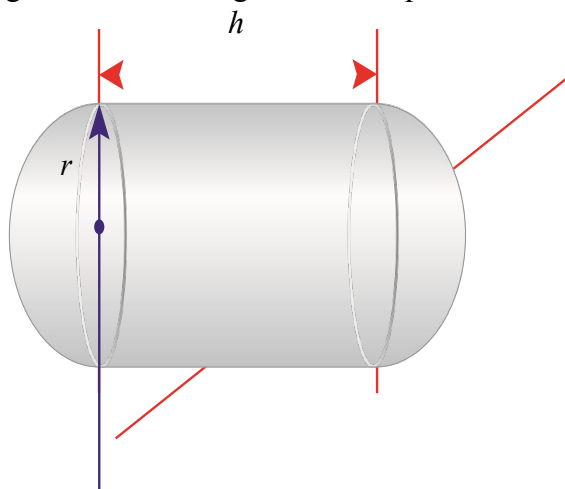
Tính khoảng cách ngắn nhất của  $MN$  và làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét biết  $ABCD$  là hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là 1 m và 2 m.

---HẾT---

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài  $h$  mét ( $h > 0$ ) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính  $r$  ( $r > 0$ ) (Hình vẽ). Biết rằng thể tích của thùng chứa là  $144000\pi \text{ m}^3$ . Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho  $1\text{ m}^2$ , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho  $1\text{ m}^2$ . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất thì  $r$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của đơn vị mét), biết rằng bán kính  $r$  không được vượt quá  $50\text{ m}$ ?



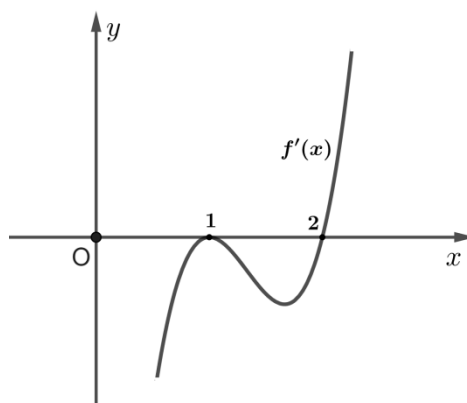
A. 36,5.

B. 37,8.

C. 35,7.

D. 38,1.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(1;3)$ .

B.  $(0;+\infty)$ .

C.  $(-\infty;2)$ .

D.  $(0;1)$  và  $(2;+\infty)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(5;-3;2)$ ,  $B(2;1;-2)$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm phân biệt thay đổi thỏa mãn  $BM = BN = 2$  và  $A, M, N$  thẳng hàng. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = 2.AM + 5.AN$  có dạng  $7\sqrt{m} - n$  với  $m, n$  là số tự nhiên. Tính giá trị  $m - n$ .

A. 37.

B. 43.

C. 35.

D. 41.

**Câu 4.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $2a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{3}$  và  $AD' \perp BA'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD'$  và  $BA'$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ . B.  $a$ . C.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ . D.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 5.** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

- A. 60000. B. 64800. C. 72000. D. 36000.

**Câu 6.** Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

- A.  $\frac{2}{15}$ . B.  $\frac{1}{6}$ . C.  $\frac{1}{5}$ . D.  $\frac{3}{20}$ .

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ ,  $C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Khi đó  $3x + 2y$  bằng

- A.  $3x + 2y = -\frac{11}{5}$ . B.  $3x + 2y = \frac{7}{5}$ .  
C.  $3x + 2y = \frac{11}{5}$ . D.  $3x + 2y = 17$ .

**Câu 8.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút) | [20;25) | [25;30) | [30;35) | [35;40) | [40;45) |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Số ngày          | 6       | 7       | 5       | 6       | 4       |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 27,5. B.  $\frac{155}{13}$ . C.  $\frac{165}{14}$ . D. 12,2.

**Câu 9.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng  $CC'$  sao cho  $C'I = \frac{2}{5}CC'$ . G là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ . Biểu diễn vector  $\overrightarrow{GI}$  qua các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{c} - 2\vec{b})$  B.  $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$ .  
C.  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c})$ . D.  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} - 2\vec{a}\right)$

**Câu 10.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết:  $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$  ( $k \in \mathbb{R}$ );  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$ . Giá trị  $k$  thích hợp để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  là:

- A.  $k = 2$ . B.  $k = -2$ . C.  $k = 6$ . D.  $k = 14$ .

**Câu 11.** Biết hàm số  $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$  luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $m$  thuộc  $[a; b]$ . Tính  $a+b$ ?

- A.  $-\frac{10}{3}$ . B. 3. C.  $\frac{10}{3}$ . D.  $-\frac{5}{3}$ .

**Câu 12.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 9}{x + 1}$  bằng

- A.  $6\sqrt{5}$ . B.  $3\sqrt{2}$ . C.  $2\sqrt{2}$ . D.  $4\sqrt{5}$ .

**Câu 13.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu tiên là  $S_n = 6^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$ . Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân đã cho. Tính  $S = q^2 - 1$ .

- A.  $S = 3$ . B.  $S = 35$ . C.  $S = 24$ . D.  $S = 8$ .

**Câu 14.** Tổng các số nguyên  $x$  thỏa mãn  $\left[ \log_2(x^2 + 1) - \log_2(x + 31) \right] (32 - 2^{x-1}) \geq 0$

- A. 28. B. 27. C. -449. D. -480.

**Câu 15.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $BC$ . Biết rằng góc giữa  $MN$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ , cosin góc giữa  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng:

- A.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ . B.  $\frac{\sqrt{41}}{41}$ . C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . D.  $\frac{2\sqrt{41}}{41}$ .

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo thành với nhau một góc  $120^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$ . Khi đó  $|\vec{a} + \vec{b}|$  và  $|\vec{a} - \vec{b}|$  lần lượt bằng

- A. 19 và 49. B. 49 và 19. C. 7 và  $\sqrt{19}$ . D.  $\sqrt{19}$  và 7.

**Câu 17.** Cho  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tổng  $S = a^2 + b^2$  bằng

- A.  $S = 13$ . B.  $S = 1$ . C.  $S = 4$ . D.  $S = 9$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{2025}{f^2(x) - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | - | -         |
| $f(x)$  | $-7$      | 3 | 1 | $-\infty$ |

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 8.

**Câu 19.** Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

|                       |          |           |            |            |            |
|-----------------------|----------|-----------|------------|------------|------------|
| Thu nhập (triệu đồng) | $[5; 8)$ | $[8; 11)$ | $[11; 14)$ | $[14; 17)$ | $[17; 20)$ |
| Số người              | 30       | 55        | 45         | 30         | 20         |

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng).

- A. 10,5. B. 11. C. 11,75. D. 12,5.

**Câu 20.** Nghiệm của phương trình  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$  là:

A. 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C. 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B. 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D. 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

## PHẦN II: TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

| Lớp điểm thi  | $[0; 2)$ | $[2; 4)$ | $[4; 6)$ | $[6; 8)$ | $[8; 10)$ |
|---------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số hs lớp 12E | 3        | 6        | 12       | 24       | 5         |
| Số hs lớp 12F | 4        | 5        | 16       | 18       | 7         |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

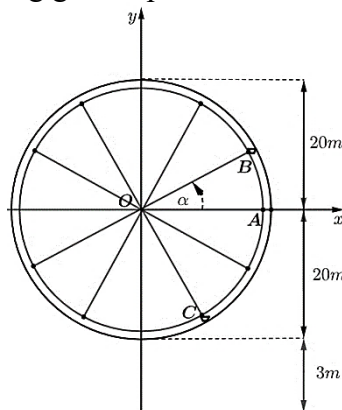
- a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn 2,9.
- c) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; -1; 2)$ ,  $B(4; 3; -2)$ ,  $C(5; -1; 6)$  và  $D(6; 1; 4)$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều
- b) Độ dài đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  là  $\frac{20\sqrt{2}}{9}$ .
- c) Tọa độ điểm  $M$  thuộc cạnh  $AC$  và cách đều hai đường thẳng  $BA, BC$  là  $(x; y; z)$  thỏa mãn  $x + y + z = \frac{29}{5}$ .
- d) Gọi điểm  $N(a; b; c)$  sao cho  $NA + NB + NC + ND$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + b = \frac{25}{3}$ .

**Câu 3.** Một mô hình trò chơi vòng quay ở công viên có chiều cao tối đa 23 m so với mặt đất, bán kính vòng quay là 20 m. Hai bạn Hoa và Mai cùng chơi chung lượt quay và ngồi trong hai ca bin  $B, C$  mà góc  $\widehat{BOC} = 90^\circ$  (hình vẽ);  $\alpha$  là một góc lượng giác hợp bởi tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$ .



- a) Khi  $\alpha = 45^\circ$  thì chiều cao của  $B$  so với mặt đất là 37,14 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- b) Chiều cao của  $B$  so với mặt đất là  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha$  (mét).

c) Chiều cao của  $C$  so với mặt đất là  $h_c = 23 - 20 \cos \alpha$  (mét)

d) Khi  $B$  ở vị trí có độ cao  $33\text{ m}$  thì  $C$  ở độ cao  $13\text{ m}$  so với mặt đất?

**Câu 4.** Gọi  $S$  là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

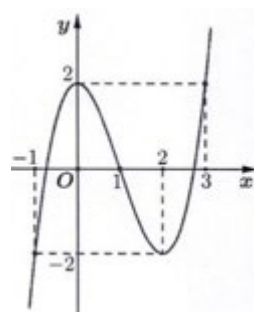
a) Số phần tử của  $S$  là 30240.

b) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $a > b > c > d > e$  là  $\frac{1}{108}$ .

c) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $c < b < a$  và  $c < d < e$  là  $\frac{1}{18}$ .

d) Xác suất để lấy được số chia hết cho 25 là  $\frac{1}{486}$ .

**Câu 5.** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = f(2) = \frac{1}{2}$  và hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

b) Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  tại  $x = 2$ .

c) Phương trình  $f'(\sin x) = 0$  có 10 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .

d) Hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$  có 8 điểm cực trị.

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng 3,  $SA = SB = SD = \sqrt{6}$  và tam giác  $ABD$  đều. Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua  $B$  và vuông góc với mặt phẳng  $(SCD)$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(P)$ .

a)  $SH \perp (ABCD)$ .

b) Thể tích khối chóp  $S \cdot ABCD$  bằng  $\frac{3}{2}$ .

c) Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ .

d) Giá trị lớn nhất của  $\sin \alpha$  bằng  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

### PHẦN III: TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Có hai vợ chồng đã nghĩ ra một trò chơi đầy trí tuệ như sau: Họ sử dụng hai ly nước giống hệt nhau, mỗi ly chứa tối đa  $240\text{ ml}$  nước. Ban đầu, người vợ có một ly nước đầy và người chồng có một cái ly rỗng. Bước thứ nhất người vợ rót  $\frac{1}{2}$  lượng nước trong ly của mình sang ly của người chồng; bước tiếp theo người chồng lại rót  $\frac{1}{3}$  lượng nước trong ly của mình sang cho ly người vợ. Quá trình này cứ tiếp tục mà mỗi lần rót thì mẫu số được cộng thêm 1; trò chơi này hấp dẫn đến mức cả hai người thực hiện đến

bước thứ 100 thì dừng lại, hỏi lượng nước trong ly người chồng khi đó là bao nhiêu ml? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, giả sử trong quá trình rót nước không có giọt nước nào tràn ra ngoài)

**Câu 2.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 4 điểm chia đều cạnh đó thành các phần bằng nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh lấy từ 24 điểm đánh dấu sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho.

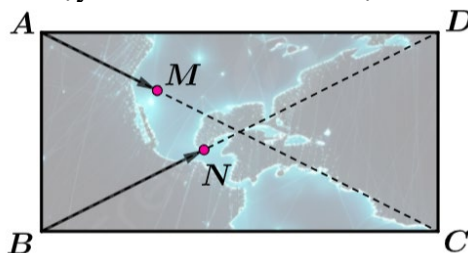
**Câu 3.** Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn  $x + y > 0$  và  $10^{x^2+y^2} + 2 \cdot \log \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 100^{x+y} + \log 4$ . Gọi  $M, m$  lần lượt

là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2$ . Tổng  $M + m$ .

**Câu 4.** Trên một **banner quảng cáo du lịch** có bề mặt hình chữ nhật, người ta gắn hai đèn led chạy dọc theo các đường chéo  $AC$  và  $BD$ , khi bật nguồn thì chúng bắt đầu cùng lúc.

**Đèn led thứ nhất có điểm chạy là  $M$ :** chạy từ  $A$  đến  $C$  với tốc độ  $2 \text{ cm/s}$ .

**Đèn led thứ hai có điểm chạy là  $N$ :** chạy từ  $B$  đến  $D$  với tốc độ  $3 \text{ cm/s}$ .



Tính khoảng cách ngắn nhất của  $MN$  và làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét biết  $ABCD$  là hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là  $1 \text{ m}$  và  $2 \text{ m}$ .

**Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3;0;0), B(-3;0;0)$  và  $C(0;5;1)$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  sao cho  $MA + MB = 10$ , giá trị nhỏ nhất của  $MC$  bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 6.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có thể tích  $V$ , có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  với  $BA = a, AC = 2a$ . Mặt bên  $(BB'A'A)$  là hình thoi có góc  $\widehat{ABB'} = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC'$ .

Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B'A'$  và  $BI$  bằng  $\frac{3a}{4}$ . Biết rằng  $V < \frac{a^3}{2}$ . Giá trị  $V = x \cdot a^3$  thì  $x$  bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

---HẾT---

| STT | 0001 | 2    | 3    | 4    |
|-----|------|------|------|------|
| 1   | C    | B    | B    | C    |
| 2   | B    | C    | A    | C    |
| 3   | A    | C    | A    | D    |
| 4   | C    | A    | D    | D    |
| 5   | D    | B    | C    | B    |
| 6   | A    | C    | C    | D    |
| 7   | A    | B    | B    | D    |
| 8   | A    | C    | C    | B    |
| 9   | C    | B    | C    | C    |
| 10  | A    | A    | C    | A    |
| 11  | C    | A    | B    | A    |
| 12  | C    | A    | A    | A    |
| 13  | C    | B    | B    | C    |
| 14  | C    | C    | C    | D    |
| 15  | C    | A    | D    | B    |
| 16  | C    | D    | D    | C    |
| 17  | B    | A    | A    | B    |
| 18  | D    | D    | B    | A    |
| 19  | C    | C    | A    | D    |
| 20  | B    | B    | D    | C    |
| 21  | ÐSÐS | ÐSSÐ | ÐSÐS | ÐSÐS |
| 22  | ÐÐÐS | SÐÐS | ÐÐÐS | SÐÐS |
| 23  | SSSS | ÐÐÐS | SSSS | SSSS |
| 24  | ÐSSÐ | SÐÐS | SÐÐS | ÐÐÐS |
| 25  | SÐÐS | SSSS | ÐSSÐ | SÐÐS |
| 26  | SÐÐS | ÐSÐS | SÐÐS | ÐSSÐ |
| 27  | 432  | 119  | 1,41 | 0,42 |
| 28  | 1,41 | 432  | 0,42 | 0,37 |
| 29  | 119  | -12  | 432  | 119  |
| 30  | 0,42 | 0,37 | -12  | -12  |
| 31  | -12  | 1,41 | 0,37 | 432  |
| 32  | 0,37 | 0,42 | 119  | 1,41 |

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo thành với nhau một góc  $120^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ . Khi đó  $|\vec{a} + \vec{b}|$  và  $|\vec{a} - \vec{b}|$  lần lượt bằng

- A. 19 và 49.                      B. 49 và 19.                      **C.**  $\sqrt{19}$  và 7.                      D. 7 và  $\sqrt{19}$ .

