

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

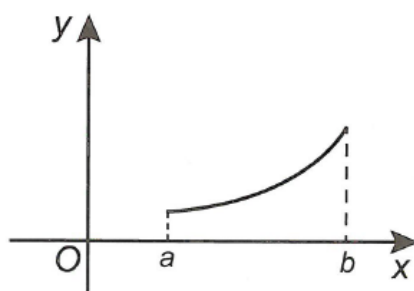
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K .

* Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

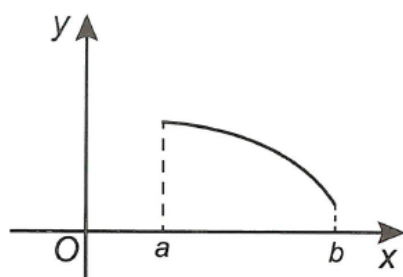


Hàm số đồng biến

Nhận xét:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng lên từ trái sang phải.

* Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Hàm số nghịch biến

Nhận xét:

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng xuống từ trái sang phải.

2. Định lý

Định lý thuận

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Định lý đảo

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số cho bởi công thức $y = f(x)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D .

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 5. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = (1 - x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \cdot (1 - x^2)' = 2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \cdot (-2x)$

Vì $2019 \cdot (1 - x^2)^{2018} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của đạo hàm cùng dấu với $(-x)$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Chú ý: Dấu hiệu mở rộng khi kết luận khoảng đồng biến $(-\infty; 0)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + 8x + \cos x$. Với hai số thực a, b sao cho $a < b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(a) = f(b)$.

B. $f(a) > f(b)$.

C. $f(a) < f(b)$.

D. $f(a) \geq f(b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + 8 - \sin x = (3x^2 + 2x + 1) + (7 - \sin x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Bài tập 3. Hàm số $y = |x^2 - 2x - 3|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = |x^2 - 2x - 3| = \sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2} \Rightarrow y' = \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 3)}{\sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; y' không xác định nếu $x = -1; x = 3$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	4	0	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Chú ý: - Vì $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên có thể xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{f^2(x)}$ để suy ra kết quả.

- Đạo hàm $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ khi cho hàm số $y = f'(x)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo ba bước như sau:

Bước 1. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 3. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 0); (1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$

$f'(x)$	–	0	–	0	+	0	–
---------	---	---	---	---	---	---	---

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0;3)$ có tính chất

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;3) \text{ và } f'(x) = 0, \forall x \in (1;2).$$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
- B. Hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $(1;2)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
- D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì $f'(x) = 0, \forall x \in (1;2)$ nên $f(x)$ là hàm hằng trên khoảng $(1;2)$.

Trên các khoảng $(0;2), (1;3), (0;3)$ hàm số $y = f(x)$ thỏa $f'(x) \geq 0$ nhưng $f'(x) = 0, \forall x \in (1;2)$ nên $f(x)$ không đồng biến trên các khoảng này.

2. Bài tập:

Dạng 3: Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên tập xác định

1. Phương pháp giải

* Đối với hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ (1).

Bước 2. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $a = 0$, thay trực tiếp vào (1) để xét.

Trường hợp 2: $a \neq 0$, tính $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

* Đối với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Bước 2. Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

Bước 3. Kết luận.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 2]$ để hàm số $y = x^3 - x^2 + 3mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 20.

B. 2.

C. 3.

D. 23.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 3m$

Hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{9}$$

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 2]$ nên có $m = 1; m = 2$.

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 1$ ta có $y' = -1 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Với $m = -1$ ta có $y' = -4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

$$\bullet \text{ Với } m \neq \pm 1 \text{ ta có } y' \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$$

Từ các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó là

A. $m \geq -1$.

B. $m > -1$.

C. $m > 1$.

D. $m \geq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{Ta có } y = \frac{mx+1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$$

Xét $m = 1$, hàm số trở thành $y = 1$. (hàm hằng)

Xét $m \neq 1$, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Lưu ý: Với $m = 1$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Bài tập 4. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định} \Leftrightarrow y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2} < 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Dạng 4: Xét tính đơn điệu hàm số bậc cao, căn thức, lượng giác có chứa tham số

1. Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức

Điều kiện cần để $y = (x-a)^{2m+1} \cdot g(x)$ ($m \in \mathbb{N}$) không đổi dấu khi x đi qua a là $g(a) = 0$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và $\min_K f(x) = A$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \leq A$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và $\max_K f(x) = B$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \geq B$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số

$$y = x^9 + (3m^2 - m)x^6 + (m^3 - 3m^2 + 2m)x^4 + 2019 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 9x^8 + 5(3m^2 - m)x^4 + 4(m^3 - 3m^2 + 2m)x^3$$

$$\Rightarrow y' = x^3 [9x^5 + 5(3m^2 - m)x + 4(m^3 - 3m^2 + 2m)] = x^3 \cdot g(x)$$

$$\text{với } g(x) = 9x^5 + 5(3m^2 - m)x + 4(m^3 - 3m^2 + 2m).$$

$$\text{Nếu } g(0) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

thì y' sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0 \Rightarrow$ hàm số sẽ có khoảng đồng biến và nghịch biến. Do đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần là $g(0) = 0$

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 3m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Với $m = 0$ có $y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 1$ có $y' = x^4(9x^4 + 10) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 2$ có $y' = x^4(9x^4 + 50) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy với } \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases} \text{ thì hàm số đã cho đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Lưu ý: Nếu $g(0) \neq 0$ thì y' luôn đổi dấu khi x qua 0, do đó nếu $g(x) = 0$ vô nghiệm thì sẽ luôn có một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến.

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -m^2x^5 - mx^3 - (m^2 - m - 20)x^2 + 2019$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. -4 .

B. 1 .

C. -1 .

D. 5 .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5m^2x^4 - 3mx^2 - 2(m^2 - m - 20)x \\ &= x[-5m^2x^3 - 3mx - 2(m^2 - m - 20)] = x.g(x). \end{aligned}$$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Nếu $x = 0$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua $x = 0$, lúc đó điều kiện (*) không được thỏa mãn.

Do đó điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $x = 0$ là nghiệm của

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 5 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Với $m = -4$ thì $f'(x) = -80x^4 + 12x^2 = x^2(12 - 80x^2)$, do đó $m = -4$ không thỏa mãn.

+ Với $m = 5$ thì $f'(x) = -125x^4 - 15x^2 = -x^2(125x^2 + 15) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó $m = 5$ thỏa mãn.

Vậy $S = \{5\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 5.

Lưu ý: $f'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm của phương trình $12 - 80x^2 = 0$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m$$

Theo yêu cầu bài toán $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	-1		1

Vậy $m \leq -1$ mà $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2018 giá trị nguyên.

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

C. $m \geq \sqrt{2}$.

D. $m > \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m$

Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - \sin x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x \leq m, \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm $f(x) = \sin x - \cos x$ trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } f(x) \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$$

Dạng 5. Xét tính đơn điệu của hàm số trên trên khoảng cho trước

1. Phương pháp giải

* Đối với hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Giả sử phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 . Ta nhắc lại các mối liên hệ nghiệm về tam thức bậc hai

Khi đó

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0.$$

$$\alpha \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \end{cases}.$$

$$x_1 < x_2 \leq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2\beta \\ (x_1 - \beta)(x_2 - \beta) \geq 0 \end{cases}.$$

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}.$$

* Để hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên đoạn có độ dài bằng k

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x; m) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bước 2. Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Bước 3. Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng $k \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2$

Bước 4. Giải các điều kiện để suy ra giá trị m cần tìm.

* Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha; \beta)$ cho trước

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Hàm số xác định trên

$$(\alpha; \beta) \Leftrightarrow -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{c} \leq \alpha \\ \frac{c}{d} \geq \beta \end{cases}$$

Bước 2. Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

Bước 3. Kết luận

2. Bài tập

Bài tập 1. Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m < 2$.

D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lí).}$$

- Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2m - 3 < 0 \\ m(m+1) - 2(2m+1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m < \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \quad m \in (-\infty; 1]$$

Lưu ý: - Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì sẽ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = y'$ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Bài tập 2. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ là

A. $m \geq \frac{12}{7}$.

B. $m < \frac{12}{7}$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m > \frac{7}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m+3 = g(x)$.

Do y là hàm số bậc ba với hệ số $a < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; 3) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn } x_1 \leq 0 < 3 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot g(0) \leq 0 \\ -1 \cdot g(3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \geq 0 \\ 7m-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}.$$

Bài tập 3. Các giá trị thực của tham số m để $f(x) = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 là

A. $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $-\frac{5}{4} < m < 0$.

D. $m > -\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn $|x_2 - x_1| > 1$.

Để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 3m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -2$$

Theo định lý Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{1-m}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } |x_2 - x_1| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$\text{Kết hợp, ta được } m > -\frac{5}{4}$$

Bài tập 4. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3 là

A. $m > 6$.

B. $m \in (0; 6)$.

C. $m < 0$.

D. $m < 0; m > 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ sao cho } |x_1 - x_2| > 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 2-m \\ |-1-(2-m)| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ |m-3| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}.$$

Bài tập 5. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1.

B. 3.

C. vô số.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-4m\}$

Để hàm số xác định trên $(2; +\infty)$ thì $-4m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

Ta có $y' = \frac{4m-3}{(x+4m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{4m-3}{(x+4m)^2} < 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

Vậy có một số nguyên $m = 0$ thỏa mãn.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$

Ta có $y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -10) \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Bài tập 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - 4}{(m-x)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Do $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = 1$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 8. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $m \in (-3;1] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in (-3; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\text{Khi đó } y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{m}{2}\right\}.$$

Vì hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ khi và chỉ khi hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Hàm số $y = f(t) = \frac{2t+3}{2t-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{-2m-6}{(2t-m)^2} > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6 > 0 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3)$$

Dạng 6: Phương pháp cô lập tham số m, phương pháp hàm số

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x)$

Bước 2. Chuyển về bài toán tìm tham số về một bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D$.

Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x = x(-4x^2 + 4m - 6)$

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$ khi $y' \leq 0, \forall x \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 4m - 6 \leq 0; \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2}, \forall x \in [1; 2]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]} \left(x^2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

Kết hợp với m nguyên không âm suy ra $m \in \{0; 1; 2\}$

Vậy có ba giá trị nguyên không âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = \frac{3(x^5 - 1)}{x^3}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

$$(1) \Leftrightarrow -m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$$

Mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-2; -1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}(8m^3 - 1)x^4 - 2x^3 + (2m - 7)x^2 - 12x + 2018$ với m là tham số. Số các giá trị

nguyên m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$ là

A. 2016.

B. 2019.

C. 2010.

D. 2015.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = (8m^3 - 1)x^3 - 6x^2 + 2(2m - 7)x - 12$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$

$$\Leftrightarrow (8m^3 - 1)x^3 - 6x^2 + 2(2m - 7)x - 12 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow (2mx)^3 + 2(2mx) \geq (x+2)^3 + 2(x+2) \quad (*), \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}\right]$$

Xét $f(t) = t^3 + 2t; f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) ta có $2mx \geq x + 2, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4} \right] \Leftrightarrow m \leq \frac{x+2}{2x}, \forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4} \right]$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{\left[\frac{-1}{2}; \frac{-1}{4} \right]} \frac{x+2}{2x} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{2}.$$

Do m nguyên và $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2015 giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1.

B. 3.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $g(x) = x^3 - mx + 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Do đó hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ g(x) \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \\ x^3 - mx + 1 \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2, \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq x^2 + \frac{1}{x}, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[1; +\infty)} (3x^2), \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq \min_{[1; +\infty)} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right), \forall x \in [1; +\infty) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}. \end{aligned}$$

Lưu ý: Vì $y = |g(x)| = \sqrt{g^2(x)}$ nên ta có thể chuyển bài toán về xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{g^2(x)}$.

- Tính đạo hàm $y' = \frac{g'(x) \cdot g(x)}{\sqrt{g^2(x)}}$.

- Hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' > 0$ với $\forall x \in [\alpha; +\infty)$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ g(\alpha) \geq 0 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ g(\alpha) \leq 0 \end{cases}$

**Dạng 7. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$... khi biết bảng biến thiên của hàm số**

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x)$...

$$y' = u'(x) \cdot f'(u(x)), y' = u'(x) \cdot f'(u(x)) \pm h'(x)$$

Bước 2: Từ bảng biến thiên xác định nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y' \geq 0, y' \leq 0$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$...

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x)$

Ta có $g'(x) = f'(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2+2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên $(-\infty; -3)$, $(-2; -1)$ và $(0; 1)$, nên hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Lưu ý: - Thông qua bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ xác định được nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

- Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến $\rightarrow$ đánh giá $y' \geq 0$ với $y' = (2x+2)f'(x^2 + 2x)$ (giải bất phương trình tích)

Chú ý:

Nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$ thì $f(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = a$.

- Bảng xét dấu $g'(x)$ chính là bảng xét dấu của tích $(2x+2)f'(x^2 + 2x)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = g(x) = 3f(-x+2) + x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 - 3f'(2-x)$.

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' = g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq f'(2-x) \quad (1).$$

Nhận xét:

• Xét $(2; +\infty)$

Với $x = 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 12 \leq f'(-1) = 0 \Rightarrow$ loại.

• Xét $(0; 2)$

Với $x = \frac{3}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ loại.

• Xét $(-\infty; -2)$

Với $x = -4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 5 \leq f'(6) < 0 \Rightarrow$ loại.

Xét $(-2; 1)$ thỏa mãn (1) vì

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ f'(2-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 2-x \leq -1 \\ 1 \leq 2-x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Lưu ý: - Thông qua bảng xét dấu $f'(x) \rightarrow$ xác định được nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

- Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến $\rightarrow$ đánh giá $y' \leq 0$.

Với dạng toán này cần tìm những giá trị của x sao cho $\begin{cases} f'(2-x) \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$.

Dạng 8: Tìm khoảng đồng, biến nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$ khi biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x)), y' = u'(x)f'(u(x))$.

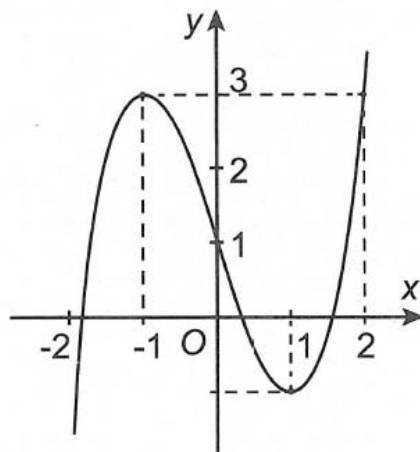
Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định được hàm số $y = f(x)$ hoặc (nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$).

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y' \geq 0, y' \leq 0$.

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y = g(x) = f(2x-1)$. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-1; 0)$.

B. $(-8; -1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Hàm số $y = g(x) = f(2x-1)$ có $y' = g'(x) = 2f'(2x-1)$

Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' = 2f'(2x-1) \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Cách 2: Hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị, hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(1; -1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$y = g(x) = f(2x-1) = (2x-1)^3 - 3(2x-1) + 1;$$

$$y' = g'(x) = 6(2x-1)^2 - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$.

Lưu ý: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \rightarrow$ xác định hàm $y = f(x)$. và hàm $y = f(2x-1) \rightarrow$ khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.

Chú ý:

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì hàm số $f(mx+n)$:

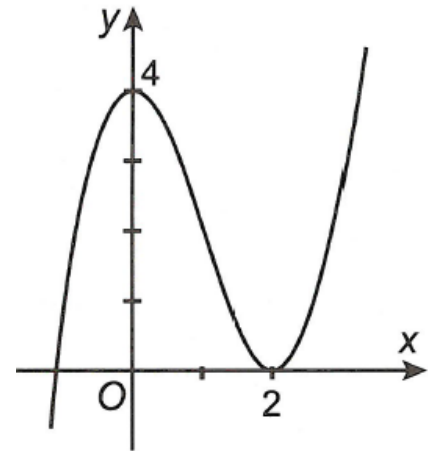
Đồng biến trên $\left(\frac{a-n}{m}; \frac{b-n}{m}\right)$ nếu $m > 0$.

Nghịch biến trên $\left(\frac{b-n}{m}; \frac{a-n}{m}\right)$ nếu $m < 0$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Đặt $y = g(x) = f(x^2 + x + 2)$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, có đồ thị như hình vẽ.

Nhận xét $A(0; 4)$ và $M(2; 0)$ là hai điểm cực trị của hàm số.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 4 \end{cases}$$

Tìm được hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$

$$\text{Ta có } y = g(x) = (x^2 + x + 2)^3 - 3(x^2 + x + 2)^2 + 4$$

$$y' = g'(x) = (2x+1) \left[3(x^2 + x + 2)^2 - 6(x^2 + x + 2) \right]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lưu ý: - Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định được hàm $y = f(x)$ và hàm $y = f(x^2 + x + 2) \rightarrow$ khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.

- Có thể sử dụng $y' = (2x+1) \cdot f'(x^2 + x + 2)$

$$y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2 + x + 2) = 0 \end{cases}$$

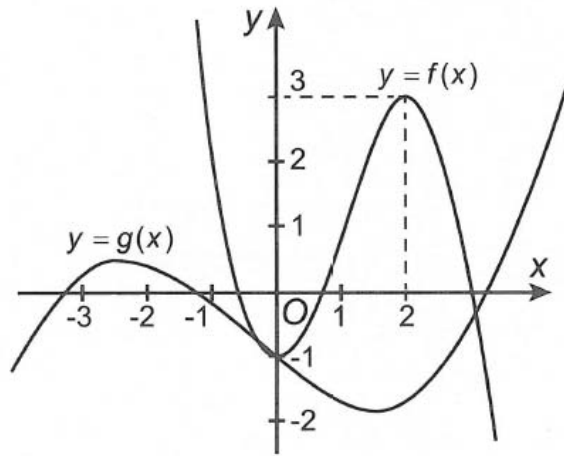
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2 + x + 2 = 0 \\ x^2 + x + 2 = 2 \end{cases}$$

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = -f(mx+1)$, $m > 0$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 3. Giá trị m là

- A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Hàm số $y = g(x) = -f(mx+1)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3 nên $g'(x) = -mf'(mx+1) \leq 0 \Leftrightarrow f'(mx+1) \geq 0$ trên một khoảng có độ dài bằng 3.

$$\text{Ta có } f'(mx+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx+1=0 \\ mx+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{m} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $f'(mx+1)$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$	
$f'(mx+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$f'(mx+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{m}; \frac{1}{m} \right]$$

$$\text{Yêu cầu của bài toán } \Leftrightarrow 3 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

Lưu ý: Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \rightarrow$ xác định hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = f(mx+1)$ kết hợp với phần nhận xét ở Bài tập 1 cho kết quả.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \rightarrow$ Hàm số $y = -f(mx+1)$ nghịch biến trên $\left(\frac{0-1}{m}; \frac{2-1}{m} \right)$ có độ

$$\text{dài bằng } \frac{2}{m} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

**Dạng 9: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$,
 $y = f(u(x)) \pm h(x)$... khi biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$**

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$

$$y' = u'(x)f'(u(x)), y' = u'(x).f'(u(x)) \pm h'(x)$$

Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xác định nghiệm phương trình $f'(x) = 0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

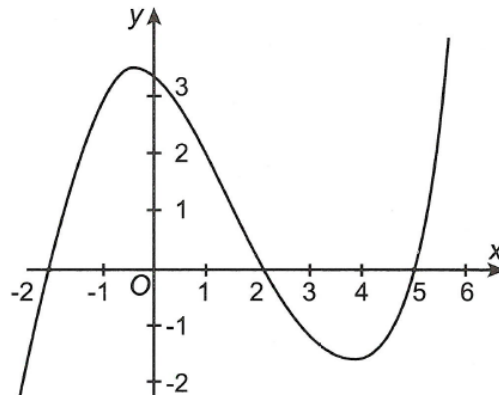
Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn

$$y' \geq 0, y' \leq 0$$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-\infty; -1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ đồ thị (C): $y = f'(x); f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases} \quad (1)$

Mà $g'(x) = -2.f'(3-2x) \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty; -1)$.

Lưu ý: Thông qua đồ thị hàm số $y = f'(x) \rightarrow$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 5 \leq x \end{cases}.$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 2 \leq 5 \leq x \end{cases}.$$

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến $\rightarrow$ đánh giá $y' = -2f'(3-2x) \leq 0$.

Chú ý:

Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành $\rightarrow$ chọn hàm cụ thể thỏa mãn

$$y = f'(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$$

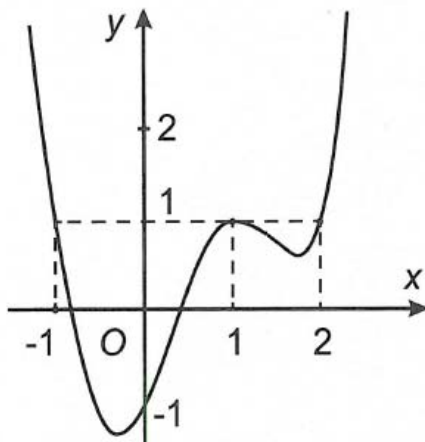
$$\rightarrow y' = -2f'(3-2x).$$

Lập bảng xét dấu.

$\rightarrow$ Kết luận.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018} \text{ trên khoảng nào dưới đây?}$$



A. $(2;3)$.

B. $(0;1)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x-1) - 1$$

$$\text{Do đó } y' > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -1 \\ x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

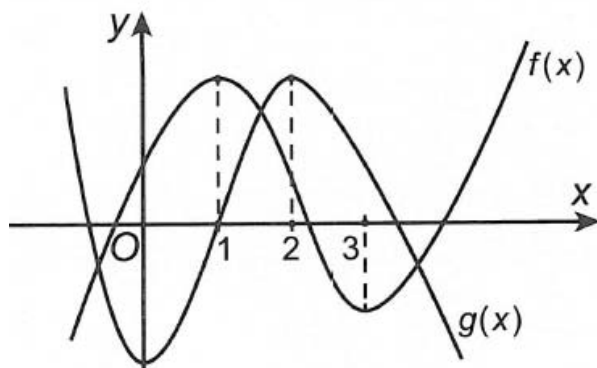
Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Nhận xét: Hàm số $g(x)$ có $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x), \text{ ta có } f'(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Bài tập 3. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng hai hàm số $f(2x-1)$ và $g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến $(m;n)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng



A. 0.

B. -2.

C. -4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

Hàm số $y = f(2x-1)$ có $y' = 2f'(2x-1)$

Với $y' < 0 \Leftrightarrow 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy hàm số $y = f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

Hàm số $y = g(ax+b)$ có đạo hàm $y' = a.g'(ax+b)$

$$y' = a.g'(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b=0 \\ ax+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a} \\ x = \frac{2-b}{a} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < \frac{2-b}{a}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right); \left(\frac{2-b}{a}; +\infty\right)$ (không thỏa mãn).

$$\text{Nếu } a < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > \frac{2-b}{a}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{2-b}{a}; -\frac{b}{a}\right)$

$$\text{Do hàm số có cùng khoảng nghịch biến là } (1;2) \text{ nên } \begin{cases} \frac{2-b}{a} = 1 \\ -\frac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = -1 \\ \frac{b}{a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Vậy $4a+b = -4$.

Dạng 10. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình, tìm điều kiện có nghiệm của phương trình

1. Phương pháp giải

* Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D , ta có

Với mọi $u, v \in D$ mà $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Nhận xét: $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm

* Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D , ta có

Với mọi $u, v \in D: f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$.

Với mọi $u, v \in D: f(u) \leq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$.

* Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có $\min_D f(x) = A$, $\max_D f(x) = B$ thì phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm thuộc tập hợp $D \Leftrightarrow A \leq g(m) \leq B$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Biết phương trình $27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x - 1}$ có một nghiệm thực dương $x = \frac{a}{b} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{c}{d}}$ với

b, c, d là các số nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $6(a + d) = b + c + 1$.

B. $6(a + d) = b + c - 1$.

C. $5(a + d) = b + c - 1$.

D. $5(a + d) = b + c + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình

$$27x^3 - 23x + 1 = \sqrt[3]{26x - 1} \Leftrightarrow (3x)^3 + 3x = (26x - 1) + \sqrt[3]{26x - 1}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1): $f(3x) = f(\sqrt[3]{26x - 1}) \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{26x - 1} \Leftrightarrow 27x^3 - 26x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < 0 \\ x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}} \text{ là nghiệm có dạng đã cho}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = 23, d = 3$$

$$\Rightarrow 6(a + d) = b + c - 1.$$

Bài tập 2. Biết phương trình $8x^3 - 12x^2 + 10x - 3 = (10x + 1)\sqrt{10x - 1}$ có một nghiệm thực dương

$x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và a, c là các số nguyên tố cùng nhau.

Khẳng định đúng là

A. $2(a + c) = b + 3$.

B. $4(a + c) = b - 3$.

C. $2(a + c) = b - 3$.

D. $4(a + c) = b + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Nhận xét:

- Vế trái là đa thức bậc ba, vế phải chứa căn bậc hai nên ta biến đổi để xuất hiện $(\sqrt{10x - 1})^3$. Ta có

$$(10x + 1)\sqrt{10x - 1} = [(10x - 1) + 2]\sqrt{10x - 1} = (\sqrt{10x - 1})^3 + 2\sqrt{10x - 1}$$

Khi đó phương trình có dạng $(ax + b)^3 + 2(ax + b) = (\sqrt{10x - 1})^3 + 2\sqrt{10x - 1}$

Điều kiện $x \geq \frac{1}{10}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (2x - 1)^3 + 2(2x - 1) = (\sqrt{10x - 1})^3 + 2\sqrt{10x - 1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(2x - 1) = f(\sqrt{10x - 1}) \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{10x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 = 10x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 7x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{41}}{4}$$

$\Rightarrow a = 7, b = 41, c = 4 \Rightarrow 4(a + c) = b + 3$.

Bài tập 3. Biết phương trình $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \frac{1}{x+2}$, có một nghiệm thực $x = \frac{a + \sqrt{b}}{2}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và c là

số nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $2ac = b + 1$.

B. $ac = b - 2$.

C. $2ac = b - 1$.

D. $ac = b + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

kiện $\begin{cases} x \neq 13 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1} - 2(x+2) = \sqrt[3]{2x+1} - 3$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + \sqrt{x+1} = (\sqrt[3]{2x+1})^3 + \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt[3]{2x+1}) \quad (1)$

với $f(t) = t^3 + t$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 1, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+1})^6 = (\sqrt[3]{2x+1})^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a=1, b=5, c=2 \Rightarrow 2ac = b-1.$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tất cả các giá trị thực của x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$ là

A. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$

B. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

D. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Bài tập 5. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Tổng $a+b$ có giá trị bằng

A. -2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}, \forall x \in (-2; 4)$, do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$

So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 4] \Rightarrow a + b = 5$.

Bài tập 6. Cho $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4]$ là

A. 6.

B. 9.

C. 21.

D. 22.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow \begin{cases} t = f(x) \\ f(t) = x \end{cases} \Rightarrow f(t) + t = f(x) + x. (1)$$

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u = u^3 + 2u - 2^m$ có $g'(u) = 3u^2 + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 2^m. (2)$

Phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4] \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4] \Leftrightarrow 1^3 \leq 2^m \leq 4^3 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Tổng các giá trị là $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21$.

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x) + m} \Rightarrow f(x) = t^3 - m$, kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3. (1)$$

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 = u^5 + 4u^3 - 4m$

$\Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 > 0, \forall u \in [1; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến đoạn $[1; 2]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x^3 - m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m (2)$

Với $x \in [1; 2], 3 \leq x^5 + 2x^3 \leq 48$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm trên đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Bài tập 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m + 2\sqrt{m + 2\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

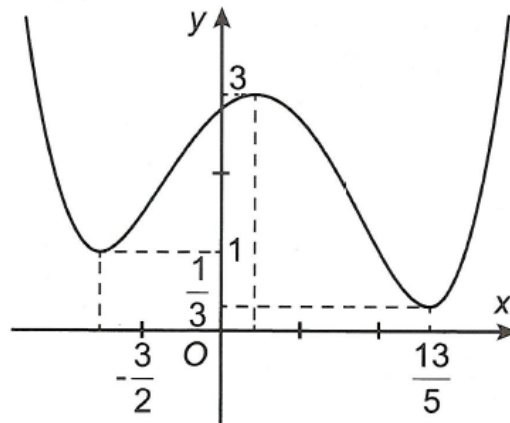
D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**Điều kiện $\sin x \geq 0$.Ta có $\sqrt{m+2\sqrt{m+2\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow m+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x$.

$$\Leftrightarrow m+2\sin x+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x+2\sin x \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t$ $f'(t) = 2t + 2 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m+2\sin x}) = f(\sin x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2\sin x} = \sin x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x = m$$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in [0; 1]$ Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2t = m$ có nghiệm trên $[0; 1]$.Xét hàm số $g(t) = t^2 - 2t, t \in [0; 1]$ Ta có $g'(t) = 2t - 2; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Suy ra $\max_{[0;1]} g(t) = 0; \min_{[0;1]} g(t) = -1$ Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 0$ Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0; m = -1$.**Bài tập 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\frac{9m^3 + m}{\sqrt{3f^2(x) + 8}} = f^2(x) + 3$ có 3 nghiệm thực phân

biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 27m^3 + 3m = (3f^2(x) + 9)\sqrt{3f^2(x) + 8}$$

$$\Leftrightarrow (3m)^3 + 3m = \left(\sqrt{3f^2(x) + 8}\right)^3 + \sqrt{3f^2(x) + 8}$$

$$\Leftrightarrow g(3m) = g\left(\sqrt{3f^2(x) + 8}\right) \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{3f^2(x) + 8} = 3m \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \geq \sqrt{8} \\ f^2(x) = \frac{9m^2 - 8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} \quad (2) \\ f(x) = -\sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} \quad (3) \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ thì phương trình (3) vô nghiệm (vì $f(x) > 0, \forall x$)

Do đó để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có ba nghiệm phân biệt hay

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} = 3 \\ \sqrt{\frac{9m^2 - 8}{3}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{35}}{5} \\ m = \frac{\sqrt{11}}{3} \end{cases}.$$

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên K ($K \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in K$

a) x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f .

b) x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$.

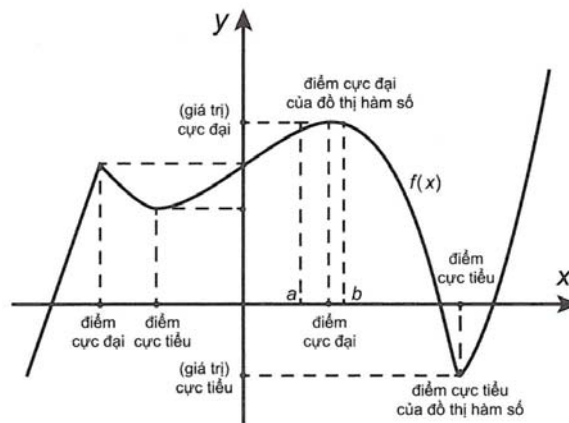
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số f .

Chú ý:

1) Điểm cực đại (cực tiểu) x_0 được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số được gọi chung là cực trị. Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp K .

2) Nói chung, giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập K ; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 .

3) Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f .



2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lý 1

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

1) Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .

2) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ (cực đại)	

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ (cực tiểu)	

Định lí 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) = 0$ thì ta chưa thể kết luận được, cần lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $f(x)$ hoặc $f'(x)$. Tìm điểm cực trị, giá trị cực trị

1. Phương pháp

Cách 1: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu

Bước 1. Tìm $f'(x)$

Bước 2. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ tại đó đạo hàm bằng không hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_i .

Cách 2: Dùng định lý 3

Bước 1: Tìm $f'(x)$

Bước 2: Tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 3: Tính $f''(x_i)$

- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
- Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) = 0$ thì ta lập bảng biến thiên để xác định điểm cực trị.

* Tìm (điểm) cực trị thông qua đạo hàm $f'(x)$: Ta đi đếm số nghiệm bội lẻ của phương trình đạo hàm

2. Bài tập

Bài tập 1: Giá trị cực đại của hàm số $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 1}$ là số nào dưới đây?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $-\sqrt{3}$.