**Lời giải**

**Câu 2.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $2a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{3}$  và  $AD' \perp BA'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD'$  và  $BA'$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .                      **B.**  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .                      C.  $a$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải**

+) Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $B'$  qua  $B$ .

Khi đó:  $AA'BE$  là hình bình hành  $\Rightarrow A'B // AE \Rightarrow A'B // (AD'E)$ .

Suy ra  $d(A'B, AD') = d(A'B, (AD'E)) = d(B, (AD'E))$ .

+) Gọi  $I = AC \cap BD$ .

Khi đó:  $\begin{cases} AI \perp BD \\ AI \perp DD' \text{ (do } DD' \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (DD'B'B)$

$\Rightarrow (AD'E) \perp (DD'B'B) = D'E$

Trong  $mp(DD'B'B)$ , kẻ  $BH \perp D'E$ .

Suy ra:  $BH \perp (AD'E) \Rightarrow d(B, (AD'E)) = BH$ .

+) Tính  $BH$ .

Xét tam giác  $ABA'$  vuông tại  $A$  có  $BA' = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7}$ .

Vì  $AD' \perp BA' \Rightarrow BA' \perp BC' (AD' // BC') \Rightarrow \Delta A'BC'$  vuông cân tại  $B$ .

$\Rightarrow A'C' = \sqrt{2}a\sqrt{7} = \sqrt{14}a \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{14}a}{2}$ .

Xét tam giác  $ABI$  vuông tại  $I$  có:  $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{\sqrt{14}a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Xét  $\Delta IBE$  vuông tại  $B$  có:  $BE = AA' = a\sqrt{3}, BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$\Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BI^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow BH = \frac{BI \cdot BE}{\sqrt{BI^2 + BE^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .

**Câu 3.** Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

**A.**  $\frac{1}{5}$ .

**B.**  $\frac{3}{20}$ .

**C.**  $\frac{2}{15}$ .

**D.**  $\frac{1}{6}$ .

**Lời giải**

Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành hàng ngang, không gian mẫu có số phần tử là:  $6!$ .

Gọi  $M$  là biến cố “học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B”.

Xét các trường hợp:

**Trường hợp 1.** Học sinh lớp C ngồi đầu dãy

+ Chọn vị trí cho học sinh lớp C có 2 cách.

+ Chọn 1 học sinh lớp B ngồi cạnh học sinh lớp C có 2 cách.

+ Hoán vị các học sinh còn lại cho nhau có  $4!$  cách.

Trường hợp này thu được:  $2 \cdot 2 \cdot 4! = 96$  cách.

**Trường hợp 2.** Học sinh lớp C ngồi giữa hai học sinh lớp B, ta gộp thành 1 nhóm, khi đó:

+ Hoán vị 4 phần tử gồm 3 học sinh lớp A và nhóm gồm học sinh lớp B và lớp C có:  $4!$  cách.

+ Hoán vị hai học sinh lớp B cho nhau có:  $2!$  cách.

Trường hợp này thu được:  $4! \cdot 2! = 48$  cách.

Như vậy số phần tử của biến cố  $M$  là:  $48 + 96 = 144$ .

Xác suất của biến cố  $M$  là  $P(M) = \frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{2025}{f^2(x) - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | - | -         |
| $f(x)$  | -7        | 3 | 1 | $-\infty$ |

**A.** 6.

**B.** 4.

**C.** 8.

**D.** 5.

**Lời giải**

- Ta có:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2025}{f^2(x) - 1} = \frac{2025}{48} = \frac{675}{16} \Rightarrow y = \frac{675}{16}$  là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2025}{f^2(x) - 1} = 0 \Rightarrow y = 0$  là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2024}{f(x) - 1} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2024}{f(x) - 1} = -\infty$

$\Rightarrow x = 1$  là tiệm cận đứng.

- Lại thấy: phương trình  $f^2(x) - 1 = 0$  có 5 nghiệm nên đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có 6 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có tất cả 8 đường tiệm cận.

**Câu 5.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $I$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $CC'$  sao cho  $C'I = \frac{2}{5}C'C$ .  $G$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ . Biểu diễn vector  $\overrightarrow{GI}$  qua các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **đúng**?

**A.**  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4} \left( \vec{b} + \frac{1}{5} \vec{c} - 2\vec{a} \right)$

**B.**  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4} \left( \vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c} \right).$

**C.**  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4} \left( \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{c} - 2\vec{b} \right)$

**D.**  $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4} \left( \frac{3}{5} \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} \right).$

**Lời giải**

**Câu 6.** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

**A.** 64800.

**B.** 36000.

**C.** 72000.

**D.** 60000.

**Lời giải**

TH1: 3 chữ số chẵn được chọn khác chữ số 0

Chọn 3 chữ số chẵn khác chữ số 0 là  $C_4^3$

Chọn 3 chữ số lẻ là  $C_5^3$

Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lập từ các số đã chọn là  $C_4^3.C_5^3.6! = 28800$ .

TH3: 3 chữ số chẵn được chọn có 1 chữ số là chữ số 0

Chọn 2 chữ số chẵn khác chữ số 0 là  $C_4^2$

Chọn 3 chữ số lẻ là  $C_5^3$

Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lập từ các số đã chọn là  $C_4^2.C_5^3.(6! - 5!) = 36000$

Số các số tự nhiên thỏa mãn là  $28800 + 36000 = 64800$ .

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1; 2; -3), B(1; 0; 2), C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Khi đó  $3x + 2y$  bằng

**A.**  $3x + 2y = \frac{7}{5}$ .

**B.**  $3x + 2y = 17$ .

**C.**  $3x + 2y = -\frac{11}{5}$ .

**D.**  $3x + 2y = \frac{11}{5}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5), \overrightarrow{AC} = (x+1; y-2; 1)$ .

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y = \frac{7}{5}$$

**Câu 8.** Biết hàm số  $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$  luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $m$  thuộc  $[a; b]$ . Tính  $a+b$ ?

**A.**  $-\frac{10}{3}$ .

**B.**  $\frac{10}{3}$ .

**C.** 3.

**D.**  $-\frac{5}{3}$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = m-3 + (2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x \leq 3-m, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1:  $m = -\frac{1}{2}$  ta có  $0 \leq \frac{7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Vậy hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Trường hợp 2:  $m < -\frac{1}{2}$  ta có  $\sin x \geq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \leq -1$

$$\Leftrightarrow 3-m \geq -2m-1 \Leftrightarrow m \geq -4$$

Trường hợp 3:  $m > -\frac{1}{2}$  ta có:

$$\sin x \leq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \geq 1 \Leftrightarrow 3-m \geq 2m+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}. \text{ Vậy } m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$$

**Câu 9.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu tiên là  $S_n = 6^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$ . Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân đã cho. Tính  $S = q^2 - 1$ .

**A.**  $S = 24$ .

**B.**  $S = 8$ .

**C.**  $S = 35$ .

**D.**  $S = 3$ .

**Lời giải**

Ta có: 
$$\begin{cases} S_1 = u_1 = 6^1 - 1 = 5 \\ S_2 = u_1 + u_2 = 6^2 - 1 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow S = q^2 - 1 = 35.$$

**Câu 10.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $BC$ . Biết rằng góc giữa  $MN$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ , cosin góc giữa  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng:

**A.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{41}}{41}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $\frac{2\sqrt{41}}{41}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm  $SO, OB$  thì  $EF$  là hình chiếu của  $MN$  trên  $(SBD)$ .

Gọi  $P$  là trung điểm  $OA$  thì  $PN$  là hình chiếu của  $MN$  trên  $(ABCD)$ .

Theo bài ra:  $\widehat{MNP} = 60^\circ$ .

Áp dụng định lý cos trong tam giác  $CNP$  ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

$$\text{Suy ra: } NP = \frac{a\sqrt{10}}{4}, MP = NP \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}; SO = 2MP = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}.$$

Ta lại có:  $MENF$  là hình bình hành (vì  $ME$  và  $NF$  song song và cùng bằng  $\frac{1}{2}OA$ ).

Gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  và  $EF$ , khi đó góc giữa  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  là  $\widehat{NIF}$ .

$$MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{30}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \longrightarrow IN = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\cos \widehat{NIF} = \frac{IF}{IN} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(5; -3; 2)$ ,  $B(2; 1; -2)$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm phân biệt thay đổi thoả mãn  $BM = BN = 2$  và  $A, M, N$  thẳng hàng. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = 2.AM + 5.AN$  có dạng  $7\sqrt{m} - n$  với  $m, n$  là số tự nhiên. Tính giá trị  $m - n$ .

A. 43.

B. 37.

**C. 35.**

D. 41.

**Lời giải**

Ta có:  $M, N$  nằm trên mặt cầu tâm  $B$ , bán kính  $R = 2$ .

Do  $BA = \sqrt{41} > R = 2 \Rightarrow A$  nằm ngoài đoạn  $MN$ . Để  $S$  nhỏ nhất thì  $N$  phải nằm giữa  $A, M$

Gọi  $H$  là trung điểm  $MN \Rightarrow BH \perp MN$ ,  $HM = HN = \frac{1}{2}MN$

Khi đó:  $S = 2(AH + HM) + 5(AH - NH) = 7.AH - 3.NH$

$S = 7\sqrt{AB^2 - BH^2} - 3\sqrt{R^2 - BH^2} = 7\sqrt{41 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2}$  với  $BH = x$ ,  $0 \leq x < 2$

Xét hàm số  $f(x) = 7\sqrt{41 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2}$ , ( $0 \leq x < 2$ )

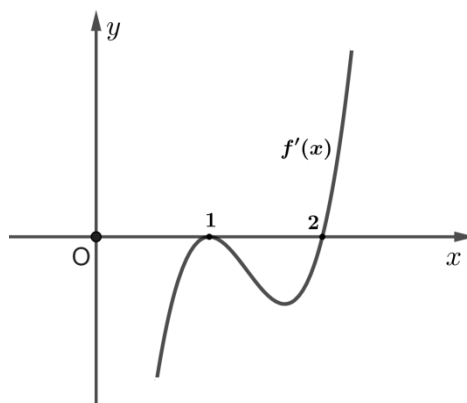
$$f'(x) = \frac{-7x}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}} = x \left( \frac{-7}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} \right).$$

Xét  $\frac{-7}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} > 0 \Leftrightarrow 7\sqrt{4 - x^2} < 3\sqrt{41 - x^2} \Leftrightarrow 196 - 49x^2 < 369 - 9x^2 \Leftrightarrow 40x^2 + 173 > 0$  (luôn đúng)

Suy ra  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 2)$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$  đồng biến trên  $[0; 2)$

Vậy  $\min_{[0; 2)} f(x) = f(0) = 7\sqrt{41} - 6 \Rightarrow m = 41, n = 6 \Rightarrow m - n = 35$

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(0; 1)$  và  $(2; +\infty)$ .

B.  $(1; 3)$ .

**C.  $(-\infty; 2)$ .**

D.  $(0; +\infty)$ .

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(x) \leq 0, \forall x \leq 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$ .

**Câu 13.** Nghiệm của phương trình  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$  là:

A.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

**Câu 14.** Cho  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tổng  $S = a^2 + b^2$  bằng

A.  $S = 1.$

B.  $S = 4.$

C.  $S = 13.$

D.  $S = 9.$

**Lời giải**

Vì hàm số có giới hạn hữu hạn  $x = 1$  nên  $1 + a + b = 0$ .

Áp dụng vào giả thiết ta được  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+a}{2} = \frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow a = -3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow S = 13.$

**Câu 15.** Tổng các số nguyên  $x$  thỏa mãn  $\left[ \log_2(x^2 + 1) - \log_2(x + 31) \right] (32 - 2^{x-1}) \geq 0$

A.  $-480.$

B.  $27.$

C.  $-449.$

D.  $28.$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x + 31 > 0 \Leftrightarrow x > -31$ .

Ta có  $\left[ \log_2(x^2 + 1) - \log_2(x + 31) \right] (32 - 2^{x-1}) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 \left( \frac{x^2 + 1}{x + 31} \right) \left( 32 - \frac{2^x}{2} \right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_2 \left( \frac{x^2 + 1}{x + 31} \right) (64 - 2^x) \geq 0$

Xét  $\log_2 \left( \frac{x^2 + 1}{x + 31} \right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq x + 31 \Leftrightarrow x^2 - x - 30 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -5 \end{cases}$

$64 - 2^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$

Bảng xét dấu

| $x$                                     | $-31$ | $5$ | $6$ | $+\infty$ |     |
|-----------------------------------------|-------|-----|-----|-----------|-----|
| $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x+31}\right)$ | $+$   | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |
| $64-2^x$                                | $+$   | $ $ | $+$ | $0$       | $-$ |
| VT                                      | $+$   | $0$ | $-$ | $0$       | $-$ |

Dựa bảng dấu suy ra miền nghiệm của BPT là  $T = (-31; -5] \cup \{6\}$

$x \in \{-30; -29; \dots; -5; 6\}$ . Tổng các giá trị nguyên của  $x$  là:  $\frac{(-5-30) \cdot 26}{2} + 6 = -449.$

**Câu 16.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút) | $[20; 25)$ | $[25; 30)$ | $[30; 35)$ | $[35; 40)$ | $[40; 45)$ |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 6          | 7          | 5          | 6          | 4          |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 27,5.

B. 12,2.

C.  $\frac{165}{14}$ .

D.  $\frac{155}{13}$ .

**Lời giải**

Cỡ mẫu  $n = 28$

Gọi  $x_1; x_2; \dots; x_{28}$  là mẫu số liệu gốc về thời gian tập nhảy mỗi ngày của bạn Chi được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có:  $x_1; \dots; x_6 \in [20; 25); x_7; \dots; x_{13} \in [25; 30); x_{14}; \dots; x_{18} \in [30; 35);$

$x_{19}; \dots; x_{24} \in [35; 40); x_{25}; \dots; x_{28} \in [40; 45).$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm  $[25; 30)$ , do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu

$$\text{số liệu ghép nhóm là: } Q_1 = 25 + \frac{\frac{28}{4} - 6}{7} (30 - 25) = \frac{180}{7}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm  $[35; 40)$ , do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số

$$\text{liệu ghép nhóm là: } Q_3 = 35 + \frac{\frac{3 \cdot 28}{4} - 18}{6} (40 - 35) = \frac{75}{2}$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{165}{14}$ .

**Câu 17.** Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

| Thu nhập (triệu đồng) | $[5; 8)$ | $[8; 11)$ | $[11; 14)$ | $[14; 17)$ | $[17; 20)$ |
|-----------------------|----------|-----------|------------|------------|------------|
| Số người              | 30       | 55        | 45         | 30         | 20         |

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng).

A. 12,5.

B. 11,75.

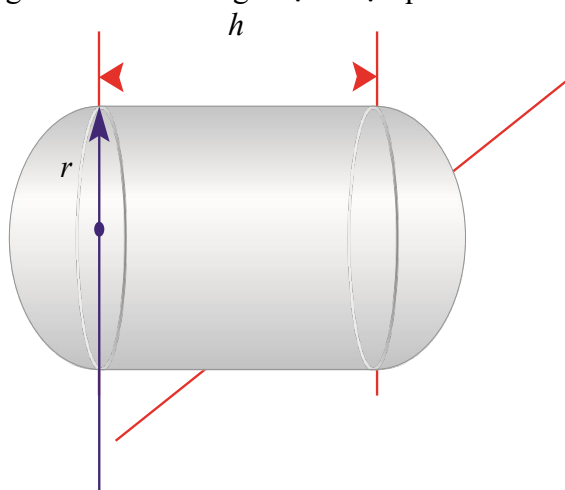
C. 11.

D. 10,5.

**Lời giải**

$$\bar{x} = \frac{6,5 \times 30 + 9,5 \times 55 + 12,5 \times 45 + 15,5 \times 30 + 18,5 \times 20}{180} = 11,75.$$

**Câu 18.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài  $h$  mét ( $h > 0$ ) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính  $r$  ( $r > 0$ ) (Hình vẽ). Biết rằng thể tích của thùng chứa là  $144000\pi \text{ m}^3$ . Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho  $1\text{m}^2$ , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho  $1\text{m}^2$ . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất thì  $r$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của đơn vị mét), biết rằng bán kính  $r$  không được vượt quá  $50\text{m}$ ?



A. 36,5.

B. 38,1.

C. 35,7.

**D. 37,8.**

**Lời giải**

Thể tích của thùng nước là

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{8}{3} \pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h = 144000\pi \text{ (m}^3\text{)} \quad (0 < r \leq 50)$$

$$\Rightarrow h = \frac{144000\pi - \frac{8}{3}\pi \cdot r^3}{\pi \cdot r^2} = \frac{144000}{r^2} - \frac{8}{3} \cdot r$$

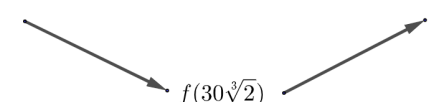
Chi phí sơn bề mặt bên ngoài thùng nước là:

$$f(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 20000 + 2\pi \cdot r \cdot h \cdot 10000 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 20000 + 20000\pi \cdot r \cdot \left( \frac{144000}{r^2} - \frac{8}{3} \cdot r \right)$$

$$f(r) = 80000 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2880000000}{r} \pi - \frac{160000}{3} \pi \cdot r^2 = \frac{80000}{3} \pi \cdot r^2 + \frac{2880000000}{r} \pi$$

$$\text{Ta có: } f'(r) = \frac{160000}{3} \pi \cdot r - \frac{2880000000}{r^2} \pi = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{54000} = 30\sqrt[3]{2}$$

Bảng biến thiên:

|         |                                                                                    |                        |    |   |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----|---|
| $r$     | 0                                                                                  | $30 \cdot \sqrt[3]{2}$ | 50 |   |
| $f'(r)$ | 0                                                                                  | −                      | 0  | + |
| $f(r)$  |  |                        |    |   |

Vậy để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa nhỏ nhất khi  $r = 30\sqrt[3]{2} \approx 37,8$  (m)

**Câu 19.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 9}{x + 1}$  bằng

A.  $4\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{2}$ .

**C.  $6\sqrt{5}$ .**

D.  $3\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } y = x + \frac{9}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{9}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -7 \end{cases}$$

Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là:  $A(2; 5); B(-4; -7)$ .

$$\Rightarrow AB = 6\sqrt{5}.$$

**Câu 20.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết:  $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$  ( $k \in \mathbb{R}$ );  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$ . Giá trị  $k$  thích hợp để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  là:

A.  $k = -2$ .

**B.  $k = 2$ .**

C.  $k = 14$ .

D.  $k = 6$ .

**Lời giải**

Vì  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương nên:

+  $AB = AA' = AD$ ;

+ Các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  đôi một vuông góc với nhau. Do đó:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ,  $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

$$\text{Để } \overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM} \text{ thì } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (-4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}) \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AA'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) - 2\overrightarrow{AD} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0 \\
&\Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 2k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} - 3k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} + 6\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\
&\Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 0 + k(\overrightarrow{AA'})^2 - 0 - 0 - 0 + 6(\overrightarrow{AD})^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -8AB^2 + kAA'^2 + 6AD^2 = 0 \text{ (Mà } AB = AA' = AD \text{)} \\
&\Leftrightarrow -8AB^2 + kAB^2 + 6AB^2 = 0 \Leftrightarrow (-8 + k + 6)AB^2 = 0 \Leftrightarrow -8 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2.
\end{aligned}$$

Vậy giá trị  $k$  thích hợp để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  là  $k = 2$ .

## PHẦN II: TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng 3,  $SA = SB = SD = \sqrt{6}$  và tam giác  $ABD$  đều. Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua  $B$  và vuông góc với mặt phẳng  $(SCD)$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(P)$ .

- a)  $SH \perp (ABCD)$ .
- b) Thể tích khối chóp  $S \cdot ABCD$  bằng  $\frac{3}{2}$ .
- c) Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ .
- d) Giá trị lớn nhất của  $\sin \alpha$  bằng  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

**Lời giải**

a)

Ta có  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABD$  đều nên  $HA = HB = HC$  và  $SA = SB = SD = \sqrt{6}$ , suy ra  $SH \perp (ABCD)$  **Vậy mệnh đề ĐÚNG**

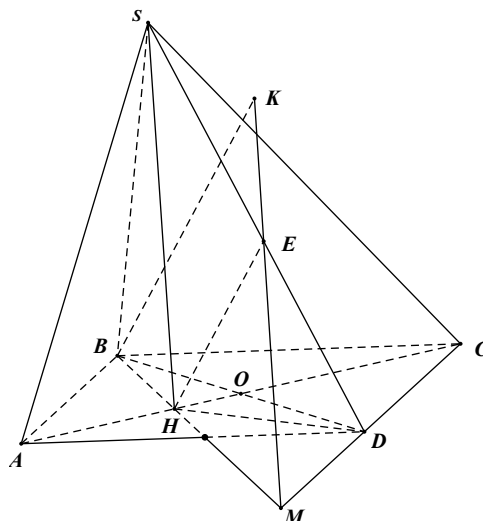
b)

Diện tích hình thoi  $ABCD$  bằng  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Có } BH = \sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{3}$$

Thể tích khối chóp  $S \cdot ABCD$  bằng  $V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$ . **Vậy mệnh đề SAI**

c)



Ta có  $\triangle ABD$  đều nên  $HD \perp CD$ , kẻ  $HE \perp SD$ . Vì  $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HE \perp (SCD)$ .

Gọi  $BH \cap SD = M$

Xét  $(BME)$  có  $BK // HE, K \in ME \Rightarrow BK \perp (SCD)$ .

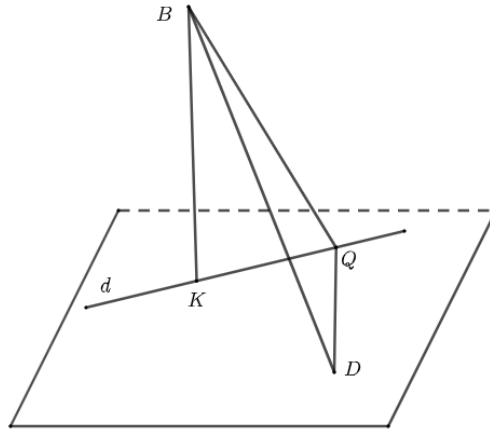
$$\Delta BMK: \frac{MH}{MB} = \frac{HE}{BK} = \frac{2}{3} \Rightarrow BK = \frac{3}{2}HE; BH = HD = \sqrt{3}$$

$$\text{Xét } \Delta SHD: \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Vậy } BK = \frac{3}{2}HE = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ . **Vậy mệnh đề ĐÚNG**

d)

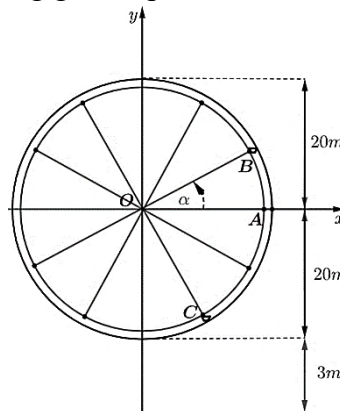


Gọi  $d = (P) \cap (SCD); (P) \supset BK \Rightarrow (P) \perp (SCD); DQ \perp d \Rightarrow DQ \perp (P) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{DQ}{BD}$

Để  $\sin \alpha$  lớn nhất nếu  $DQ$  lớn nhất; khi đó

$$DQ = DK \Rightarrow \sin \alpha_{\max} = \frac{DK}{BD} = \frac{\sqrt{BD^2 - BK^2}}{3} = \frac{\sqrt{3^2 - \frac{27}{8}}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{4}. \text{ **Vậy mệnh đề SAI**}$$

**Câu 2.** Một mô hình trò chơi vòng quay ở công viên có chiều cao tối đa  $23 \text{ m}$  so với mặt đất, bán kính vòng quay là  $20 \text{ m}$ . Hai bạn Hoa và Mai cùng chơi chung lượt quay và ngồi trong hai ca bin  $B, C$  mà góc  $\widehat{BOC} = 90^\circ$  (hình vẽ);  $\alpha$  là một góc lượng giác hợp bởi tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$ .



**a)** Khi  $\alpha = 45^\circ$  thì chiều cao của  $B$  so với mặt đất là  $37,14 \text{ m}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**b)** Chiều cao của  $B$  so với mặt đất là  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha$  (mét).

**c)** Chiều cao của  $C$  so với mặt đất là  $h_C = 23 - 20 \cos \alpha$  (mét)

**d)** Khi  $B$  ở vị trí có độ cao  $33 \text{ m}$  thì  $C$  ở độ cao  $13 \text{ m}$  so với mặt đất?

**Lời giải****a) Mệnh đề đúng.**

Với  $\alpha = 45^\circ$  thì  $h_B = 23 + 20 \sin 45^\circ = 23 + 10\sqrt{2} \approx 37,14 \text{ m}$ .

**b) Mệnh đề đúng.**

Chiều cao của  $B$  là  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha$  (mét).

**c) Mệnh đề đúng.**

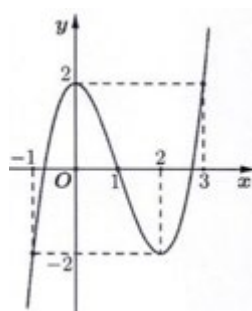
Chiều cao của  $C$  là  $h_C = 23 + 20 \sin(OA, OC) = 23 + 20 \sin(\alpha + 270^\circ) = 23 - 20 \sin(\alpha + 90^\circ) = 23 - 20 \cos \alpha$  (m).

**d) Mệnh đề sai.**

Khi  $B$  ở vị trí có độ cao  $33 \text{ m}$  thì  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha = 33 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$ .

Khi đó  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 3.** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = f(2) = \frac{1}{2}$  và hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



- a)** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .
- b)** Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  tại  $x = 2$ .
- c)** Phương trình  $f'(\sin x) = 0$  có 10 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .
- d)** Hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$  có 8 điểm cực trị.

**Lời giải**

**a)** Chọn sai. Dựa vào đồ thị, suy ra  $f'(x) = 0$  có nghiệm đơn  $x_2 \in (2; +\infty)$  nên hàm số  $y = f(x)$  có cực trị trong khoảng  $(2; +\infty)$ . Suy ra hàm số  $y = f(x)$  không đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . **Vậy mệnh đề SAI**

**b)** Chọn sai. Ta có  $f'(x) = 0$  có một nghiệm đơn  $x_2 \in (1; 3)$  và  $f'(x)$  đổi dấu từ  $(-)$  sang  $(+)$  khi đi qua  $x_2$ , suy ra hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  tại  $x = x_2$  ( $2 < x_2 < 3$ ). **Vậy mệnh đề SAI**

**c)** Chọn sai. Từ đồ thị ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 & (-1 < x_1 < 0) \\ x = 1 \\ x = x_2 & (2 < x_2 < 3). \end{cases}$

Do đó  $f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = x_1 \\ \sin x = 1. \end{cases}$

Vì  $\sin x = x_1$  có hai nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$ , mà hàm số  $y = \sin x$  tuần hoàn chu kỳ  $T = 2\pi$  nên  $\sin x = x_1$  có 10 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .

Tương tự  $\sin x = 1$  có một nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  nên  $\sin x = 1$  có 5 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .

Suy ra phương trình  $f'(\sin x) = 0$  có 15 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ . **Vậy mệnh đề SAI**

d) Chọn sai. Ta có  $g'(x) = \frac{\left(18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right)\left(-6f'\left(1-\frac{x}{3}\right)-2x\right)}{\left|18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right|}$ .

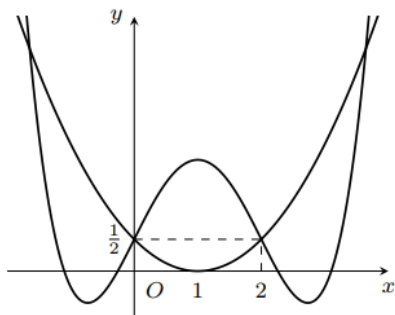
$$\left(18f\left(1-\frac{x}{3}\right)-x^2\right)\left(-6f'\left(1-\frac{x}{3}\right)-2x\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(1-\frac{x}{3}\right)=\frac{x^2}{18} \\ f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\frac{x}{3}. \end{cases}$$

Đặt  $t=1-\frac{x}{3} \Rightarrow x=3-3t$ .

Khi đó  $f\left(1-\frac{x}{3}\right)=\frac{x^2}{18}$  trở thành  $f(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$ .

Vẽ đồ thị hai hàm số  $y=f(t)$  và  $y=\frac{1}{2}(1-t)^2$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

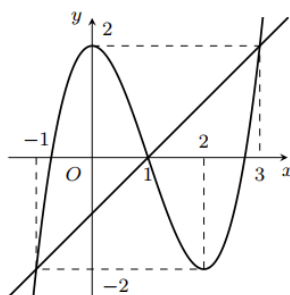
Ta có  $f(0)=f(2)=\frac{1}{2}$



Dựa vào đồ thị suy ra  $f(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$  có bốn nghiệm đơn phân biệt ẩn  $t$ .

Đặt  $t=1-\frac{x}{3}$ . Khi đó  $f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\frac{x}{3}$  trở thành  $f'(t)=t-1$ .

Vẽ đồ thị hai hàm số  $y=f'(t)$  và  $y=t-1$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ



Dựa vào đồ thị suy ra  $f'(t)=t-1$  có ba nghiệm đơn phân biệt ẩn  $t$ .