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Từ đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, giá trị cực đại của hàm số là $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Bài tập 2: Các điểm cực đại của hàm số $f(x) = x - 2\sin x$ có dạng (với $k \in \mathbb{Z}$)

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - 2\cos x$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$f''(x) = 2\sin x$$

Vì $f''\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} > 0$ nên $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ là điểm cực tiểu.

Vì $f''\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} < 0$ nên $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ là điểm cực đại

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 2)(x^2 - 2x)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 6.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x) = (x - 2)(x - 1)^3 x(x + 1)(x + 2)$ và $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên có 5 điểm cực trị.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 1)(x - 4)^2$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left[f(x^2)\right]' = 2x \cdot f'(x^2) = 2x^5(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2$

Phương trình $\left[f(x^2)\right]' = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = \pm 1$ nên số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ là 3.

Chú ý:

Đạo hàm của hàm số hợp $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ hay $f'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) \geq 3x + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{2}, \forall x > 0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có đúng một điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số có ít nhất một điểm cực trị trên $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số không có điểm cực trị nào trên $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số có đúng hai điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

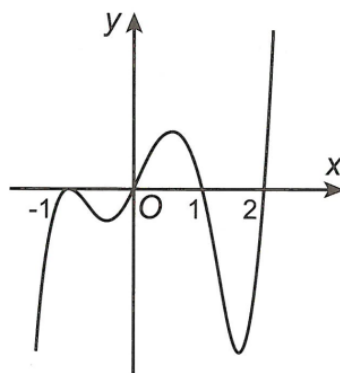
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $\forall x > 0$ ta có: $f'(x) \geq 3x + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{7}{2} > 0$.

Vậy hàm số không có cực trị trên $(0; +\infty)$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x - 2)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)g(x)$ với $g(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây ($g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và trên $(2; +\infty)$). Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



- A. 5. B. 2.
C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị, phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = 1, x = 2$ và một nghiệm bội chẵn là $x = -1$.

Tóm lại, phương trình $y' = 0$ chỉ có $x = -1, x = 0, x = 2$ và $x = 3$ là nghiệm bội lẻ, nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Dạng 2. Tìm (điểm) cực trị thông qua bảng xét dấu, bảng biến thiên của đạo hàm

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-5	$-1/3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương 1 lần nên có 1 điểm cực tiểu.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-5	-3	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đạo hàm đổi dấu hai lần nên có hai điểm cực trị.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chắc chắn hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -1, x = 2, x = 3$.

Xét tại điểm $x = 0$, đạo hàm đổi dấu, hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$, nhưng theo đề bài, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)$ xác định. Vậy hàm số có tổng cộng 4 điểm cực trị.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -2, x = 2, x = 3$ (hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 1$ vì hàm số không xác định tại điểm $x = 1$).

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên của $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-5	0	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	1	-4	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4

B. 2

C. 3

D. 5

Hướng dẫn giải

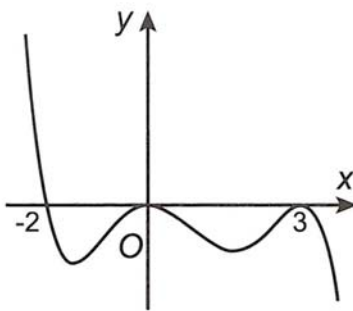
Chọn C.

x	$-\infty$	-5	0	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	1	-4	$+\infty$

Dễ thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Dạng 3. Tìm (điểm) cực trị thông qua đồ thị f, f', f''

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f''(x)$ như hình vẽ dưới đây (đồ thị $y = f''(x)$ chỉ có 3 điểm chung với trục hoành như hình vẽ). Số điểm cực trị tối đa của hàm số là



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

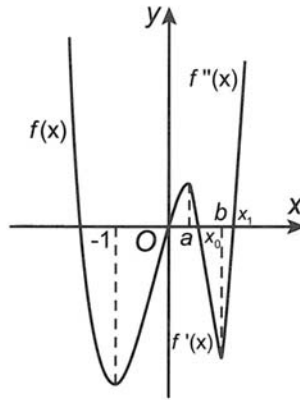
Chọn D.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f'(x)$					

Nhận thấy trục hoành cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại tối đa 2 điểm nên $f'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x)$ có tối đa 2 điểm cực trị.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(-\infty; a]$ (và hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1]$), đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[a; b]$ (và $f'(x_0) = 0$), đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[b; +\infty)$ (và hàm số $y = f''(x)$ luôn đồng biến trên $[b; +\infty)$, $f''(x_1) = 0$).
Hỏi hàm số $y = f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 6.

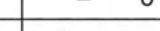
C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bảng xét dấu bên dưới được lập từ các suy luận sau:

x	$-\infty$	-1	a	x_0	b	x_1	$+\infty$	
$f''(x)$						$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$			$+$ 0 $-$				

* Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ nên $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1)$ và đồng biến trên $(-1; a)$ nên $f'(x) > 0, \forall x \in (-1; a)$.

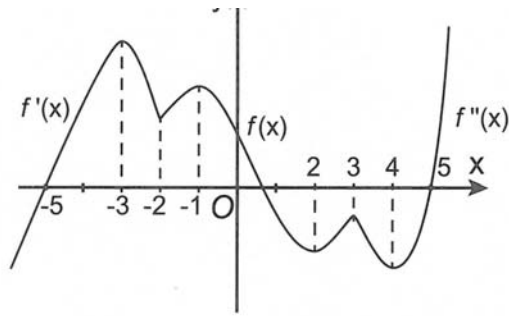
* Hàm số $y = f'(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b)$
 $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; b]$.

* Hàm số $y = f''(x)$ có $f''(x) < 0, \forall x \in (b; x_1)$ mà $f'(b) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (b; x_1)$

Lại có $f''(x) > 0, \forall x \in (x_1; +\infty)$. Vậy trong khoảng $(x_1; +\infty)$, phương trình $f'(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, và nếu có đúng 1 nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm ấy.

Vậy $f'(x)$ có tối đa 3 nghiệm (bội lẻ) nên hàm số $y = f(x)$ có tối đa 3 điểm cực trị.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $(-\infty; -2]$, đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[3; +\infty)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bảng xét dấu bên dưới được lập từ các suy luận sau:

+ Đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[3; +\infty)$ cắt trục hoành tại điểm $x = 5$, $f''(x) < 0$ khi $x \in (3; 5)$ và $f''(x) > 0$ khi $x \in (5; +\infty)$.

+ Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $(-\infty; -2]$ cắt trục hoành tại điểm $x = -5$, $f'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -5)$ và $f'(x) > 0$ khi $x \in (-5; -2)$.

+ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$: hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 3)$; hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$

x	$-\infty$	-5	-3	-2	-1	2	3	4	5	$+\infty$
$f''(x)$								-	0	+
$f'(x)$	-	0	+		+	0	-	0	+	

Từ bảng xét dấu trên, đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tối đa tại 2 điểm trên $(3; +\infty)$, khi đó trên $(2; +\infty)$ thì $f'(x)$ đổi dấu 2 lần, trên $(-\infty; 2)$ thì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $y = f(x)$ có tối đa 5 điểm cực trị.

Dạng 4: Cực trị hàm bậc ba

1. Phương pháp

Bước 1. Hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$, tìm được tham số.

Bước 2. Với giá trị tham số tìm được, ta thế vào hàm số ban đầu để thử lại.

Chú ý: Đối với hàm bậc ba, ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

+) Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

A. $m = -1$.

B. $m = -5$.

C. $m = 5$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \Rightarrow y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

• Với $m = 1, y''(3) = 2.3 - 2.1 = 4 > 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu.

• Với $m = 5, y''(3) = 2.3 - 2.5 = -4 < 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực đại.

Bài tập 2: Hàm số $y = ax^3 + x^2 - 5x + b$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2, giá trị của $H = 4a - b$ là

A. $H = 1$.

B. $H = -1$.

C. $H = -2$.

D. $H = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2x - 5 \Rightarrow y'' = 6ax + 2$.

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

+) Thay $a = 1$ ta thấy $y''(1) = 6 + 2 = 8 > 0$ nên $x = 1$ là điểm cực tiểu.

+) Mặt khác ta có: $y(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 - 5 + b = 2 \Leftrightarrow b = 5$.

Vậy $H = 4.1 - 5 = -1$.

Bài tập 3: Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b - 3c + d$ là

A. $T = 2$.

B. $T = 3$.

C. $T = 4$.

D. $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ 3a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow T=4.$$

Bài tập 4: Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + mx - 1$ có cực đại và cực tiểu là

- A. $m \geq 0$. B. $m \leq 0$. C. $m > 0$. D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y = x^3 + mx - 1$ có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó $m < 0$.

Chú ý: Do hàm bậc ba có đạo hàm là tam thức bậc hai nên các yêu cầu sau: hàm số có cực trị, hàm số có cực đại và cực tiểu, hàm số có hai cực trị có cách làm giống nhau, tức là $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 5: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 7$ có cực trị?

- A. $m \in (1; +\infty) \cup \{0\}$. B. $m < 1$.
C. $m \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. D. $m \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = mx^2 + 2x + 1$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x^2 + x + 7$, đồ thị là một parabol nên hiển nhiên có cực trị.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu.

+) Xét $m \neq 0$, để hàm số có cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Hợp cả hai trường hợp, khi $m < 1$ thì hàm số có cực trị.

Chú ý: Với bài toán hỏi “có cực trị” và hệ số của bậc ba (bậc cao nhất) có chứa tham số thì nên chia hai trường hợp: Hệ số của bậc cao nhất bằng 0 và khác 0.

Bài tập 6: Tìm các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 - (m-1)x + 2$ **không** có cực trị.

- A. $0 < m < \frac{1}{4}$. B. $0 \leq m < \frac{1}{4}$.
C. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. D. $0 < m \leq \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6mx - m + 1$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x + 2$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị, nhận $m = 0$.

+) Xét $m \neq 0$, hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 3m(1 - m) \leq 0 \Leftrightarrow 12m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4}.$$

Hợp cả hai trường hợp, khi $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ thì hàm số không có cực trị.

Bài tập 7: Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số

$$y = \left(\frac{m-1}{3}\right)x^3 + (m^2 - 4)x^2 + (m^2 - 9)x + 1 \text{ có hai điểm cực trị trái dấu là}$$

A. 18.

B. 17.

C. 19.

D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$y' = (m-1)x^2 + 2(m^2 - 4)x + (m^2 - 9).$$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu khi $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 1 < m < 3 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{-20; -19; \dots; -4; 2\}$, có 18 giá trị của m .

Bài tập 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = mx^3 + m(m-1)x^2 - (m+1)x - 1$ có hai điểm cực trị đối nhau?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$Ta \text{ có: } y' = 3mx^2 + 2m(m-1)x - (m+1).$$

Hàm số có hai điểm cực trị đối nhau $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2(m-1)^2 + 3m(m+1) > 0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Bài tập 9: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x - 6$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương là

A. $m < \frac{1}{4}$.

B. $0 < m < \frac{1}{4}$.

C. $m < 0$.

D. $-\frac{1}{4} < m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = mx^2 + 2(m-1)x + m + 2$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - m(m+2) > 0 \\ \frac{-(m-1)}{m} > 0 \\ \frac{m+2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ 0 < m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} \end{cases}$$

Bài tập 10: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1 là

A. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{8}{5} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m < -2 \\ \frac{3}{2} < m < \frac{5}{2} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2-m$.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1-2m)^2 - 3(2-m) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases}$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành:

$$x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-1 + \sqrt{4m^2 - m - 5}}{3} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 - m - 5} < 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2m \geq 0 \\ 4m^2 - m - 5 < 4m^2 - 16m + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m < \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}.$$

Kết hợp điều kiện có cực trị thì $m < -1$ và $\frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$ thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý: Có thể dùng Vi-ét để lời giải đơn giản hơn như sau:

Xét $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < 3 \\ 2 - m + 2(1 - 2m) + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}$$

Bài tập 11: Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.

A. $m < 0$.

B. $0 < m < \frac{1}{3}$.

C. $m < \frac{1}{3}$.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2x + m$.

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \quad (1).$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Do $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} < 0$ nên điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có $m < 0$

Bài tập 12: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (4m-8)x + m + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$ là

A. $m < 2$.

B. $m < 2$ hoặc $m > 6$.

C. $m < \frac{3}{2}$ hoặc $m > 6$.

D. $m < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-2)x + (4m-8)$.

Yêu cầu bài toán trở thành

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) < 0 \Leftrightarrow (4m-8) + 4(m-2) + 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Bài tập 13: Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (x-m)(x^2 - 2x - m - 1)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $|x_1 \cdot x_2| = 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 2.

B. -2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+2)x + m - 1$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + m + 7 > 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Theo định lí Vi-ét ta có:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{3} \Rightarrow |x_1 \cdot x_2| = 1 \Leftrightarrow |m-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy tổng cần tìm bằng $4 + (-2) = 2$.

Bài tập 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{6}$?

A. 38.

B. 35.

C. 34.

D. 37.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m > 0 (*).$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$.

Khi đó

$$|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 \geq 24 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \geq 24 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn(*)}).$$

Do m nguyên và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{-20; -19; \dots; -2; 3; 4; \dots; 20\}$.

Vậy có 37 giá trị của m .

Bài tập 15: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho $3x_1 - 2x_2 = m + 6$ là

A. 0.

B. 1.

C. -2.

D. -3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m+1)^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 3 (*).$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$.

Từ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ 3x_1 - 2x_2 = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + 2 \\ x_2 = m \end{cases}$ thế vào $x_1 \cdot x_2 = 3$ ta được

$$m(m+2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \text{ thỏa mãn } (*).$$

Bài tập 16: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x$ có điểm cực đại x_{CD} , điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $x_{CD}^2 = x_{CT}$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 6x^2 + 18mx + 12m^2 = 6(x+m)(x+2m)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0 (*)$

Trường hợp 1: $m < 0$ khi đó, lập bảng xét dấu đạo hàm dễ thấy

$$x_{CD} = -m, x_{CT} = -2m$$

Khi đó:

$$x_{CD}^2 = x_{CT} \Leftrightarrow m^2 = -2m \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: $m > 0$ lập bảng xét dấu đạo hàm ta có $x_{CD} = -2m, x_{CT} = -m$.

$$x_{CD}^2 = x_{CT} \Leftrightarrow 4m^2 = -m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}, \text{ loại.}$$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-18; 18]$ để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + 2mx + 1)$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 34.

B. 30.

C. 25.

D. 19.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bảng biến thiên của hàm số bậc ba khi có hai cực trị và hai điểm cực trị của đồ thị nằm về hai phía trục hoành là

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $y=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + 2m \cdot 1 + 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Do m nguyên và $m \in [-18; 18]$ nên $m \in \{-18; -17; \dots; -2; 2; 3; \dots; 18\}$

Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn đề.

Bài tập 18: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + x + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $y = x - 6$.

Số phần tử của tập S là

A. 9.

B. 12.

C. 7.

D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $f(x) = 2x^3 - 3mx^2 + m + 6$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^3 - 3mx^2 + m + 6)' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$.

Xét $g(x) = f(x) - x + 6$. Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị nằm về hai phía đường thẳng $y = x = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ g(0).g(m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+12)(-m^3+12) < 0 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và thuộc $(-10; 10)$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 9\}$.

Bài tập 19: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4 là

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Đồ thị (C) luôn có hai điểm cực trị với mọi m nguyên dương (vì m là số nguyên dương nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt).

Khi đó $A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}.$$

$$(AB): \frac{x-0}{2m-0} = \frac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0.$$

Thế tọa độ C vào phương trình đường thẳng (AB) , dễ thấy $C \notin (AB)$.

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m(m^2 - 3)| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)^2 (m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}.$$

Do m nguyên dương nên ta nhận được $m = 1, m = 2$. Tổng là 3.

Chú ý: Học sinh nên kiểm tra điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị và điều kiện để ba điểm A, B, C không thẳng hàng (dù trong bài toán này, nếu “quên” thì không ảnh hưởng đến kết quả).

Ta có thể tính nhanh diện tích như sau:

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 4m^2 - 2)$ và $\overrightarrow{OB} = (2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$

$$\text{Khi đó: } S_{ABC} = \frac{1}{2} |2m(4m^2 - 2)| = 4$$

Bài tập 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m^2 - 3)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho giá trị biểu thức $P = |x_1(x_2 - 2) - 2(x_2 + 1)|$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = x^2 - 2x + m^2 - 3$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $1 - (m^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Theo định lí Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} P &= |x_1(x_2 - 2) - 2(x_2 + 1)| = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 2| \\ &= |m^2 - 3 - 2 \cdot 2 - 2| = |m^2 - 9| \leq 9. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$ (thỏa mãn).

Bài tập 21: Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Giá trị lớn nhất của

$$S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 16)$$
 là

A. 16.

B. 32.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y' = x^2 - mx - 4$. Do $a = 1, c = -4$ trái dấu nhau nên $y' = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu hay hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Theo định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } S = (x_1x_2)^2 - (16x_1^2 + x_2^2) + 16 \leq (x_1x_2)^2 - 2\sqrt{16x_1^2 \cdot x_2^2} + 16 = 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi $16x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_2 = -4x_1 \Rightarrow m = \pm 3$.

Bài tập 21: Tìm m để đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + (m+3)x^2 - (2m+9)x + m+6$ có hai điểm cực trị và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng qua hai điểm cực trị đạt giá trị lớn nhất

$$\text{A. } m \in \left\{ -6 + \frac{3}{\sqrt{2}}; -6 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{B. } m \in \left\{ -3 - \frac{3}{\sqrt{2}}; -3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{C. } m \in \left\{ -3 - 6\sqrt{2}; -3 + 6\sqrt{2} \right\}.$$

$$\text{D. } m \in \left\{ -6 - 6\sqrt{2}; -6 + 6\sqrt{2} \right\}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= 3x^2 + 2(m+3)x - 2m - 9 = (3x^2 + 6x - 9) + (2mx - 2m) \\ &= (x-1)(3x+9+2m). \end{aligned}$$

Hàm số có hai cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3+9+2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -6$

Một trong hai điểm cực trị là $A(1;1)$ và $\overline{OA} = (1;1) \Rightarrow OA = \sqrt{2}$ và $k_{(OA)} = 1$.

Đường thẳng d qua hai điểm cực trị có hệ số góc là $k_d = -\left[\frac{2}{3}(2m+9) + \frac{2}{9}(m+3)^2 \right]$

Ta có $d[O; d] \leq OA = \sqrt{2}$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } d \perp OA \Leftrightarrow k_d k_{(OA)} = -1 \Leftrightarrow -\left[\frac{2}{3}(2m+9) + \frac{2}{9}(m+3)^2 \right] = -1$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bài tập 22: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng (AB) đi qua gốc tọa độ. Giá trị lớn nhất $P_{\min}$ của $P = abc + ab + c$ bằng

$$\text{A. } P_{\min} = -9.$$

$$\text{B. } P_{\min} = 1.$$

$$\text{C. } P_{\min} = -\frac{16}{25}.$$

$$\text{D. } P_{\min} = -\frac{25}{9}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng qua hai cực trị là $(AB): y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2a^2}{9} \right)x + c - \frac{ab}{9}$.

Do (AB) qua gốc O nên $c - \frac{ab}{9} = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

$$\text{Khi đó } P = abc + ab + c = 9c^2 + 10c = \left(3c + \frac{5}{3} \right)^2 - \frac{25}{9} \geq -\frac{25}{9}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -\frac{25}{9} \text{ khi } \begin{cases} c = -\frac{5}{9} \\ ab = -5 \end{cases}.$$

Bài tập 23: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Gọi M, N là hai giao điểm của đường thẳng (AB) và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$. Biết MN lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $E(3;1)$ đến (AB) bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Viết hàm số dưới dạng $y = \frac{x}{3}(3x^2 - 3m) - 2mx + 2 = \frac{x}{3}y' - 2mx + 2$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $(AB): y = -2mx + 2$.

Đường thẳng (AB) luôn đi qua điểm cố định là $M(0;2)$.

Đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$ và $d[I; (AB)] \leq IM = 1 < \sqrt{3} = R$ nên đường thẳng luôn cắt đường tròn tại hai điểm M, N .

Giả sử $I(1;1) \in (AB) \Rightarrow 1 = -2m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy khi $m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn hàm số có hai điểm cực trị) thì (AB) qua $I(1;1)$, cắt đường tròn (C) tại hai điểm

M, N với $MN = 2R$ là lớn nhất. Khi đó: $d[E(3;1); (AB): y + x - 2 = 0] = \sqrt{2}$.

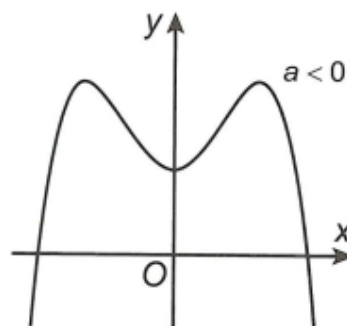
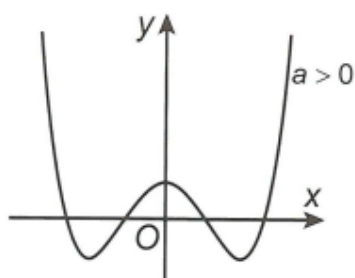
Dạng 5. Cực trị hàm bậc bốn trùng phương

1. Phương pháp

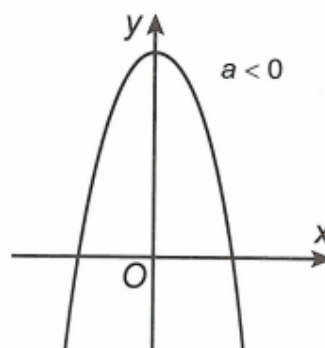
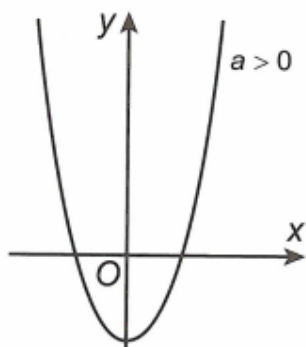
Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$), có đạo hàm là $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

- + Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.
- + Đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- + Đồ thị hàm số hoặc có đúng một điểm cực trị hoặc có ba điểm cực trị, và luôn có một điểm cực trị nằm trên trục tung.
- + Đồ thị hàm số có ba cực trị:
 - Nếu $a > 0$ hàm số có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại;
 - Nếu $a < 0$ hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Chú ý rằng ba điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn tạo thành một tam giác cân.



- + Khi hàm số có một cực trị:
 $a > 0$ thì điểm cực trị là điểm cực tiểu;
 $a < 0$ thì điểm cực trị là điểm cực đại.



- + Đồ thị hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có nhiều điểm cực trị nhất (bảy cực trị) khi đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị và đồ thị của nó cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.
- + Đồ thị hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có ít điểm cực trị nhất (một cực trị) khi đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có một điểm cực trị và đồ thị của nó không có điểm chung hoặc chỉ tiếp xúc với trục hoành.

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-20; 20]$ để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 1$ có ba điểm cực trị?

A. 20.

B. 19.

C. 18.

D. 17.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x[2mx^2 + (m^2 - 9)]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 0 \Leftrightarrow 2m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases}.$$

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 2. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 3mx^2 - 4$ có ba điểm cực trị phân biệt và hoành độ của chúng trong khoảng $(-2; 2)$ là

A. $\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$. B. $\left(0; \frac{8}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 + 6mx$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = -3m \end{cases} (2)$.

Để thỏa mãn đề bài phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và thuộc khoảng $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow 0 < -\frac{3m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 > m > -\frac{8}{3}.$$

Bài tập 3. Biết rằng hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 2$ có điểm cực tiểu. Giá trị lớn nhất của cực tiểu là

A. 1. B. -1. C. 0. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$y' = 4x^3 - 4(m^2 + 1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 + 1 \end{cases}$$

Rõ ràng phương trình $y' = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

Lập bảng biến thiên, dễ thấy $x = \pm\sqrt{m^2 + 1}$ là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 2 - (m^2 + 1)^2 = 1 - (m^4 + 2m^2) \leq 1$ (dấu "=" xảy ra khi $m = 0$).

Bài tập 4. Với giá trị nào của k thì hàm số $y = kx^4 + (k - 1)x^2 + 1 - 2k$ chỉ có một cực trị?

A. $0 < k \leq 1$. B. $0 \leq k \leq 1$. C. $\begin{cases} k \geq 1 \\ k < 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} k \geq 1 \\ k \leq 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Với $k = 0$, hàm số trở thành $y = -x^2 + 1$ có đồ thị là một parabol nên có đúng một cực trị. Do đó $k = 0$ thỏa mãn đề bài.

+ Với $k \neq 0$. Ta có $y' = 4kx^3 + 2(k-1)x = 2x(2kx^2 + k-1)$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $2kx^2 + k-1 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm

$$x = 0 \Leftrightarrow k(k-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 1 \\ k < 0 \end{cases}.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được các giá trị cần tìm là $k \geq 1$ hoặc $k \leq 0$.

Chú ý: $x=0$ là nghiệm của phương trình $2kx^2 + k-1 = 0$

Bài tập 5. Giá trị của m để hàm số $y = (m+1)x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ đạt cực đại tại $x = 2$ là

A. $m = \frac{4}{3}$.

B. $m = -\frac{4}{3}$.

C. $m = -\frac{3}{4}$.

D. $\emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 4(m+1)x^3 - 4mx \Rightarrow y'' = 12(m+1)x^2 - 4m$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Rightarrow 32(m+1) - 8m = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$.

Với $m = -\frac{4}{3}$ thì $y''(2) = 12\left(-\frac{4}{3} + 1\right) \cdot 2^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right) < 0$, suy ra $x = 2$ là điểm cực đại.

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì ta lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm để kiểm tra.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}mx^2 + x$ có $x = m$ là một điểm cực trị. Tổng các giá trị của m là

A. 1.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$y' = 2x^3 - 3mx + 1 \Rightarrow y'' = 6x^2 - 3m$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = m \Rightarrow y'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

- Với $m = 1$, ta có: $y''(1) = 6 - 3 > 0$ $x = 1$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m = 1$ thỏa mãn.
- Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có: $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} > 0$ $x = -\frac{1}{2}$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn điều kiện trên là $1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 7. Biết đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(2; -14)$. Giá trị của $y(1)$ là

- A. $y(1) = -5$. B. $y(1) = -4$. C. $y(1) = -2$. D. $y(1) = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Các điểm $A(0; 2)$, $B(2; -14)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases} c = 2 \\ 16a + 4b + c = -14 \end{cases} \quad (1)$.

Mặt khác, hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$, suy ra $32a + 4b = 0 \quad (2)$.

Từ (1); (2) ta có $y = x^4 - 8x^2 + 2$.

Dễ thấy hàm số có các điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(2; -14)$ nên $y = x^4 - 8x^2 + 2$ là hàm số cần tìm.

Khi đó $y(1) = -5$.

Bài tập 8. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m$ có A là điểm cực đại và B , C là hai điểm cực tiểu. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = OA + \frac{12}{BC}$ là

- A. 9. B. 8. C. 12. D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $m > 1$.

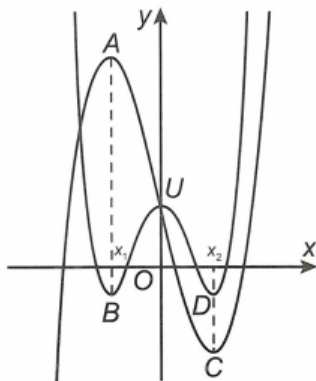
Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 3m)$, $B(\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$ và $C(-\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$. Suy ra $OA = 3m$, $BC = 2\sqrt{m-1}$.

Ta có $P = OA + \frac{12}{BC} = 3m + \frac{6}{\sqrt{m-1}} = \left[3(m-1) + \frac{3}{\sqrt{m-1}} + \frac{3}{\sqrt{m-1}} \right] + 3$

$\geq 3 + 3\sqrt[3]{3(m-1)\left(\frac{3}{\sqrt{m-1}}\right)^2} = 12$.

Dấu "=" xảy ra khi $3(m-1) = \frac{3}{\sqrt{m-1}} \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 9. Cho đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = g(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ như hình vẽ dưới. Gọi B, D là hai điểm cực tiểu của (C_1) và A, C lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của (C_2) (A, C đối xứng nhau qua $U \in Oy$). Biết hoành độ của A, B bằng nhau và hoành độ của C, D bằng nhau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $AB \leq 3$?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Phân tích: dựa vào đồ thị ta có $b = p$ và $m = 0$. Khi đó: $(C_2): y = x^3 + nx + b$

Ta cần tìm tung độ của điểm A và B (theo a).

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-a}{2} \end{cases} \text{ và } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-n}{3}.$$

Theo đề bài ta có $a, n < 0$ và $\frac{-a}{2} = \frac{-n}{3} \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}a$.

Khi đó:

$$y_B = f\left(-\sqrt{\frac{-a}{2}}\right) = b - \frac{a^2}{4}; \quad y_A = g\left(-\sqrt{\frac{-n}{3}}\right) = b - a\sqrt{\frac{-a}{2}}.$$

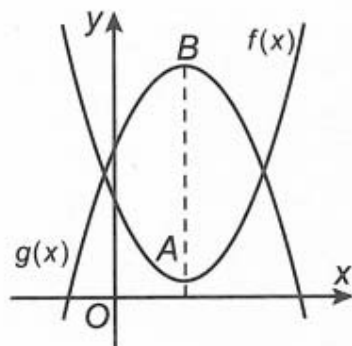
$$AB = \left| \frac{a^2}{4} + 2\frac{-a}{2} \cdot \sqrt{\frac{-a}{2}} \right| = t^4 + 2t^3 \text{ trong đó } t = \sqrt{\frac{-a}{2}} > 0.$$

$$\text{Xét } AB \leq 3 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 \leq 3 \Leftrightarrow t \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{-a}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq -2.$$

Do $a < 0$ nên $a \in \{-2; -1\}$.

Bài tập 10. Cho hai hàm đa thức $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực

trị là B (với $x_A = x_B$) và $AB = \frac{7}{2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để hàm số



$y = \|f(x) - g(x)\| + m$ có đúng bảy điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (dựa vào đồ thị đã cho, hai đồ thị chỉ có hai giao điểm đã kể trên, tức là

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

Xét $h(x) = |f(x) - g(x)| + m$.

$$\text{Ta có: } h'(x) = [f'(x) - g'(x)] \cdot \frac{f(x) - g(x)}{|f(x) - g(x)|}.$$

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_A = x_B$. Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	x_A	x_2	$+\infty$				
$h'(x)$		-		+	0	-		+	
$h(x)$	$+\infty$		m		$\frac{7}{2}+m$		m		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$, yêu cầu bài toán trở thành $m < 0 < m + \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < 0$.

Do m nguyên và $m \in (-10; 10)$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Bài tập 11. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = \pm 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(m; -m^4 + 1)$, $C(-m; -m^4 + 1)$

$\Rightarrow \overline{AB} = (m; -m^4)$, $\overline{AC} = (-m; -m^4)$, dễ thấy $AB = AC$.

Do đó tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (do $m \neq 0$).

Bài tập 12. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc bằng 60° thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{12}{5}; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(2; \frac{11}{5}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m-1 \end{cases} \quad (2)$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $m > 1$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 3m)$, $B(\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$ và $C(-\sqrt{m-1}; 5m - m^2 - 1)$.

Suy ra $AB^2 = AC^2 = (m-1) + (m-1)^4$; $BC = 2\sqrt{m-1}$.

Tam giác ABC là tam giác cân tại A , có một góc bằng 60° nên là tam giác đều

$\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow (m-1) + (m-1)^4 = 4(m-1) \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt[3]{3}$.

Bài tập 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 30° ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 8x^3 - 8mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1), B(\sqrt{m}; -2m^2+1), C(-\sqrt{m}; -2m^2+1)$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 = m + 4m^4, BC = 2\sqrt{m}.$$

Do đó tam giác ABC cân tại A .

$$\begin{aligned} + \text{ Trường hợp 1: } \widehat{BAC} = 30^\circ, \text{ ta có } \cos \widehat{BAC} &= \frac{2AB^2 - BC^2}{2AB^2} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})AB^2 = BC^2 \\ &\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(m + 4m^4) = 2m \\ &\Leftrightarrow 4(2 - \sqrt{3})m^3 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Phương trình này có đúng một nghiệm thực.