Ứng với mỗi nghiệm  $t$  cho ta một nghiệm  $x$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  có 7 điểm cực trị. **Vậy mệnh đề Sai**

**Câu 4.** Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

| Lớp điểm thi  | $[0; 2)$ | $[2; 4)$ | $[4; 6)$ | $[6; 8)$ | $[8; 10)$ |
|---------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số hs lớp 12E | 3        | 6        | 12       | 24       | 5         |
| Số hs lớp 12F | 4        | 5        | 16       | 18       | 7         |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn 2,9.
- c) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

**Lời giải**

a) Điểm trung bình của lớp 12E:  $\overline{x_E} = \frac{1}{50}(3.1 + 6.3 + 12.5 + 24.7 + 5.9) = 5,88$ .

Điểm trung bình của lớp 12F:  $\overline{x_F} = \frac{1}{50}(4.1 + 5.3 + 16.5 + 18.7 + 7.9) = 5,76$ .

$$\Rightarrow \overline{x_E} > \overline{x_F}$$

Do đó dựa vào điểm trung bình ta thấy học sinh lớp 12E học tốt hơn học sinh lớp 12F.

Vậy

a) đúng.

b) Tìm khoảng tứ phân vị của MSLGN lớp 12F:

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm  $[4;6)$ , do đó:

$$Q_1 = 4 + \frac{\frac{50}{4} - 9}{16} \cdot (6 - 4) = \frac{71}{16}.$$

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ 3 là nhóm  $[6;8)$ , do đó:

$$Q_3 = 6 + \frac{3 \cdot \frac{50}{4} - 25}{18} \cdot (8 - 6) = \frac{133}{18}.$$

$$\text{Khoảng tứ phân vị là } \Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{133}{18} - \frac{71}{16} = \frac{425}{144} \approx 2,95.$$

Vậy

b) sai.

c) Điểm học sinh đạt được nhiều nhất ở mỗi lớp là một của mẫu số liệu ghép nhóm của mỗi lớp được cho bảng trên.

- Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12E là nhóm  $[6;8)$

$$M_o = 6 + \frac{24 - 12}{24 - 12 + 24 - 5} \cdot (8 - 6) = \frac{210}{31} \approx 6,77.$$

- Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12F là nhóm  $[6;8)$

$$M_o = 6 + \frac{18 - 16}{18 - 16 + 18 - 7} \cdot (8 - 6) = \frac{82}{13} \approx 6,31.$$

Vậy

c) sai.

d) - Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12E:

$$s_E = \sqrt{S_E^2} = \sqrt{\frac{1}{50}(3.1^2 + 6.3^2 + 12.5^2 + 24.7^2 + 5.9^2) - 5,88^2} \approx 2,05$$

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12F:

$$s_F = \sqrt{S_F^2} = \sqrt{\frac{1}{50}(4.1^2 + 5.3^2 + 16.5^2 + 18.7^2 + 7.9^2) - 5,76^2} \approx 2,19$$

Ta thấy độ lệch chuẩn ở mẫu số liệu lớp 12E nhỏ hơn độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12F. Do đó lớp 12E học đều môn Toán hơn lớp 12F.

Vậy

d) đúng.

**Câu 5.** Gọi  $S$  là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số phần tử của  $S$  là 30240.

b) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $a > b > c > d > e$  là  $\frac{1}{108}$ .

c) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $c < b < a$  và  $c < d < e$  là  $\frac{1}{18}$ .

d) Xác suất để lấy được số chia hết cho 25 là  $\frac{1}{486}$ .

**Lời giải**

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; -1; 2)$ ,  $B(4; 3; -2)$ ,  $C(5; -1; 6)$  và  $D(6; 1; 4)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều

b) Độ dài đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  là  $\frac{20\sqrt{2}}{9}$ .

c) Tọa độ điểm  $M$  thuộc cạnh  $AC$  và cách đều hai đường thẳng  $BA, BC$  là  $(x; y; z)$  thỏa mãn  $x + y + z = \frac{29}{5}$ .

d) Gọi điểm  $N(a; b; c)$  sao cho  $NA + NB + NC + ND$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + b = \frac{25}{3}$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\overline{AB} = (2; 4; -4) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$ .

$\overline{AC} = (3; 0; 4) \Rightarrow AC = 5$ ;  $\overline{BC} = (1; -4; 8) \Rightarrow BC = 9$ .

Vậy

a) sai.

b) Chu vi tam giác  $ABC$  là  $2p = AB + BC + CA = 20$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{ABC} = \sqrt{p(p - BC)(p - CA)(p - AB)} = 10\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

Vậy

b) đúng.

c) Ta có  $BA = 6$ ,  $BC = 9$ .

Điểm  $M(x; y; z)$  là chân đường phân giác trong hạ từ  $B$  xuống  $AC$ .

$$\text{Ta có } \overline{MA} = -\frac{BA}{BC} \cdot \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA} = -\frac{6}{9} \cdot \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA} = -\frac{2}{3} \overline{MC}.$$

$$\text{Mà } \overline{MA} = (2 - x; -1 - y; 2 - z) \text{ và } \overline{MC} = (5 - x; -1 - y; 6 - z) \text{ nên } M\left(\frac{16}{5}; -1; \frac{18}{5}\right).$$

Vậy

c) đúng.

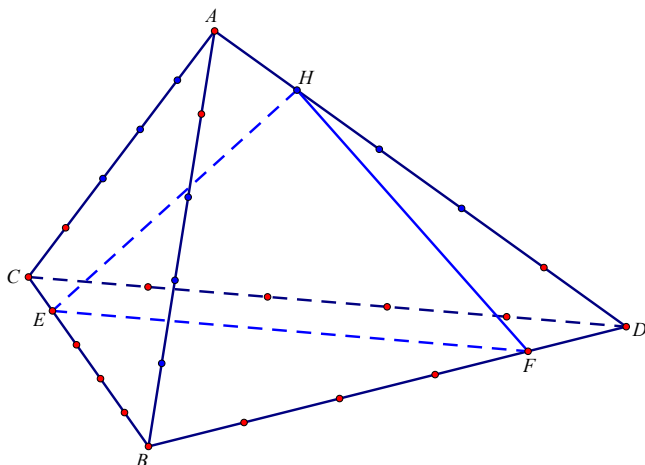
d)  $\overline{AB} = (2; 4; -4)$ ,  $\overline{CD} = (1; 2; -2)$  nên  $ABDC$  là hình thang, do đó điểm  $N$  là giao điểm của hai đường chéo  $AD, BC$ . Dễ thấy  $\overline{NA} + 2\overline{ND} = \vec{0} \Rightarrow N\left(\frac{14}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right) \Rightarrow a + b = 5$ .

Vậy  
d) sai.

### PHẦN III: TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 4 điểm chia đều cạnh đó thành các phần bằng nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh lấy từ 24 điểm đánh dấu sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho.

**Lời giải**



Nhận thấy, nếu một đoạn thẳng có hai đầu mút nằm trên hai cạnh chéo nhau của tứ diện thì nó không thể song song với bất kỳ cạnh nào của tứ diện. Xét tam giác  $HEF$  có 3 đỉnh thuộc 24 đỉnh đã đánh dấu.

Giả sử  $\triangle HEF$  thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó một trong các cạnh của nó, giả sử là  $EF$  song song với  $CD$ . Ta có hai trường hợp là  $X \in BC, F \in BD$  hoặc  $E \in AC, F \in AD$

**Trường hợp 1:** Nếu  $E \in BC, F \in BD$  thì  $H \notin (BCD)$ , chỉ còn 12 điểm có thể chọn làm  $H$ .

Ta thấy có 4 cặp  $E, F$  thỏa mãn. Theo định lý Talet vì có các đoạn tỉ lệ và ứng với mỗi cặp như vậy, trên các cạnh  $AB, AC, AD$  ta lại loại bớt 3 điểm nữa (vì khi đó  $(HEF)$  song song với nhiều hơn một cạnh của tứ diện). Suy ra có 9 cách chọn  $H$ . Do đó, có  $4.9 = 36$  tam giác thỏa mãn bài toán.

**Trường hợp 2:** Nếu  $E \in AC, F \in AD$  tương tự có 36 tam giác thỏa mãn.

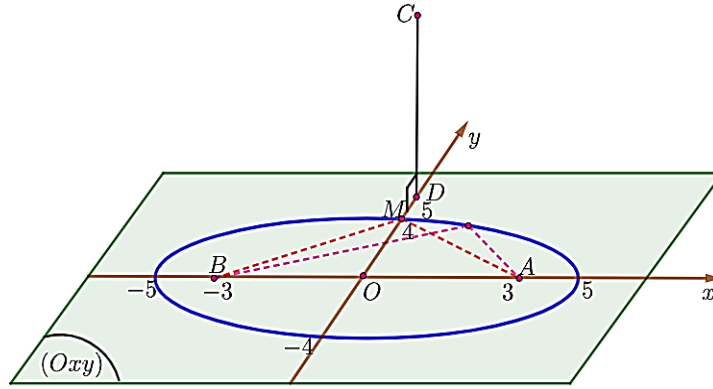
Do các cạnh của tứ diện bình đẳng nên có  $6.(2.36) = 432$  tam giác.

**Câu 2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3;0;0), B(-3;0;0)$  và  $C(0;5;1)$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  sao cho  $MA + MB = 10$ , giá trị nhỏ nhất của  $MC$  bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Lời giải**

Hai điểm  $A, B$  cùng thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  và  $MA + MB = 10 > 6 = AB$ . Do vậy, tập hợp điểm  $M$  là một elip thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  với hai tiêu điểm là  $A$  và  $B$



Đặt  $MA + MB = 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ ,  $AB = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$ ,  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

Do vậy  $M \in (E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  hay  $M \in (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

Gọi  $D(0; 4; 0)$  là hình chiếu của  $C$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Khi đó ta có:  $CD = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$  và  $MC = \sqrt{CD^2 + DM^2} = \sqrt{1 + DM^2}$  (\*). Do vậy  $MC$  bé nhất khi và chỉ khi  $DM$  bé nhất.

Theo hình vẽ, ta thấy khi  $M$  trùng với đỉnh elip  $(E)$  thuộc tia  $Oy$  thì  $DM$  bé nhất, hay  $M(0; 4; 0)$ .

Suy ra  $DM = 1$ , khi đó  $MC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1,41$ .

**Câu 3.** Có hai vợ chồng đã nghĩ ra một trò chơi đầy trí tuệ như sau: Họ sử dụng hai ly nước giống hệt nhau, mỗi ly chứa tối đa 240 ml nước. Ban đầu, người vợ có một ly nước đầy và người chồng có một cái ly rỗng. Bước thứ nhất người vợ rót 1/2 lượng nước trong ly của mình sang ly của người chồng; bước tiếp theo người chồng lại rót 1/3 lượng nước trong ly của mình sang cho ly người vợ. Quá trình này cứ tiếp tục mà mỗi lần rót thì mẫu số được cộng thêm 1; trò chơi này hấp dẫn đến mức cả hai người thực hiện đến bước thứ 100 thì dừng lại, hỏi lượng nước trong ly người chồng khi đó là bao nhiêu ml? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, giả sử trong quá trình rót nước không có giọt nước nào tràn ra ngoài)

### Lời giải

Ta có thể thực hiện việc rót theo sơ đồ sau:

| Ban đầu                                                               | Ly người vợ: $V\text{ ml}$                                     | Ly người chồng: $0\text{ ml}$ |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| <b>Bước thứ nhất:</b><br>Vợ rót $\frac{1}{2}$ nước trong ly cho chồng | $\frac{1}{2}V$                                                 | $\frac{1}{2}V$                |
| <b>Bước thứ hai:</b><br>Chồng rót $\frac{1}{3}$ nước trong ly cho vợ  | $\frac{1}{2}V + \frac{1}{6}V = \frac{2}{3}V$                   | $\frac{1}{3}V$                |
| <b>Bước thứ ba:</b><br>Vợ rót $\frac{1}{4}$ nước trong ly cho chồng   | $\frac{2}{3}V - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{2}V$ | $\frac{1}{2}V$                |
| <b>Bước thứ tư:</b><br>Chồng rót $\frac{1}{5}$ nước trong ly cho vợ   | $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{3}{5}V$  | $\frac{2}{5}V$                |
| <b>Bước thứ năm:</b><br>Vợ rót $\frac{1}{6}$ nước trong ly cho chồng  | $\frac{3}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}V = \frac{1}{2}V$  | $\frac{1}{2}V$                |

Quá trình này được lặp đi lặp lại và ta thấy rằng trong các **bước lẻ** (người vợ rót nước cho người chồng) thì lượng nước hai ly bằng nhau.

**Bước thứ 99** thì lượng nước hai ly bằng nhau.

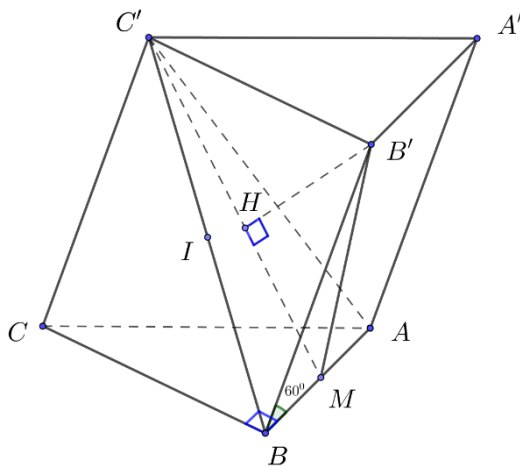
**Bước thứ 100** (người chồng rót  $\frac{1}{101}$  nước trong ly cho vợ), lượng nước trong ly người chồng là

$$\frac{1}{2}V - \frac{1}{101} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{50V}{101} = \frac{50 \cdot 240}{101} \approx 119\text{ ml}.$$

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có thể tích  $V$ , có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  với  $BA = a, AC = 2a$ . Mặt bên  $(BB'A'A)$  là hình thoi có góc  $\widehat{ABB'} = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC'$ .

Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B'A'$  và  $BI$  bằng  $\frac{3a}{4}$ . Biết rằng  $V < \frac{a^3}{2}$ . Giá trị  $V = x.a^3$  thì  $x$  bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**



$$\text{Ta có: } d_{(B'A', BI)} = d_{(B'A', BC')} = d_{(B'A', (ABC'))} = d_{(B', (ABC'))} = \frac{3a}{4}$$

Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Dựng  $B'H \perp C'M$  tại  $H$ .

Vì  $BB'A'A$  là hình thoi nên ta có  $AB = BB' = a$ .

Góc  $\widehat{ABB'} = 60^\circ$  nên  $\triangle ABB'$  là tam giác đều suy ra  $B'M \perp AB$  (1).

Mặt khác  $CB \perp AB \Rightarrow C'B' \perp AB$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $AB \perp (C'B'M) \Rightarrow AB \perp B'H$ .

Ta có:  $\begin{cases} B'H \perp C'M \\ B'H \perp AB \end{cases} \Rightarrow B'H \perp (ABC') \Rightarrow d_{(B', (ABC'))} = B'H = \frac{3a}{4}$ .

Ta có:  $BC = \sqrt{AC^2 - BA^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow B'C' = a\sqrt{3}$ .

$B'M = \sqrt{BB'^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $C'H = \sqrt{B'C'^2 - B'H^2} = \frac{a\sqrt{39}}{4}$ ;  $HM = \sqrt{B'M^2 - B'H^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Trường hợp 1:** Điểm  $H$  nằm trong đoạn  $C'M$ .

Khi đó ta có:  $C'M = C'H + HM = \frac{a(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{4}$ .

Diện tích tam giác  $ABC'$  là:  $S_{ABC'} = \frac{1}{2} C'M \cdot AB = \frac{a^2(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{8}$ .

Thể tích khối chóp  $B'.ABC'$  là:  $V_{B'.ABC'} = \frac{1}{3} S_{ABC'} \cdot B'H = \frac{a^3(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{32}$ .

Vì  $V = 3V_{B'.ABC'}$  nên ta có:  $V = \frac{3a^3(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{32} > \frac{a^3}{2}$  (loại).

**Trường hợp 2:** Điểm  $H$  nằm ngoài đoạn  $C'M$ .

Do  $C'H > HM$  nên điểm  $H$  thuộc tia đối của tia  $MC'$ .

Khi đó ta có:  $C'M = C'H - HM = \frac{a(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{4}$ .

Diện tích tam giác  $ABC'$  là:  $S_{ABC'} = \frac{1}{2} C'M \cdot AB = \frac{a^2(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{8}$ .

Thể tích khối chóp  $B'.ABC'$  là:  $V_{B'.ABC'} = \frac{1}{3} S_{ABC'} \cdot B'H = \frac{a^3(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{32}$ .

Vì  $V = 3V_{B'.ABC'}$  nên ta có:  $V = \frac{3a^3(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{32} \simeq 0.42a^3 < \frac{a^3}{2}$  (thỏa mãn).

**Câu 5.** Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn  $x + y > 0$  và  $10^{x^2+y^2} + 2 \cdot \log \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 100^{x+y} + \log 4$ . Gọi  $M, m$  lần lượt

là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2$ . Tổng  $M + m$ .

### Lời giải

Ta có:

$$10^{x^2+y^2} + 2 \cdot \log \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 100^{x+y} + \log 4 \Leftrightarrow 10^{x^2+y^2} + 2 \log(x^2+y^2) \leq 10^{2(x+y)} + 2 \log 2(x+y) \quad (1)$$

Đặt  $f(t) = 10^t + 2 \log t$ , ( $t > 0$ )  $\Rightarrow f'(t) = 10^t \cdot \ln 10 + 2 \frac{1}{t \ln 10} > 0, \forall t > 0$ .

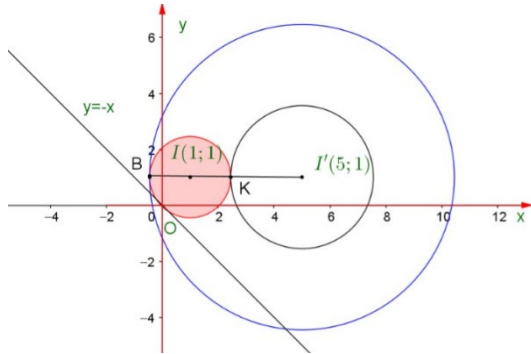
Suy ra hàm số  $f(t) = 10^t + 2 \log t$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Do đó:  $(1) \Leftrightarrow f(x^2 + y^2) \leq f(2(x + y)) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2x + 2y \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, (2)$

Tập hợp các điểm  $(x, y)$  thỏa mãn  $(2)$  là hình tròn tâm  $I(1; 1)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ , trừ điểm  $O(0; 0)$ .

Ta thấy:  $P = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 24 + P, (3)$

- Nếu  $24 + P = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$  không thỏa  $(1)$



- Nếu  $24 + P > 0$  thì ứng với mỗi giá trị của  $P$  tập hợp những điểm  $(x, y)$  thỏa mãn  $(3)$  là đường tròn tâm  $I' = (5, 1)$ , bán kính  $R' = \sqrt{24 + P}$ .

Ta thấy:  $\overrightarrow{II'} = (4; 0) \Rightarrow II' = 4$ .

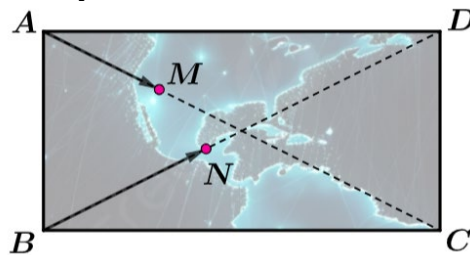
Dựa vào hình vẽ giá trị của  $P$  thỏa mãn  $4 - \sqrt{2} \leq \sqrt{24 + P} \leq 4 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 18 - 8\sqrt{2} \leq 24 + P \leq 18 + 8\sqrt{2} \Leftrightarrow -6 - 8\sqrt{2} \leq P \leq -6 + 8\sqrt{2}$ .

Do đó  $\begin{cases} M = -6 + 8\sqrt{2} \\ m = -6 - 8\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M + m = -12$ .

**Câu 6.** Trên một banner quảng cáo du lịch có bề mặt hình chữ nhật, người ta gắn hai đèn led chạy dọc theo các đường chéo  $AC$  và  $BD$ , khi bật nguồn thì chúng bắt đầu cùng lúc.

**Đèn led thứ nhất có điểm chạy là  $M$ :** chạy từ  $A$  đến  $C$  với tốc độ  $2 \text{ cm/s}$ .

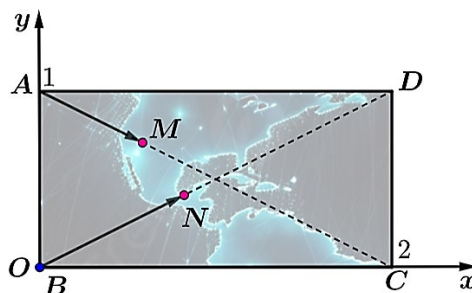
**Đèn led thứ hai có điểm chạy là  $N$ :** chạy từ  $B$  đến  $D$  với tốc độ  $3 \text{ cm/s}$ .



Tính khoảng cách ngắn nhất của  $MN$  và làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét biết  $ABCD$  là hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là  $1 \text{ m}$  và  $2 \text{ m}$ .

**Lời giải**

Dựng hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ với  $B$  trùng với gốc tọa độ  $O$ ; tia  $Ox$  trùng tia  $BC$ , tia  $Oy$  trùng tia  $BA$ ; đơn vị trên mỗi trục là mét.



Ta có:  $B(0; 0)$ ,  $A(0; 1)$ ,  $C(2; 0)$ ,  $D(2; 1)$ .

Do đó  $\overrightarrow{AC} = (2; -1)$ ; vectơ vận tốc đèn led thứ nhất là  $\vec{u} = \frac{1}{AC} \times \overrightarrow{AC} \times 0,02 = \left( \frac{1}{25\sqrt{5}}; -\frac{1}{50\sqrt{5}} \right)$ ; phương

trình chuyển động  $AC$  là  $\begin{cases} x = \frac{1}{25\sqrt{5}}t \\ y = 1 - \frac{1}{50\sqrt{5}}t \end{cases} \longrightarrow M\left(\frac{1}{25\sqrt{5}}t; 1 - \frac{1}{50\sqrt{5}}t\right) \in AC$ .

Ta có  $\overrightarrow{BD} = (2; 1)$ , vectơ vận tốc đèn led thứ hai là  $\vec{v} = \frac{1}{BD} \times \overrightarrow{BD} \times 0,03 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2; 1) \times 0,03$ ; hay

$\vec{v} = \left( \frac{3}{50\sqrt{5}}; \frac{3}{100\sqrt{5}} \right)$  phương trình  $BD$ :  $\begin{cases} x = \frac{3}{50\sqrt{5}}t \\ y = \frac{3}{100\sqrt{5}}t \end{cases} \longrightarrow N\left(\frac{3}{50\sqrt{5}}t; \frac{3}{100\sqrt{5}}t\right) \in BD$ .

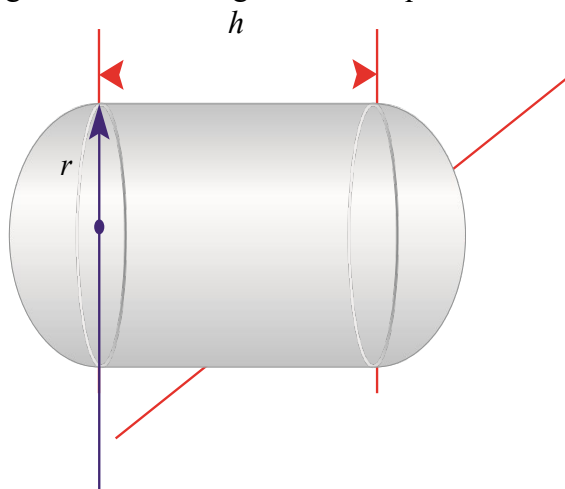
Ta có  $MN = \sqrt{\left(\frac{1}{50\sqrt{5}}t\right)^2 + \left(\frac{1}{20\sqrt{5}}t - 1\right)^2}$ ; giá trị nhỏ nhất  $MN_{\min} = \frac{2\sqrt{29}}{29} \approx 0,37 \text{ m}$ ; khi đó  $t \approx 7,71$  giây.

**---HẾT---**

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN**

**Câu 1.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài  $h$  mét ( $h > 0$ ) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính  $r$  ( $r > 0$ ) (Hình vẽ). Biết rằng thể tích của thùng chứa là  $144000\pi \text{ m}^3$ . Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho  $1\text{ m}^2$ , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho  $1\text{ m}^2$ . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất thì  $r$  bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của đơn vị mét), biết rằng bán kính  $r$  không được vượt quá  $50\text{ m}$ ?



A. 36,5.

**B. 37,8.**

C. 35,7.

D. 38,1.

**Lời giải**

Thể tích của thùng nước là

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{8}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h = 144000\pi \text{ (m}^3\text{)} \quad (0 < r \leq 50)$$

$$\Rightarrow h = \frac{144000\pi - \frac{8}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{144000}{r^2} - \frac{8}{3}r$$

Chi phí sơn bề mặt bên ngoài thùng nước là:

$$f(r) = 4\pi r^2 \cdot 20000 + 2\pi r h \cdot 10000 = 4\pi r^2 \cdot 20000 + 20000\pi r \left( \frac{144000}{r^2} - \frac{8}{3}r \right)$$

$$f(r) = 80000\pi r^2 + \frac{2880000000}{r} - \frac{160000}{3}\pi r^2 = \frac{80000}{3}\pi r^2 + \frac{2880000000}{r}$$

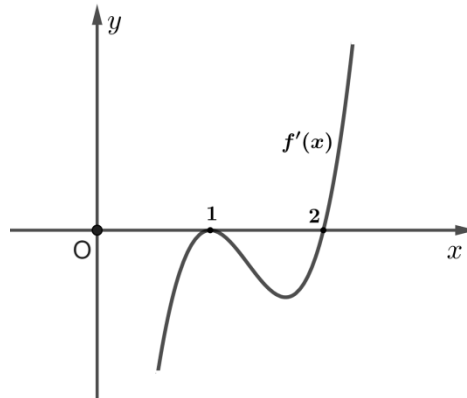
$$\text{Ta có: } f'(r) = \frac{160000}{3}\pi - \frac{2880000000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{54000} = 30\sqrt[3]{2}$$

Bảng biến thiên:

|         |   |                 |    |
|---------|---|-----------------|----|
| $r$     | 0 | $30\sqrt[3]{2}$ | 50 |
| $f'(r)$ | 0 | -               | 0  |
| $f(r)$  |   |                 |    |

Vậy để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa nhỏ nhất khi  $r = 30\sqrt[3]{2} \approx 37,8(\text{m})$

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hình bên là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Hỏi hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(1; 3)$ .

B.  $(0; +\infty)$ .

C.  $(-\infty; 2)$ .

D.  $(0; 1)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(x) \leq 0, \forall x \leq 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(5; -3; 2), B(2; 1; -2)$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm phân biệt thay đổi thỏa mãn  $BM = BN = 2$  và  $A, M, N$  thẳng hàng. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = 2.AM + 5.AN$  có dạng  $7\sqrt{m} - n$  với  $m, n$  là số tự nhiên. Tính giá trị  $m - n$ .

A. 37.

B. 43.

C. 35.

D. 41.

**Lời giải**

Ta có:  $M, N$  nằm trên mặt cầu tâm  $B$ , bán kính  $R = 2$ .

Do  $BA = \sqrt{41} > R = 2 \Rightarrow A$  nằm ngoài đoạn  $MN$ . Để  $S$  nhỏ nhất thì  $N$  phải nằm giữa  $A, M$

Gọi  $H$  là trung điểm  $MN \Rightarrow BH \perp MN, HM = HN = \frac{1}{2}MN$

Khi đó:  $S = 2(AH + HM) + 5(AH - NH) = 7.AH - 3.NH$

$S = 7\sqrt{AB^2 - BH^2} - 3\sqrt{R^2 - BH^2} = 7\sqrt{41 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2}$  với  $BH = x, 0 \leq x < 2$

Xét hàm số  $f(x) = 7\sqrt{41 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2}, (0 \leq x < 2)$

$f'(x) = \frac{-7x}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}} = x \left( \frac{-7}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} \right)$ .

Xét  $\frac{-7}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} > 0 \Leftrightarrow 7\sqrt{4 - x^2} < 3\sqrt{41 - x^2} \Leftrightarrow 196 - 49x^2 < 369 - 9x^2 \Leftrightarrow 40x^2 + 173 > 0$  (luôn đúng)

Suy ra  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 2), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$  đồng biến trên  $[0; 2)$

Vậy  $\min_{[0; 2)} f(x) = f(0) = 7\sqrt{41} - 6 \Rightarrow m = 41, n = 6 \Rightarrow m - n = 35$

**Câu 4.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $2a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{3}$  và  $AD' \perp BA'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD'$  và  $BA'$ .

**A.**  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .

**B.**  $a$ .

**C.**  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

**D.**  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải**

+) Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $B'$  qua  $B$ .

Khi đó:  $AA'BE$  là hình bình hành  $\Rightarrow A'B \parallel AE \Rightarrow A'B \parallel (AD'E)$ .

Suy ra  $d(A'B, AD') = d(A'B, (AD'E)) = d(B, (AD'E))$ .

+) Gọi  $I = AC \cap BD$ .

Khi đó:  $\begin{cases} AI \perp BD \\ AI \perp DD' \text{ (do } DD' \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (DD'B'B)$

$\Rightarrow (AD'E) \perp (DD'B'B) = D'E$

Trong  $mp(DD'B'B)$ , kẻ  $BH \perp D'E$ .

Suy ra:  $BH \perp (AD'E) \Rightarrow d(B, (AD'E)) = BH$ .

+) Tính  $BH$ .

Xét tam giác  $ABA'$  vuông tại  $A$  có  $BA' = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7}$ .

Vì  $AD' \perp BA' \Rightarrow BA' \perp BC' \text{ (} AD' \parallel BC') \Rightarrow \triangle A'BC'$  vuông cân tại  $B$ .

$\Rightarrow A'C' = \sqrt{2}a\sqrt{7} = \sqrt{14}a \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{14}a}{2}$ .

Xét tam giác  $ABI$  vuông tại  $I$  có:  $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{\sqrt{14}a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Xét  $\triangle BE$  vuông tại  $B$  có:  $BE = AA' = a\sqrt{3}, BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$\Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BI^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow BH = \frac{BI \cdot BE}{\sqrt{BI^2 + BE^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .