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \widehat{ABC} = 30^\circ, \text{ khi đó}$$

$$BC = \sqrt{3}.AB \Leftrightarrow 3AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 3m + 12m^4 = 4m \Leftrightarrow 12m^3 = 1.$$

Phương trình này có đúng một nghiệm thực.

Bài tập 14. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + m^4$. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C) và S_1, S_2 lần lượt là phần diện tích phía trên và phía dưới trục hoành của tam giác ABC . Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(m^2 + 1)x.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m^4 \\ x^2 = m^2 + 1 \Rightarrow y = -2m^2 - 1 \end{cases}$$

Hàm số luôn có ba điểm cực trị với mọi tham số m .

Gọi $A(0; m^4), B(\sqrt{m^2 + 1}; -2m^2 - 1), C(-\sqrt{m^2 + 1}; -2m^2 - 1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } OA = m^4, h = d(A; (BC)) = m^4 + 2m^2 + 1$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{S_{ABC} - S_1}{S_1} = 3 \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_1} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{h}{OA}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4} = 2$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

Vậy có hai giá trị của tham số thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Do hai tam giác đồng dạng nên tỉ lệ diện tích bằng bình phương tỉ lệ đồng dạng, với tỉ lệ đồng dạng là tỉ lệ đường cao.

Bài tập 15. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x - \frac{m^3}{3}$ có đồ thị (C) với m là tham số. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) và parabol (P): $y = x^2 - 2mx + 8$ có chung một điểm cực trị. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

- A. 8. B. 10. C. 16. D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} &+ \quad (P) \text{ có điểm cực trị là } M(m; -m^2 + 8). \\ &+ \quad f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + m(m+2) \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \Rightarrow A(m; m^2) \\ x = m+2 \Rightarrow B(m+2; y_B) \neq M \end{cases} \end{aligned}$$

Vì hai đồ thị hàm số có chung một điểm cực trị nên $A \equiv M \Leftrightarrow m^2 = -m^2 + 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Bài tập 16. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$ là

- A. $\sqrt{30}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $3 + \sqrt{6}$. D. $3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử điểm cực trị chung của $f(x)$ và $g(x)$ là $x_0 \neq 0$, suy ra

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ g'(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2ax_0 + 2 = 0 \\ -3x_0^2 + 2bx_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \left(-3x_0 - \frac{2}{x_0} \right) \\ b = \frac{1}{2} \left(3x_0 + \frac{3}{x_0} \right) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = |a| + |b| = \frac{1}{2} \left(\left| 3x_0 + \frac{2}{x_0} \right| + 3 \left| x_0 + \frac{1}{x_0} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(6|x_0| + \frac{5}{|x_0|} \right) \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{6|x_0| \cdot \frac{5}{|x_0|}} = \sqrt{30}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 6|x_0| = \frac{5}{|x_0|} \Leftrightarrow |x_0| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\text{Khi đó } |a| = \frac{9\sqrt{30}}{20} \text{ và } |b| = \frac{11\sqrt{30}}{20}.$$

Chú ý: Khi A và B cùng dấu thì $|A+B| = |A| + |B|$.
Hiển nhiên x_0 và $\frac{1}{x_0}$ cùng dấu.

Bất đẳng thức AM - GM :

$$\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}, \forall x, y \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Dạng 6. Cực trị hàm phân thức

1. Phương pháp

Xét $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Ta có $y' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{v^2(x)}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị. Khi đó $y'(x_0) = 0$.

Suy ra $u'(x_0).v(x_0) - v'(x_0).u(x_0) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

+ Đường cong qua các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ là $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

+ Nói riêng, đường thẳng qua các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ là

$$y = \frac{2ax + b}{d}.$$

Chú ý:

$$\left(\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \right)' = \frac{adx^2 + 2aex + \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx + e)^2} \cdot \left(\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^2}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 3m - 1}{x}$ có cực trị là

A. $m > \frac{1}{3}$.

B. $m \geq \frac{1}{3}$.

C. $m < \frac{1}{3}$.

D. $m \leq \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x \neq 0$. Ta có $y' = \frac{x^2 - 3m + 1}{x^2}$.

Hàm số có cực trị khi $x^2 - 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow 3m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}.$$

Bài tập 2. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 1$ là

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 1$.

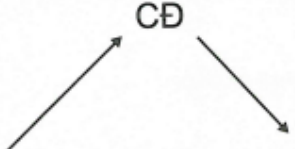
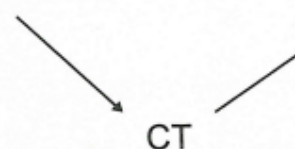
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \neq -m$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-m-1$	$-m$	$-m+1$	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow -m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = -2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = x + p + \frac{q}{x+1}$ (với p, q là tham số thực). Biết hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng -2 . Tổng $S = p + 2q$ bằng

- A. $S = 2$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $x \neq -1$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$, giá trị cực đại bằng -2 nên

$$\begin{cases} 1 - q = 0 \\ -2 + p - q = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 1 \end{cases}.$$

Thử lại $p = q = 1$ thỏa mãn nên $S = 1 + 2 = 3$.

Bài tập 4. Giá trị của m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$ bằng 10 là

- A. $m = 10$. B. $m = 8$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \neq 1$.

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2}$.

Hàm số có hai cực trị khi $-x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2 + m \neq 0 \\ \Delta' = 1 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $(d): y = -2x - m$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A(x_1; -2x_1 - m)$, $B(x_2; -2x_2 - m)$

$$\Rightarrow \overline{AB} = (x_2 - x_1; 2x_1 - 2x_2).$$

Theo yêu cầu của đề bài ta có

$$(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4m = 20$$

$$\Leftrightarrow m = 4.$$

Bài tập 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có hai điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị đều thuộc hình tròn tâm O , bán kính 6?

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq 0$. Ta có: $y' = m - \frac{1}{x^2}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m > 0$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{m}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{m}} \end{cases}$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{m}}; -2\sqrt{m}\right)$.

Theo đề bài ta có $OA^2 = OB^2 = \frac{1}{m} + 4m \leq 36 \Leftrightarrow 4m^2 - 36m + 1 \leq 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$ có hai điểm cực trị A , B và ba

điểm A , B , $C(4; 2)$ phân biệt thẳng hàng?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \neq |m|$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2|m|x + m^2 - 4}{(x - |m|)^2} = \frac{(x - |m|)^2 - 4}{(x - |m|)^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow (x - |m|)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = |m| + 2 \Rightarrow y = |m| + 4 \\ x = |m| - 2 \Rightarrow y = |m| - 4 \end{cases}$$

Do $|m| + 2 \neq |m| - 2$, $\forall m$ nên $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị là $(AB): y = 2x - |m|$. Ba điểm A , B , $C(4; 2)$ phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} C(4; 2) \in (AB) \\ |m| + 2 \neq 4 \\ |m| - 2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 6 \\ |m| \neq 2 \\ |m| \neq 6 \end{cases}$$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 7. Cho hàm số $(C): y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đồ thị

hàm số (C) có điểm cực đại, cực tiểu A , B sao cho tam giác OAB vuông?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \neq -2$. Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2}$.

$$\text{Ta có } x^2 + 4x + 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ x = -m - 2 \end{cases}$$

Hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị là

$$A(-m-2; -2), B(m-2; 4m-2) \Rightarrow \overline{AB} = (2m; 4m)$$

Dễ thấy $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{AB} \neq \vec{0}$.

Trường hợp 1: Tam giác OAB vuông tại O

$$\Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Tam giác OAB vuông tại $A \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow 2m(-m-2) - 2 \cdot 4m = 0 \Leftrightarrow -m-2-4=0 \Leftrightarrow m=-6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 3: Tam giác OAB vuông tại $B \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow 2m(m-2) + (4m-2)4m = 0 \Leftrightarrow m-2+2(4m-2)=0 \Leftrightarrow m=\frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy có bốn giá trị thực của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 8. Cho hàm số $(C): y = \frac{x^2 - mx - 1}{x^2 + 1}$ với m là tham số. Giá trị thực của m để đồ thị hàm số (C)

có hai điểm cực trị A , B sao cho đường thẳng (AB) đi qua điểm $M(-1; 2)$ là

A. $m = 8$.

B. $m = 6$.

C. $m = 4$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = \frac{mx^2 + 4x - m}{(x^2 + 1)^2}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $mx^2 + 4x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 4 + m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$.

Đường cong qua hai điểm cực trị có phương trình là $y = \frac{2x - m}{2x}$.

Ta viết phương trình đường cong dưới dạng $y = \frac{2x - m + k(mx^2 + 4x - m)}{2x}$.

Ta chọn k sao cho nghiệm của mẫu là nghiệm của tử để có thể rút gọn thành hàm số bậc nhất. Vì $x = 0$ là nghiệm của mẫu, nên thế $x = 0$ vào tử ta được $-m + k(-m) = 0 \Rightarrow k = -1$.

Với $k = -1$: $y = \frac{2x - m - mx^2 - 4x + m}{2x} = -\frac{m}{2}x - 1 \Rightarrow (AB): y = -\frac{m}{2}x - 1$.

Điểm $M(-1; 2) \in (AB) \Rightarrow 2 = \frac{m}{2} - 1 \Leftrightarrow m = 6$ (thỏa mãn).

Dạng 7: Cực trị của hàm chứa căn

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực tiểu?

A. 7.

B. 16.

C. 8.

D. 14.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -2 + m \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ và $y'' = \frac{m}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + 1} = m(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-2) > 0 \\ (m^2 - 4)(x-2)^2 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có cực tiểu khi và chỉ khi (1) có nghiệm $\Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$.

- Với $m > 2$, thì $x_1 = 2 + \frac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$ thỏa mãn $y'(x_1) = 0$ và $y''(x_1) > 0$,

suy ra x_1 là điểm cực tiểu, nhận $m > 2$.

Chú ý: Để làm trắc nghiệm ta có thể làm như sau: Hàm số đạt cực tiểu khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' > 0 \end{cases}$$

- Với $m < -2$, thì $x_2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{m^2 - 4}}$ thỏa mãn $y'(x_2) = 0$ và $y''(x_2) < 0$,
suy ra x_2 là điểm cực đại, loại, do $m < -2$.

Do m nguyên, $m > 2$ và $m \in [-10; 10]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 9; 10\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(x-2) > 0 \\ (m^2 - 4)(x-2)^2 = 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 0, x > 2 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 2$$

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 1}$ có điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị thuộc hình tròn tâm O , bán kính $\frac{\sqrt{82}}{3}$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 1 + m \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, (x \neq 0)$.

Xét $g(x) = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$
			
			-1

Hàm số có cực trị khi $m \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$.

Gọi $A(a; b)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó $m = -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$ và $b = a - \frac{a^2 + 1}{a} = -\frac{1}{a} \Rightarrow A\left(a; -\frac{1}{a}\right)$.

Ta có: $OA = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \leq \frac{\sqrt{82}}{3} \Rightarrow \frac{1}{9} \leq a^2 \leq 9$.

$$\text{Vậy } |m| = \left| \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \right| = \sqrt{1+\frac{1}{a^2}} \in \left[\frac{\sqrt{10}}{3}; \sqrt{10} \right].$$

Kết hợp với các điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$, ta được $m \in \{-3; -2; 2; 3\}$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x + \frac{mx}{\sqrt{x^2+2}}$ có điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị thuộc hình tròn tâm O , bán kính $\sqrt{68}$?

A. 16.

B. 10.

C. 12.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = 2x + \frac{mx}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow y' = 2 + \frac{2m}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = -\sqrt[3]{m}.$$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $-\sqrt[3]{m} > \sqrt{2} \Leftrightarrow m < -2\sqrt{2}$.

Gọi $A(a; b)$ ($a \neq 0$) là điểm cực trị của đồ thị hàm số, khi đó:

$$\sqrt{a^2+2} = -\sqrt[3]{m} \text{ và } b = 2a + \frac{ma}{\sqrt{a^2+2}} = 2a + \frac{ma}{-\sqrt[3]{m}} = a\left(2 - \sqrt[3]{m^2}\right) = a(-a^2) = -a^3.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } OA \leq \sqrt{68} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq \sqrt{68} \Leftrightarrow a^2 + a^6 \leq \sqrt{68} \Leftrightarrow a^2 \leq 4.$$

Ta có:

$$0 < a^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{a^2+2} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{2} < -\sqrt[3]{m} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow -6\sqrt{6} < m \leq -2\sqrt{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-6\sqrt{6} < m \leq -2\sqrt{2}$ nên $m \in \{-14; -13; \dots; -4; -3\}$.

Vậy có 12 giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài.

Chú ý: Hàm số không thể đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Dạng 8: Cực trị của hàm bậc cao và hàm lượng giác

Bài tập 1. Biết rằng tồn tại các số thực a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 3x + c$ đạt cực trị tại điểm $x = 2$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ là

A. 0.

B. -3.

C. 3.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x^5 + 4ax^3 + 2bx + 3.$$

$$\text{Hàm số đạt cực trị tại điểm } x = 2 \text{ nên } f'(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2^5 + 4 \cdot a \cdot 2^3 + 4b + 3 = 0.$$

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ là

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow -6.2^5 - 4.a.2^3 - 4b + 3 = 3 - (6.2^5 + 4.a.2^3 + 4b) = 6.$$

Bài tập 2. Biết rằng tồn tại các số thực a, b, c sao cho hàm số $f(x) = a.\sin^2 x - b.\cos 3x + x + c$ đạt cực trị tại điểm $x = -\frac{\pi}{6}$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{6}$ là

- A. 0. B. -1. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x) = a.\sin 2x + 3b.\sin 3x + 1$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = -\frac{\pi}{6}$, suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow -a.\sin \frac{\pi}{3} - 3b.\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 0$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{6}$ là

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = a.\sin \frac{\pi}{3} + 3b.\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 2.$$

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$?

- A. 8. B. Vô số. C. 7. D. 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-4)x^4 - 4(m^2-16)x^3 = x^3[8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)] = x^3.g(x)$

- Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

+ Khi $m = 4$ ta có $y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

+ Khi $m = -4$ ta có $y' = x^4(8x^3 - 40) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

- Nếu $m^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4 \Rightarrow g(0) \neq 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$

$\Leftrightarrow$ Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow -4(m^2 - 16) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Tổng hợp các trường hợp ta có: $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có tám giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Bài tập 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3 \cdot h(x)$ với $h(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.
 - Khi $m = 2$ thì $y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu nên $m = 2$ thỏa mãn.
 - Khi $m = -2$ thì $y' = x^4(8x^3 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.
- Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \Rightarrow h(0) \neq 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ khi và chỉ khi giá trị đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) < 0$$

$$\Rightarrow -4(m^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}.$$

Tổng hợp các trường hợp ta có $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 9: Tìm cực trị của hàm số chứa trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Bước 1. Tập xác định và tính đạo hàm

Đạo hàm hàm chứa trị tuyệt đối với công thức:

$$(|u|)' = (\sqrt{u^2})' = \frac{u' \cdot u}{|u|}.$$

Chú ý: $|u| = \begin{cases} u & \text{khi } u \geq 0 \\ -u & \text{khi } u < 0. \end{cases}$

Bước 2. Giải phương trình đạo hàm bằng 0 và tìm những điểm làm cho đạo hàm không xác định (nhưng hàm số xác định tại những điểm đó).

Bước 3. Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Số điểm cực đại của hàm số $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 2|x| + 2}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = 1 - 2 \frac{x - |x|}{\sqrt{x^2 - 2|x| + 2}}$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- Khi $x < 0$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3} = x_1.$$

- Khi $x > 0$ ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = x_2.$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0

Vậy hàm số có hai điểm cực đại.

Bài tập 2. Số điểm cực trị của hàm số $y = (x+1)|x-2|$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có đồ thị của hàm số $y = (x+1)(x-2)$ như sau.

$$\text{Vì } y = (x+1)|x-2| = \begin{cases} (x+1)(x-2), & x \geq 2 \\ -(x+1)(x-2), & x < 2 \end{cases}$$

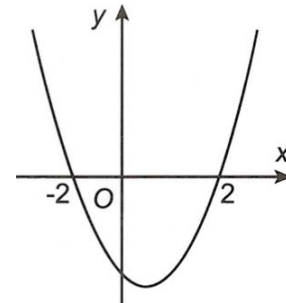
nên để vẽ đồ thị hàm số đã cho, ta giữ nguyên đồ

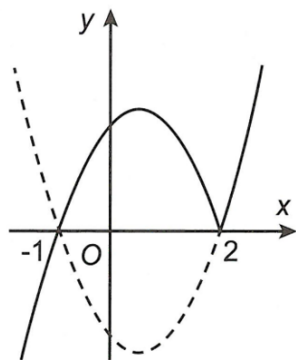
thị $y = (x+1)(x-2)$ khi $x \geq 2$ và lấy đối xứng qua

trục hoành phần đồ thị $y = (x+1)(x-2)$ ứng với

$x < 2$.

Dễ thấy hàm số $y = (x+1)|x-2|$ có hai điểm cực trị (xem hình vẽ dưới đây):





Dạng 10: Tìm cực trị của hàm số trị tuyệt đối nếu biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

1. Phương pháp

Khi cho trước bảng biến thiên của hàm số, tìm cực trị của hàm số chứa giá trị tuyệt đối:

Ta dùng các phép biến đổi đồ thị chứa giá trị tuyệt đối để lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu.

Chú ý: Cách nhằm nhanh số điểm cực trị của hàm số.

Bước 1. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tìm số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$

Bước 3. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là tổng số điểm của cả hai bước trên.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.

Hướng dẫn giải

Để thấy trực hoành cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Bảng biến thiên của $y = |f(x)|$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	3	1	$+\infty$

Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Nhằm nhanh số cực trị

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để thấy trực hoành cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt. Số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$ là 3.

Suy ra hàm số có năm điểm cực trị.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Chú ý: Có thể nhầm nhanh số điểm cực trị như sau:

Số điểm cực trị của hàm $y = f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ rồi cộng thêm 1.

Số cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khi $x \geq 0$ thì $f(|x|) = f(x)$ nên bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên

$[0; +\infty)$ cũng chính là bảng biến thiên của $y = f(|x|)$ trên $[0; +\infty)$.

Do đồ thị $y = f(|x|)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên ta có bảng

biến thiên của $y = f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$						$-\infty$

Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2		3		-4	$+\infty$

Biết $f(0) + f(0,5) \leq 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ là

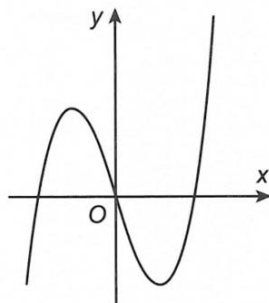
- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;1)$ nên $f(0) < f(0,5)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $f(x) = x(x^2 - 3)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x(x + \sqrt{3})|x - \sqrt{3}|$ và $h(x) = (x + \sqrt{3})|x^2 - x\sqrt{3}|$ lần lượt là m, n .

Giá trị của $m + n$ là

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Hướng dẫn giải

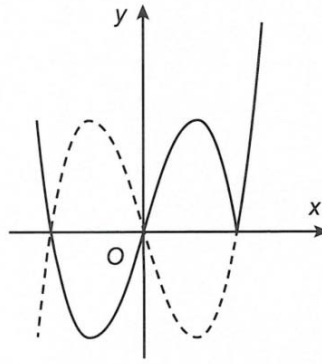
Chọn A.

+) Xét $g(x) = x(x + \sqrt{3})|x - \sqrt{3}| = \begin{cases} x(x^2 - 3), & x \geq \sqrt{3} \\ -x(x^2 - 3), & x < \sqrt{3} \end{cases}$, suy ra đồ thị của $g(x)$ gồm hai phần được suy

ra từ đồ thị ban đầu như sau:

+ Phần 1: là đồ thị hàm $f(x)$ tương ứng với $x \geq \sqrt{3}$.

+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm $f(x)$ qua trục Ox khi $x < \sqrt{3}$. Đồ thị hàm số $g(x)$ là đường nét liền ở hình dưới đây.



Từ đồ thị hàm số $g(x)$, ta có số điểm cực trị là 3 hay $m = 3$.

+) Xét $h(x) = (x + \sqrt{3})|x^2 - x\sqrt{3}| = \begin{cases} x(x^2 - 3), & x \in (-\infty; \sqrt{3}] \cup [0; +\infty) \\ -x(x^2 - 3), & x \in (0; \sqrt{3}). \end{cases}$

Suy ra đồ thị của $h(x)$ gồm 2 phần được suy ra từ đồ thị ban đầu như sau:

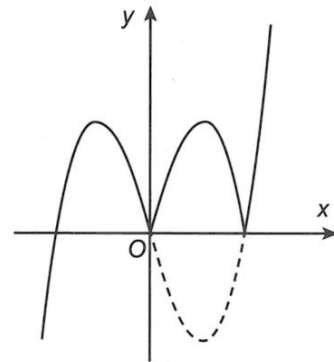
+ Phần 1: đồ thị hàm $f(x)$ ứng với $x \geq \sqrt{3}$ và với $x \leq 0$.

+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm $f(x)$ khi $0 < x < \sqrt{3}$.

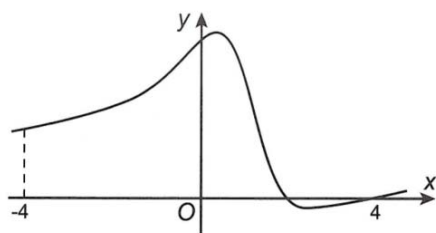
Đồ thị hàm số $h(x)$ là đường nét liền ở hình dưới đây.

Từ đồ thị hàm số $h(x)$, ta có số điểm cực trị là 4 hay $n = 4$.

Vậy $m + n = 3 + 4 = 7$.



Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Chú ý:

Đề bài hỏi số điểm cực trị trong khoảng $(-4; 4)$ nên các điểm $x = \pm 4$ không là điểm cực trị.

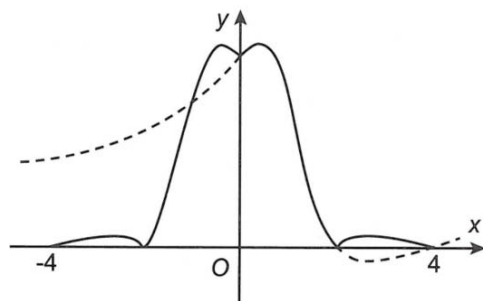
Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ trên $(-4; 4)$ là

- A. 5. B. 7. C. 9. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có đồ thị $y = |f(|x|)|$ như sau:



Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ trên $(-4; 4)$ là 7.

Dạng 11: Một số bài toán sử dụng phép dịch chuyển đồ thị

1. Phương pháp

Cho đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$

- Đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x - a)$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số (C) qua bên phải a đơn vị nếu $a > 0$ và dịch qua trái a đơn vị nếu $a < 0$.
- Đồ thị hàm số $(C_2): y = f(x) + b$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số (C) lên trên b đơn vị nếu $b > 0$ và dịch xuống dưới b đơn vị nếu $b < 0$.

Chú ý : Khi tịnh tiến đồ thị lên – xuống, trái – phải thì số điểm cực trị của hàm số (C) , (C_1) , (C_2) là bằng nhau.

Chú ý : Số điểm cực trị của các hàm số sau là bằng nhau:

$$y = m|f(|x + p| + q) + t| + n \quad (1);$$

$$y = m|f(|x+p|+q)+t| \quad (2);$$

$$y = |f(|x+p|+q)+t| \quad (3);$$

$$y = |f(|x|+q)+t| \quad (4);$$

Từ (1) qua (2): dịch chuyển lên xuống không làm thay đổi số điểm cực trị.

Từ (2) qua (3): phóng to và thu nhỏ không làm thay đổi số điểm cực trị.

Từ (3) qua (4): dịch trái phải không làm thay đổi số điểm cực trị.

Để tìm số điểm cực trị của hàm số, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm hàm số có cùng số điểm cực trị với hàm ban đầu.

Bước 2. Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên, bảng xét dấu đạo hàm của đề bài mà suy ra số điểm cực trị của hàm tìm được ở bước 1.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 7	↗ $+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x+3)-9|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$y = |f(x+3)-9|$; $y = |f(x)-9|$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)-9$ là

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -2	↗ $+\infty$	

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)-9|$ là 4.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = 2|f(x-1)-1|+1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = 2|f(x-1)-1|+1; y = 2|f(x-1)-1|; y = |f(x-1)-1|; y = |f(x)-1|$$

Hàm số $y = f(x)-1$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Suy ra số điểm cực trị của hàm $y = |f(x)-1|$ là 4.

Vậy hàm số $y = 2|f(x-1)-1|+1$ có 4 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |2f(x+2)-1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = |2f(x+2)-1|; y = \left|f(x+2)-\frac{1}{2}\right|; y = \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - \frac{1}{2}$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	$-2,5$	$+\infty$	$0,5$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Từ đó suy ra số cực trị của hàm số $y = \left| f(x) - \frac{1}{2} \right|$ là 9 nên số cực trị của hàm số $y = |2f(x+2) - 1|$ cũng là 9.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3	$-\infty$

Hàm số $y = 2f(|x-2|) - 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = 2f(|x-2|) - 3; y = 2f(|x-2|); y = f(|x-2|); y = f(|x|)$$

(vì ba hàm đầu có số nghiệm của đạo hàm là như nhau; từ hàm thứ tư, ta dịch qua phải 2 đơn vị sẽ được đồ thị hàm thứ ba).

Từ bảng biến thiên đã cho, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$f(0)$	3	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó hàm số $y = 2f(|x-2|) - 3$ có 3 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$+\infty$		3	
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$

Biết $f(0).f(1) < 0$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |2f(|x-2|) - 3|$ là

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Quan sát bảng biến thiên, rõ ràng hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 3)$, suy ra $f(0) < f(1)$. Lại do $f(0).f(1) < 0$ nên $f(0) < 0 < f(1)$.

Tương tự như ở Bài tập 4, số điểm cực trị của hàm $y = |2f(|x-2|) - 3|$ bằng với số cực trị của hàm $y = |f(|x|)|$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ là:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$									

Đến đây, ta dễ dàng suy ra được số điểm cực trị của hàm $y = |f(|x|)|$ là 7.

Vậy hàm số $y = |2f(|x-2|) - 3|$ có 7 điểm cực trị.

Chú ý: Nếu $f(x) \geq 0$ thì hàm số $y = |2f(|x-2|) - 3|$ chỉ có 5 điểm cực trị.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = 3f(|x| - 2) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$	
$f'(x-2)$		+		+	0	-
$f(x-2)$			$+\infty$		3	
	$-\infty$			$-\infty$		$-\infty$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$$y = 3f(|x|-2)+1; y = 3f(|x|-2) \text{ và } y = f(|x|-2).$$

Để vẽ được bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(|x|-2)$, ta dịch bảng biến thiên (đồ thị) của hàm số $y = f(x)$ qua phải 2 đơn vị rồi lấy đối xứng phần bên phải trục Oy qua Oy (bỏ phần bên trái Oy).

Sau đây lần lượt là bảng biến thiên của $y = f(x-2)$ và $y = f(|x|-2)$

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$	
$f'(x-2)$		+		+	0	-
$f(x-2)$			$+\infty$		3	
	$-\infty$			$-\infty$		$-\infty$

x	$-\infty$	-5	-1	0	1	5	$+\infty$
$f'(x -2)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x -2)$			3	$+\infty$	$+\infty$	3	
	$-\infty$		$-\infty$	$f(-2)$		$-\infty$	$-\infty$

Vậy hàm số ban đầu có 3 điểm cực trị.

Dạng 12: Định tham số để hàm số chứa dấu trị tuyệt đối có n điểm cực trị

1. Phương pháp

Xét bài toán: Định tham số để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ hoặc $y = |f(|x|)|$ có n điểm cực trị.

Bước 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Bước 2. Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số **Lời bình:** Ta có thể nhìn

$y = |x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2|$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. B. 8 C. 5. D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2$

Cho $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 - mx + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2|$ có 5 điểm cực trị khi $f(x) = 0$

có 3 nghiệm phân biệt và chỉ khi $x^2 - 4x + 1 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - (1-m) > 0 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

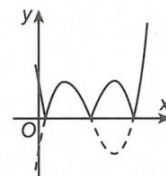
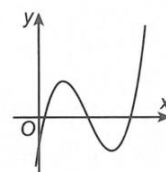
Do m nguyên $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

rõ những kết luận này từ việc biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị $y = f(x)$ suy

ra đồ thị $y = |f(x)|$



Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số

$y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. B. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 0]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$.

Hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

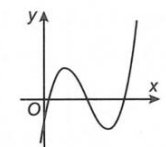
hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

Lời bình: Ta có thể nhìn

rõ những kết luận này từ việc biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị $y = f(x)$ suy

ra đồ thị $y = f(|x|)$.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 9m > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài tập 3. Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m \in (-2021; 2020)$ để hàm số $f(x) = x^2 - 2m|x - m + 2020| + 2021$ có 3 điểm cực trị?

A. 1009.

B. 2020.

C. 2019.

D. 1008

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$f'(x) = 2x - 2m \frac{x - m + 2020}{|x - m + 2020|} = \begin{cases} 2x - 2m, & x - m + 2020 > 0 \\ 2x + 2m, & x - m + 2020 < 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 2020$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 2020 > 0 \\ 2x + 2m = 0 \\ x - m + 2020 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \\ 2m - 2020 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m, & m > 1010. \end{cases}$$

Nếu $m \leq 1010$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = m$ và không có đạo hàm tại điểm $x = m - 2020$ nên không có đủ 3 điểm cực trị. Do đó loại trường hợp này.

Khi $m > 1010$, ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	$-m$	$m - 2020$	m	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị với $m > 1010$.

Mà $m \in (-2021; 2020)$ nên $m \in \{1011; 1012; \dots; 2019\}$.

Vậy có 1009 số thỏa mãn đề bài.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ với m, n là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} m + n < 1 \\ 2m - n > 5 \end{cases}$. Số điểm

cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(-2) = -8 + 4m - 2n - 2 = 2(2m - n - 5) > 0 \\ f(1) = 1 + m + n - 2 = m + n - 1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot f(-2) < 0 \\ f(-2) \cdot f(1) < 0 \\ f(1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm. Mà $f(x) = 0$ là phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Vậy $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ với m là tham số thực. Đồ thị của hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = x^2 + m \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{2x^2 + 1} = g(x)$.

Ta có $g'(x) = \frac{x(2x^4 - 3x^2 + 2)}{(2x^2 + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1}}$. Bảng biến thiên $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm khác 0 khi $m < 0$. Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm phân biệt. Nếu tồn tại giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ có 5 điểm cực trị.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -3m\sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \quad (2)$

Khi $m < 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x^4 - 9m^2x^2 - 9m^2 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt nếu $m < 0$.

Vậy số điểm cực trị tối đa của hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ là 5.

Bài tập 6. Có bao nhiêu số nguyên của $m \in [0; 2021]$ để hàm số $y = |x|^3 + (m-1)x$ có đúng một điểm cực trị?

A. 2021.

B. 2022.

C. 21.

D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta sẽ chứng minh hàm số trên luôn có đúng 1 điểm cực trị với mọi tham số m .

Hiển nhiên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{3x^3}{|x|} + m - 1 = \begin{cases} 3x^2 + m - 1, & x > 0 \\ -3x^2 + m - 1, & x < 0. \end{cases}$$

Đạo hàm không xác định tại điểm $x = 0$.

$$\text{+) Khi } m = 1 \text{ thì } y' = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ và đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0$ (vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' > 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} y' < 0$).

Vậy hàm số chỉ đạt cực trị tại $x = 0$.

+) Khi $m > 1$, ta có $y' > 0, \forall x > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' < 0$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{m-1}{3}}$ và đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm đó nên hàm số cũng chỉ có 1 điểm cực trị.

+) Tương tự với $m < 1$, hàm số cũng chỉ đạt cực trị tại điểm $x = \sqrt{\frac{1-m}{3}}$.

Vậy hàm số luôn có 1 điểm cực trị với mọi tham số m .

Do m nguyên và $m \in [0; 2021]$ nên có 2022 giá trị của m .

Dạng 13: Cho bảng biến thiên, định giá trị tham số để hàm số trị tuyệt đối có n điểm cực trị

1. Phương pháp

Bài toán: Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ hoặc cho bảng biến thiên, bảng xét dấu của $f'(x)$.

Yêu cầu tìm giá trị của tham số m để hàm số $g(x, m)$ có n điểm cực trị.

Đưa hàm số $g(x, m)$ về hàm số đơn giản hơn (nếu có thể). Sau đó sử dụng các phép biến đổi đồ thị hàm trị tuyệt đối.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $g(x) = 2f(|x| - m) + 2^{2020}$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 21.

B. 19.

C. 22.

D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của $g(x) = 2f(|x| - m) + 2^{2020}$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f(|x| - m)$.

Ta có $h'(x) = \frac{x}{|x|} f'(|x| - m)$.

Hiển nhiên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

$$\text{Cho } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - m = 0 \\ |x| - m = x_1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = m \\ |x| = x_1 + m \end{cases}$$

Hàm số $h(x) = f(|x| - m)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $h'(x) = 0$ có nhiều nghiệm dương nhất hay $0 < m$.

Do m nguyên và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 20\}$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	2	1	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^4 - 4x^2 + m|)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = (4x^3 - 8x) \frac{x^4 - 4x^2 + m}{|x^4 - 4x^2 + m|} f'(|x^4 - 4x^2 + m|)$.

Ta có $|x^4 - 4x^2 + m| \geq 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(|x^4 - 4x^2 + m|) = 0$ vô nghiệm (*).

Hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $g'(x) = 0$ có nhiều nghiệm phân biệt nhất.

Kết hợp với (*), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + m = 0 \\ 4x^3 - 8x = 0 \end{cases}$ có nhiều nghiệm phân biệt nhất

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + m = 0$ có nhiều nghiệm nhất và tất cả các nghiệm đều khác 0 và khác $\pm\sqrt{2}$ (vì $4x^3 - 8x = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt là $0; \pm\sqrt{2}$) $\Leftrightarrow m = -x^4 + 4x^2$ có nhiều nghiệm nhất và tất cả các nghiệm đều khác 0 và khác $\pm\sqrt{2}$ (**).

Lập bảng biến thiên của $y = -x^4 + 4x^2$ ta có:

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

Do đó (**) $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy có ba giá trị nguyên là $m \in \{1; 2; 3\}$.

Dạng 14: Cho đồ thị, định tham số để có hàm số có n điểm cực trị

1. Phương pháp

Bước 1. Tìm hàm số đơn giản hơn có cùng số điểm cực trị với hàm ban đầu

Bước 2. Dựa vào đồ thị, xác định số cực trị của hàm đơn giản ở bước 1.

2. Bài tập

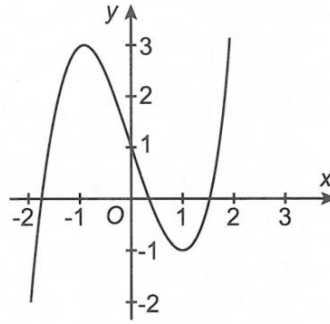
Bài tập 1. Cho đường cong như hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x+3|+m)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1]$.

B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m \in (1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -1)$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+3|+m)$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|+m)$.

Ta có $g'(x) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x|+m)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+m=1 \\ |x|+m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=1-m \\ |x|=-1-m \end{cases} (*)$

(chú ý rằng hàm số $g(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$).

Hàm số $y = f(|x+3|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

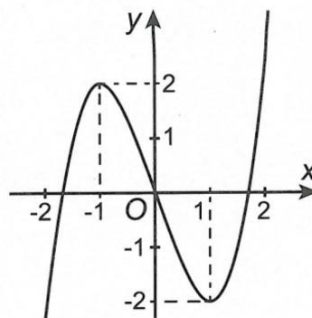
Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x)+m|$ có nhiều điểm cực trị nhất.

A. $m \in (-2; 2)$.

B. $m \in [-2; 2]$.

C. $m \in (-1; 1)$.

D. $m \in [-1; 1]$.

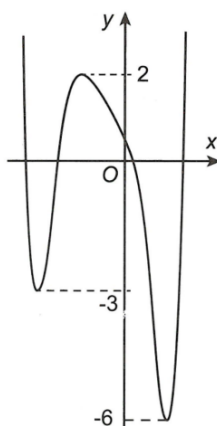


Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $y = f(x) + m$ cắt trục hoành tại nhiều điểm nhất $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các số nguyên dương của m để hàm số $y = \left| f(x + 2020) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 5.

B. 10.

C. 6.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có số điểm cực trị của hàm $y = \left| f(x + 2020) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ bằng số điểm cực trị của hàm $y = \left| f(x) + \frac{1}{3}m^2 \right|$.

Xét hàm $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}m^2$.

Dựa vào đồ thị ta có số điểm cực trị của hàm $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$ và bằng 3.

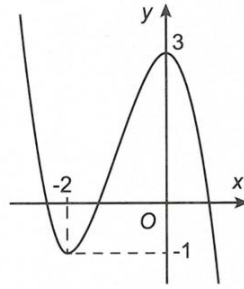
Suy ra hàm số $y = \left| f(x + 2020) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị thì số giao điểm của $g(x)$ với trục Ox (không kể các điểm tiếp xúc) là 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}m^2 \geq 2 \\ -6 < -\frac{1}{3}m^2 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < m^2 < 18 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq m < 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} < m \leq -3. \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{3; 4\}$.

Vậy tổng các giá trị là 7.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = |f^3(x) - 3f(x) + m|$ có đúng 9 điểm cực trị là



A. 16.

B. 17.

C. 15.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $h(x) = f^3(x) - 3f(x) + m$.

Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0$.

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -2 \\ x = x_2 \in (-2; 0) \text{ (đạo hàm đều đổi dấu khi đi qua cả 3 nghiệm đều là nghiệm đơn và khác} \\ x = x_3 > 0 \end{cases}$

2 nghiệm trên).

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4 > x_3 \\ x = -2 \end{cases}$ (trong đó $x = x_4$ là nghiệm đơn $x = -2$ là nghiệm kép).

Ta tính các giá trị: $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = m - 2$

$h(x_4) = h(-2) = m + 2$ và $h(0) = m + 18$

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	x_4	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	$m-2$	$m+2$	$m-2$	$m+18$	$m-2$	$m+2$	$m-2$	$+\infty$	

Suy ra hàm số $h(x)$ luôn có 6 điểm cực trị.

Đồ thị hàm số $g(x) = |f^3(x) - 3f(x) + m|$ có đúng 9 điểm cực trị tương đương đồ thị $y = h(x)$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm (không kể những điểm tiếp xúc) $\Leftrightarrow m + 2 \leq 0 < m + 18 \Leftrightarrow -18 < m \leq -2$.

Vậy $m \in \{-17; -16; \dots; -2\}$ hay có 16 giá trị nguyên của m .

Dạng 15. Biết được đồ thị của hàm số $f(x)$ tìm (số điểm) cực trị của hàm ẩn

1. Phương pháp

Bước 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$: $y' = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Bước 2. Từ đồ thị hàm số, xác định số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$.

Bước 3. Kết luận cực trị của hàm số $y = f(u(x))$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành).

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 0 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị trên, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases} \quad (\text{các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ}).$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{trong đó } x = 0 \text{ nghiệm kép, hai nghiệm kia là nghiệm đơn}).$$

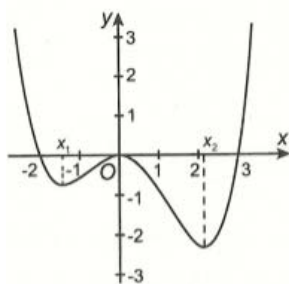
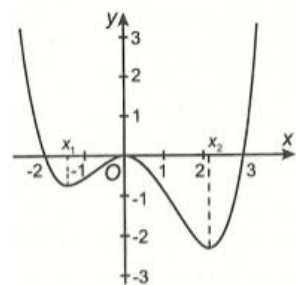
Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là 5.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành). Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[f(x)]$ là

A. 6

B. 7



Chú ý: Chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm mà đạo hàm đổi dấu khi đi qua của phương trình $f'(x) = 0$

C. 8

D. 9

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị trên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ (các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ).}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2. \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = x_1$ với $x_1 \in (-2; -1)$ có 2 nghiệm đơn khác với 3 nghiệm $x = x_1; x = 0; x = x_2$.

Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn là $x = -2, x = 3$ (khác với 5 nghiệm đơn trên) và nghiệm kép $x = 0$.

Phương trình $f(x) = x_2$ với $x_2 \in (2; 3)$ có 2 nghiệm đơn khác với tất cả các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 9 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có tổng cộng 9 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng 2 điểm cực trị $x = -1, x = 1$ có đồ thị như hình vẽ sau:

Hỏi hàm số $y = 3f(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

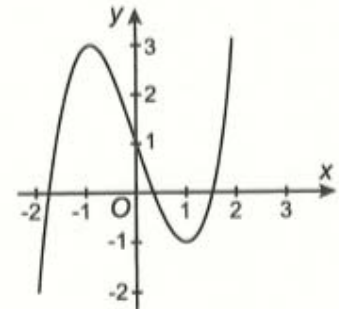
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.



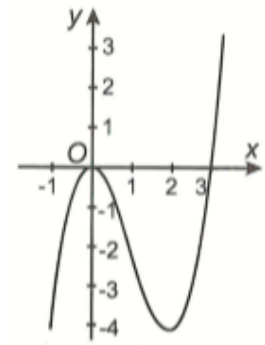
Ta có: $y' = 3(3x^2 - 12x + 9)f'(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = -1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = x_0 \in (-1; 0) \\ x(x-3)^2 = 0. \end{cases}$$

Vì $y' = 0$ có các nghiệm lẻ là $x = x_0, x = 1$ và $x = 3$ nên hàm số $y = 3f(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) + 2020$ có tất cả 4 điểm cực trị.

Bài tập 4. Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = 5f[f(x-3)+1] - 20$ là

- A. 6. B. 5.
C. 3. D. 4.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y = 5f[f(x-3)+1] - 20$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x-3)+1]$ và cũng bằng với số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[f(x)]$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'[f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (trong đó } x = 0 \text{ và } x = 2 \text{ là nghiệm bội lẻ).}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (3) \\ f(x) = 2 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 3 \text{ (nghiệm đơn) hoặc } x = 0 \text{ (nghiệm kép).}$$

$$(4) \Leftrightarrow x = x_0 > 3 \text{ (nghiệm đơn).}$$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 4 điểm cực trị

Suy ra hàm số $y = 5f[f(x-3)+1] - 20$ cũng có 4 điểm cực trị.

Dạng 16. Tìm (số điểm) cực trị hàm ẩn biết đồ thị của hàm số $f'(x)$

1. Phương pháp

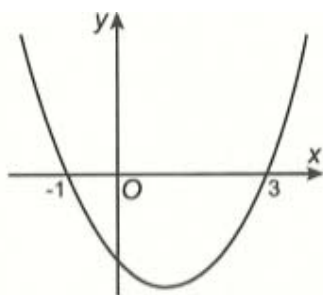
Bài toán: Cho trước đồ thị của hàm số $f'(x)$. Tìm (số điểm) cực trị của (đồ thị) hàm số $f(u)$.

+ Nếu $f'(x) = 0$ có các nghiệm x_i , thì $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = x_i$.

+ Chúng ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm bội lẻ của phương trình.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 0$.

B. $x = 2$.

C. $x = \pm 2$.

D. $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm bội lẻ là $x = -1, x = 3$.

Ta có: $g'(x) = [f(3 - x^2)]' = -2x \cdot f'(3 - x^2)$.

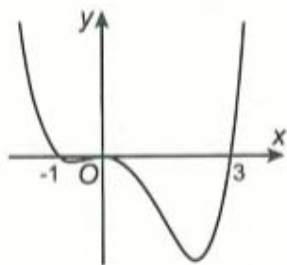
$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = \pm 2$.

Vì $g'(3) = -6 \cdot f'(6) < 0$ nên ta có bảng xét dấu $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Lưu ý: Do các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ, nên $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua mỗi nghiệm ấy. Chính vì vậy mà ta chỉ cần biết dấu của một khoảng nào đó sẽ suy ra dấu ở các khoảng còn lại. Do hàm số liên tục, nên chỉ cần biết dấu tại 1 điểm, ta sẽ biết dấu ở khoảng chứa điểm đó.

Ở bài này, ta xét tại điểm $x = 3 \in (2; +\infty)$.

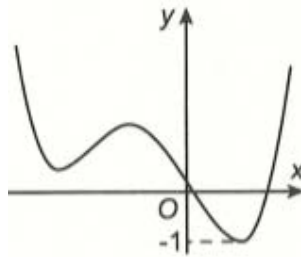
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị, suy ra hàm số $y = f(x+m)$ cũng có 4 điểm cực trị và $f'(x+m) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt. Khi $f(a) > f(c) > 0; f(b) < 0 < f(e)$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = f(x+m)$ cũng cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $g(x) = [f(x+m)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x+m) \cdot f(x+m)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+m) = 0 & (1) \\ f(x+m) = 0 & (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt khác với 4 nghiệm của phương trình (1). Vậy $g'(x)$ có 7 nghiệm (bội lẻ) phân biệt hay $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 1.

B. 2.

C. 0.

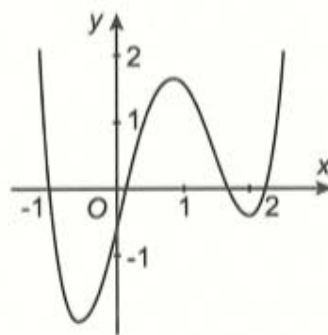
D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng với số điểm cực trị của $y = f(x-2)$. Vì hàm số $y = f(x-2)$ có 2 điểm cực trị nên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x-2)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ là



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-2)$. Ta có đồ thị hàm số $y = f(x-2)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên hàm số $y = f(x-2)$ có 4 điểm cực trị. Vậy hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ có 4 điểm cực trị.

Dạng 17. Biết được $f'(x)$ hoặc bảng xét dấu, bảng biến thiên của $f'(x)$, tìm số điểm cực trị của hàm ẩn

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (4-x)(x^3-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2) - x^4 - m$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Ta có $g'(x) = 2x[(4-x^2)(x^6-1) + 2x^2] - 4x^3 = 2x(4-x^2)(x^6-1)$.

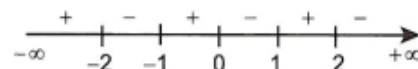
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Lưu ý: Khi làm trắc nghiệm, ta có thể lập bảng xét dấu thu gọn như sau:



Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 1)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Ta có:

$$\begin{aligned}g'(x) &= (2x+1)f'(x^2+x-1) \\ &= (2x+1)(x^2+x-1)^2(x^2+x-2)(x^2+x-3)^4\end{aligned}$$

Dễ thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn là $x = -2, x = -\frac{1}{2}, x = 1$ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2020$ là

- A. 3. B. 2.
C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3(x^2 - x - 2)$.

Nhận xét: $g'(-1) = g'(2) = 0$.

- Khi $\begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -3(x^2 - x - 2) < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Khi $-1 < x < 2$ thì $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -3(x^2 - x - 2) > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0$.

Tức là $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua 2 điểm $x = -1$ và $x = 2$.

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 17. B. 16.
C. 14. D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$.

Ta có: $f'(x) = (x-1)^2 x(x-2)$ suy ra

$$g'(x) = (2x-8)f'(x^2-8x+m)$$

$$= (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (x^2-8x+m-1)^2 = 0 \quad (1) \\ (x^2-8x+m) = 0 \quad (2) \\ (x^2-8x+m-2) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và (1) nếu có các nghiệm thì nghiệm ấy là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) đều có 2 nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m > 0 \\ 16-m+2 > 0 \\ 16-32+m \neq 0 \\ 16-32+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

Do m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -20$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 9.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm số $f(|x|)$ nên hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm bội lẻ phân biệt và dương (*).

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ (x-3)^2 = 0 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0(1). \end{cases}$$

Để thỏa mãn (*) ta có các trường hợp sau:

+) (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}.$$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

+) (1) có 2 nghiệm dương phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại khác 2.

Ta có (1) nhận $x=1$ là nghiệm khi $1^2 + 2.1.m + 5 = 0 \Rightarrow m = -3$. Khi $m = -3$, thế vào (1) ta thấy phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt là $x=1$ và $x=5$. Vậy $m = -3$ thỏa mãn.

+) (1) có 2 nghiệm dương phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 2, nghiệm còn lại khác 1.

Nếu (1) nhận $x=2$ là nghiệm thì $2^2 + 2.2.m + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$.

Trường hợp này không có giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Hàm số $g(x) = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $g'(x) = -12x(x^2 - 2) \left[f'(-2 - (x^2 - 2)^2) - (x^2 + 1) \right]$.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $-2 - (x^2 - 2)^2 \leq -2$ nên $\Rightarrow f'[-2 - (x^2 - 2)^2] \leq 0$.

Suy ra $f'[-2 - (x^2 - 2)^2] - (x^2 + 1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$, cả 3 nghiệm đều là nghiệm bội lẻ.

Vì $-12f'[-2 - (x^2 - 2)^2] - (x^2 + 1) > 0$ nên $g'(x)$ cùng dấu với $h(x) = x(x^2 - 2)$ nên dễ thấy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		2		5		$-\infty$

Số cực đại của hàm số $g(x) = \left[f(2x^2 + x) \right]^2$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có

$$g'(x) = 2 \cdot (4x+1) \cdot f'(2x^2+x) \cdot f(2x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ f'(2x^2+x) = 0 \\ f(2x^2+x) = 0. \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$f'(2x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x = -2 \\ 2x^2+x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 > 1$.

Khi đó $f(2x^2+x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0 = 0$.

Vì $ac = 2(-x_0) < 0$ nên phương trình này luôn có 2 nghiệm trái dấu là

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+8x_0}}{4}; x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+8x_0}}{4}.$$

Ta có $x_1 < -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+8}}{4} < -1$ và $x_2 > -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2}, \forall x_0 > 1$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ chỉ có 2 điểm cực đại.

Bài tập 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2	5		$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x + 20$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**Ta có: $g'(x) = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$.Để thấy khi $x \in [-1; 2]$ thì $(x^3 - 3x) \in [-2; 2]$ và khi ấy $f'(x^3 - 3x) \in [-3; 1]$.Suy ra $3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 \leq 0$.Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} f'(x^3 - 3x) = 1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1$ (vô lý).Vậy $3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0, \forall x \in [-1; 2]$.Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (đều có 2 nghiệm đơn).Bảng xét dấu $g'(x), x \in [-1; 2]$ là

x	-1	1	2
$g'(x)$	0	+	0 -

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x + 20$ trên đoạn $[-1; 2]$ chỉ có 1 điểm cực trị.**Bài tập 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**Ta có: $g'(x) = f'(x) - m$.Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) - m = 0$.Đặt $t = (x-3)^2, t \geq 0$, phương trình trở thành: $(t-4)(t-1) - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 - m = 0 \quad (1).$ Hàm số $g(x) = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 4(4 - m) > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = 4 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m < 4.$$

Do m nguyên và $m \in \left(-\frac{9}{4}; 4\right)$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Bài tập 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x\sqrt{8-x^2}, \forall x \in [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - m^2x - 2m$ có 2 điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $g(x) = f(x) - m^2x - 2m$ xác định trên $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

Đạo hàm $g'(x) = f'(x) - m^2 = x\sqrt{8-x^2} - m^2$.

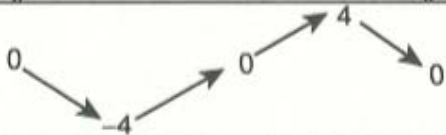
Hàm số $g(x) = f(x) - m^2x - 2m$ có 2 điểm cực trị khi $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó (1).

Ta có: $x\sqrt{8-x^2} - m^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{8-x^2} = m^2$ (*).

Xét hàm số $h(x) = x\sqrt{8-x^2}, x \in [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

Có $h'(x) = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\sqrt{8}$	-2	0	2	$\sqrt{8}$	
$h'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$\parallel$
$h(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (*) có tối đa 2 nghiệm hay $g'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 0 < m^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0. \end{cases}$

Vì m nguyên nên $m \in \{-1; 1\}$.

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

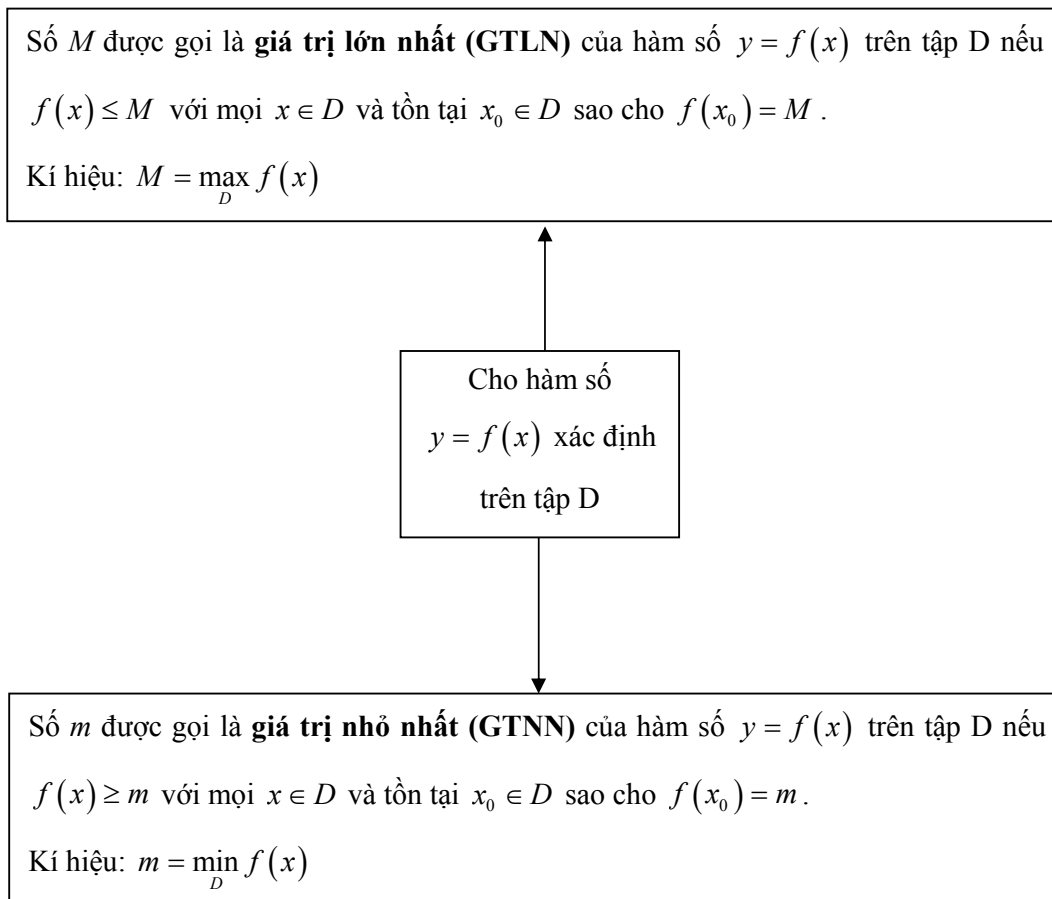
+) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max_D f(x)$

+) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên một khoảng

1. Phương pháp giải

Ta thực hiện các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định (nếu đề chưa cho khoảng).

Bước 2. Tính $y' = f'(x)$; tìm các điểm mà đạo hàm bằng không hoặc không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên

Bước 4. Kết luận

Lưu ý: Có thể dùng máy tính cầm tay để giải.

Bước 1. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền $(a; b)$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (MODE 9 lập bảng giá trị)

Bước 2. Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min.

- Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp).

Chú ý: Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$... ta chuyển máy tính về chế độ Radian.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{17}{30}$

B. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{47}{30}$

C. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{67}{30}$

D. Hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = -2x^5 + 2x^4 - x + 1 = -(x-1)(2x^4 + 1)$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)(2x^4 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{47}{30}$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{47}{30}$ tại $x = 1$

Bài tập 2. Gọi a là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{6-8x}{x^2+1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$. Khi đó giá trị của

biểu thức $P = \frac{6-8a}{a^2+1}$ bằng

A. $\frac{22}{5}$

B. $\frac{6}{13}$

C. $-\frac{58}{65}$

D. $-\frac{74}{101}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$

Ta có $f'(x) = \frac{8x^2 - 12x - 8}{(x^2 + 1)^2}$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \notin (-\infty; 1) \\ x = -\frac{1}{2} \in (-\infty; 1) \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	8	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(-\infty; 1)} f(x) = 8 \Rightarrow P = \frac{6-8a}{a^2+1} = -\frac{58}{65}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 1$

B. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$

C. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 3$

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có

$$y = f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + x + 1} \Rightarrow y' = -\frac{2(x^2 + x + 1) - 2x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

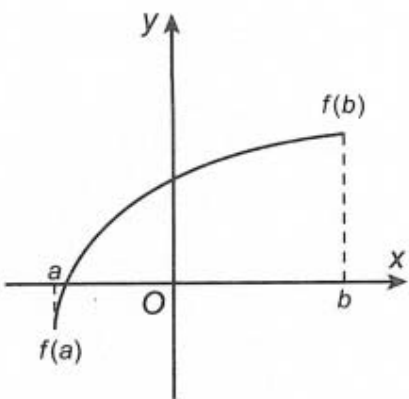
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	3	$\frac{1}{3}$	1	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$ tại $x = 1$

Dạng 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn

1. Phương pháp giải



Bước 1. Tính $f'(x)$

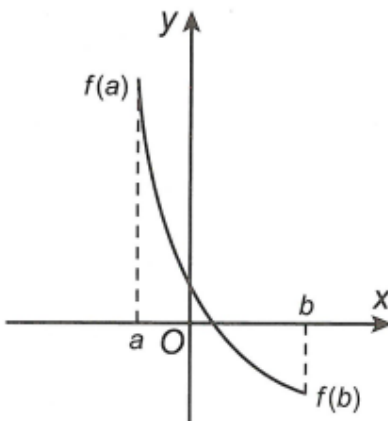
Bước 2. Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định

Bước 3. Tính $f(a)$, $f(x_i)$, $f(b)$

Bước 4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Khi đó $M = \max_{[a; b]} f(x)$ và $m = \min_{[a; b]} f(x)$

Chú ý:



+) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\begin{cases} \max f(x) = f(b) \\ \min f(x) = f(a) \end{cases}$

+) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\begin{cases} \max f(x) = f(a) \\ \min f(x) = f(b) \end{cases}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Giá trị của $\left(\min_{[2;3]} y\right)^2 + \left(\max_{[2;3]} y\right)^2$ bằng

- A. 16 B. $\frac{45}{4}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{89}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$, do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $[2; 3]$.

Do đó $\min_{[2;3]} y = y(3) = \frac{5}{2}; \max_{[2;3]} y = y(2) = 4$

Vậy $\left(\min_{[2;3]} y\right)^2 + \left(\max_{[2;3]} y\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4^2 = \frac{89}{4}$

Bài tập 2. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$

Giá trị của biểu thức $P = M + m$ bằng

- A. $2(\sqrt{2}-1)$ B. $2(\sqrt{2}+1)$ C. $\sqrt{2}+1$ D. $\sqrt{2}-1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = [-2; 2]$

Ta có $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2; 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 2 \in (-2; 2) \end{cases}$

$y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; y(-\sqrt{2}) = 0; y(2) = 2; y(-2) = -2$

Vậy $M = 2\sqrt{2}, m = -2 \Rightarrow P = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[0; 5]$ bằng 5 khi m bằng

- A. 6 B. 10 C. 7 D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định và liên tục trên $D = [0; 5]$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in D \\ x = 1 \in D \end{cases}$$

$$f(0) = m; f(1) = m - 1; f(5) = 175 + m$$

Để thấy $f(5) > f(0) > f(1)$, $\forall m \in \mathbb{R}$ nên $\min_{[0; 5]} f(x) = f(1) = m - 1$

Theo đề bài $\min_{[0; 5]} f(x) = 5 \Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$

Bài tập 4. Gọi A, B là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}$ là

A. $m = 1; m = -2$

B. $m = -2$

C. $m = \pm 2$

D. $m = -1; m = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[2; 3]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-(m^2 + m + 1)}{(x - 1)^2} < 0, \forall m$$

$$\Rightarrow A = y(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}; B = y(2) = m^2 + m + 2$$

$$\text{Do đó } A + B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 3}{2} + m^2 + m + 2 = \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Bài tập 5. Biết hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$ (với m là tham số) trên đoạn $[-2; 0]$ đạt giá trị lớn nhất bằng 6. Các giá trị của tham số m là

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 3$

D. $m = -1$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 - 2m \end{cases}$$

Vì $y(-2) = -1$; $y(0) = 1$ và theo bài ra $\max_{[-2; 0]} y = 6$ nên giá trị lớn nhất không đạt tại $x = -2$; $x = 0$. Do đó giá trị lớn nhất đạt tại $y(-1)$ hoặc $y(1 - 2m)$.

$$\text{Ta có } y(-1) = -3m + 3, y(1 - 2m) = (1 - 2m)^2(m - 2) + 1$$

- Trường hợp 1: Xét $-3m + 3 = 6 \Leftrightarrow m = -1$

Thử lại với $m = -1$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = 3 \notin [-2; 0] \end{cases}$ nên $m = -1$ là một giá trị cần tìm.

- Trường hợp 2: Xét $\begin{cases} (1-2m)^2(m-2)+1=6 \\ -2 < 1-2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)^2(m-2)=5 \quad (1) \\ \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \end{cases}$

Vì $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow (1-2m)^2(m-2) < 0$ nên (1) vô nghiệm

Dạng 3: Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[a; b]$

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, giả sử thứ tự là M, m .

Bước 2.

+) Tìm $\max_{[a; b]} y = \max \{|M|; |m|\}$

+) Tìm $\min_{[a; b]} y$

- Trường hợp 1: $M.m < 0 \Rightarrow \min_{[a; b]} y = 0$

- Trường hợp 2: $m \geq 0 \Rightarrow \min_{[a; b]} y = m$

- Trường hợp 3: $M \leq 0 \Rightarrow \min_{[a; b]} y = |M| = -M$

Bước 3. Kết luận.

* **Tìm tham số để GTLN của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[\alpha, \beta]$ bằng k**

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm $\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max \{|A|; |B|\}$

Bước 2. Xét các trường hợp

+) $|A| = k$ tìm m , thử lại các giá trị m đó

+) $|B| = k$ tìm m , thử lại các giá trị m đó

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng

A. 48

B. 52

C. -102

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn A

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 68$ trên $[-1; 4]$

x	-1	2	4
y'	+	0	-
y	-102	-48	-52

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$ trên đoạn $[-1; 4]$ là

x	-1	2	4
y'	-	0	+
y	102	48	52

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng 48.

Cách khác: Theo trường hợp 3 thì $M = -48 < 0 \Rightarrow \min y = 48$

Bài tập 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 2.

Số phần tử của tập S là

A. 3

B. 1

C. 4

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}$

Mặt khác $f(1) = \frac{2m + 1}{2}; f(2) = \frac{3m + 4}{3}$

Do đó $\max_{[1; 2]} y = \max \left\{ \left| \frac{2m + 1}{2} \right|, \left| \frac{3m + 4}{3} \right| \right\}$

- Trường hợp 1:

$\max_{[1; 2]} y = \left| \frac{2m + 1}{2} \right| = 2 \rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$

+) Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m + 4}{3} \right| = \frac{17}{6} > 2$ (loại)

+) Với $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn)

- Trường hợp 2:

$$\max_{[1; 2]} y = \left| \frac{3m+4}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

+) Với $m = \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn)

+) Với $m = -\frac{10}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{17}{6} > 2$ (loại)

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng

A. 108

B. 120

C. 210

D. 136

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có } g'(x) = x^3 - 28x + 48 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$\text{Để } \max_{[0; 2]} |g(x)| \leq 30 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \leq 30 \\ |g(2)| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \leq 30 \\ |m+14| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16$$

$$\Rightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 15; 16\}$$

Tổng các phần tử của S là 136.