**Câu 5.** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có đúng 3 chữ số chẵn

**A.** 60000.

**B.** 64800.

**C.** 72000.

**D.** 36000.

**Lời giải**

TH1: 3 chữ số chẵn được chọn khác chữ số 0

Chọn 3 chữ số chẵn khác chữ số 0 là  $C_4^3$

Chọn 3 chữ số lẻ là  $C_5^3$

Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lập từ các số đã chọn là  $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$ .

TH3: 3 chữ số chẵn được chọn có 1 chữ số là chữ số 0

Chọn 2 chữ số chẵn khác chữ số 0 là  $C_4^2$

Chọn 3 chữ số lẻ là  $C_5^3$

Số các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau lập từ các số đã chọn là  $C_4^2 \cdot C_5^3 \cdot (6! - 5!) = 36000$

Số các số tự nhiên thỏa mãn là  $28800 + 36000 = 64800$ .

**Câu 6.** Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp  $A$ , 2 học sinh lớp  $B$  và 1 học sinh lớp  $C$ , ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp  $C$  chỉ ngồi cạnh học sinh lớp  $B$  bằng

A.  $\frac{2}{15}$ .

B.  $\frac{1}{6}$ .

C.  $\frac{1}{5}$ .

D.  $\frac{3}{20}$ .

**Lời giải**

Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành hàng ngang, không gian mẫu có số phần tử là:  $6!$ .

Gọi  $M$  là biến cố “học sinh lớp  $C$  chỉ ngồi cạnh học sinh lớp  $B$ ”.

Xét các trường hợp:

**Trường hợp 1.** Học sinh lớp  $C$  ngồi đầu dãy

+ Chọn vị trí cho học sinh lớp  $C$  có 2 cách.

+ Chọn 1 học sinh lớp  $B$  ngồi cạnh học sinh lớp  $C$  có 2 cách.

+ Hoán vị các học sinh còn lại cho nhau có  $4!$  cách.

Trường hợp này thu được:  $2.2.4! = 96$  cách.

**Trường hợp 2.** Học sinh lớp  $C$  ngồi giữa hai học sinh lớp  $B$ , ta gộp thành 1 nhóm, khi đó:

+ Hoán vị 4 phần tử gồm 3 học sinh lớp  $A$  và nhóm gồm học sinh lớp  $B$  và lớp  $C$  có:  $4!$  cách.

+ Hoán vị hai học sinh lớp  $B$  cho nhau có:  $2!$  cách.

Trường hợp này thu được:  $4!.2! = 48$  cách.

Như vậy số phần tử của biến cố  $M$  là:  $48 + 96 = 144$ .

Xác suất của biến cố  $M$  là  $P(M) = \frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$ .

**Câu 7.** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1; 2; -3)$ ,  $B(1; 0; 2)$ ,  $C(x; y; -2)$  thẳng hàng. Khi đó  $3x + 2y$  bằng

A.  $3x + 2y = -\frac{11}{5}$ .

B.  $3x + 2y = \frac{7}{5}$ .

C.  $3x + 2y = \frac{11}{5}$ .

D.  $3x + 2y = 17$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (x + 1; y - 2; 1)$ .

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y = \frac{7}{5}$$

**Câu 8.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

| Thời gian (phút) | $[20; 25)$ | $[25; 30)$ | $[30; 35)$ | $[35; 40)$ | $[40; 45)$ |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 6          | 7          | 5          | 6          | 4          |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 27,5.

B.  $\frac{155}{13}$ .

C.  $\frac{165}{14}$ .

D. 12,2.

**Lời giải**

Cỡ mẫu  $n = 28$

Gọi  $x_1; x_2; \dots; x_{28}$  là mẫu số liệu gốc về thời gian tập nhảy mỗi ngày của bạn Chi được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có:  $x_1; \dots; x_6 \in [20; 25)$ ;  $x_7; \dots; x_{13} \in [25; 30)$ ;  $x_{14}; \dots; x_{18} \in [30; 35)$ ;

$x_{19}; \dots; x_{24} \in [35; 40)$ ;  $x_{25}; \dots; x_{28} \in [40; 45)$ .

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm  $[25;30)$ , do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu

$$\text{số liệu ghép nhóm là: } Q_1 = 25 + \frac{\frac{28}{4} - 6}{7}(30 - 25) = \frac{180}{7}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm  $[35;40)$ , do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số

$$\text{liệu ghép nhóm là: } Q_3 = 35 + \frac{\frac{3.28}{4} - 18}{6}(40 - 35) = \frac{75}{2}$$

$$\text{Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: } \Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{165}{14}.$$

**Câu 9.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $I$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $CC'$  sao cho  $C'I = \frac{2}{5}C'C$ .  $G$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ . Biểu diễn vector  $\overrightarrow{GI}$  qua các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **đúng**?

**A.**  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{c} - 2\vec{b})$

**B.**  $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$

**C.**  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c})$

**D.**  $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} - 2\vec{a}\right)$

**Lời giải**

**Câu 10.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết:  $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$  ( $k \in \mathbb{R}$ );  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$ . Giá trị  $k$  thích hợp để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  là:

**A.**  $k = 2$ .

**B.**  $k = -2$ .

**C.**  $k = 6$ .

**D.**  $k = 14$ .

**Lời giải**

Vì  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương nên:

+  $AB = AA' = AD$ ;

+ Các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AD}$  đôi một vuông góc với nhau. Do đó:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

Để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  thì  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (-4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}) \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0$

$$\Leftrightarrow -8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AA'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) - 2\overrightarrow{AD} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 2k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} - 3k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} + 6\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 0 + k(\overrightarrow{AA'})^2 - 0 - 0 - 0 + 6(\overrightarrow{AD})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAA'^2 + 6AD^2 = 0 \text{ (Mà } AB = AA' = AD)$$

$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAB^2 + 6AB^2 = 0 \Leftrightarrow (-8 + k + 6)AB^2 = 0 \Leftrightarrow -8 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Vậy giá trị  $k$  thích hợp để  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$  là  $k = 2$ .

**Câu 11.** Biết hàm số  $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$  luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $m$  thuộc  $[a;b]$ . Tính  $a+b$ ?

**A.**  $-\frac{10}{3}$ .

**B.** 3.

**C.**  $\frac{10}{3}$ .

**D.**  $-\frac{5}{3}$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ . Ta có:  $y' = m-3 + (2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x \leq 3-m, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1:  $m = -\frac{1}{2}$  ta có  $0 \leq \frac{7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Vậy hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Trường hợp 2:  $m < -\frac{1}{2}$  ta có  $\sin x \geq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \leq -1$   
 $\Leftrightarrow 3-m \geq -2m-1 \Leftrightarrow m \geq -4$

Trường hợp 3:  $m > -\frac{1}{2}$  ta có:

$\sin x \leq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \geq 1 \Leftrightarrow 3-m \geq 2m+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}$ . Vậy  $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

**Câu 12.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+x+9}{x+1}$  bằng

- A.**  $6\sqrt{5}$ .                      **B.**  $3\sqrt{2}$ .                      **C.**  $2\sqrt{2}$ .                      **D.**  $4\sqrt{5}$ .

**Lời giải**

Ta có  $y = x + \frac{9}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{9}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=-7 \end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là:  $A(2;5); B(-4;-7)$ .

$\Rightarrow AB = 6\sqrt{5}$ .

**Câu 13.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu tiên là  $S_n = 6^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$ . Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân đã cho. Tính  $S = q^2 - 1$ .

- A.**  $S = 3$ .                      **B.**  $S = 35$ .                      **C.**  $S = 24$ .                      **D.**  $S = 8$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} S_1 = u_1 = 6^1 - 1 = 5 \\ S_2 = u_1 + u_2 = 6^2 - 1 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow S = q^2 - 1 = 35$ .

**Câu 14.** Tổng các số nguyên  $x$  thỏa mãn  $\left[\log_2(x^2+1) - \log_2(x+31)\right](32-2^{x-1}) \geq 0$

- A.** 28.                      **B.** 27.                      **C.** -449.                      **D.** -480.

**Lời giải**

Điều kiện:  $x+31 > 0 \Leftrightarrow x > -31$ .

Ta có  $\left[\log_2(x^2+1) - \log_2(x+31)\right](32-2^{x-1}) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+1}{x+31}\right)\left(32-\frac{2^x}{2}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+1}{x+31}\right)(64-2^x) \geq 0$

Xét  $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x+31}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq x+31 \Leftrightarrow x^2-x-30 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -5 \end{cases}$

$64-2^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$

Bảng xét dấu

| $x$                                     | $-31$ | $5$ | $6$ | $+\infty$ |     |
|-----------------------------------------|-------|-----|-----|-----------|-----|
| $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x+31}\right)$ | $+$   | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |
| $64-2^x$                                | $+$   | $ $ | $+$ | $0$       | $-$ |
| VT                                      | $+$   | $0$ | $-$ | $0$       | $-$ |

Dựa bảng dấu suy ra miền nghiệm của BPT là  $T = (-31; -5] \cup \{6\}$

$x \in \{-30; -29; \dots; -5; 6\}$ . Tổng các giá trị nguyên của  $x$  là:  $\frac{(-5-30) \cdot 26}{2} + 6 = -449$ .

**Câu 15.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $BC$ . Biết rằng góc giữa  $MN$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ , cosin góc giữa  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng:

- A.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      **B.**  $\frac{\sqrt{41}}{41}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .      **D.**  $\frac{2\sqrt{41}}{41}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm  $SO, OB$  thì  $EF$  là hình chiếu của  $MN$  trên  $(SBD)$ .

Gọi  $P$  là trung điểm  $OA$  thì  $PN$  là hình chiếu của  $MN$  trên  $(ABCD)$ .

Theo bài ra:  $\widehat{MNP} = 60^\circ$ .

Áp dụng định lý cos trong tam giác  $CNP$  ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra:  $NP = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ ,  $MP = NP \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$ ;  $SO = 2MP = \frac{a\sqrt{30}}{2}$ .

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}.$$

Ta lại có:  $MENF$  là hình bình hành (vì  $ME$  và  $NF$  song song và cùng bằng  $\frac{1}{2}OA$ ).

Gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  và  $EF$ , khi đó góc giữa  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  là  $\widehat{NIF}$ .

$$MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{30}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \rightarrow IN = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\cos \widehat{NIF} = \frac{IF}{IN} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{a\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo thành với nhau một góc  $120^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ . Khi đó  $|\vec{a} + \vec{b}|$  và  $|\vec{a} - \vec{b}|$  lần lượt bằng

- A.** 19 và 49.      **B.** 49 và 19.      **C.** 7 và  $\sqrt{19}$ .      **D.**  $\sqrt{19}$  và 7.

**Lời giải**

**Câu 17.** Cho  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tổng  $S = a^2 + b^2$  bằng

**A.**  $S = 13$ .

**B.**  $S = 1$ .

**C.**  $S = 4$ .

**D.**  $S = 9$ .

**Lời giải**

Vì hàm số có giới hạn hữu hạn  $x = 1$  nên  $1 + a + b = 0$ .

$$\text{Áp dụng vào giả thiết ta được } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+a}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = -3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \mathbf{S=13}.$$

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $y = g(x) = \frac{2025}{f^2(x) - 1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

|         |           |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | - | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 3 | 1 | $-\infty$ |

**A.** 4.

**B.** 6.

**C.** 5.

**D.** 8.

**Lời giải**

- Ta có:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2025}{f^2(x) - 1} = \frac{2025}{48} = \frac{675}{16} \Rightarrow y = \frac{675}{16}$  là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2025}{f^2(x) - 1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2024}{f(x) - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2024}{f(x) - 1} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 1$  là tiệm cận đứng.

- Lại thấy: phương trình  $f^2(x) - 1 = 0$  có 5 nghiệm nên đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có 6 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có tất cả 8 đường tiệm cận.

**Câu 19.** Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

|                       |       |        |         |         |         |
|-----------------------|-------|--------|---------|---------|---------|
| Thu nhập (triệu đồng) | [5;8) | [8;11) | [11;14) | [14;17) | [17;20) |
| Số người              | 30    | 55     | 45      | 30      | 20      |

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng).

**A.** 10,5.

**B.** 11.

**C.** 11,75.

**D.** 12,5.

**Lời giải**

$$\bar{x} = \frac{6,5 \times 30 + 9,5 \times 55 + 12,5 \times 45 + 15,5 \times 30 + 18,5 \times 20}{180} = 11,75.$$

**Câu 20.** Nghiệm của phương trình  $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$  là:

**A.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

### Lời giải

$$pt \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; (k \in \mathbb{Z})$$

## PHẦN II: TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

| Lớp điểm thi  | $[0; 2)$ | $[2; 4)$ | $[4; 6)$ | $[6; 8)$ | $[8; 10)$ |
|---------------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Số hs lớp 12E | 3        | 6        | 12       | 24       | 5         |
| Số hs lớp 12F | 4        | 5        | 16       | 18       | 7         |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn 2,9.
- c) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

### Lời giải

a) Điểm trung bình của lớp 12E:  $\overline{x_E} = \frac{1}{50}(3.1 + 6.3 + 12.5 + 24.7 + 5.9) = 5,88$ .

Điểm trung bình của lớp 12F:  $\overline{x_F} = \frac{1}{50}(4.1 + 5.3 + 16.5 + 18.7 + 7.9) = 5,76$ .

$$\Rightarrow \overline{x_E} > \overline{x_F}$$

Do đó dựa vào điểm trung bình ta thấy học sinh lớp 12E học tốt hơn học sinh lớp 12F.

Vậy

a) đúng.

b) Tìm khoảng tứ phân vị của MSLGN lớp 12F:

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm  $[4; 6)$ , do đó:

$$Q_1 = 4 + \frac{\frac{50}{4} - 9}{16} \cdot (6 - 4) = \frac{71}{16}.$$

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ 3 là nhóm  $[6; 8)$ , do đó:

$$Q_3 = 6 + \frac{3 \cdot \frac{50}{4} - 25}{18} \cdot (8 - 6) = \frac{133}{18}.$$

$$\text{Khoảng tứ phân vị là } \Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{133}{18} - \frac{71}{16} = \frac{425}{144} \approx 2,95.$$

Vậy

b) sai.

c) Điểm học sinh đạt được nhiều nhất ở mỗi lớp là một của mẫu số liệu ghép nhóm của mỗi lớp được cho trong bảng trên.

- Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12E là nhóm  $[6; 8)$

$$M_o = 6 + \frac{24-12}{24-12+24-5} \cdot (8-6) = \frac{210}{31} \approx 6,77.$$

- Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12F là nhóm  $[6;8)$

$$M_o = 6 + \frac{18-16}{18-16+18-7} \cdot (8-6) = \frac{82}{13} \approx 6,31.$$

Vậy

c)sai.

d) - Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12E:

$$s_E = \sqrt{S_E^2} = \sqrt{\frac{1}{50}(3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 3^2 + 12 \cdot 5^2 + 24 \cdot 7^2 + 5 \cdot 9^2) - 5,88^2} \approx 2,05$$

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12F:

$$s_F = \sqrt{S_F^2} = \sqrt{\frac{1}{50}(4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 3^2 + 16 \cdot 5^2 + 18 \cdot 7^2 + 7 \cdot 9^2) - 5,76^2} \approx 2,19$$

Ta thấy độ lệch chuẩn ở mẫu số liệu lớp 12E nhỏ hơn độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12F. Do đó lớp 12E học đều môn Toán hơn lớp 12F.

Vậy

d)đúng.

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2;-1;2)$ ,  $B(4;3;-2)$ ,  $C(5;-1;6)$  và  $D(6;1;4)$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều

b) Độ dài đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  là  $\frac{20\sqrt{2}}{9}$ .

c) Tọa độ điểm  $M$  thuộc cạnh  $AC$  và cách đều hai đường thẳng  $BA, BC$  là  $(x;y;z)$  thỏa mãn  $x+y+z = \frac{29}{5}$ .

d) Gọi điểm  $N(a;b;c)$  sao cho  $NA+NB+NC+ND$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a+b = \frac{25}{3}$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2;4;-4) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$ .

$\overrightarrow{AC} = (3;0;4) \Rightarrow AC = 5$ ;  $\overrightarrow{BC} = (1;-4;8) \Rightarrow BC = 9$ .

Vậy

a)sai.

b) Chu vi tam giác  $ABC$  là  $2p = AB + BC + CA = 20$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-CA)(p-AB)} = 10\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

Vậy

b)đúng.

c) Ta có  $BA = 6$ ,  $BC = 9$ .

Điểm  $M(x;y;z)$  là chân đường phân giác trong hạ từ  $B$  xuống  $AC$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = -\frac{BA}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{6}{9} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{MC}.$$

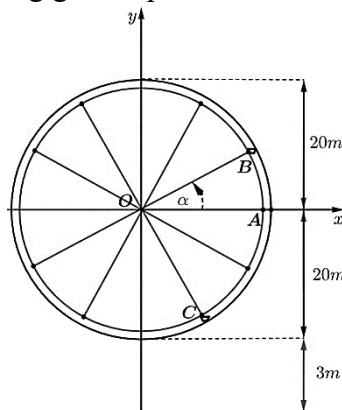
$$\text{Mà } \overrightarrow{MA} = (2-x; -1-y; 2-z) \text{ và } \overrightarrow{MC} = (5-x; -1-y; 6-z) \text{ nên } M\left(\frac{16}{5}; -1; \frac{18}{5}\right).$$

Vậy  
c) đúng.

d)  $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -4), \overrightarrow{CD} = (1; 2; -2)$  nên  $ABDC$  là hình thang, do đó điểm  $N$  là giao điểm của hai đường chéo  $AD, BC$ . Dễ thấy  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{ND} = \vec{0} \Rightarrow N\left(\frac{14}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right) \Rightarrow a + b = 5$ .

Vậy  
d) sai.

**Câu 3.** Một mô hình trò chơi vòng quay ở công viên có chiều cao tối đa  $23\text{ m}$  so với mặt đất, bán kính vòng quay là  $20\text{ m}$ . Hai bạn Hoa và Mai cùng chơi chung lượt quay và ngồi trong hai ca bin  $B, C$  mà góc  $\widehat{BOC} = 90^\circ$  (hình vẽ);  $\alpha$  là một góc lượng giác hợp bởi tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$ .



a) Khi  $\alpha = 45^\circ$  thì chiều cao của  $B$  so với mặt đất là  $37,14\text{ m}$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Chiều cao của  $B$  so với mặt đất là  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha$  (mét).

c) Chiều cao của  $C$  so với mặt đất là  $h_C = 23 - 20 \cos \alpha$  (mét)

d) Khi  $B$  ở vị trí có độ cao  $33\text{ m}$  thì  $C$  ở độ cao  $13\text{ m}$  so với mặt đất?

**Lời giải**

a) **Mệnh đề đúng.**

Với  $\alpha = 45^\circ$  thì  $h_B = 23 + 20 \sin 45^\circ = 23 + 10\sqrt{2} \approx 37,14\text{ m}$ .

b) **Mệnh đề đúng.**

Chiều cao của  $B$  là  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha$  (mét).

c) **Mệnh đề đúng.**

Chiều cao của  $C$  là  $h_C = 23 + 20 \sin(OA, OC) = 23 + 20 \sin(\alpha + 270^\circ) = 23 - 20 \sin(\alpha + 90^\circ) = 23 - 20 \cos \alpha$  (m).

d) **Mệnh đề sai.**

Khi  $B$  ở vị trí có độ cao  $33\text{ m}$  thì  $h_B = 23 + 20 \sin \alpha = 33 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$ .

Khi đó  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 4.** Gọi  $S$  là tập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số phần tử của  $S$  là 30240.

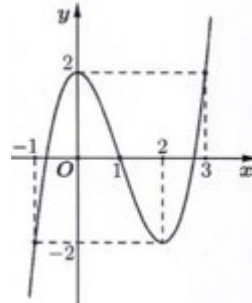
b) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $a > b > c > d > e$  là  $\frac{1}{108}$ .

c) Xác suất để lấy được số có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa mãn  $c < b < a$  và  $c < d < e$  là  $\frac{1}{18}$ .

d) Xác suất để lấy được số chia hết cho 25 là  $\frac{1}{486}$ .

**Lời giải**

**Câu 5.** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = f(2) = \frac{1}{2}$  và hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



- a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .  
b) Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  tại  $x = 2$ .  
c) Phương trình  $f'(\sin x) = 0$  có 10 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .  
d) Hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$  có 8 điểm cực trị.

**Lời giải**

a) Chọn sai. Dựa vào đồ thị, suy ra  $f'(x) = 0$  có nghiệm đơn  $x_2 \in (2; +\infty)$  nên hàm số  $y = f(x)$  có cực trị trong khoảng  $(2; +\infty)$ . Suy ra hàm số  $y = f(x)$  không đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ . **Vậy mệnh đề SAI**

b) Chọn sai. Ta có  $f'(x) = 0$  có một nghiệm đơn  $x_2 \in (1; 3)$  và  $f'(x)$  đổi dấu từ  $(-)$  sang  $(+)$  khi đi qua  $x_2$ , suy ra hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[1; 3]$  tại  $x = x_2$  ( $2 < x_2 < 3$ ). **Vậy mệnh đề SAI**

c) Chọn sai. Từ đồ thị ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \quad (-1 < x_1 < 0) \\ x = 1 \\ x = x_2 \quad (2 < x_2 < 3). \end{cases}$

$$\text{Do đó } f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = x_1 \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

Vì  $\sin x = x_1$  có hai nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$ , mà hàm số  $y = \sin x$  tuần hoàn chu kỳ  $T = 2\pi$  nên  $\sin x = x_1$  có 10 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .

Tương tự  $\sin x = 1$  có một nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2\pi]$  nên  $\sin x = 1$  có 5 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ .

Suy ra phương trình  $f'(\sin x) = 0$  có 15 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 10\pi]$ . **Vậy mệnh đề SAI**

d) Chọn sai. Ta có  $g'(x) = \frac{\left(18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2\right)\left(-6f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 2x\right)}{\left|18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2\right|}$ .

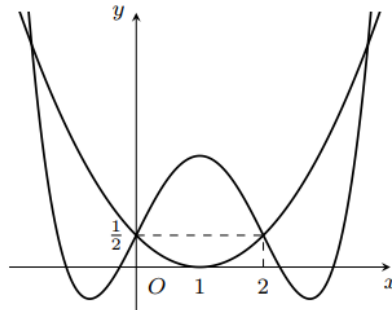
$$\left(18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2\right)\left(-6f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{x^2}{18} \\ f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = 1 - \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 - 3t.$$

Khi đó  $f\left(1-\frac{x}{3}\right)=\frac{x^2}{18}$  trở thành  $f(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$ .

Vẽ đồ thị hai hàm số  $y=f(t)$  và  $y=\frac{1}{2}(1-t)^2$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

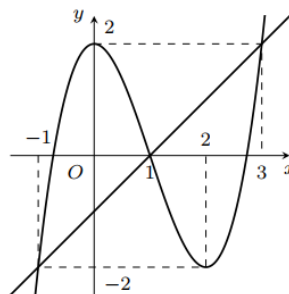
Ta có  $f(0)=f(2)=\frac{1}{2}$



Dựa vào đồ thị suy ra  $f(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$  có bốn nghiệm đơn phân biệt ẩn  $t$ .

Đặt  $t=1-\frac{x}{3}$ . Khi đó  $f'\left(1-\frac{x}{3}\right)=-\frac{x}{3}$  trở thành  $f'(t)=t-1$ .

Vẽ đồ thị hai hàm số  $y=f'(t)$  và  $y=t-1$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ



Dựa vào đồ thị suy ra  $f'(t)=t-1$  có ba nghiệm đơn phân biệt ẩn  $t$ .

Ứng với mỗi nghiệm  $t$  cho ta một nghiệm  $x$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  có 7 điểm cực trị. **Vậy mệnh đề Sai**

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh bằng 3,  $SA=SB=SD=\sqrt{6}$  và tam giác  $ABD$  đều. Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua  $B$  và vuông góc với mặt phẳng  $(SCD)$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $BD$  và mặt phẳng  $(P)$ .

a)  $SH \perp (ABCD)$ .

b) Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\frac{3}{2}$ .

c) Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ .

d) Giá trị lớn nhất của  $\sin \alpha$  bằng  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

**Lời giải**

a)

Ta có  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABD$  đều nên  $HA=HB=HC$  và  $SA=SB=SD=\sqrt{6}$ , suy ra  $SH \perp (ABCD)$  **Vậy mệnh đề ĐÚNG**

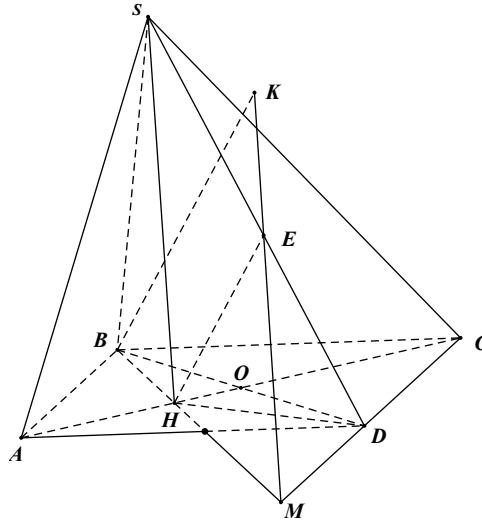
b)

Diện tích hình thoi  $ABCD$  bằng  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

Có  $BH = \sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{3}$

Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{3}.\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$ . **Vậy mệnh đề SAI**

c)



Ta có  $\triangle ABD$  đều nên  $HD \perp CD$ , kẻ  $HE \perp SD$ . Vì  $SH \perp (ABCD) \Rightarrow HE \perp (SCD)$ .

Gọi  $BH \cap SD = M$

Xét  $(BME)$  có  $BK \parallel HE$ ,  $K \in ME \Rightarrow BK \perp (SCD)$ .

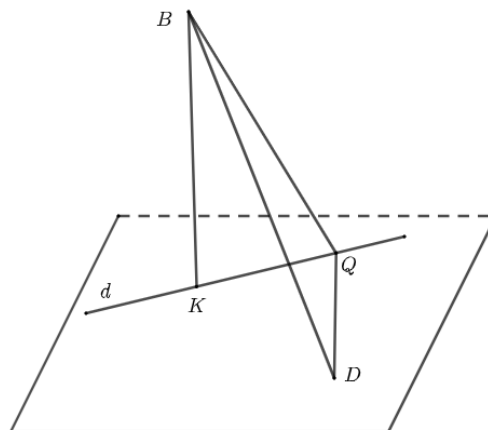
$\triangle BMK: \frac{MH}{MB} = \frac{HE}{BK} = \frac{2}{3} \Rightarrow BK = \frac{3}{2}HE$ ;  $BH = HD = \sqrt{3}$

Xét  $\triangle SHD: \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Vậy  $BK = \frac{3}{2}HE = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ .

Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ . **Vậy mệnh đề ĐÚNG**

d)



Gọi  $d = (P) \cap (SCD)$ ;  $(P) \supset BK \Rightarrow (P) \perp (SCD)$ ;  $DQ \perp d \Rightarrow DQ \perp (P) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{DQ}{BD}$

Để  $\sin \alpha$  lớn nhất nếu  $DQ$  lớn nhất; khi đó

$$DQ = DK \Rightarrow \sin \alpha_{\max} = \frac{DK}{BD} = \frac{\sqrt{BD^2 - BK^2}}{3} = \frac{\sqrt{3^2 - \frac{27}{8}}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{4}. \text{ Vậy mệnh đề SAI}$$

### PHẦN III: TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** Có hai vợ chồng đã nghĩ ra một trò chơi đầy trí tuệ như sau: Họ sử dụng hai ly nước giống hệt nhau, mỗi ly chứa tối đa 240 ml nước. Ban đầu, người vợ có một ly nước đầy và người chồng có một cái ly rỗng. Bước thứ nhất người vợ rót  $\frac{1}{2}$  lượng nước trong ly của mình sang ly của người chồng; bước tiếp theo người chồng lại rót  $\frac{1}{3}$  lượng nước trong ly của mình sang cho ly người vợ. Quá trình này cứ tiếp tục mà mỗi lần rót thì mẫu số được cộng thêm 1; trò chơi này hấp dẫn đến mức cả hai người thực hiện đến bước thứ 100 thì dừng lại, hỏi lượng nước trong ly người chồng khi đó là bao nhiêu ml? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, giả sử trong quá trình rót nước không có giọt nước nào tràn ra ngoài)

#### Lời giải

Ta có thể thực hiện việc rót theo sơ đồ sau:

| Ban đầu                                                               | Ly người vợ: $V \text{ ml}$                                    | Ly người chồng: 0 ml |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------|
| <b>Bước thứ nhất:</b><br>Vợ rót $\frac{1}{2}$ nước trong ly cho chồng | $\frac{1}{2}V$                                                 | $\frac{1}{2}V$       |
| <b>Bước thứ hai:</b><br>Chồng rót $\frac{1}{3}$ nước trong ly cho vợ  | $\frac{1}{2}V + \frac{1}{6}V = \frac{2}{3}V$                   | $\frac{1}{3}V$       |
| <b>Bước thứ ba:</b><br>Vợ rót $\frac{1}{4}$ nước trong ly cho chồng   | $\frac{2}{3}V - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{2}V$ | $\frac{1}{2}V$       |
| <b>Bước thứ tư:</b><br>Chồng rót $\frac{1}{5}$ nước trong ly cho vợ   | $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{3}{5}V$  | $\frac{2}{5}V$       |
| <b>Bước thứ năm:</b><br>Vợ rót $\frac{1}{6}$ nước trong ly cho chồng  | $\frac{3}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}V = \frac{1}{2}V$  | $\frac{1}{2}V$       |

Quá trình này được lặp đi lặp lại và ta thấy rằng trong các **bước lẻ** (người vợ rót nước cho người chồng) thì lượng nước hai ly bằng nhau.