Bài tập 4. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2} \right| + m$ bằng 18.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m < 5$

B. $10 < m < 15$

C. $5 < m < 10$

D. $15 < m < 20$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2}$ liên tục trên tập xác định $[-2; 2]$

Ta có $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1 = 0, x \in (-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in (-2; 2)$$

$$g(-2) = -\frac{5}{2}; g(\sqrt{2}) = \frac{-1+4\sqrt{2}}{2}; g(2) = \frac{3}{2}$$

Do đó $\max_{[-2; 2]} |g(x)| = \frac{5}{2}$ khi $x = -2$, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{5}{2} + m$

Theo bài ra $\frac{5}{2} + m = 18 \Leftrightarrow m = 15,5$. Vậy $15 < m < 20$

Dạng 4: Tìm điều kiện tham số để GTLN của hàm số $y = |f(x) + g(m)|$ trên đoạn $[a; b]$ đạt GTNN

1. Phương pháp giải

Thực hiện các bước sau

Bước 1. Tìm $\alpha = \max_{[a; b]} f(x); \beta = \min_{[a; b]} f(x)$

Bước 2. Gọi M là giá trị lớn nhất của

$$y = |f(x) + g(m)| \text{ thì}$$

$$M = \max \{ |\alpha + g(m)|; |\beta + g(m)| \} \geq \frac{|\alpha + g(m)| + |\beta + g(m)|}{2} = \frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $|\alpha + g(m)| = |-\beta - g(m)|$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } \frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2} \geq \frac{|\alpha + g(m) - \beta - g(m)|}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $[\alpha + g(m)][-\beta - g(m)] \geq 0$

Bước 3. Kết luận $\min M = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$ khi $g(m) = \frac{-\alpha - \beta}{2}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x + 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2; 1]$$

$$f(-2) = 0; f(1) = 3; f(-1) = -1$$

$$\text{Do đó } \max_{[-2; 1]} f(x) = 3; \min_{[-2; 1]} f(x) = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \max_{[-2; 1]} y &= \max \{|m-5|; |m-1|\} \\ &\geq \frac{|m-5| + |m-1|}{2} \geq \frac{|5-m+m-1|}{2} = 2 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |m-5| = |m-1| \\ (5-m)(m-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài tập 2: Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \sqrt{2x-x^2} - 3m + 4 \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. $m = \frac{3}{2}$

B. $m = \frac{5}{3}$

C. $m = \frac{4}{3}$

D. $m = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = [0; 2]$

Đặt $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$, $x \in D$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(0) = 0; f(2) = 0; f(1) = 1$$

$$\text{Suy ra } P = \max_D y = \max \{|3m-4|; |3m-5|\} \geq \frac{|3m-4| + |3m-5|}{2} \geq \frac{|5-3m+3m-4|}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} |3m-4| = |3m-5| \\ (5-3m)(3m-4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất khi $m = \frac{3}{2}$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x, m) = |x^2 - 2x + 5| + mx$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 2

B. 5

C. 8

D. 9

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\min f(x, m) \leq f(0, m) = 5, \forall m \in \mathbb{R}$

Xét $m = 2$ ta có $f(x, 2) = |x^2 - 2x + 5| + 2x \geq x^2 - 2x + 5 + 2x \geq 5, \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra tại $x = 0$. Suy ra $\min f(x, 2) = 5, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min f(x, m) \leq 5, \forall m \in \mathbb{R} \\ \min f(x, 2) = 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) = 5, \text{ đạt được khi } m = 2$$

$$\text{Tổng quát: } y = |ax^2 + bx + c| + mx$$

$$\text{Trường hợp 1: } a.c > 0 \Rightarrow \max(\min y) = c$$

$$\text{Đạt được khi } m = -b$$

Bài tập 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, m) = |x^2 - 4x - 7| + mx$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 7

B. -7

C. 0

D. 4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình $x^2 - 4x - 7 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$

Trường hợp 1: Nếu $m \geq 0$

$$\text{Ta có } \min f(x, m) \leq f(x, m) = mx_1 \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Xét $m = 0$ ta có $f(x, 0) = |x^2 - 4x - 7| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại $x = x_{1,2}$.

$$\text{Suy ra } \min f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min f(x, m) \leq 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ \min f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) = 0 \text{ khi } m = 0$$

Trường hợp 2: Nếu $m < 0$

$$\text{Ta có } \min f(x, m) \leq f(x_2, m) = mx_2 < 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) < 0$$

So sánh cả hai trường hợp thì $\max(\min f(x, m)) = 0$ khi $m = 0$

Trường hợp 2: $a.c < 0 \Rightarrow \max(\min y) = 0$ Đạt được khi $m = 0$

Dạng 5: TÌM GTLN-GTNN khi cho đồ thị - bảng biến thiên

Bài tập 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	-4	0	8	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-4)$	9	$f(8)$		$+\infty$	

Biết $f(-4) > f(8)$, khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 9

B. $f(-4)$

C. $f(8)$

D. -4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có $f(x) \geq f(-4), \forall x \in (-\infty; 0]$ và $f(x) \geq f(8), \forall x \in (0; +\infty)$.

Mặt khác $f(-4) > f(8)$ suy ra $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ thì $f(x) \geq f(8)$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(8)$

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup [1; \frac{3}{2}]$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	+		-		
y	-1	0	0	$-\sqrt{5}$	

Khẳng định đúng là

A. $\max_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min_D f(x)$

B. $\max_D f(x) = 0$; $\min_D f(x) = -\sqrt{5}$

C. $\max_D f(x) = 0$; $\min_D f(x) = -1$

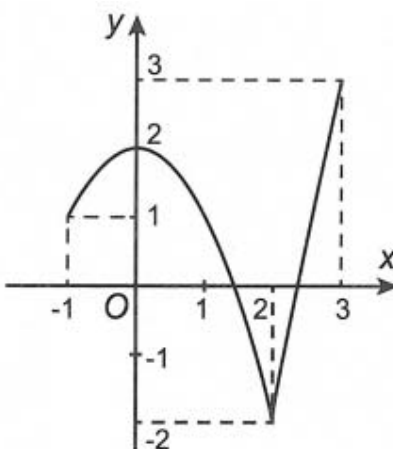
D. $\min_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max_D f(x)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên thì $\max_D f(x) = f(\pm 1) = 0$; $\min_D f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{5}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

Hướng dẫn giải

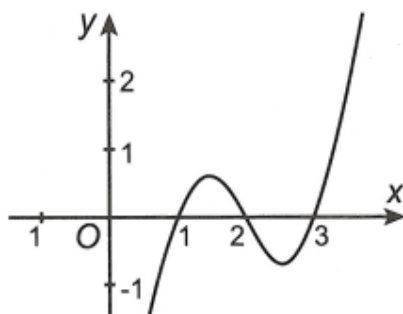
Chọn D

Dựa vào đồ thị suy ra

$$M = f(3) = 3; m = f(2) = -2$$

$$\text{Vậy } M - m = 5$$

Bài tập 4. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1; 3]$ tại x_0 . Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2019$ bằng bao nhiêu?

A. 2018

B. 2019

C. 2021

D. 2022

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	1	2	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1; 3]$ tại $x_0 = 2$.

$$\text{Vậy } x_0^2 - 2x_0 + 2019 = 2019$$

Dạng 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp giải

Ghi nhớ: Điều kiện của các ẩn phụ

$$\text{- Nếu } \begin{cases} t = \sin x \\ t = \cos x \end{cases} \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$$

$$\text{- Nếu } \begin{cases} t = |\cos x| \\ t = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

- Nếu $\begin{cases} t = |\sin x| \\ t = \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

- Nếu $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

Bước 1. Đặt ẩn phụ và tìm điều kiện cho ẩn phụ

Bước 2. Giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo ẩn phụ

Bước 3. Kết luận (Chọn đáp án)

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2 \cos 2x + 2 \sin x$ là

A. $M = \frac{9}{4}; m = -4$

B. $M = 4; m = 0$

C. $M = 0; m = -\frac{9}{4}$

D. $M = 4; m = -\frac{9}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y = 2 \cos 2x + 2 \sin x = 2(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x = -4 \sin^2 x + 2 \sin x + 2$

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$, ta được $y = -4t^2 + 2t + 2$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow -8t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in (-1; 1)$

Vì $\begin{cases} y(-1) = -4 \\ y(1) = 0 \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} \end{cases}$ nên $M = \frac{9}{4}; m = -4$

Bài tập 2. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

D. 3

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = |\cos x| \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$, ta được $y = f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$ với $0 \leq t \leq 1$

Vì $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2} \geq 0, \forall t \in [0; 1]$ nên $\min_{[0; 1]} f(t) = f(0) = 1; \max_{[0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng

$$\min_{[0;1]} f(t) + \max_{[0;1]} f(t) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Bài tập 3. Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \cos^4 x + \sqrt{3} \sin^2 x + 2$ là

A. $M = 2 + \sqrt{3}$

B. $M = 3$

C. $M = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$

D. $M = 3 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$, ta được $y = t^2 + \sqrt{3}(1-t) + 2$ với $t \in [0; 1]$

Ta có $y' = 2t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0; 1)$

Vì $y(0) = 2 + \sqrt{3}$; $y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$; $y(1) = 3$ nên $M = 2 + \sqrt{3}$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \frac{|\sin^2 x - (m+1)\sin x + 2m + 2|}{\sin x - 2}$ (với m là tham số thực).

Giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi m bằng

A. $-\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$, ta được $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t - 2}$ với $t \in [-1; 1]$

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 4t}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \in (-1; 1) \\ t = 4 \notin (-1; 1) \end{cases}$

Vì $f(-1) = \frac{-4}{3}$; $f(1) = -2$; $f(0) = -1$ nên $\max_{[-1;1]} f(t) = -1$ và $\min_{[-1;1]} f(t) = -2$

Hay $-2 \leq \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} \leq -1, \forall x$

Mặt khác $y = \left| \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} - m \right| = |f(x) - m|, \forall -2 \leq f(x) \leq -1$

Do đó $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-2; -1]} |f(x) - m| = \max \{|m+2|, |m+1|\} = \max \{|m+2|, |-m-1|\}$

$\Rightarrow \max y \geq \frac{|m+2| + |-m-1|}{2} \geq \frac{|(m+2) + (-m-1)|}{2} = \frac{1}{2}$

Dấu bằng đạt được khi $\begin{cases} |m+2| = |-m-1| \\ (m+2)(-m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

Bài tập 5. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |1 + 2 \cos x| + |1 + 2 \sin x|$ bằng

A. $\sqrt{2} - 1$

B. $\sqrt{3} - 1$

C. 1

D. $2 - \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $P^2 = 6 + 4(\sin x + \cos x) + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4 \sin x \cos x|$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Xét $y = P^2 = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1| = \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4 & \text{khi } t \leq \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; t \geq \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -4t^2 + 8 & \text{khi } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} 8t + 8 & \text{khi } t < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; t > \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -8t & \text{khi } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$
y'	-	+	0	+	0	-
y	$12 - 8\sqrt{2}$	$4 - 2\sqrt{3}$	4	8	$4 + 2\sqrt{3}$	$12 + 8\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$

$\Rightarrow \min P = \sqrt{3} - 1$

Bài tập 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

A. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{5}{4}$

B. $\max_{[0; \pi]} y = 1$

C. $\max_{[0; \pi]} y = 2$

D. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{9}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2t^2$, với $x \in [0; \pi] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Ta được $f(t) = -2t^2 + t + 1$ với $t \in [0; 1]$

Ta có $f'(t) = -4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in (0; 1)$

Do $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$; $f(1) = 0$ nên $\max_{[0;1]} f(t) = \frac{9}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[0; \pi]} y = \frac{9}{8}$

Dạng 7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khác

Bài tập 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3 + \frac{6x}{x^2+1} - 1$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$ B. -5 C. $-\frac{9}{2}$ D. 3

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow |t| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } y = 4t^3 + 6t - 1 \text{ với } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Vì } y' = 12t^2 + 6 > 0, \forall t \text{ nên hàm số đồng biến trên } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Do đó } \max_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

Bài tập 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{-x+9}$ lần lượt là

- A. 2; $\sqrt{2}$ B. 4; 2 C. 4; $\sqrt{2}$ D. 4; $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = [1; 9]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{-x+9}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{-x+9} \Rightarrow x = 5 \in (1; 9)$$

$$\text{Vì } y(1) = y(9) = 2\sqrt{2}; y(5) = 4 \text{ nên } \max y = 4; \min y = 2\sqrt{2}.$$

Nhận xét: với hàm số $y = \sqrt{x+a} + \sqrt{-x+b}$ ($-a \leq x \leq b$; $a+b \geq 0$) thì

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = a+b+2\sqrt{x+a}\sqrt{-x+b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 \geq a+b \\ y^2 \leq a+b+(x+a)+(-x+b) = 2(a+b) \end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{a+b} \leq y \leq 2\sqrt{a+b}$ dấu bằng luôn xảy ra.

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)}$ bằng

A. $\frac{-5}{2}$

B. -2

C. -4

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $D = [-1; 3]$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{4-t^2}{2}$$

$$\text{Do } t^2 = 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \leq 4, \forall x \in [-1; 3], \text{ từ đó suy ra } -2 \leq t \leq 2$$

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t) = \frac{t^2}{2} + t - 2$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$\text{Ta có } g'(t) = t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \in (-2; 2)$$

$$\text{Lại có } g(-2) = -2; g(2) = 2; g(-1) = \frac{-5}{2}$$

$$\text{Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{-5}{2}$$

Nhận xét: Với hàm số $y = \sqrt{x+a} - \sqrt{-x+b}$ ($-a \leq x \leq b; a+b \geq 0$) thì

$$y^2 = a+b - 2\sqrt{x+a}\sqrt{-x+b} \leq a+b$$

$$\Rightarrow -\sqrt{a+b} \leq y \leq \sqrt{a+b}$$

Dạng 8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến

Bài tập 1. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$ với $x^2 + y^2 \neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A. 3 .

B. $\frac{1}{3}$.

C. 1 .

D. 4 .

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Nếu $y = 0$ thì $P = 1$. (1)

$$\bullet \text{ Nếu } y \neq 0 \text{ thì } P = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 1}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, \text{ khi đó } P = f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1}.$$

$$f'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	1	$\frac{1}{3}$	3	1	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P = f(t) \geq \frac{1}{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P = f(t) \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \min P = \frac{1}{3}$.

Bài tập 2. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0; y \geq 0$ và $x + y = 1$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$ lần lượt là

A. $\frac{1}{2}$ và 1.

B. 0 và 1.

C. $\frac{2}{3}$ và 1.

D. 1 và 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{x(x+1) + y(y+1)}{(x+1)(y+1)} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{xy + x + y + 1} = \frac{2 - 2xy}{2 + xy}.$$

$$\text{Đặt } t = xy \text{ ta được } P = \frac{2 - 2t}{2 + t}.$$

$$\text{Vì } x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow t \geq 0.$$

$$\text{Mặt khác } 1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số } g(t) = \frac{2 - 2t}{2 + t} \text{ trên } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{2 - 2t}{2 + t} \text{ xác định và liên tục trên } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{-6}{(2+t)^2} < 0 \text{ với } \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \text{hàm số } g(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \\ \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} g(t) = g(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min P = \frac{2}{3} \\ \max P = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1} \text{ bằng}$$

A. 3.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{114}{11}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1) + (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5)}{x + 2y + 1} \\ &= \frac{4y^2 + 4xy + x^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = \frac{(2y + x)^2 + (x + 2y) + 4}{x + 2y + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + 2y.$$

$$(1^2 + 2^2)[(x-3)^2 + (y-1)^2] \geq [(x-3) + (2y-2)]^2$$

$$\Rightarrow (x + 2y - 5)^2 \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq x + 2y \leq 10.$$

$$\text{Ta được } P = f(t) = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1} = t + \frac{4}{t + 1}, 0 \leq t \leq 10.$$

$$\text{Xét } f'(t) = 1 - \frac{4}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0; 10) \\ t = -3 \notin (0; 10) \end{cases}$$

$$\text{Vì } f(0) = 4; f(10) = \frac{114}{11}; f(1) = 3 \Rightarrow \min P = 3 \text{ khi } t = 1.$$

Bài tập 4. Gọi x_0, y_0, z_0 là ba số thực dương sao cho biểu thức

$$P = \frac{3}{2x + y + \sqrt{8yz}} - \frac{8}{\sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2) + 4xz} + 3} - \frac{1}{x + y + z} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có
$$P = \frac{3}{2x+y+2\sqrt{2yz}} - \frac{8}{\sqrt{2y^2+2(x+z)^2}+3} - \frac{1}{x+y+z}$$
$$\geq \frac{3}{2(x+y+z)} - \frac{8}{(x+y+z)+3} - \frac{1}{x+y+z}.$$

Đặt $x+y+z=t>0$. Khi đó $P=f(t)=\frac{1}{2t}-\frac{8}{t+3}, (t>0)$.

Ta có $f'(t)=\frac{3(t-1)(5t+3)}{2t^2(t+3)^2}=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	0

Suy ra $P \geq -\frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=2z \\ y=x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó $x_0+y_0+z_0=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$.

Bài tập 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2-xy+3=0 \\ 2x+3y-14 \leq 0 \end{cases}$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$ bằng

A. 8.

B. 0.

C. 12.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với điều kiện bài toán $x, y > 0$ và $x^2-xy+3=0 \Rightarrow y=\frac{x^2+3}{x}=x+\frac{3}{x}$.

Lại có

$$2x+3y-14 \leq 0 \Leftrightarrow 2x+3\left(x+\frac{3}{x}\right)-14 \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2-14x+9 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

Từ đó $P=3x^2\left(x+\frac{3}{x}\right)-x\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-2x^3+2x=5x-\frac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=5x-\frac{9}{x}; \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right] \Rightarrow f'(x)=5+\frac{9}{x^2} > 0; \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[1; \frac{9}{5}\right]$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{9}{5}\right) \Rightarrow -4 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow \max P + \min P = 4 + (-4) = 0.$$

Bài tập 6. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 9]$ và $x \geq y, x \geq z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y}{10y-x} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) \text{ bằng}$$

A. $\frac{11}{18}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Thật vậy } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 (\sqrt{ab}-1) \geq 0 \text{ đúng do } ab \geq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức trên } P = \frac{1}{10-\frac{x}{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \right) \geq \frac{1}{10-\frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x}{y}} = t \in [1; 3]. \text{ Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{10-t^2} + \frac{1}{1+t} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

$$f'(t) = \frac{2t}{(10-t^2)^2} - \frac{1}{(1+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 24t^2 - 2t + 100 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^3 - 24t - 50) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ do } t^3 - 24t - 50 < 0, \forall t \in [1; 3].$$

Bảng biến thiên

t	1	2	3
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

$$\text{Suy ra } P_{\min} = \frac{1}{2} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 4y \\ \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}$$

Dạng 9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(u(x)), y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$ khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(x)$

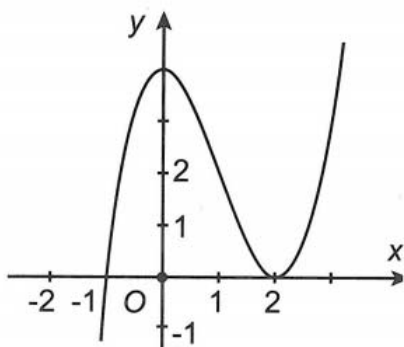
1. Phương pháp giải

Thực hiện theo một trong hai cách

Cách 1:**Bước 1.** Đặt $t = u(x)$.Đánh giá giá trị của t trên khoảng K .**Chú ý:** Có thể sử dụng khảo sát hàm số, bất đẳng thức để đánh giá giá trị của $t = u(x)$.**Bước 2.** Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số cho ta giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$.**Bước 3.** Kết luận.**Cách 2:****Bước 1.** Tính đạo hàm $y' = u'(x)f'(u(x))$.**Bước 2.** Tìm nghiệm $y' = u'(x)f'(u(x)) = 0$.**Bước 3.** Lập bảng biến thiên.**Bước 4.** Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x), y = f(u(x)),$
 $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$ **2. Bài tập****Bài tập 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	4	$-\infty$	

Hàm số $y = f(|x-1|)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ bằngA. $f(-2)$.B. $f(2)$.C. $f(1)$.D. $f(0)$.**Hướng dẫn giải****Chọn D.**Đặt $t = |x-1|, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow t \in [0; 1]$.Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min_{[0;1]} f(t) = f(0)$.**Bài tập 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khi đó hàm số $y = f(2-x^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; \sqrt{2}]$ bằngA. $f(-2)$.B. $f(2)$.C. $f(1)$.D. $f(0)$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = 2 - x^2$. Từ $x \in [0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \geq 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow t \in [0; 2]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min_{[0;2]} f(t) = f(2)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+3)$ trên đoạn $[0; 2]$ là

A. 64.

B. 65.

C. 66.

D. 67.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 3.$$

Đặt $t = x + 3, x \in [0; 2] \Leftrightarrow t \in [3; 5]$.

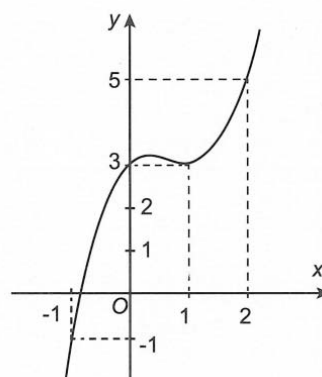
Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên đoạn $[3; 5]$.

Do đó $\min_{[0;2]} f(x+3) = \min_{[3;5]} f(t) = f(3) = 66$.

Dạng 10. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(u(x))$, $y = f(u(x)) \pm h(x)$... Khi biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như dưới đây.



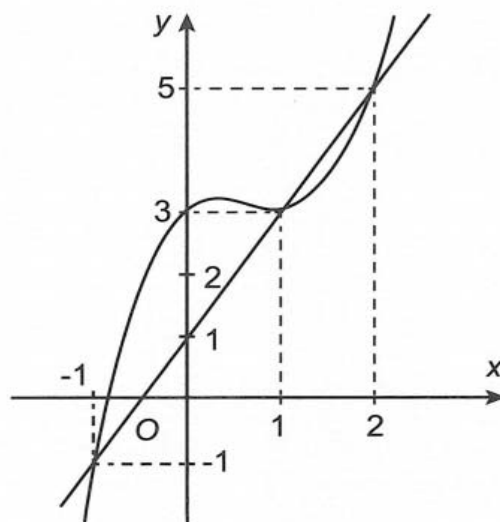
Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $g(-1) > g(1)$.
- B. $g(-1) = g(1)$.
- C. $g(1) = g(2)$.
- D. $g(1) > g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	1		2	
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$					

Ta chỉ cần so sánh trên đoạn $[-1; 2]$. Đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 5)$ nên đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt nhau tại 3 điểm.

Dạng 11. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các bài toán thực tế

Bài tập 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 3t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. $t = 2s$

B. $t = 5s$

C. $t = 1s$

D. $t = 3s$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $v(t) = s'(t) = 6t - 3t^2 \Rightarrow v(t) = -3(t-1)^2 + 3 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$

Giá trị lớn nhất của $v(t) = 3$ khi $t = 1$.

Bài tập 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 180 (m/s)

B. 36 (m/s)

C. 144 (m/s)

D. 24 (m/s)

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$

$v'(t) = -2t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Vì $v(6) = 36; v(0) = 0; v(7) = 35$ nên vận tốc lớn nhất đạt được bằng 36 (m/s).

Bài tập 3. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ

B. 1 giờ

C. 3 giờ

D. 2 giờ

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} (t > 0)$

$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \in (0; \infty) \\ t=-1 \notin (0; \infty) \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$c(1)$	0

Với $t = 1$ (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

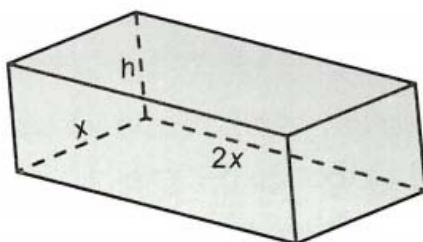
Bài tập 4. Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 đồng / m^2 . Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

- A. 75 triệu đồng B. 85 triệu đồng C. 90 triệu đồng D. 95 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể



$$\text{Bể có thể tích bằng } 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

$$\text{Diện tích cần xây } S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x \frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0); f'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Bảng biến thiên

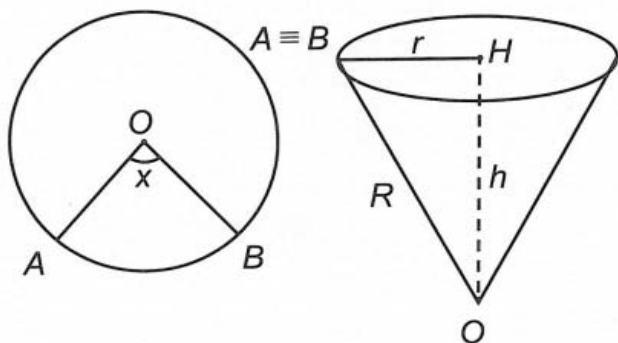
x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	150	$+\infty$

$$\text{Do đó } \min_{(0;+\infty)} f(x) = f(5) = 150$$

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 150$

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là $150.600000 = 90.000.000$ đồng.

Bài tập 5. Bác Hoàng có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4 dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quần rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Hoàng tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép)



A. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$

B. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{81} dm^3$

C. $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$

D. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$

Hướng dẫn giải

Khi hàn hai mép của hình quạt tròn, độ dài đường sinh của hình nón bằng bán kính của hình quạt tròn, tức là $OA = 4dm$

Chọn A

Thể tích của hình nón $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (16 - h^2) h$ với $0 < h < 4$

Ta có $V'(h) = \frac{1}{3} \pi (16 - 3h^2) \Rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

h	0	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	4	
$V'(h)$		+	0	-
$V(h)$			$\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$	
	0			0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra thể tích lớn nhất của hình nón là $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$.

Bài tập 6. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất

A. $R = \frac{1}{2} m; h = 8m$

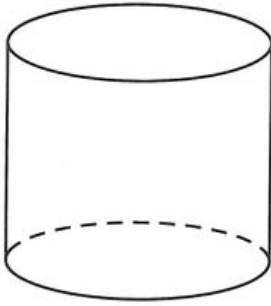
B. $R = 1m; h = 2m$

C. $R = 2m; h = \frac{1}{2} m$

D. $R = 4m; h = \frac{1}{5} m$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Từ giả thiết ta có $V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng phi là $S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi \left(R^2 + \frac{2}{R} \right)$

Xét hàm số $f(R) = R^2 + \frac{2}{R}$ với $R \in (0; +\infty)$

Ta có $f'(R) = 2R - \frac{2}{R^2} = \frac{2(R^3 - 1)}{R^2}$

$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = 1$

Bảng biến thiên

R	0	1	$+\infty$	
$f'(R)$		-	0	+
$f(R)$	$+\infty$		3	$+\infty$

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R = 1 \Rightarrow h = 2$

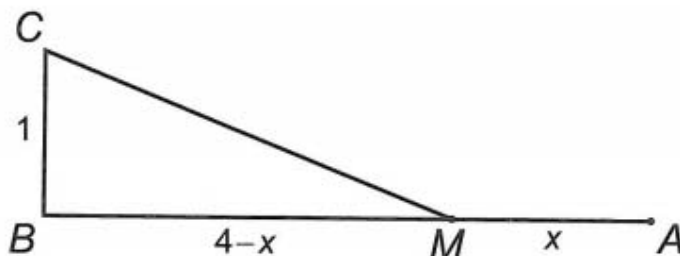
Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R = 1m; h = 2m$.

Bài tập 7. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

A. 120 triệu đồng B. 164,92 triệu đồng C. 114,64 triệu đồng D. 106,25 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi M là điểm trên đoạn thẳng AB để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm C

$$\text{Đặt } AM = x \Rightarrow BM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1 + (4 - x)^2} = \sqrt{17 - 8x + x^2}, x \in [0; 4]$$

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là $y = x \cdot 20 + 40\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (đơn vị: triệu đồng)

$$y' = 20 + 40 \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 20 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17} + 2(x - 4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 17} = 2(4 - x) \Leftrightarrow x = \frac{12 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có } y\left(\frac{12 - \sqrt{3}}{3}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120$$

Do đó chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc là 114,64 triệu đồng.

Dạng 12. Tìm m để $F(x; m) = 0$ có nghiệm trên tập D

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Cô lập tham số m và đưa về dạng $f(x) = g(m)$

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ sao cho đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$

Bước 4. Kết luận

Chú ý:

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_D f(x) \leq g(m) \leq \max_D f(x)$$

+) Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện sao cho đường thẳng $y = g(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt

2. Bài tập

Bài tập 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để phương trình

$$2\sqrt{x+1} = x + m \text{ có nghiệm thực?}$$

A. 100

B. 101

C. 102

D. 103

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $x \geq -1$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$$

Ta được phương trình $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0$

$$f'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	1	2	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi $m \leq 2 \Rightarrow -100 \leq m \leq 2$

Vậy có 103 giá trị nguyên m thỏa mãn

Bài tập 2. Cho phương trình $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2 + 1}) - x^2 + 2x = 0$ (m là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$ là đoạn $[a; b]$. Giá trị của biểu thức $T = -a + 2b$ là

A. $T = 4$

B. $T = \frac{7}{2}$

C. $T = 3$

D. $T = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

Xét hàm số $t(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ trên đoạn $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$

$$t'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Vì } t(0) = \sqrt{2}; t(1) = 1; t(1 + 2\sqrt{2}) = 3 \text{ nên } t \in [1; 3]$$

Yêu cầu của bài toán tương đương với phương trình $m(t+1) = t^2 - 2$ có nghiệm thuộc đoạn

$$[1; 3] \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{t+1} \text{ có nghiệm thuộc đoạn } [1; 3] \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t+1}$ trên đoạn $[1; 3]$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; 3] \text{ khi hàm số đồng biến trên đoạn } [1; 3]$$

Để phương trình (1) đã cho có nghiệm thì $\min_{[1;3]} f(t) \leq m \leq \max_{[1;3]} f(t)$

$$\Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(3) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{1}{2}; b = \frac{7}{4} \Rightarrow T = 4.$$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = m \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$ có nghiệm là m_0

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in (-20; -15)$

B. $m_0 \in (-12; -8)$

C. $m_0 \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$

D. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x^4 + y^4 = m & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $y = 2 - x$ thay vào (2) ta được $(2) \Rightarrow x^4 + (2 - x)^4 = m \quad (3)$

Xét hàm số $f(x) = x^4 + (2 - x)^4$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4(2 - x)^3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = (2 - x)^3 \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Hệ đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm thực

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \geq 2 \Rightarrow m_0 = 2 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Dạng 13. Tìm m để bất phương trình $F(x; m) > 0; F(x; m) \geq 0; F(x; m) < 0; F(x; m) \leq 0$ có nghiệm trên tập D

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Cô lập tham số m và đưa về dạng $g(m) > f(x)$ hoặc $g(m) \geq f(x)$ hoặc $g(m) \leq f(x)$ hoặc $g(m) < f(x)$

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m

Bước 4. Kết luận

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất trên D thì

+) Bất phương trình $g(m) \leq f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow g(m) \leq \max_D f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \leq f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \leq \min_D f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \geq f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow g(m) \geq \min_D f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \geq f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \geq \max_D f(x)$

2. Bài tập

Bài tập 1: Các giá trị của tham số m để bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} - m \geq 0$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$

là

A. $m < 5$

B. $m \leq -3$

C. $m \leq 1$

D. $m \geq 3$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Bất phương trình đã cho tương đương với $x + \frac{4}{x-1} \geq m$

Xét hàm số $y = x + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \notin (-\infty; 1) \\ x = -1 \in (-\infty; 1) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-3	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, để bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} - m \geq 0$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$ thì $m \leq -3$.

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình

$x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số các phần tử của tập S là

A. 1

B. 2020

C. 2019

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, với $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Bất phương trình đã cho trở thành $t^3 - t^2 + 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq t^3 - t^2 + 1$ (1)

Yêu cầu của bài toán tương đương với bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t \in [0; 1]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + 1 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 2t$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \notin (0; 1) \\ t = \frac{2}{3} \in (0; 1) \end{cases}$$

Vì $f(0) = f(1) = 1; f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27}$ nên $\max_{[0; 1]} f(t) = 1$

Do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t \in [0; 1]$ khi và chỉ khi $m \geq 1$

Mặt khác m là số nguyên thuộc $[0; 2019]$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ.

Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm

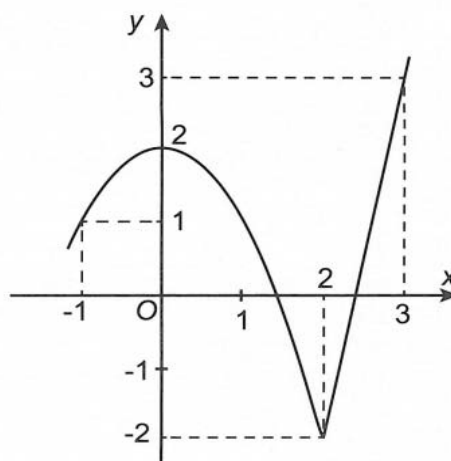
thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

A. $m \leq 7$

B. $m \geq 7$

C. $m \leq 2\sqrt{2} - 2$

D. $m \geq 2\sqrt{2} - 2$



Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hàm số $P = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1; 3]$

Ta có $P^2 = 8 + 2\sqrt{(x+1)(7-x)} \leq 8 + (x+1) + (7-x) = 16 \Rightarrow P \leq 4$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$

Suy ra $\max_{[-1;3]} P = 4$ tại $x = 3$ (1)

Mặt khác dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\max_{[-1;3]} f(x) = 3$ tại $x = 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\max_{[-1;3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) = 7$ tại $x = 3$

Vậy bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

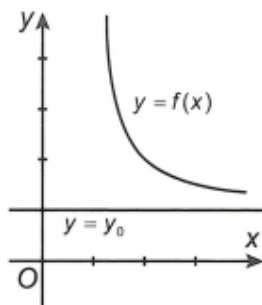
$m \leq \max_{[-1;3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) \Leftrightarrow m \leq 7.$

BÀI 4. TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \text{ nếu } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

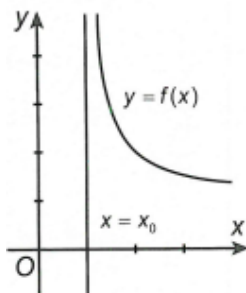


Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định các đường tiệm cận dựa vào định nghĩa

1. Phương pháp giải

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 2 (đvdt)

B. 3 (đvdt)

C. 1 (đvdt)

D. 4 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$. Khi đó hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ có các kích thước là 1 và 2 nên có diện tích $S = 1.2 = 2$ (đvdt)

Bài tập 2: Biết các đường tiệm cận của đường cong $(C): y = \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8

B. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4

C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25

D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \setminus \{5\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = 7 \Rightarrow y = 7$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty \Rightarrow x = 5$ là tiệm cận đứng của (C)

Vậy đồ thị có ba đường tiệm cận là $y = 5; y = 7; x = 5$ cùng với trục tung tạo thành một hình chữ nhật có kích thước 2×5 nên có diện tích bằng 10.

Dạng 2: Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Để tồn tại các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$

Khi đó phương trình các đường tiệm cận là

+ Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$

+ Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-1)x+1}{x-m}$ có đường tiệm cận ngang $y = 3$ là

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là

$$-m(2m-1)-1 \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m + 1 \neq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$$

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = 2m - 1$ nên có $2m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 2: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{mx-1}$ có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $\begin{cases} m \neq 0 \\ -1+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Bài tập 3. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$

B. $\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

D. $\{0\}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng là

$$\begin{cases} m = 0 \\ -1+3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$. Biết đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(0; -1)$ và có đường tiệm cận ngang là $y = 1$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 1

B. 0

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $a - b \neq 0$

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ nên $b = -1$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = a \Rightarrow a = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a + b = 0$

Bài tập 5: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-3)x + a + 2019}{x - (b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và

trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a + b$ bằng

A. 3

B. -3

C. 6

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-(a-3)(b+3) - (a+2019) \neq 0$

Phương trình các đường tiệm cận là

$$\begin{cases} x = b+3 \\ y = a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+3 = 0 \\ a-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $a + b = 0$

Bài tập 6: Giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x+m}$ đi qua điểm

$A(1; 2)$ là

A. $m = 4$

B. $m = -2$

C. $m = -4$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn)

Bài tập 7: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng nào dưới đây?

A. $x + 2y = 0$

B. $2x + y = 0$

C. $x - 2y = 0$

D. $y = 2x$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $-2m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 2m; y = m$ nên tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(2m; m)$ thuộc đường thẳng $x = 2y$

Bài tập 8: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung là

A. $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$

B. $m > 0$

C. $m > 0$ và $m \neq \frac{3}{4}$

D. $m < 0$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-4m + 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4}$

Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = m$

Để tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung thì $m > 0$

Vậy điều kiện cần tìm là
$$\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Dạng 3: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ

1. Phương pháp giải

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ với A là số thực khác 0 và $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

- Đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

- Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của $f(x)$ hay $f(x_0) = 0$

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là các đa thức bậc khác 0.

- Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang là bậc $f(x) \leq$ bậc $g(x)$.

- Điều kiện để đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ là x_0 là nghiệm của $g(x)$ nhưng không là nghiệm của $f(x)$ hoặc x_0 là nghiệm bội n của $g(x)$, đồng thời là nghiệm bội m của $f(x)$ và $m < n$

2. Bài tập

Bài tập 1: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + 1}{2x + 1}$ có tiệm cận đứng là

A. $m = 8$

B. $m = 0$

C. $m \neq 4$

D. $m \neq -8$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Đặt $g(x) = mx^2 - 2x + 1$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của $g(x)$

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4} + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$$

Bài tập 2: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+n+6}$ (m, n là tham số) nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng, giá trị của $m+n$ bằng

A. 6

B. 10

C. -4

D. -7

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2 - 2mx + n + 6 \neq 0$. Đặt $g(x) = x^2 - 2mx + n + 6$

Do $x=1$ là nghiệm của $f(x) = x-1$ nên đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng thì $x=1$ phải là nghiệm kép của phương trình

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = -2m + n + 7 = 0 \\ \Delta' = m^2 - n - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m - 7 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -5 \end{cases}$$

Vậy $m+n = -4$.

Bài tập 3: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận.

Giá trị $m+n$ bằng

A. 8

B. 9

C. 6

D. -6

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x^2 + mx + n - 6 \neq 0$

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2m - n$

$$\Rightarrow 2m - n = 0 \quad (1)$$

Đặt $f(x) = (2m-n)x^2 + mx + 1$ và $g(x) = x^2 + mx + n - 6$

Nhận thấy $f(0) \neq 0$ với mọi m, n nên đồ thị nhận trục tung $x=0$ là tiệm cận đứng thì $g(0) = 0 \Leftrightarrow n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$. Kết hợp với (1) suy ra $m = 3$.

Vậy $m+n = 9$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) (a, b là các số thực dương và $ab = 4$). Biết rằng

(C) có tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng một tiệm cận đứng. Giá trị của tổng $T = 3a + b - 24c$ bằng

A. 8

B. 9

C. 6

D. 11

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $4x^2 + bx + 9 \neq 0$

Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} = c$

Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình $4x^2 + bx + 9 = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$ và không là nghiệm của $ax^2 + bx + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 12. \text{ Vì } b > 0 \text{ nên } b = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{12}$$

Thử lại ta có hàm số $y = \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 1}{4x^2 + 12x - 9}$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } T = 3 \cdot \frac{1}{3} + 12 - 24 \cdot \frac{1}{12} = 11$$

Trường hợp 2: $4x^2 + bx + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và một trong hai nghiệm thỏa mãn $ax^2 + bx + 1 = 0$. Điều này không xảy ra vì $ab = 4$.

Chú ý: $a, b > 0$ nên mẫu số (nếu có) hai nghiệm đều âm, tử số hai nghiệm trái dấu.

Dạng 4 Tiệm cận của đồ thị hàm số vô tỷ

Cho hàm số vô tỷ $y = f(x)$

- Tìm tập xác định D của hàm số.

- Để tồn tại tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì trong tập xác định D của hàm số phải chứa ít nhất một trong hai kí hiệu $-\infty$ hoặc $+\infty$ và tồn tại ít nhất một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn.

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}$ có tiệm cận ngang $y = -1$

Giá trị $2a - b^3$ bằng

A. 56

B. -56

C. -72

D. 72

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $ax^2 + bx + 4 \geq 0$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $a > 0$

Khi đó, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-4)x^2 + bx + 4}{\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2x} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ \frac{b}{-\sqrt{a-2}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}. \text{ Vậy } 2a-b^3 = -56$$

Chú ý: Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$ thì bậc tử phải bằng bậc mẫu nên phải có $a-4=0$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{b}{-\sqrt{a-2}}$

Bài tập 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$?

A. 0

B. Vô số

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{m+1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{m-1}{2}$

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} = 2 \\ \frac{m-1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 5 \end{cases}$

Dạng 5: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{A}{g(x)}$ với A là số thực khác 0, $g(x)$ xác định theo $f(x)$

1. Phương pháp giải

- Xác định tiệm cận đứng:

+ Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{g(x)}$ là số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

+ Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ để xác định số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ để suy ra số đường tiệm cận đứng.

- Xác định tiệm cận ngang: dựa vào nhánh vô tận của đồ thị, bảng biến thiên của hàm số để xác định.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	-2	3

Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có bốn đường tiệm cận.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3+x)+3}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = x^3 + x$, ta có khi $x \rightarrow -\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$ và khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow +\infty$.

Mặt khác ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên với mọi $t \in \mathbb{R}$ phương trình $x^3 + x = t$ có duy nhất một nghiệm x .

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình

$$f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -3.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$

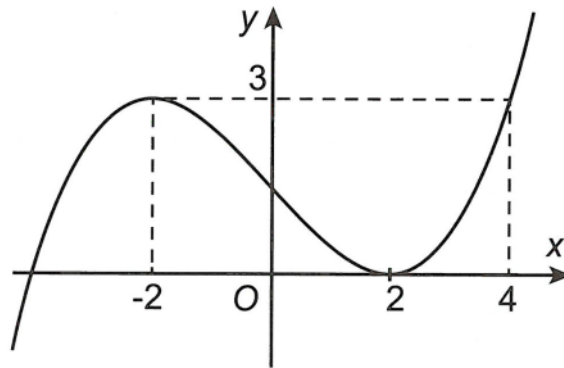
có một tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(t) + 3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(t) + 3} = 0$ nên đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = 4 - x^2$, ta có khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(t) - 3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$\text{Mặt khác } f(4 - x^2) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(4 - x^2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = -2 \\ 4 - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Dạng 6: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{\varphi(x)}{g(x)}$ với $\varphi(x)$ là một biểu thức theo x , $g(x)$ là biểu thức theo $f(x)$

1. Phương pháp giải

- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ tìm nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ và xác định biểu thức $g(x)$.

- Rút gọn biểu thức $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ và tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

Chú ý:

- Điều kiện tồn tại của $\varphi(x)$.

- Sử dụng tính chất nếu đa thức $g(x)$ có nghiệm là $x = x_0$ thì $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$, ở đó $g_1(x)$ là một đa thức.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu

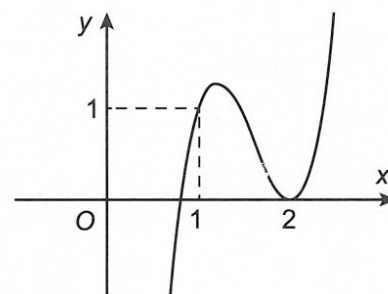
đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < 1$ (loại) và $x = 2$ (nghiệm kép).

- Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = x_2 \in (1; 2)$, $x = x_3 > 2$.

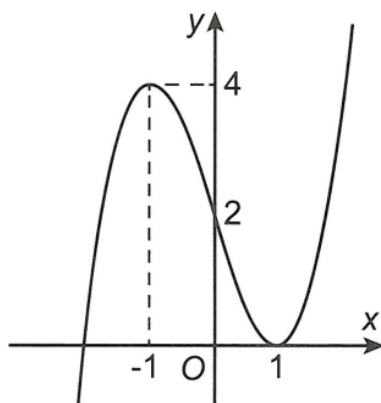
Khi đó

$$f^2(x) - f(x) = f(x)[f(x) - 1] = a^2(x - x_1)(x - 2)^2(x - 1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{Suy ra } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)},$$

trong đó $x_1 < 1$, $x_2 \in (1; 2)$, $x_3 > 2$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba tiệm cận đứng là $x = 2$; $x = x_2$; $x = x_3$.

Bài tập 2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Điều kiện xác định } f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = x_1 < 0$ và $x = 1$ (nghiệm kép).

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \in (x_1; -1) \\ x = 0 \\ x = x_3 > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy biểu thức } f^2(x) - 2f(x) = f(x)[f(x) - 2]$$

$$= a^2(x - x_1)(x - 1)^2 \cdot x(x - x_2)(x - x_3).$$

$$\text{Khi đó ta có } g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)} = \frac{1}{a^2(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}.$$

Vậy đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận đứng.

Bài tập 3. Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-3)(x^2-4x+3)}{f'(x)[f(x)-2]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $\begin{cases} f'(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$.

Ta có $(x-3)(x^2-4x+3) = (x-3)^2(x-1)$; $f'(x) \cdot [f(x)-2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 1$; $x = 2$ (nghiệm kép); $x = 3$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f'(x) = a(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$ với $a > 0$.

$f(x) = 2$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = x_1 < 1 \\ x = x_2 \in (2; 3) \end{cases}$ nên $f(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdot p(x)$ với $p(x)$ là một đa thức

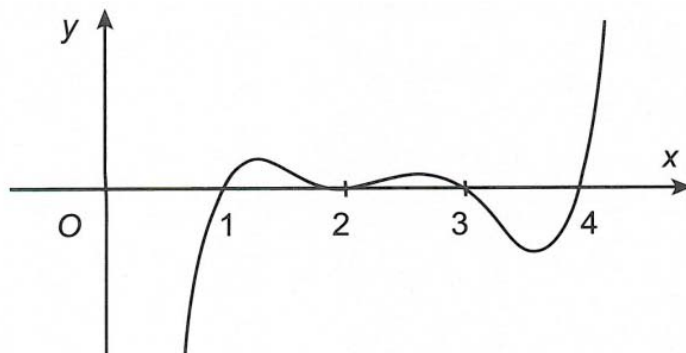
bậc 4 và $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $g(x) = \frac{1}{a(x-2)^2(x-x_1)(x-x_2) \cdot p(x)}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Chú ý: Do $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 nên $f'(x)$ là hàm đa thức bậc 5.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 thỏa mãn $3f(1) - 2 < 0$ và $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

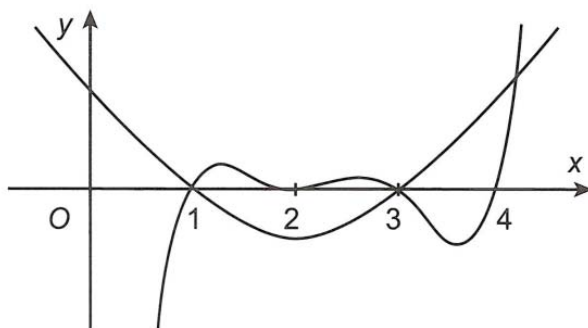
Chọn B.

Đặt $h(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x$. Điều kiện $h(x) \neq 0$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = x^2 - 1$.

Đặt $t = x + 2$, ta được $f'(t) = t^2 - 4t + 3$. (*)

Vẽ đồ thị hàm số $y = t^2 - 4t + 3$ vào cùng hệ trục có đồ thị hàm số $y = f'(t)$ ta được hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị ta thấy (*) có ba nghiệm là $t = 1$; $t = 3$; $t = a > 4$.

Suy ra phương trình $h'(x) = 0$ có nghiệm đơn $x = -1$; $x = 1$; $x = a - 2 = b > 2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	b	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(-1)$	$h(1)$	$h(b)$	$+\infty$

Vì $h(-1) = 3f(1) - 2 < 0$ và $h(b) = 3f(a) - (a-2)^3 + 3(a-2) = 3f(a) - a^3 + 3a + 6a^2 - 12a + 2 > 0$

với mọi $a > 4$ nên phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < -1$; $x = x_2 \in (-1; 1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai tiệm cận đứng.

Dạng 7: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức

1. Phương pháp giải

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc $f(x) \leq$ bậc $g(x)$. Khi đó đồ

thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận đứng $x = x_0$

Trường hợp 1: $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Trường hợp 2: $x = x_0$ là nghiệm bội n của phương trình $g(x) = 0$, đồng thời là nghiệm bội m của phương trình $f(x) = 0$ thì $n > m$.

Ta có $f(x) = (x - x_0)^m \cdot f_1(x)$ với $f_1(x)$ không có nghiệm $x = x_0$ và $g(x) = (x - x_0)^n \cdot g_1(x)$ với $g_1(x)$ không có nghiệm $x = x_0$. Khi đó

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0)^m \cdot f_1(x)}{(x - x_0)^n \cdot g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{(x - x_0)^{n-m} \cdot g_1(x)}$$

nên $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có ba tiệm cận. Tổng các giá trị của tập S bằng

A. 6.

B. 19.

C. 3.

D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $x^2 + 2x + m^2 - 3m \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Số đường tiệm cận đứng của hàm số đã cho là số nghiệm khác -2 của phương trình $x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ nên để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 + 2x + m^2 - 3m}$ có ba tiệm cận thì phương trình $x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 + 3m > 0 \\ m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < m < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ m \neq 0, m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị của tập S bằng 3.

Bài tập 2. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

A. -5

B. 4

C. -1

D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x \neq 1; x \neq 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đồ thị luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 1$ với mọi m .

$$\text{Ta có } x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Xét $f(x) = x^2 + m$. Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $f(x)$ phải nhận $x = 1$ hoặc

$$x = 2 \text{ là nghiệm hay } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

• Với $m = -1$, ta có hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x+1}{x-2}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = 2; y = 1$ (thỏa mãn).

• Với $m = -4$, ta có hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x+2}{x-1}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = 1; y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $S = \{-1; -4\}$ nên tổng các giá trị m bằng -5.

Bài tập 3. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - mx - m + 5}$ không có đường tiệm cận đứng

A. -12.

B. 12.

C. 15.

D. -15.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $x^2 - mx - m + 5 \neq 0$.

Đặt $f(x) = x^2 - 3x + 2, g(x) = x^2 - mx - m + 5$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ là nghiệm đơn của tử thức.

Để đồ thị không có tiệm cận đứng, ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1. Phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm $\Delta = m^2 + 4m - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-6; -5; \dots; 2\}$

Trường hợp 2. $f(x) = 0$ nhận đồng thời $x = 1$ và $x = 2$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m - m + 5 = 0 \\ 4 - 2m - m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Thử lại, ta có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = 1$, khi đó đồ thị hàm số $y = 1$ không có tiệm cận $\Rightarrow$ loại.

Vậy các giá trị nguyên của m để đồ thị không có tiệm cận đứng là $m \in \{-6; -5; \dots; 2; 3\}$ nên tổng bằng -15.

Bài tập 4. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có

đúng một đường tiệm cận là

A. $\{-1; 0\}$

B. $\{0\}$

C. $(-\infty; -1) \cup \{0\}$

D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $\begin{cases} mx^2 - 2x + 1 \neq 0 \\ 4x^2 + 4mx + 1 \neq 0 \end{cases}$.

- Với $m = 0$, hàm số có dạng $y = \frac{-1}{4x^2 + 1}$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

- Với $m \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận thì

+ *Trường hợp 1.* Hai phương trình $f(x) = mx^2 - 2x + 1 = 0$ và $g(x) = 4x^2 + 4mx + 1 = 0$ cùng vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm

+ Trường hợp 2. Phương trình $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó

$x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $f(x) = 0$ hoặc $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{4} = 0 \\ 1 + 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Do $m \neq 0$ nên $m = -1$.

Thử lại, với $m = -1$ thì hàm số là

$$y = \frac{2x - 1}{(-x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 4x + 1)} = \frac{1}{(-x^2 - 2x + 1)(2x - 1)}$$

Khi đó, đồ thị hàm số đã cho có các tiệm cận đứng là $x = -1 \pm \sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy tập hợp tham số m cần tìm là $m \in \{0\}$.

Dạng 8: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn thức

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xác định các đường tiệm cận.

- Tiệm cận ngang

+ Điều kiện cần: Để đồ thị hàm số chứa căn thức có tiệm cận ngang thì trong tập xác định phải có các khoảng $(-\infty; a)$ hoặc $(b; +\infty)$.

+ Điều kiện đủ là: Tồn tại một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = a$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = b$ thì đường thẳng $y = a$ hoặc $y = b$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

* Tiệm cận đứng: Tồn tại giá trị x_0 để một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3}$ có đúng ba tiệm cận là

A. $m \geq \frac{4}{9}$

B. $m > 0$

C. $0 < m < \frac{4}{9}$

D. $\forall m \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $\begin{cases} mx^2 - 4 \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $m > 0$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = \left[-\infty; -\frac{2}{\sqrt{m}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{m}}; +\infty\right] \setminus \{3\}$. Nếu $m \leq 0$ thì $mx^2 - 4 < 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3} = \sqrt{m}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3} = -\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số

có hai tiệm cận ngang là $y = \pm\sqrt{m}$

Để tồn tại tiệm cận đứng $x = 3$ thì $3 \geq \frac{2}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{9}$.

Kết hợp lại ta có $m \geq \frac{4}{9}$.

Bài tập 2. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

- A. $m \in \mathbb{R}$ B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 + (m+1)x - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3; x \geq 0 \\ x \neq 1; x \neq -m-2 \end{cases}$.

Tập xác định $D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1; -m-2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0, \forall m \in D \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phải có một đường tiệm cận đứng.

- Với $m = -3$ thì $D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Khi đó, ta có hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{(x-1)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow m = -3$ thỏa mãn.

- Với $m \neq -3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-1}{4(m+3)}$$

$\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\text{Để đường } x=-m-2 \text{ là tiệm cận đứng thì } \begin{cases} -m-2 \leq -3 \\ -m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow (-m-2)^+} y = \pm\infty \text{ (tùy theo } m) \text{ nên } x=-m-2 \text{ là tiệm cận đứng khi } \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp cả hai trường hợp, ta có } \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là

A. $m > 1$

B. $0 < m < 1$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trường hợp 1. Với $m = 0$ thì hàm số là $y = x + 1$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang. Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m < 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{-m}}; \frac{1}{\sqrt{-m}}\right]$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y \Rightarrow$ đồ thị không có tiệm cận ngang.

Do đó $m < 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m > 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = +\infty.$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-m)x^2 - 1}{x - \sqrt{mx^2 + 1}}.$$

$$\text{Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì } 1-m=0 \Leftrightarrow m=1.$$

Bài tập 4. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có bốn

đường tiệm cận phân biệt là

A. $(0; +\infty)$

B. $\left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$

C. $\left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$

D. $\left(\frac{8}{9}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện } mx^2 - 3mx + 2 > 0. (*)$$

Trường hợp 1. Với $m = 0$, ta có $y = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$ nên đồ thị không có đường tiệm cận.

Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m < 0$.

Phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$ có $\Delta = 9m^2 - 8m > 0, \forall m < 0$ nên $mx^2 - 3mx + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$ (với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$) nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, chỉ có tối đa hai tiệm cận đứng

Nếu $\Delta \leq 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \emptyset$

Do đó $m < 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m > 0$.

Xét phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{8}{9}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $mx^2 - 3mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng mà chỉ có hai tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$ vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \frac{-1}{\sqrt{m}}$.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$.

Khi đó, hàm số trở thành $y = \frac{3(x-2)}{\sqrt{8x^2 - 24x + 18}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{2}|2x-3|}$ nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m > 0 \Rightarrow m > \frac{8}{9}$.

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Để đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng.

Vì $x = 1$ là nghiệm của tử $f(x) = x - 1$ nên để đồ thị có hai tiệm cận đứng thì $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $\begin{cases} m > \frac{8}{9} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$, do phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm nữa $x = a \neq 1$ thì $g(x) = m(x-1).(x-a)$. Khi đó hàm số có dạng $y = \frac{x-1}{\sqrt{m(x-1).(x-a)}}$ nên chỉ có một tiệm cận

đúng là $x = a$.

Bài tập 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - (1-m)x + 2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - (1-m)x + 2m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 - (1-m)x + 2m$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq -1$.

Trường hợp 1. $f(x)$ có nghiệm $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Khi đó hàm số có dạng $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$ có tập xác định là $D = (4; +\infty)$ nên chỉ có một tiệm cận đứng.

$$\text{Trường hợp 2. } f(x) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - 8m > 0 \\ 2m + 1 - m + 1 > 0 \\ 1 - m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 - 2\sqrt{6} \\ m > 5 + 2\sqrt{6} \\ m > -2 \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow -2 < m < 5 - 2\sqrt{6}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1; m = 0$

Dạng 9: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm ẩn

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	1 3	$-\infty$ 2	-1	

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $f(x) \neq m$.

Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = m$ phải có nghiệm.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có đúng hai nghiệm là $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

với $-1 < a < 1 < b$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	a	1	b	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+	0	-
$f(x)$						

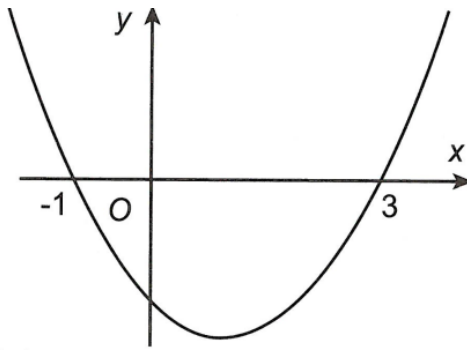
Suy ra phương trình $y = f(x)$ có nhiều nhất là ba nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất ba đường tiệm cận đứng.

Bài tập 2. Cho hàm số $g(x) = \frac{2020}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$. ($m, n, p, q \in \mathbb{R}, m \neq 0$),

$h(0) = 0$. Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

$$f(-1) < 20.$$



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x) - 20}{f(x) - m}$ (m là tham số thực) có bốn tiệm cận khi và chỉ khi

- A. $m < f(3)$ B. $f(3) < m < f(-1)$ C. $m > f(-1)$ D. $f(3) \leq m \leq f(-1)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $f(x) \neq m$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên hàm số $f(x)$ là

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

The graph shows a function $f(x)$ with a local maximum at $x = -1$ and a local minimum at $x = 3$. The curve starts from $-\infty$ at $x = -\infty$, increases to $f(-1)$, decreases to $f(3)$, and then increases towards $+\infty$ as x approaches $+\infty$.

- Nếu $m = 20$ thì đồ thị hàm số không có đủ bốn tiệm cận.

- Nếu $m \neq 20$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - 20}{f(x) - m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn tiệm cận khi phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow f(3) < m < f(-1)$.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + x}}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m}$ có tiệm cận

ngang nằm bên dưới đường thẳng $y = -1$.

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq -3; x \geq 0 \\ 0 \leq f(x) \leq 2 \\ \sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m \neq 0 \end{cases}$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $x \rightarrow +\infty$ thì $2f(x) - f^2(x) \rightarrow -\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x) - f^2(x)}$ không có nghĩa khi x đủ lớn. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2f(x) - f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) - f^2(x)]} = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1\right)} = -\frac{3}{2}$$

Từ đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{2m+2}$ với $m \neq -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y = -1$ thì

$$\frac{-3}{2m+2} < -1 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Dạng 10: Bài toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0, c \neq 0$.

Khi đó, phương trình đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$.

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.

- Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ và cũng là tâm đối xứng của đồ thị.

- Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có các kích thước là $\left|-\frac{d}{c}\right|$ và $\left|\frac{a}{c}\right|$ nên có chu vi là

$$C = 2 \left(\left| \frac{d}{c} \right| + \left| \frac{a}{c} \right| \right) \text{ và diện tích là } S = \left| \frac{ad}{c^2} \right|$$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm

$A(-1; \sqrt{2})$ là

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \sqrt{2}$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $ad - bc = m^2 + 2 \neq 0, \forall m$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{m}{2}$.

Để tiệm cận đứng đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ thì $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 2. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3 (đvdt)

B. 6 (đvdt)

C. 1 (đvdt)

D. 2 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 1; y = 2$.

Do đó hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật diện tích bằng $1.2 = 2$ (đvdt).

Bài tập 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8 là

A. $m \neq \pm 2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \pm \frac{1}{2}$.

D. $m = \pm 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó phương trình hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 2m$.

Theo công thức tính diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai tiệm cận và hai trục tọa độ, ta có $S = |2m|$.

Theo giả thiết thì $|2m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Bài tập 4. Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ với $a \neq \frac{1}{2}$. Tất cả các giá trị thực dương của tham số a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 4 là

- A. $a = 6$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ có hai đường tiệm cận là $x = -1$ và $y = 2$.

Điều kiện để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ có tiệm cận là $2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$.

Với điều kiện đó thì đồ thị hàm số $g(x)$ có hai đường tiệm cận là $x = -2$ và $y = a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước là 1 và $|a - 2|$.

Theo giả thiết, ta có $|a - 2| \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$.

Vì $a > 0$ nên $a = 6$.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Hai đường tiệm cận của (C) cắt nhau tại I . Đường thẳng $d: y = 2x + b$ (b là tham số thực) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Biết $b < 0$ và diện tích tam giác AIB bằng $\frac{15}{4}$. Giá trị của b bằng

- A. -1. B. -3. C. -2. D. -4

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có tọa độ điểm $I(1;1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ f(x) = 2x^2 + (b-3)x - b - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 + 2b + 17 > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$.

Khi đó $A(x_1; 2x_1 + b)$, $B(x_2; 2x_2 + b)$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (x_1 - 1; 2x_1 + b - 1)$; $\overrightarrow{IB} = (x_2 - 1; 2x_2 + b - 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích tam giác } IAB \text{ là } S &= \frac{1}{2} |(x_1 - 1)(2x_2 + b - 1) - (x_2 - 1)(2x_1 + b - 1)| \\ &= \frac{1}{2} |(b+1)(x_1 - x_2)| = \frac{1}{2} |b+1| \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 2b + 17}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Theo giả thiết thì } \frac{|b+1|\sqrt{b^2 + 2b + 17}}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 [(b+1)^2 + 16] = 225 \Leftrightarrow (b+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do $b < 0$ nên $b = -4$.

Chú ý:

- Với tam giác ABC có

$$\overrightarrow{AB} = (a; b); \overrightarrow{AC} = (c; d)$$

$$\text{thì } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |ad - bc|.$$

- Nếu phương trình bậc

hai $ax^2 + bx + c = 0$ có

hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ thì } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Bài tập 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \text{ và } (x+1)^2 + y^2 = 1. \text{ Biết đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{x+c} \text{ đi qua tâm của } (C_1), \text{ đi qua}$$

tâm của (C_2) và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) . Tổng $a+b+c$ là

A. 5.

B. 8.

C. 2.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;2)$; $R_1 = 1$ và (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$; $R_2 = 1$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $ac - b \neq 0$.

$$\text{Gọi } (C) \text{ là đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{x+c}.$$

Khi đó ta có các đường tiệm cận (C) là $x = -c$ và $y = a$.

$$\text{Ta có } I_1, I_2 \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{c+1} = 2 \\ \frac{-a+b}{c-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq \pm 1 \\ a = b \\ a = c+1 \end{cases}.$$

$$\text{Đường thẳng } x = -c \text{ tiếp xúc với cả } (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ nên } \begin{cases} |c+1| = 1 \\ |c-1| = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

Khi đó tiệm cận ngang của (C) là $y = 1$ tiếp xúc với cả (C_1) , (C_2) thỏa mãn bài toán.

$$\text{Vậy } a = b = 1; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 2.$$

Dạng 11: Bài toán về khoảng cách từ điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đến các đường tiệm cận

1. Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có các đường tiệm cận là $\Delta_1 : x = -\frac{d}{c}$ và $\Delta_2 : y = \frac{a}{c}$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kì trên đồ thị.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right|$ và

$$d_2 = d(M; \Delta_2) = \left|\frac{ax_0+b}{cx_0+d} - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|.$$

Vậy ta luôn có $d_1.d_2 = \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right| = K$ là một số không đổi.