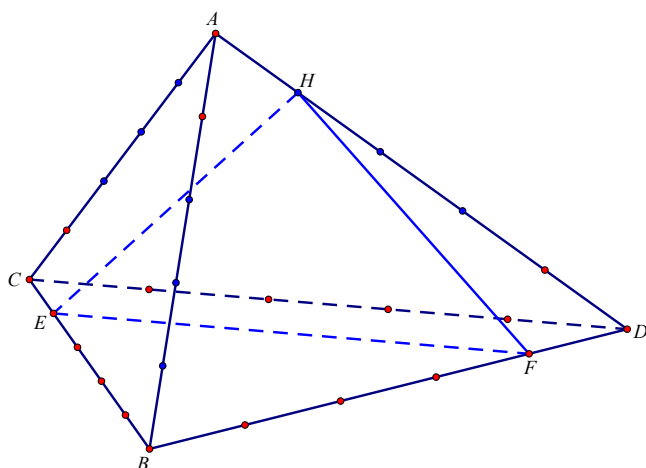
**Bước thứ 99** thì lượng nước hai ly bằng nhau.

**Bước thứ 100** (người chồng rót  $\frac{1}{101}$  nước trong ly cho vợ), lượng nước trong ly người chồng là

$$\frac{1}{2}V - \frac{1}{101} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{50V}{101} = \frac{50 \cdot 240}{101} \approx 119 \text{ ml}.$$

**Câu 2.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 4 điểm chia đều cạnh đó thành các phần bằng nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh lấy từ 24 điểm đánh dấu sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho.

**Lời giải**



Nhận thấy, nếu một đoạn thẳng có hai đầu mút nằm trên hai cạnh chéo nhau của tứ diện thì nó không thể song song với bất kỳ cạnh nào của tứ diện. Xét tam giác  $HEF$  có 3 đỉnh thuộc 24 đỉnh đã đánh dấu.

Giả sử  $\triangle HEF$  thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó một trong các cạnh của nó, giả sử là  $EF$  song song với  $CD$ . Ta có hai trường hợp là  $E \in BC, F \in BD$  hoặc  $E \in AC, F \in AD$

**Trường hợp 1:** Nếu  $E \in BC, F \in BD$  thì  $H \notin (BCD)$ , chỉ còn 12 điểm có thể chọn làm  $H$ .

Ta thấy có 4 cặp  $E, F$  thỏa mãn. Theo định lý Talet vì có các đoạn tỉ lệ và ứng với mỗi cặp như vậy, trên các cạnh  $AB, AC, AD$  ta lại loại bớt 3 điểm nữa (vì khi đó  $(HEF)$  song song với nhiều hơn một cạnh của tứ diện). Suy ra có 9 cách chọn  $H$ . Do đó, có  $4.9 = 36$  tam giác thỏa mãn bài toán.

**Trường hợp 2:** Nếu  $E \in AC, F \in AD$  tương tự có 36 tam giác thỏa mãn.

Do các cạnh của tứ diện bình đẳng nên có  $6.(2.36) = 432$  tam giác.

**Câu 3.** Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn  $x + y > 0$  và  $10^{x^2+y^2} + 2.\log \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 100^{x+y} + \log 4$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2$ . Tổng  $M + m$ .

### Lời giải

Ta có:

$$10^{x^2+y^2} + 2.\log \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 100^{x+y} + \log 4 \Leftrightarrow 10^{x^2+y^2} + 2\log(x^2+y^2) \leq 10^{2(x+y)} + 2\log 2(x+y) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(t) = 10^t + 2\log t, \quad (t > 0) \Rightarrow f'(t) = 10^t \cdot \ln 10 + 2 \frac{1}{t \ln 10} > 0, \quad \forall t > 0.$$

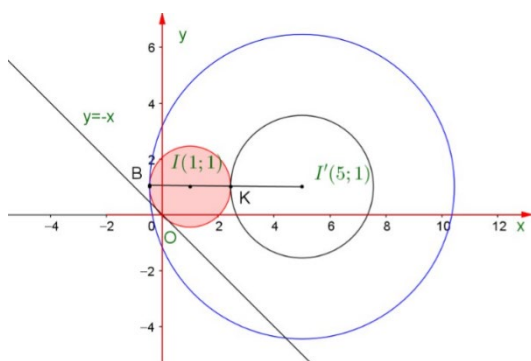
Suy ra hàm số  $f(t) = 10^t + 2\log t$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow f(x^2+y^2) \leq f(2(x+y)) \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2x+2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, \quad (2)$$

Tập hợp các điểm  $(x, y)$  thỏa mãn (2) là hình tròn tâm  $I(1;1)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ , trừ điểm  $O(0;0)$ .

$$\text{Ta thấy: } P = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = 24 + P, \quad (3)$$

$$\text{- Nếu } 24 + P = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \text{ không thỏa (1)}$$



- Nếu  $24 + P > 0$  thì ứng với mỗi giá trị của  $P$  tập hợp những điểm  $(x, y)$  thỏa mãn (3) là đường tròn tâm  $I' = (5, 1)$ , bán kính  $R' = \sqrt{24 + P}$ .

Ta thấy:  $\overline{OI'} = (4; 0) \Rightarrow OI' = 4$ .

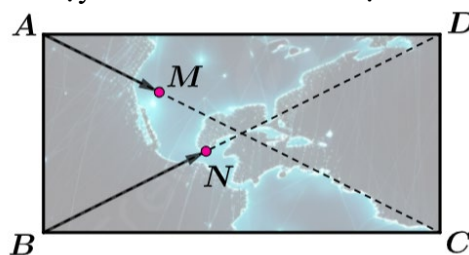
Dựa vào hình vẽ giá trị của  $P$  thỏa mãn  $4 - \sqrt{2} \leq \sqrt{24 + P} \leq 4 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 18 - 8\sqrt{2} \leq 24 + P \leq 18 + 8\sqrt{2} \Leftrightarrow -6 - 8\sqrt{2} \leq P \leq -6 + 8\sqrt{2}$ .

Do đó  $\begin{cases} M = -6 + 8\sqrt{2} \\ m = -6 - 8\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M + m = -12$ .

**Câu 4.** Trên một **banner quảng cáo du lịch** có bề mặt hình chữ nhật, người ta gắn hai đèn led chạy dọc theo các đường chéo  $AC$  và  $BD$ , khi bật nguồn thì chúng bắt đầu cùng lúc.

**Đèn led thứ nhất có điểm chạy là  $M$ :** chạy từ  $A$  đến  $C$  với tốc độ  $2 \text{ cm/s}$ .

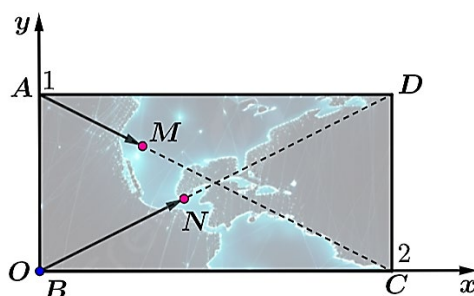
**Đèn led thứ hai có điểm chạy là  $N$ :** chạy từ  $B$  đến  $D$  với tốc độ  $3 \text{ cm/s}$ .



Tính khoảng cách ngắn nhất của  $MN$  và làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét biết  $ABCD$  là hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt là  $1 \text{ m}$  và  $2 \text{ m}$ .

### Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ với  $B$  trùng với gốc tọa độ  $O$ ; tia  $Ox$  trùng tia  $BC$ , tia  $Oy$  trùng tia  $BA$ ; đơn vị trên mỗi trục là mét.



Ta có:  $B(0; 0)$ ,  $A(0; 1)$ ,  $C(2; 0)$ ,  $D(2; 1)$ .

Do đó  $\overrightarrow{AC} = (2; -1)$ ; vector vận tốc đèn led thứ nhất là  $\vec{u} = \frac{1}{AC} \times \overrightarrow{AC} \times 0,02 = \left( \frac{1}{25\sqrt{5}}; -\frac{1}{50\sqrt{5}} \right)$ ; phương

trình chuyển động AC là 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{25\sqrt{5}}t \\ y = 1 - \frac{1}{50\sqrt{5}}t \end{cases} \longrightarrow M\left(\frac{1}{25\sqrt{5}}t; 1 - \frac{1}{50\sqrt{5}}t\right) \in AC.$$

Ta có  $\overrightarrow{BD} = (2; 1)$ , vector vận tốc đèn led thứ hai là  $\vec{v} = \frac{1}{BD} \times \overrightarrow{BD} \times 0,03 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2; 1) \times 0,03$ ; hay

$\vec{v} = \left( \frac{3}{50\sqrt{5}}; \frac{3}{100\sqrt{5}} \right)$  phương trình BD: 
$$\begin{cases} x = \frac{3}{50\sqrt{5}}t \\ y = \frac{3}{100\sqrt{5}}t \end{cases} \longrightarrow N\left(\frac{3}{50\sqrt{5}}t; \frac{3}{100\sqrt{5}}t\right) \in BD.$$

Ta có  $MN = \sqrt{\left(\frac{1}{50\sqrt{5}}t\right)^2 + \left(\frac{1}{20\sqrt{5}}t - 1\right)^2}$ ; giá trị nhỏ nhất  $MN_{\min} = \frac{2\sqrt{29}}{29} \approx 0,37 \text{ m}$ ; khi đó  $t \approx 7,71$

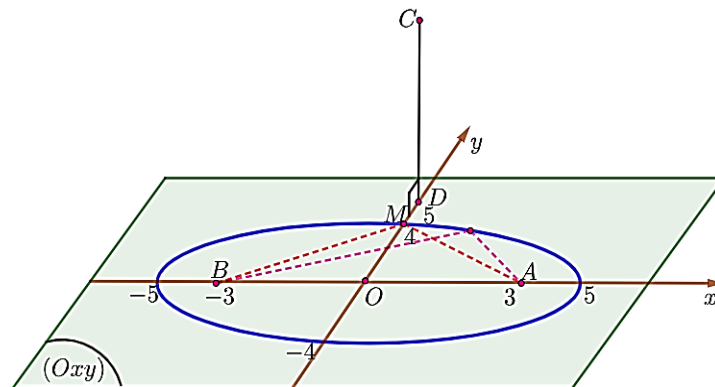
giây.

**Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3;0;0)$ ,  $B(-3;0;0)$  và  $C(0;5;1)$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  sao cho  $MA + MB = 10$ , giá trị nhỏ nhất của  $MC$  bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Lời giải**

Hai điểm  $A, B$  cùng thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  và  $MA + MB = 10 > 6 = AB$ . Do vậy, tập hợp điểm  $M$  là một elip thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  với hai tiêu điểm là  $A$  và  $B$



Đặt  $MA + MB = 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ ,  $AB = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$ ,  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

Do vậy  $M \in (E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  hay  $M \in (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

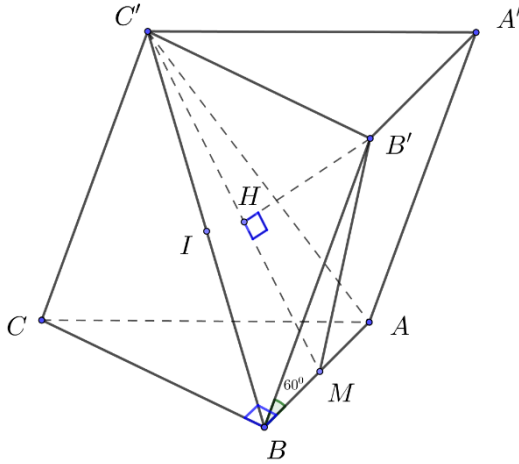
Gọi  $D(0;5;0)$  là hình chiếu của  $C$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Khi đó ta có:  $CD = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$  và  $MC = \sqrt{CD^2 + DM^2} = \sqrt{1 + DM^2}$  (\*). Do vậy  $MC$  bé nhất khi và chỉ khi  $DM$  bé nhất.

Theo hình vẽ, ta thấy khi  $M$  trùng với đỉnh elip  $(E)$  thuộc tia  $Oy$  thì  $DM$  bé nhất, hay  $M(0;4;0)$ .

Suy ra  $DM = 1$ , khi đó  $MC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1,41$ .

**Câu 6.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có thể tích  $V$ , có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  với  $BA = a, AC = 2a$ . Mặt bên  $(BB'A'A)$  là hình thoi có góc  $\widehat{ABB'} = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC'$ . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B'A'$  và  $BI$  bằng  $\frac{3a}{4}$ . Biết rằng  $V < \frac{a^3}{2}$ . Giá trị  $V = x.a^3$  thì  $x$  bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**



Ta có:  $d_{(B'A', BI)} = d_{(B'A', BC')} = d_{(B'A', (ABC'))} = d_{(B', (ABC'))} = \frac{3a}{4}$

Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Dựng  $B'H \perp C'M$  tại  $H$ .

Vì  $BB'A'A$  là hình thoi nên ta có  $AB = BB' = a$ .

Góc  $\widehat{ABB'} = 60^\circ$  nên  $\triangle ABB'$  là tam giác đều suy ra  $B'M \perp AB$  (1).

Mặt khác  $CB \perp AB \Rightarrow C'B' \perp AB$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $AB \perp (C'B'M) \Rightarrow AB \perp B'H$ .

Ta có:  $\begin{cases} B'H \perp C'M \\ B'H \perp AB \end{cases} \Rightarrow B'H \perp (ABC') \Rightarrow d_{(B', (ABC'))} = B'H = \frac{3a}{4}$ .

Ta có:  $BC = \sqrt{AC^2 - BA^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow B'C' = a\sqrt{3}$ .

$B'M = \sqrt{BB'^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $C'H = \sqrt{B'C'^2 - B'H^2} = \frac{a\sqrt{39}}{4}$ ;  $HM = \sqrt{B'M^2 - B'H^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Trường hợp 1:** Điểm  $H$  nằm trong đoạn  $C'M$ .

Khi đó ta có:  $C'M = C'H + HM = \frac{a(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{4}$ .

Diện tích tam giác  $ABC'$  là:  $S_{ABC'} = \frac{1}{2} C'M \cdot AB = \frac{a^2(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{8}$ .

Thể tích khối chóp  $B'.ABC'$  là:  $V_{B'.ABC'} = \frac{1}{3} S_{ABC'} \cdot B'H = \frac{a^3(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{32}$ .

Vì  $V = 3.V_{B'.ABC'}$  nên ta có:  $V = \frac{3a^3(\sqrt{39} + \sqrt{3})}{32} > \frac{a^3}{2}$  (loại).

**Trường hợp 2:** Điểm  $H$  nằm ngoài đoạn  $C'M$ .

Do  $C'H > HM$  nên điểm  $H$  thuộc tia đối của tia  $MC'$ .

Khi đó ta có:  $C'M = C'H - HM = \frac{a(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{4}$ .

Diện tích tam giác  $ABC'$  là:  $S_{ABC'} = \frac{1}{2} C'M \cdot AB = \frac{a^2(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{8}$ .

Thể tích khối chóp  $B'.ABC'$  là:  $V_{B'.ABC'} = \frac{1}{3} S_{ABC'} \cdot B'H = \frac{a^3(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{32}$ .

Vì  $V = 3.V_{B'.ABC'}$  nên ta có:  $V = \frac{3a^3(\sqrt{39} - \sqrt{3})}{32} \simeq 0.42a^3 < \frac{a^3}{2}$  (thỏa mãn).

---HẾT---

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12  
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>