Khi đó $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2\sqrt{K}$ nên $\min(d_1 + d_2) = 2\sqrt{K}$ khi $d_1 = d_2$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \Leftrightarrow (cx_0+d)^2 = |ad-bc|.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi M là giao điểm của đồ thị $y = \frac{2x-1}{2x+3}$ với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 4. B. 2. C. 8. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left|\frac{6+2}{4}\right| = 2$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của d bằng

- A. 10. B. 6. C. 2. D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left| \frac{-4+3}{1} \right| = 1$.

Khi đó $d = d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2$.

Vậy $d_{\min} = 2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C) . Điểm M có hoành độ dương, nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C) . Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

- A. 5. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{3x_0-1}{x_0-3}\right) \in (C) \ (x_0 > 0; x_0 \neq 3)$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = 3$, tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 3$ và tâm đối xứng $I(3;3)$.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = |x_0 - 3|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \frac{8}{|x_0 - 3|}$.

Theo giả thiết $d_1 = 2d_2 \Leftrightarrow |x_0 - 3| = \frac{16}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 7 \text{ (do } x_0 > 0 \text{)}.$

Vậy $M(7;5) \Rightarrow IM = 2\sqrt{5}$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \frac{4x-5}{x+1}$ có đồ thị (H) . Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0$ là một điểm thuộc đồ thị

(H) thỏa mãn tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) bằng 6. Giá trị của biểu thức

$S = (x_0 + y_0)^2$ bằng

- A. 4. B. 0. C. 9. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = -1$ và tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 4$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{4x_0-5}{x_0+1}\right) \in (H), x_0 \neq -1, x_0 < 0$.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = |x_0 + 1|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \frac{9}{|x_0 + 1|} \Rightarrow d_1.d_2 = 9$.

Ta có $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} = 6$ nên $\min(d_1 + d_2) = 6$ khi

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow |x_0 + 1| = \frac{9}{|x_0 + 1|} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -4 \end{cases}.$$

Do $x_0 < 0$ nên $M(-4; 7) \Rightarrow S = 9$.

Dạng 12: Bài toán liên quan giữa tiếp tuyến và tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) có

các đường tiệm cận là $\Delta_1 : x = -\frac{d}{c}$, $\Delta_2 : y = \frac{a}{c}$ và

$$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right).$$

Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kỳ trên đồ thị.

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M là

$$d : y = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}(x-x_0) + \frac{ax_0+b}{cx_0+d}.$$

Gọi $A = d \cap \Delta_1$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc-ad+acx_0}{c(cx_0+d)}\right) \Rightarrow IA = \left|\frac{2(ad-bc)}{c(cx_0+d)}\right|.$$

$B = d \cap \Delta_2$

$$\Rightarrow B\left(2x_0 + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) \Rightarrow IB = \left|\frac{2(cx_0+d)}{c}\right|.$$

Do đó $IA \cdot IB = \frac{4|ad-bc|}{c^2} = K$ là một số không đổi.

Do ΔIAB vuông tại I nên

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{2|ad-bc|}{c^2} = \frac{1}{2} K$ là một số không đổi.

Ngoài ra, ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases}$ nên M luôn là

trung điểm của AB .

Ta có các dạng câu hỏi thường gặp sau

Câu 1: Tính diện tích tam giác IAB .

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{2|ad-bc|}{c^2} = \frac{1}{2} K.$$

Câu 2: Tìm điểm $M \in (C)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất.

$$AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{2K}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

Ta có

$$IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2} AB \geq \sqrt{\frac{K}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

$$\text{Ta có } r = \frac{S}{p} = \frac{K}{IA + IB + AB}$$

Vậy r lớn nhất khi $IA + IB + AB$ nhỏ nhất và bằng $2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu của I lên d , ta có

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = \frac{2}{K} \Rightarrow IH \leq \sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA = IB$ nên $\triangle IAB$ vuông cân tại I . Gọi α là góc giữa tiếp tuyến d và tiệm cận ngang Δ_2 thì $\alpha = (d; \Delta_2) = (d; Ox) = 45^\circ$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm \tan 45^\circ = \pm 1$.

Vậy các bài toán trong câu 2 ta quy về bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ khi biết hệ số góc } k = 1 \text{ hoặc } k = -1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng

- A. 4. B. $2 + \sqrt{2}$. C. $4 + 2\sqrt{2}$. D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng công thức, ta có $S = \frac{2|-2+1|}{1} = 2$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$ (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số (C) .

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C) đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến d tại $M \in (C)$ bất kỳ với hai đường tiệm cận.

$$\text{Khi đó ta có } IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = \frac{4|-3 + 2|}{4} = 1.$$

Gọi H là hình chiếu của I trên d , ta có $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = 2 \Rightarrow IH \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $IH_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) .

Biết tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, diện tích lớn nhất của tam giác tạo bởi Δ và hai trục tọa độ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(28; 29)$.

B. $(29; 30)$.

C. $(27; 28)$.

D. $(26; 27)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$.

Theo lý thuyết thì để diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất thì AB nhỏ nhất. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến Δ phải là $k = \pm 1$.

Do $y' < 0, \forall x$ nên $k = -1$.

Xét phương trình $y' = k \Rightarrow \frac{-3}{(x-2)^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$.

- Với $x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow$ Tiếp tuyến $\Delta_1 : y = -(x - 2 + \sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow y = -x + 4 - 2\sqrt{3}.$$

Khi đó Δ_1 cắt Ox, Oy tại hai điểm $M(4 - 2\sqrt{3}; 0), N(0; 4 - 2\sqrt{3})$ và $S_{OMN} = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3})^2$.

- Với $x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$ tiếp tuyến $\Delta_1 : y = -(x - 2 - \sqrt{3}) + 2 + \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow y = -x + 4 + 2\sqrt{3}.$$

Khi đó Δ_1 cắt Ox, Oy tại hai điểm $P(4 + 2\sqrt{3}; 0), N(0; 4 + 2\sqrt{3})$ và $S_{OPQ} = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})^2 \approx 27,85$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m - 2$.

Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 4.

B. 9.

C. 0.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $m - 2 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Delta : x = -2$ và tiệm cận ngang $\Delta' : y = 1$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(m-2) = \frac{3}{m^2}$ và $y(m-2) = \frac{m-3}{m}$.

Phương trình đường thẳng d là $y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + \frac{m-3}{m}$.

$$A = d \cap \Delta \Rightarrow A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right); B = d \cap \Delta' \Rightarrow B(2m-2; 1)$$

$$\text{Do đó } x_2 + y_1 = -5 \Leftrightarrow 2m - 2 + \frac{m-6}{m} = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

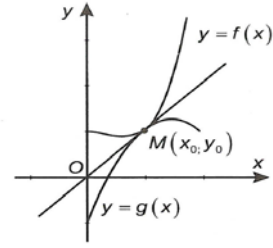
$$\text{Vậy } S = (-3)^2 + 1^2 = 10.$$

BÀI 5. TIẾP TUYẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Ta nói rằng hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu M là một tiếp điểm chung của chúng.

(C) và (C') có tiếp tuyến chung tại M .



Điều kiện tiếp xúc:

Hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Nghiệm của hệ phương trình là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Sự tiếp xúc của hai đường cong

1. Phương pháp giải

Cho hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc với nhau là hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

- Nghiệm $x = x_0$ của hệ trên là hoành độ của tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

- Hệ trên có bao nhiêu nghiệm thì hai đường cong (C) và (C') tiếp xúc với nhau tại bấy nhiêu điểm.

2. Bài tập

Bài tập 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 1$ tiếp xúc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $y = x + 1$.

B. $y = -2x + 1$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = 2x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Áp dụng điều kiện tiếp xúc của hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ là hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên các phương án B, C bị loại.

Xét phương án A. $y = x + 1$. Ta có hệ $\begin{cases} x^3 + x + 1 = x + 1 \\ 3x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy đường thẳng $y = x + 1$ tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho.

Bài tập 2. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là

A. $\{7; -1\}$.

B. $\{-1\}$.

C. $\{6\}$.

D. $\{6; -1\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ (x-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = -1 \\ x = 2 \\ m = 7 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-1; 7\}$ thì đường thẳng d tiếp xúc với (C).

Bài tập 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 - x + 1$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. $\frac{11}{4}$.

B. $\frac{331}{4}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. -4 .

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Để (C_m) tiếp xúc với (P) thì hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m = x^2 - x + 1 \\ 3x^2 - 8mx + 7m = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - (4m+1)x^2 + (7m+1)x - 3m - 1 = 0 \quad (1) \\ 3x^2 - 2(4m+1)x + 7m + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4mx + 3m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = 1$ thay vào (2) được $m = 2$

$$+ \text{ Xét hệ } \begin{cases} x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0 \quad (3) \\ 3x^2 - 2(4m+1)x + 7m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2m-1)x = m+1 \quad (4).$$

• Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (4) vô nghiệm.

• Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì (4) $\Leftrightarrow x = \frac{m+1}{2m-1}$.

Thay $x = \frac{m+1}{2m-1}$ vào (3) ta được $\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2 - 4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right) + 3m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 11m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{2; -\frac{1}{4}; 1\right\}$ nên tổng các phần tử trong S bằng $\frac{11}{4}$.

Bài tập 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+2)x^2 + 2mx + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 10.

B. $\frac{20}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(m+2)x^2 + 2mx + 1 = 1 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) ta được $\begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases}$.

+ Với $x = m$, thay vào (1) ta được $-\frac{m^3}{6} + m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6 \end{cases}$.

+ Với $x = 2$, thay vào (1), ta được $m = \frac{2}{3}$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số thực để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ là

$S = \left\{0; 6; \frac{2}{3}\right\}$ nên tổng các phần tử trong S bằng $\frac{20}{3}$.

Bài tập 5. Biết đồ thị của hàm số (C): $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm có tung độ bằng 3. Tổng $a + 2b + 3c$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại gốc tọa độ nên $x = 0$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \\ 3x^2 + 2ax + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Mặt khác (C) đi qua điểm $A(1;3)$ nên $a + b + c + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$.

Vậy $a + 2b + 3c = 2$.

Bài tập 6. Họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2 (m \neq 0)$ luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(1;-8)$.

B. $B(0;-2)$.

C. $C(0;2)$.

D. $D(1;8)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2 = m(x^2 - 2x + 1) + 6x - 2$

$$\Leftrightarrow y = m(x-1)^2 + 6x - 2.$$

Xét đường thẳng $d: y = 6x - 2$ thì hệ phương trình

$$\begin{cases} m(x-1)^2 + 6x - 2 = 6x - 2 \\ 2m(x-1) + 6 = 6 \end{cases} \text{ luôn có nghiệm } x = 1 \text{ với mọi } m \neq 0.$$

Vậy (P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 6x - 2$.

Đường thẳng d đi qua điểm $B(0;-2)$.

Nhận xét: Nếu có thể viết lại hàm số (P_m) theo dạng $y = m(ax+b)^2 + cx + d$ thì (P_m) luôn tiếp xúc với đường $y = cx + d$.

Dạng 2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tính $y' = f'(x)$ và $f'(x_0)$.

Bước 2: Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Bước 3: Thực hiện các yêu cầu còn lại của bài toán. Kết luận.

Chú ý:

- Nếu bài toán chỉ cho x_0 thì ta cần tìm $y_0 = f(x_0)$ và $f'(x_0)$.

- Nếu bài toán chỉ cho y_0 thì ta cần tìm x_0 bằng cách giải phương trình $f(x) = y_0$.

- Giá trị $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Diện tích tam giác OAB bằng

- A. $\frac{125}{6}$ (đvdt). B. $\frac{117}{6}$ (đvdt) C. $\frac{121}{6}$ (đvdt) D. $\frac{119}{6}$ (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $M(2;5) \in (C); y' = \frac{-3}{(x-1)^2}; y'(2) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;5)$ là $d: y = -3x + 11$.

Khi đó d cắt Ox, Oy tại $A\left(\frac{11}{3}; 0\right)$ và $B(0;11) \Rightarrow OA = \frac{11}{3}; OB = 11$.

Vậy $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot 11 = \frac{121}{6}$ (đvdt)

Bài tập 2. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2} (ab \neq -2, a \neq 0)$. Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

- A. 5. B. 4. C. -1. D. -2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y' = \frac{-2-ab}{(ax-2)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-2-ab}{(a-2)^2}$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 4$ nên

$y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3$.

Mặt khác $A(1;-2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-2 = \frac{1+b}{a-2} \Leftrightarrow b = -2a + 3$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \\ b = -2a + 3 \end{cases} \Rightarrow 5a^2 - 15a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

+ Với $a = 2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow ab = -2$ (loại)

+ Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Khi đó ta có hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(1) = -3 \text{ nên phương trình tiếp tuyến là } y = -3x + 1 \text{ song song với đường thẳng}$$

$$y = -3x + 4.$$

$$\text{Vậy } a - 3b = -2.$$

Bài tập 3. Trong tất cả các đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ thì đường thẳng d có hệ số góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $y = 6x + 2.$

B. $y = 2x + 2.$

C. $y = 1.$

D. $y = 3x + 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 - 6x + 3$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ là

$$k = -3x_0^2 - 6x_0 + 3 = -3(x_0 + 1)^2 + 6 \leq 6$$

$$\Rightarrow k_{\max} = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ hay } M(-1; -4).$$

$$\text{Phương trình đường thẳng d là } y = 6(x + 1) - 4 \Leftrightarrow y = 6x + 2.$$

Nhận xét: Đối với hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất (nhỏ nhất) là tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị $U(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

+ Nếu $a > 0$ thì hệ số góc $k = f'(x_0)$ là nhỏ nhất.

+ Nếu $a < 0$ thì hệ số góc $k = f'(x_0)$ là lớn nhất.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị (C_m) . Giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 10$ là

A. $m = 2.$

B. $m = 4.$

C. $m = 0.$

D. không tồn tại m.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{có } y' = 3x^2 - 4x + m - 1 \Rightarrow y'(1) = m - 2.$$

Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là

$$y = (m - 2)(x - 1) + 3m - 2 \Leftrightarrow y = (m - 2)x + 2m$$

$$\text{Do tiếp tuyến song song với đường thẳng } y = 3x + 10 \text{ nên } \begin{cases} m - 2 = 3 \\ 2m \neq 10 \end{cases} \text{ (vô lí)}$$

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + x + 1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ $x = 1$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để thỏa mãn $k \cdot f(-1) < 0$ là

A. $m \leq -2$.

B. $-2 < m < 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m > 2$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1 \Rightarrow k = f'(1) = 4 + 2m$.

Do đó $k \cdot f(-1) = (4 + 2m)(m - 1)$

Để $k \cdot f(-1) < 0$ thì $(4 + 2m)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m + 1)x + 1$, với m là tham số thực, có đồ thị (C). Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2 < m_0 < -1$.

B. $-1 < m_0 < 0$

C. $0 < m_0 < 1$

D. $1 < m_0 < 2$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi B là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua $A(1; 3)$ khi $m = m_0$

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1 \Rightarrow B(-1; 2m - 1)$ và $y'(-1) = -5m + 4$.

Tiếp tuyến tại B của (C) có phương trình là $y = (-5m + 4)(x + 1) + 2m - 1$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(1; 3)$ nên $2(-5m + 4) + 2m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy $m_0 = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2 - x}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O và có tọa độ nguyên. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

A. $y = -8$.

B. $y = -64$.

C. $y = -12$.

D. $y = -9$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Giả sử $M\left(a; \frac{a^2}{2 - a}\right)$ là một điểm thuộc (C).

$$\text{Do } d(M; Ox) = 2d(M; Oy) \text{ nên } \left| \frac{a^2}{2-a} \right| = 2|a| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{2-a} = 2a \\ \frac{a^2}{2-a} = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{4}{3} \\ a = 4 \end{cases}$$

Theo giả thiết thì M không trùng với gốc tọa độ O và có tọa độ nguyên nên $a = 4 \Rightarrow M(4; -8)$.

$$\text{Khi đó } y' = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} \Rightarrow y'(4) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -8$.

Bài tập 8. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực).

Gọi k_1, k_2 là hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tích $k_1 \cdot k_2$ bằng

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \text{ (với } x \neq -2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3-2m = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (6-m)^2 - 8(3-2m) > 0 \\ 8-2(6-m)+3-2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 12 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$$

Vậy (C) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2} \cdot \frac{1}{(x_2+2)^2} = \frac{1}{[x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4]^2}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{3-2m}{2} + 2 \cdot \frac{m-6}{2} + 4 \right]^2} = 4$$

Bài tập 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Giá trị của tham số thực m để tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất là

A. $m = -\frac{13}{16}$.

B. $m = \frac{13}{16}$.

C. $m = -\frac{16}{13}$.

D. $m = \frac{16}{13}$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1)$, $R=2$.

Ta có $A(1;1-m)$; $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = (4 - 4m)(x - 1) + 1 - m$.

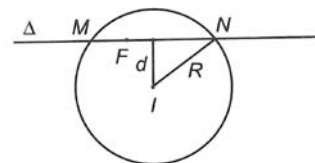
Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ) .

Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N, Khi đó

$$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I; \Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I; \Delta)}.$$

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta)$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF.$$



Khi đó đường thẳng Δ có 1 vector chỉ phương $\vec{u} \perp \overrightarrow{IF} = \left(\frac{3}{4}; -1\right)$; $\vec{u} = (1; 4 - 4m)$ nên

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{IF} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{3}{4} - (4 - 4m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}.$$

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc dựa vào các quan hệ song song, vuông góc,...

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

Bước 1. Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến dựa vào giả thiết bài toán.

Bước 2. Giải phương trình $f'(x) = k$ để tìm $x = x_0$ là hoành độ của tiếp điểm.

Tính $y_0 = f(x_0) \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = k(x - x_0) + y_0$

Điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho.

Cách 2:

Bước 1. Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến dựa vào giả thiết bài toán.

Bước 2. Vì tiếp tuyến có hệ số góc là k nên phương trình tiếp tuyến có dạng $y = kx + b$. Dựa vào điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với (C) ta tìm giá trị của b .

Lưu ý:

- Phương trình $f'(x) = k$ có bao nhiêu nghiệm thì có bấy nhiêu tiếp điểm.

- Một số trường hợp xác định hệ số góc của đường thẳng thường gặp.

Cho hai đường thẳng

$$d_1 : y = k_1x + b_1; d_2 : y = k_2x + b_2.$$

+ Trường hợp 1: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

+ Trường hợp 2: $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

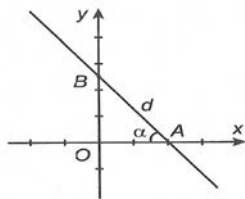
+ Trường hợp 3: Góc $(d_1; d_2) = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$.

Đặc biệt:

1. Nếu góc giữa $d : y = kx + b$ với Ox bằng $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ thì $|k| = \tan \alpha$.

2. Nếu đường thẳng d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B mà $OB = m \cdot OA$ thì

$$|k| = \tan \alpha = \frac{OB}{OA} = m.$$



+ Trường hợp 4: Nếu đường thẳng d đi qua hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ song song với trục Ox là

A. $y = 3, y = -1$.

B. $y = 3, y = -2$.

C. $x = 3, x = -1$.

D. $y = 2, y = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do tiếp tuyến song song với trục Ox nên tiếp tuyến có tiếp điểm là các điểm cực trị và có phương trình $y = y_0$ với y_0 là giá trị cực trị của hàm số đã cho.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Do hàm số đã cho là hàm bậc ba nên các điểm cực trị là $A(1; -1)$, $B(-1; 3)$.

Vậy phương trình các đường tiếp tuyến cần tìm là $y = -1$; $y = 3$.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn $OA = 4OB$ là

A.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do tiếp tuyến cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B mà $OA = 4OB$.

Khi đó $\triangle OAB$ vuông tại O và ta có $|k| = \tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{4}$.

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$

Xét phương trình $-\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$ (vô nghiệm).

Xét phương trình $-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

+ Với $x = 3$ thì $y = \frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}.$$

+ Với $x = -1$ thì $y = \frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Bài tập 3: Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y = x + 2$.

B. $y = x - 2$.

C. $y = -x + 2$

D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến lần lượt với Ox, Oy.

Vì $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên $OA = OB$.

$$\text{Do đó } |k| = \tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\text{Xét phương trình } \frac{1}{(x+2)^2} = -1 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{Xét phương trình } \frac{1}{(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

+ Với $x = -1$ thì $y = 1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = (x+1) + 1 = x + 2$.

+ Với $x = -3$ thì $y = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = (x+3) + 3 = x + 6$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$ là

A. $m < 12$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 1$.

C. $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{3}$.

D. $m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

$$\text{Ta có: } d: x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ nên hệ số góc của } d \text{ là } -\frac{1}{2}.$$

Do tiếp tuyến vuông góc với d nên hệ số góc của tiếp tuyến là k thì

$$k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 2.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C_m) thì x_0 là nghiệm của phương trình

$$y' = k \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2.$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 (*)$$

Theo bài toán thì ta phải tìm m để (*) có duy nhất một nghiệm âm.

+ Trường hợp 1: Nếu $m = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

+ Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0$. Ta thấy phương trình (*) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{2-3m}{m}$.

Do đó để (*) có một nghiệm âm thì $\frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{2}{3}$.

Bài tập 5: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 2$ tại điểm $A(-1;1)$ vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Giá trị $a^2 - b^2$ bằng

A. 13.

B. -2.

C. -5.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $d: x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ nên $k_d = \frac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với d nên phải có hệ số góc bằng -2.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

Vì điểm $A(-1;1)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị nên $x = -1$ là nghiệm của phương trình

$$2x(2ax^2 + b) = -2 \Rightarrow -2(2a + b) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = 1.$$

Mặt khác điểm A thuộc đồ thị hàm số nên $a + b + 2 = 1 \Leftrightarrow a + b = -1$.

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = -5.$$

Bài tập 6: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có đồ thị là (C). Số tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng

$d: y = -x + 1$ một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm.

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}} (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì d có hệ số góc bằng -1 nên } \tan \alpha = \left| \frac{k+1}{1-k} \right| = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -9 \\ k = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$+ \text{ Trường hợp 1: } k = -9 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến $y = -9x + 1$ và $y = -9x - 3$.

+ Trường hợp 2: $k = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow 27x^2 - 54x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{9} \left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9} \right) + y(x_0)$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm.

Bài tập 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do tiếp tuyến đi qua hai điểm $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3$.

Ta có $y' = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x$.

Xét phương trình $\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 3; x = -1; x = -2$.

Mặt khác để tiếp tuyến của hàm số trùng phương cắt được đồ thị tại hai điểm phân biệt thì tiếp điểm A chỉ có thể chạy trong phần đồ thị từ điểm cực tiểu thứ nhất sang điểm cực tiểu thứ hai (trừ hai điểm uốn).

Khi đó phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$

Do đó hai điểm cực tiểu là $x = -\sqrt{7}$ và $x = \sqrt{7}$ nên hoành độ của tiếp điểm $x_0 \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$

Vậy chỉ có $x_0 = -1; x_0 = -2$ thỏa mãn.

Dạng 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ khi biết mối quan hệ của tiếp tuyến với các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Phương pháp giải

Với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0; ad-bc \neq 0$) thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận là

$$x = -\frac{d}{c}; y = \frac{a}{c}.$$

Gọi $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận (và cũng là tâm đối xứng của đồ thị).

Khi đó tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ bất kì của đồ thị cắt tiệm cận đứng tại điểm

$A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc - ad + acx_0}{c(cx_0 + d)}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B\left(2x_0 + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

$$\text{Ta có } IA = \left| \frac{2(ad - bc)}{c(cx_0 + d)} \right|; IB = \left| \frac{2(cx_0 + d)}{c} \right|$$

$$\Rightarrow IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = K \text{ là hằng số không đổi.}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle IAB} = \frac{2|ad - bc|}{c^2}.$$

Khi đó các bài toán sau là tương đương:

Tìm điểm $M \in (C)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất

$$AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

$$\text{Ta có } IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}AB \geq \sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất

$$\text{Ta có } r = \frac{S}{p} = \frac{K}{IA + IB + AB}$$

Vậy r lớn nhất khi $IA + IB + AB$ nhỏ nhất và bằng $2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất

$$\text{Gọi H là hình chiếu của I lên d, ta có } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = \frac{2}{K} \Rightarrow IH \leq \sqrt{\frac{K}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA = IB$ nên $\triangle IAB$ vuông cân tại I.

Gọi α là góc giữa tiếp tuyến d và tiệm cận ngang Δ_2 thì $\alpha = (d; \Delta_2) = (d; Ox) = 45^\circ$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm \tan 45^\circ = \pm 1$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau?

A. Không tồn tại cặp điểm đó.

B. Vô số cặp điểm.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $A\left(a; \frac{a+1}{a-1}\right), B\left(b; \frac{b+1}{b-1}\right)$ với $a \neq b; a, b \neq 1$.

Do tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên $y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow \frac{-2}{(a-1)^2} = \frac{-2}{(b-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2 \end{cases}$

Do $a \neq b$ nên chỉ có $a + b = 2$. Vậy có vô số cặp điểm A, B thỏa mãn.

Nhận xét: Hai điểm A, B phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau thì A, B đối xứng với nhau qua tâm đối xứng I.

Bài tập 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị. Khi đó tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B và I là giao điểm của hai tiệm cận.

Theo lý thuyết đã nêu thì $S_{\Delta IAB} = \frac{2|4+6|}{4} = 5$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm $M(a; b) \in (C), a > 0$ tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với hai đường tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Do

ΔIAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là $R = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2}$.

Theo lý thuyết, ta có $IA \cdot IB = 4$, $AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{2}$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $IA = IB$. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến $k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'(a) = -\frac{1}{(a-1)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Ta có $-\frac{1}{(a-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$. Do $a > 0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=3$. Vậy $a+2b=8$.

Bài tập 4: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+m}{x-2}$, m là tham số khác -4 và d là một tiếp tuyến của (C).

Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để d tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 2, tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -11 .

B. 8.

C. 3.

D. -8 .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của tiếp tuyến với hai đường tiệm cận và I là giao điểm của hai tiệm cận.

Theo lý thuyết, ta có $IA \cdot IB = 4|m+4| \Rightarrow S_{\Delta IAB} = 2|m+4|$

Vậy ta có $2|m+4| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow S = \{-5; -3\}$ nên tổng các phần tử của S bằng -8 .

Bài tập 5: Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$, $x_0 < 0$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ sao cho

khoảng cách từ $I(-1; 1)$ đến A đạt giá trị lớn nhất. Giá trị $x_0 \cdot y_0$ bằng

A. -1 .

B. 0.

C. -2 .

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A, B là giao điểm của A với hai đường tiệm cận.

Theo lý thuyết $d(I; \Delta)$ lớn nhất khi $IA = IB \Rightarrow k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0+1)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Vậy $-\frac{1}{(x_0+1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{cases}$

Do $x_0 < 0 \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow x_0 \cdot y_0 = 0$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất là

A. $\Delta: y = -x - 1$ và $\Delta: y = -x + 17$

B. $\Delta: y = -x - 1$ và $\Delta: y = -x + 7$

C. $\Delta: y = -x - 21$ và $\Delta: y = -x + 7$

D. $\Delta: y = -x - 3$ và $\Delta: y = -x + 2$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ với hai tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Khi đó ΔIAB vuông tại I.

Theo lý thuyết, chu vi ΔIAB là $IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 8 + 4\sqrt{2}$ vì $IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = 16$

Do đó chu vi nhỏ nhất bằng $8 + 4\sqrt{2}$ khi $IA = IB \Rightarrow k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'(x_0) = -\frac{4}{(x_0 - 1)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Vậy ta có $-\frac{4}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Với $x_0 = 3$ thì $y_0 = 4$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -(x - 3) + 4 = -x + 7$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 0$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -(x + 1) = -x - 1$

Bài tập 7: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Một tiếp tuyến bất kỳ với (C) cắt đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại A và B, biết $I(1; 2)$. Giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB bằng

A. $7 - 3\sqrt{2}$.

B. $8 - 4\sqrt{2}$.

C. $4 - 2\sqrt{2}$

D. $8 - 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ với hai tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận và ΔIAB vuông tại I.

Theo lý thuyết, ta có $IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = 16 \Rightarrow S_{\Delta IAB} = 8$.

Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp ΔIAB lớn nhất xảy ra khi

$$IA = IB = 4 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{IA + IB + AB}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r_{\max} = \frac{8}{4 + 2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$$

Bài tập 8: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{18}$ là

A. $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

B. $y = \frac{9}{4}x + \frac{31}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

C. $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}.$

D. $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $M\left(a; \frac{2a}{a+2}\right) (a \neq -2)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là

$$y = y'(a)(x-a) + \frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow y = \frac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{2a}{a+2}.$$

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của d với hai trục Ox, Oy.

Tọa độ các điểm A, B là $A\left(-\frac{a^2}{2}; 0\right), B\left(0; \frac{2a^2}{(a+2)^2}\right).$

$$\text{Vậy } S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{a^4}{2(a+2)^2} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = a+2 \\ 3a^2 = -a-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $a=1 \Rightarrow d_1: y = \frac{4}{9}(x-1) + \frac{2}{3} = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

Với $a=-\frac{2}{3} \Rightarrow d_2: y = \frac{9}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$

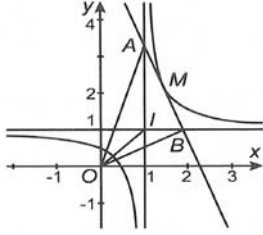
Bài tập 9: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0; y_0), x_0 > 0$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (I là giao hai đường tiệm cận). Giá trị biểu thức $S = x_0 - 4y_0$ bằng

A. $\frac{13}{4}$.

B. -2 .

C. 2 .

D. $\frac{7}{4}$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do góc $\widehat{OIA} = \widehat{OIB}$ nên $\frac{S_{\Delta OIA}}{S_{\Delta OIB}} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{8}$.

Mà $|k| = \tan \widehat{IBA} = \frac{IA}{IB}$ nên $|k| = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{8}$.

Mặt khác $k = y'(x_0) = \frac{-2}{4(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{2(x_0-1)^2} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$.

Do $x_0 > 0$ nên $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow S = x_0 - 4y_0 = -2$

Bài tập 10: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) cắt

tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho cosin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$ với $I(2;2)$ là

A. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

B. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

C. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

D. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $|k| = \tan \widehat{ABI} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \widehat{ABI}} - 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{4}$

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C)$ thì $k = y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-2)^2} < 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$.

Xét phương trình $\frac{-1}{(x_0-2)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{cases}$

+ Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = \frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

+ Với $x_0 = 4$ thì $y_0 = \frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{4}(x-4) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

Dạng 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ cho trước.

1. Phương pháp giải

Thực hiện một trong hai cách sau

Cách 1:

Bước 1. Giả sử tiếp tuyến có hệ số góc k , khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng $y = k(x - x_0) + y_0$.

Bước 2. Tìm k là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Từ đó suy ra phương trình của tiếp tuyến.

Cách 2:

Bước 1. Giả sử $A(a; f(a))$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho nên phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Bước 2. Do tiếp tuyến đi qua $M(x_0; y_0)$ nên a là nghiệm của phương trình $f'(a)(x_0 - a) + f(a) = y_0$.

Tìm a và suy ra phương trình tiếp tuyến.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-x+1}{x-2}$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm

$A(2; -1)$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = \frac{1}{(x-2)^2}, \forall x \neq 2$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M\left(x_0; \frac{-x_0+1}{x_0-2}\right)$ với $x_0 \neq 2$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại

$$\text{điểm M là } y = \frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+1}{x_0-2}.$$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A(2; -1)$ nên ta có phương trình

$$\frac{(2-x_0)}{(x_0-2)^2} + \frac{-x_0+1}{x_0-2} = -1 \Leftrightarrow \frac{-x_0}{x_0-2} = -1 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không có tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét: Đối với đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua điểm

$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - \frac{3}{2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và có hệ số góc k có dạng $y = kx + \frac{3}{2}$.

Để Δ tiếp xúc với (C) thì hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = kx + \frac{3}{2} \quad (1) \\ 2x^3 - 6x = k \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm x.

Thế (2) vào (1), ta có $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = (2x^3 - 6x)x + \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

+ Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \Delta_1: y = \frac{3}{2}$.

+ Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow k = -2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta_2: y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

+ Với $x = -\sqrt{2} \Rightarrow k = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta_3: y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

Vậy có ba tiếp tuyến thỏa mãn.

Dạng 6: Xác định các điểm M để có k tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ đi qua điểm M

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xây dựng tọa độ điểm $M(a; b)$.

Bước 2. Giả sử d là đường thẳng đi qua M và có hệ số góc k. Khi đó phương trình đường thẳng $d: y = k(x - a) + b$.

Bước 3. Để d là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình (*) $\begin{cases} f(x) = k(x - a) + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Dựa vào số nghiệm của hệ trên suy ra số tiếp tuyến tương ứng bài toán yêu cầu.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ là hàm số bậc 2, bậc 3, bậc nhất trên bậc nhất thì hệ (*) có bao nhiêu nghiệm thì tương ứng với bấy nhiêu tiếp tuyến.
- Nếu $f(x)$ là hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị thì nếu hệ (*) có nghiệm không phải là hoành độ của 2 điểm cực tiểu (cực đại) thì mỗi nghiệm ứng với một tiếp tuyến của đồ thị (C).

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C).

Tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{20}{3}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. 4.

D. $\frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(m; 2)$ và có hệ số góc k.

Khi đó phương trình của d là $y = k(x - m) + 2$.

Để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua M thì hệ phương trình

$$\begin{cases} k = -3x^2 + 12x \\ -x^3 + 6x^2 + 2 = k(x - m) + 2 \end{cases} \text{ phải có hai nghiệm phân biệt.}$$

Từ hệ trên, ta có $-x^3 + 6x^2 + 2 = (-3x^2 + 12x)(x - m) + 2$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - 3(m+2)x + 12m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3(m+2)x + 12m = 0 (*) \end{cases}$$

Để hệ có đúng hai nghiệm, ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Phương trình (*) có nghiệm kép khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m+2)^2 - 96m = 0 \\ 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

+ Trường hợp 2: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m+2)^2 - 96m > 0 \\ 12m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy $S = \left\{6; \frac{2}{3}; 0\right\}$ nên tổng các phần tử bằng $\frac{20}{3}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A ?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ xác định trên $\mathbb{R}$, $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua $A(1; a)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta: y = k(x-1) + a$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = k(x-1) + a(1) \\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = k(2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}(x-1) + a$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + a\sqrt{x^2 - 2x + 3} \Leftrightarrow a\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}(3).$$

Qua A có đúng hai tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Ta có $f'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\sqrt{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta có (3) có hai nghiệm phân biệt thì $a \in (0; \sqrt{2}]$. Mà a nguyên nên $a = 1$.

Dạng 7: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số ẩn tại điểm có hoành độ $x = x_0$ cho trước

1. Phương pháp giải

Từ biểu thức của hàm ẩn, tìm cách tính các giá trị $y_0 = f(x_0)$ và $f'(x_0)$.

Áp dụng công thức viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$.

Chú ý công thức đạo hàm của hàm số hợp: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K , $u = u(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên K và có giá trị trên khoảng K . Khi đó $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 6$.

D. $y = 4x - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta cần tính $f(1), f'(1)$.

Từ giả thiết $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

Chọn $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$, ta được
$$\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases}.$$

Lấy đạo hàm hai vế (*) ta được $4 \cdot f'(2x) - 2 \cdot f'(1-2x) = 24x, \forall x \in \mathbb{R}$

Chọn $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$, ta được
$$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}.$$

Vậy $f(1) = 2; f'(1) = 4$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$.

Bài tập 2: Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f(f(x))$, $y = h(x) = f(x^3 + 2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Đường thẳng $x = 2$ cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại A, B, C. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y = 3x + 4$ và $y = 6x + 13$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

A. $y = 24x - 23$.

B. $y = 10x - 21$.

C. $y = -12x + 49$.

D. $y = 2x - 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Để giải bài toán, ta cần tính $h'(2)$ và $h(2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A là

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 3x + 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 3 \\ -2f'(2) + f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2) = 3 \\ f(2) = 10 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C_2) tại B là

$$y = f'(2) \cdot f'(f(2))(x - 2) + f(f(2)) = f'(2) \cdot f'(10)(x - 2) + f(10) = 6x + 13.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(2) \cdot f'(10) = 6 \\ -2f'(2) \cdot f'(10) + f(10) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(10) = 2 \\ f(10) = 25 \end{cases}$$

Ta có $h'(x) = (f(x^3 + 2))' = 3x^2 \cdot f'(x^3 + 2)$ nên $h'(2) = 12f'(10) = 24$ và $h(2) = f(10) = 25$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

$$y = h'(2)(x - 2) + h(2) = 24(x - 2) + 25 = 24x - 23.$$

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định có đạo hàm và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của

hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ cùng tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có hệ số góc lần lượt

là 12 và -3 . Giá trị của $f(1)$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } g'(x) = \left(\frac{f(x)}{f(x^2)} \right)' = \frac{f(x^2) \cdot f'(x) - f(x) \cdot 2x \cdot f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 12$ và $g'(1) = -3$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(1).f'(1)-2f(1).f'(1)}{f^2(1)} = -3 \Leftrightarrow -\frac{f'(1)}{f(1)} = -3 \Leftrightarrow f(1) = 4.$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = x^2.f(4x-3)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau và Δ_1 không song song với Ox, Oy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3} < |f(1)| < 2$.

B. $|f(1)| < 2$.

C. $|f(1)| \geq 2$.

D. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = (x^2.f(4x-3))' = 2x.f(4x-3) + 4x^2.f'(4x-3)$.

Ta có hệ số góc của các tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 lần lượt là $f'(1)$ và $g'(1) = 2f(1) + 4f'(1)$.

Theo giả thiết thì $f'(1).g'(1) = -1$ và $f'(1) \neq 0$.

$$\Leftrightarrow f'(1).(2f(1) + 4f'(1)) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2f(1) = -\frac{1}{f'(1)} - 4f'(1) \Rightarrow 2|f(1)| = \frac{1}{|f'(1)|} + 4|f'(1)| \geq 4 \Leftrightarrow |f(1)| \geq 2.$$

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 2x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = -3$ là

A. $y = \frac{1}{3}x$.

B. $y = \frac{1}{3}x - 2$.

C. $y = \frac{1}{3}x - 3$.

D. $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $x = -3$, ta cần tính $f(-3)$ và $f'(-3)$.

Với $x = -1$ suy ra $f(-3) = -3$.

Do $f(x^3 + 3x + 1) = 2x - 1 \Rightarrow (3x^2 + 3)f'(x^3 + 3x + 1) = 2$.

Với $x = -1 \Rightarrow 6f'(-3) = 2 \Rightarrow f'(-3) = \frac{1}{3}$.

Do đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = f'(-3)(x + 3) + f(-3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x + 3) - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2.$$

Bài tập 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $(C_1), (C_2)$ và (C_3) lần lượt là đồ thị của các hàm số $f(x), g(x) = f(x^2)$ và $h(x) = f(x^3)$. Biết $f(1) = 1$ và tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến tại điểm

có hoành độ $x = 1$ của $(C_1), (C_2)$ bằng -3 . Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = -x + 2$. B. $y = -3x - 2$. C. $y = -x - 1$. D. $y = -3x + 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta cần tính $h(1), h'(1)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2), h'(x) = 3x^2f'(x^3)$.

Theo giả thiết, ta có $f'(1) + g'(1) = -3 \Leftrightarrow f'(1) + 2f'(1) = -3 \Leftrightarrow f'(1) = -1$.

Do đó $h'(1) = 3f'(1) = -3$ và $h(1) = f(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x - 1) + 1 = -3x + 4$.

Bài tập 7: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2g(x) + 36x = 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A. $y = -x$. B. $y = 2x - 3$. C. $y = -2x + 3$. D. $y = x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta có $f^3(2) - 2f^2(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$$-3f^2(2-x).f'(2-x) - 12f(2+3x).f'(2+3x) + 2x.g(x) + x^2.g'(x) + 36 = 0. \quad (2)$$

Thay $x = 0$ vào (2) ta có $-3f^2(2).f'(2) - 12f(2).f'(2) + 36 = 0. \quad (3)$

+ Với $f(2) = 0$ thay vào (3) thì $36 = 0$ (vô lý).

+ Với $f(2) = 2$ thay vào (3) thì $f'(2) = 1$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = x$.

Bài tập 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = -x + 2$. B. $y = x$. C. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. D. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta cần tính $f(1), f'(1)$.

Thay $x = 1$ vào đẳng thức $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$, ta có

$$[f(1)]^3 + 6f(1) = -3 + 10 \Leftrightarrow [f(1)]^3 + 6f(1) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Theo bài ra ta có $[f(x)]^3 + 6f(x) = -3x + 10$ đúng với mọi x nên đạo hàm hai vế ta được

$$3.[f(x)]^2 \cdot f'(x) + 6f'(x) = -3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào ta có } 3[f(1)]^2 \cdot f'(1) + 6f'(1) = -3.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \text{ nên } f'(1) = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

$$\sqrt{2} < |f(1)| < 2.$$

Dạng 8. Tìm các điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ mà tiếp tuyến tại các điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k .

1. Phương pháp giải

Giả sử hai điểm $A(x_A; f(x_A)), B(x_B; f(x_B)) (x_A \neq x_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k thì x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = k$.

Khi đó ta có biểu thức liên hệ giữa x_A, x_B . Từ đó giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Đối với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0; ad-bc \neq 0)$ có tâm đối xứng là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. Nếu A, B là hai điểm thuộc đồ thị có tiếp tuyến tại A, B song song với nhau thì I là trung điểm của AB.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2}$. Do tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau nên

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{-3}{(2x_1-1)^2} = \frac{-3}{(2x_2-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 + x_2 = 1$.

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì

$$A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right).$$

Gọi $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ta thấy $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = 1 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm của AB.

$$\text{Ta có } \overline{IA} = \left(\frac{a}{2}; \frac{3}{2a}\right) \Rightarrow IA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9}{4a^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{9}{4a^2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vì I là trung điểm của AB nên $AB = 2IA \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$.

$$\text{Vậy } AB_{\min} = \sqrt{6} \text{ khi } \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H)

sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B có cùng hệ số góc k. Biết diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k < -9$.

B. $-9 \leq k < -6$.

C. $-6 \leq k < -3$.

D. $-3 \leq k < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{3}{(2x-1)^2}$$

Tiếp tuyến tại A, B của (H) có cùng hệ số góc k nên x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình

$$-\frac{3}{(2x-1)^2} = k \Rightarrow k < 0.$$

$$\text{Suy ra } 4kx^2 - 4kx + k + 3 = 0(*) \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{k+3}{4k} \end{cases}$$

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì

$$A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right).$$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác ABC nếu có $\overrightarrow{AB} = (a; b)$, $\overrightarrow{AC} = (c; d)$ thì $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|ad - bc|$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right)$, $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right)$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{a+1}{2}\right) \frac{a-3}{2a} - \left(-\frac{a+1}{2}\right) \cdot \frac{a+3}{2a} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{a^2-3}{a} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a^2-3}{a} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 3 = 0 \\ a^2 + 2a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \text{ (vì } a > 0 \text{)}.$$

+ Với $a = 3 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$.

+ Với $a = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 0 \Rightarrow k = -3$.

Vậy giá trị của k là $k = -3; k = -\frac{1}{3}$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 6\sqrt{37}$. Giá trị $2x_A - 3x_B$ bằng

A. 15.

B. 90.

C. -15.

D. -90.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Do tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau nên $y'(x_A) = y'(x_B)$

$$\Leftrightarrow 3x_A^2 - 3 = 3x_B^2 - 3 \Leftrightarrow x_A + x_B = 0 \text{ (do } x_A > x_B \text{)}.$$

Giả sử $A(a, a^3 - 3a + 1), B(-a, -a^3 + 3a + 1)$ với $a > 0$ thuộc (C).

$$\text{Khi đó } AB^2 = 4a^2 + (2a^3 - 6a)^2 = 4a^6 - 24a^4 + 40a^2 = 6\sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow 4a^6 - 24a^4 + 40a^2 - 1332 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \text{ (vì } a > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x_A = 3; x_B = -3 \text{ nên } 2x_A - 3x_B = 15.$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc (C) và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Đường thẳng AB cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại M, N diện tích tam giác OMN bằng $\frac{1}{4}$. Độ dài đoạn MN bằng

A. $\sqrt{10}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Khi đó $y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$.

Do đó tâm đối xứng $I(1;1)$ của (C) là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Gọi hệ số góc của đường thẳng AB là k.

Phương trình đường thẳng AB là $y = k(x-1) + 1$.

Điều kiện để đường thẳng $d: y = k(x-1) + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B là phương trình

$\frac{x+2}{x-1} = k(x-1) + 1 (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow kx^2 - 2kx + k - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - k(k-3) > 0 \Leftrightarrow k > 0 \\ k - 2k + k - 3 \neq 0 \end{cases}$$

Vì M, N là giao điểm của AB với Ox, Oy nên $M\left(\frac{k-1}{k}; 0\right), N(0; 1-k)$.

$$\text{Suy ra } S_{\Delta OMN} = \frac{(k-1)^2}{2|k|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2(k-1)^2 = |k| \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } MN^2 = (k-1)^2 + \frac{(k-1)^2}{k^2} = (k-1)^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

$$+ \text{ Với } k = 2 \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$+ \text{ Với } k = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy trong cả hai trường hợp thì } MN = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dạng 9: Một số dạng toán khác

Bài tập 1: Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và có hoành độ a. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

$$y'' = 12x^2 - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tọa độ các điểm có hoành độ a nguyên để tiếp tuyến tại điểm đó cắt trục hoành tại hai điểm thỏa mãn

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ a \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-1; 0; 1\}.$$

Vậy có ba giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Nhận xét: Đối với đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ mà đồ thị có ba điểm cực trị (khi $ab < 0$) thì tiếp tuyến của đồ thị tại các điểm có hoành độ nằm giữa hai điểm cực tiểu (cực đại), trục hoành sẽ luôn cắt đồ thị tại hai điểm khác nữa.

Bài tập 2: Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và có hoành độ a . Có bao nhiêu số nguyên a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A và diện tích tam giác OBC bằng $2\sqrt{3}$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

$$y'' = 12x^2 - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tọa độ các điểm có hoành độ a nguyên để tiếp tuyến tại điểm đó cắt trục hoành tại hai điểm nữa thì

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ a \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-1; 0; 1\}$$

+ Với $a = -1 \Rightarrow A(-1; 0)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = 2(x + 1)$.

$$\text{Xét phương trình } x^4 - 3x^2 + 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \text{ nên } B(0; 2), C(2; 6) \Rightarrow S_{\triangle OBC} = 2 \text{ (loại).} \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Với $a=0 \Rightarrow A(0;2)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=2$ nên $B(-\sqrt{3};2), C(\sqrt{3};2) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

+ Với $a=1 \Rightarrow A(1;0)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=-2(x-1)$ nên $B(0;2), C(-2;6) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = 2$ (loại).

Vậy $a=0$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=m-2$ cắt tiệm cận đứng tại $A(x_1; y_1)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_2 + y_1 = -5$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 4.

B. -2.

C. -4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x=-2$ và $y=1$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}, y'(m-2) = \frac{3}{m^2}$.

Gọi $M\left(m-2; \frac{m-3}{m}\right) \in (C), m \neq 0$, tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

$$y = \frac{3}{m^2}(x-m+2) + \frac{m-3}{m}.$$

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng là $A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right)$ và tiệm cận ngang là $B(2m-2; 1)$.

Theo giả thiết ta có $\frac{m-6}{m} + 2m-2 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$.

Vậy $m_1 + m_2 = -2$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm nằm trên hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt tại các cặp M, N và P, Q. Diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất bằng

A. 16.

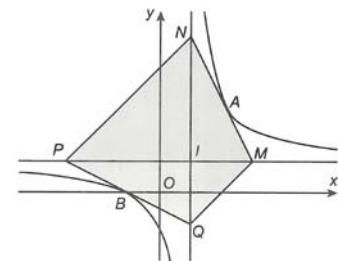
B. 32.

C. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Theo tính chất của tiếp tuyến đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất thì $IM.IN = IP.IQ = 8$.



$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{MNPQ} &= \frac{1}{2} MP.NQ = \frac{1}{2} (IM + IP)(IN + IQ) = \frac{1}{2} (IM.IN + IP.IQ + IM.IQ + IN.IP) \\ &= \frac{1}{2} (8 + 8 + IM.IQ + IN.IP) = 8 + \frac{1}{2} \left(\frac{64}{IN.IP} + IN.IP \right) \geq 8 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{64} = 16. \end{aligned}$$

Vậy $S_{\min} = 16$ khi $\frac{64}{IN.IP} = IN.IP \Rightarrow IN.IP = 8$ hay $IN = IQ = IM = IP = 2\sqrt{2}$ tức là MNPQ là hình vuông.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 7$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để có ít nhất hai tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với đường thẳng $d: y = mx$?

A. 27.

B. 28.

C. 26.

D. 25.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $M(a; b)$ là tiếp điểm. Ta có $y' = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

Tiếp tuyến của (C) tại M song song hoặc trùng với đường thẳng $d: y = mx$ nên a là nghiệm của phương trình $2x^3 - 3x^2 - 12x = m(*)$.

Để có ít nhất hai tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với đường thẳng d thì phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm.

$$\text{Xét } f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{ có } y' = 6x^2 - 6x - 12; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	7	-20	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, để phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm thì $-20 \leq m \leq 7$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-20, -19, \dots, 6, 7\}$.

Vậy có 28 giá trị m thỏa mãn.

Bài tập 6: Cho đường cong (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ và điểm $I(1;1)$. Hai điểm A và B thuộc cùng một nhánh của đồ thị sao cho $IA = IB$. Gọi k_1 và k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến tại A và B. Khi tiếp tuyến tại A và B của (C) tạo với nhau một góc 15° , giá trị biểu thức $|k_1 + k_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$.

B. $4(2 - \sqrt{3})$.

C. $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$.

D. $4(2 + \sqrt{3})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $IA = IB$ nên $k_1.k_2 = 1$.

$$\text{Ta có } \tan 15^\circ = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1.k_2} \right|$$

$$\Leftrightarrow |k_1 - k_2| = 2(2 - \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow (k_1 - k_2)^2 = 28 - 16\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (k_1 + k_2)^2 = 32 - 16\sqrt{3} \Rightarrow |k_1 + k_2| = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}.$$

Nhận xét: Đối với đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tâm đối xứng là I . Cho A, B là hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị hàm số thỏa mãn $IA = IB$.

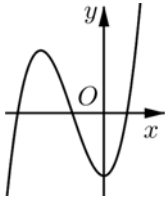
Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại A, B .

$$\text{Ta có } k_1 k_2 = \frac{1}{c}.$$

BÀI 6. ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ SỰ TƯƠNG GIAO

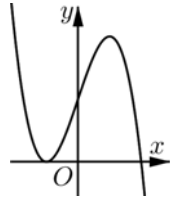
Dạng 1: Dựa vào Đồ thị hàm số

Bài tập 1. Hình dạng có thể có của đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ là những hình nào trong các hình sau đây?



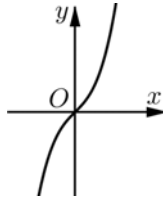
(Hình I)

A. (I).



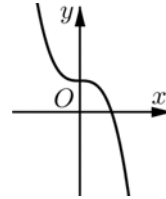
(Hình II)

B. (II).



(Hình III)

B. (I) hoặc (III).



(Hình IV)

D. (II) hoặc (IV).

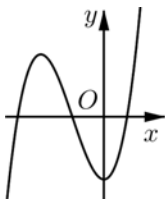
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

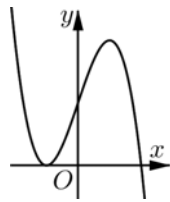
Hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y' = 3x^2 + 2bx - 1$ có $\Delta_{y'} = b^2 + 3 > 0, \forall b \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị.

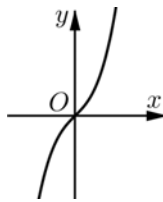
Bài tập 2. Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



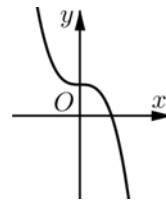
(Hình I)



(Hình II)



(Hình III)



(Hình IV)

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị như (I) có được khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị như (II) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị như (III) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

D. Đồ thị như (IV) có được khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

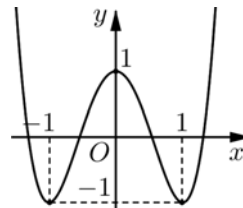
Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 15$.

B. $f(2) = 16$.

C. $f(2) = 17$.

D. $f(2) = 18$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y' = f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;-1)$ và đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $B(1;-1)$ nên ta có hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}.$$

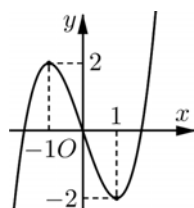
Do đó: $y = f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 \longrightarrow f(2) = 17$.

Dạng 2: Bảng biến thiên

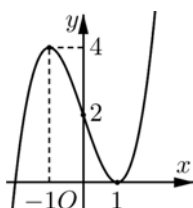
Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

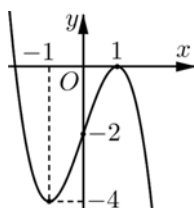
Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y = f(x)$?



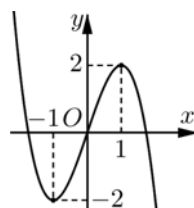
A



B



C



D

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2. Loại đáp án B và C.
- Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$ nên chỉ có đáp án A là phù hợp.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$a - b + c - 1$	-24	$+\infty$	

Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + 3c$.

A. $P = -9$.

B. $P = -3$.

C. $P = 3$.

D. $P = 9$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là -1 và $3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \end{cases}$.

Lại có $f(3) = -24 \longrightarrow 27 + 9a + 3b + c = -24 \longrightarrow c = 3$.

Vậy $P = a + b + 3c = -3$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $P = 2$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = 8$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$. (1)

Lại có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$. (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được $a = -1, b = 2, c = 1 \longrightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$a+b$	0	-1	$+\infty$

Hiệu $a - b$ bằng

- A. -3 . B. -1 . C. 1 . D. 3 .

Hướng dẫn giải.

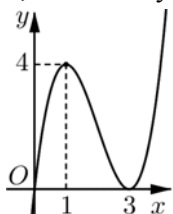
Chọn D.

Đạo hàm $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

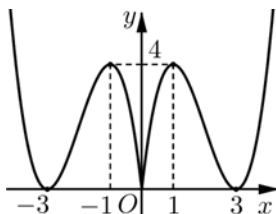
Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2a + b) = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Dạng 3 : Phép suy đồ thị

Bài tập 1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong bốn đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

D. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

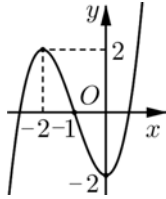
Hướng dẫn giải.

Chọn D.

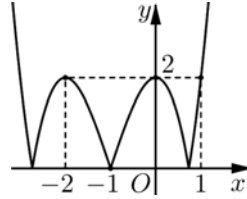
Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \geq 0$.
- Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ ở trên qua trục Oy .

Bài tập 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x|^3 + 3x^2 - 2$.

B. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$.

C. $y = ||x|^3 + 3x^2 - 2|$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.

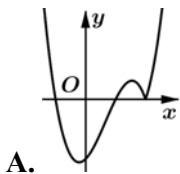
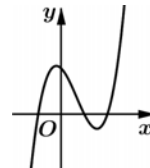
Hướng dẫn giải.

Chọn B.

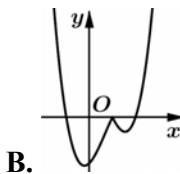
Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y \geq 0$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y < 0$ qua trục Ox .

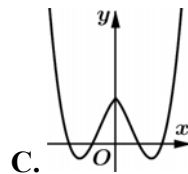
Bài tập 3. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



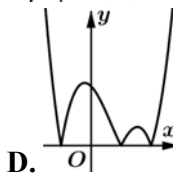
A.



B.



C.



D.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

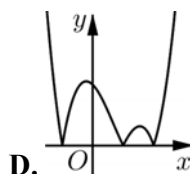
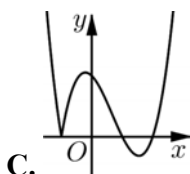
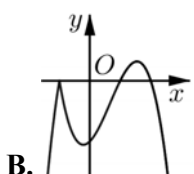
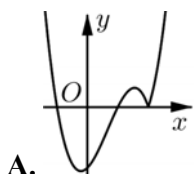
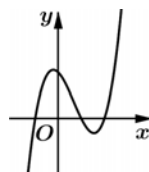
Ta có $y = |x-2|(x^2-1) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{ khi } x \geq 2 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x \geq 2$ (bên phải đường thẳng $x = 2$).
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x < 2$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được đồ thị hàm số cần tìm.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây trong các đáp án A, B, C, D là đồ thị của hàm số $y = |x+1|(x^2-3x+2)$?



Hướng dẫn giải.

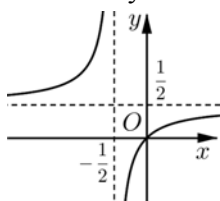
Chọn C.

Ta có $y = |x+1|(x^2-3x+2) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{khi } x \geq -1 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

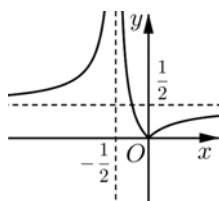
Suy ra đồ thị của hàm số $y = |x+1|(x^2-3x+2)$ giống hoàn toàn phần đồ thị của hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ với $x \geq -1$ (bên phải đường thẳng $x = -1$).

Đối chiếu các đáp án ta

Bài tập 5. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$.

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$.

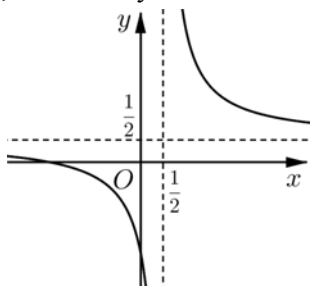
C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$.

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$.

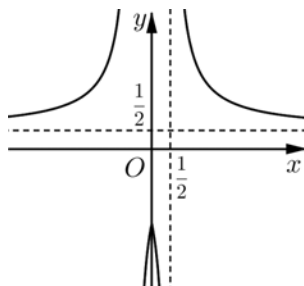
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)$. B. $y = \frac{|x|+2}{2|x|-1}$. C. $y = \left|\frac{x+2}{2x-1}\right|$. D. $y = \frac{|x|+2}{2x-1}$.

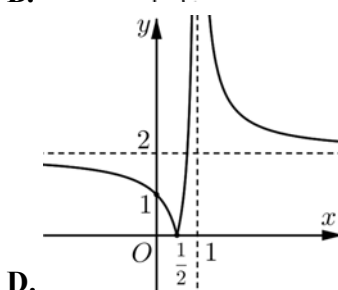
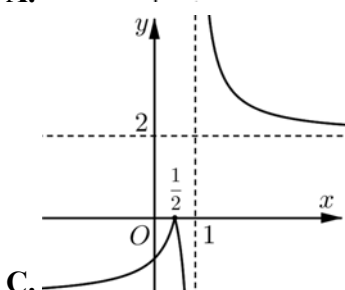
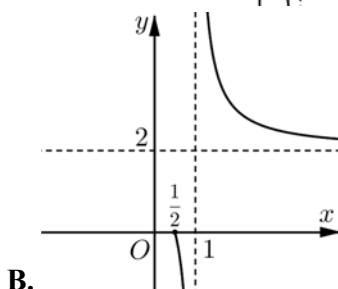
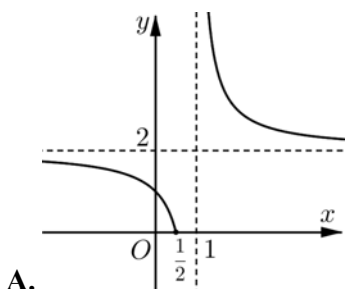
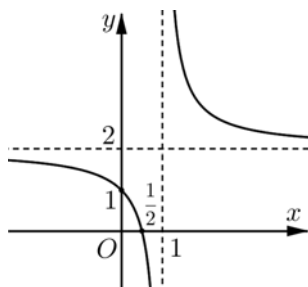
Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Bài tập 7. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị

như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$

có đồ thị là hình nào trong các đáp án sau:



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

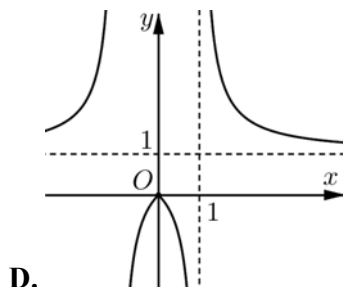
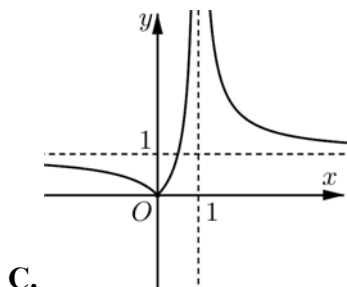
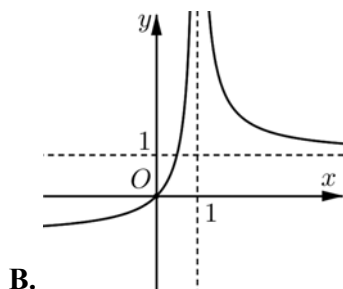
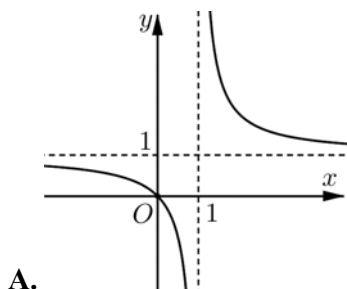
Ta có $y = \frac{|2x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x-1}$.

Bài tập 8. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$?



Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ bằng cách:

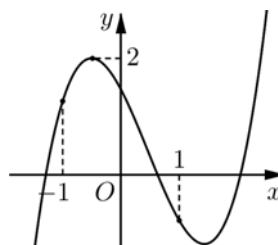
- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x = 1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x = 1$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \frac{x}{|x-1|}$.

Dạng 4: Xác định dấu của các tham số của hàm số dựa vào tính chất đồ thị

Bài tập 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- B.** $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- C.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D.** $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

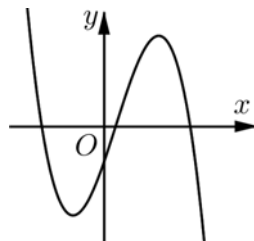
Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\begin{cases} x_{CT} > 1 \\ -1 < x_{CB} < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_{CB} + x_{CT} > 0 \\ x_{CB} \cdot x_{CT} < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0 \end{cases}. \text{ Vậy } a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

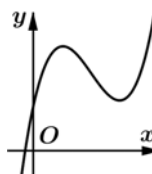


Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $ac > 0, bd < 0$.
- B. $ac > 0, bd > 0$.
- C. $ac < 0, bd < 0$.
- D. $ac < 0, bd > 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

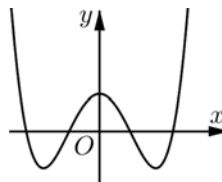
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

- Dễ dàng suy ra $a > 0$ và $d > 0$.
- Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đều dương nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt,

suy ra $\frac{c}{3a} > 0$ và $-\frac{2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$. Vậy $ac > 0, bd < 0$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$.

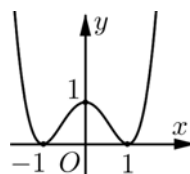
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c = 1$.
- B. $a > 0, b < 0, c = 1$.
- C. $a > 0, b > 0, c = 1$.
- D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



Hướng dẫn giải.

Chọn B.

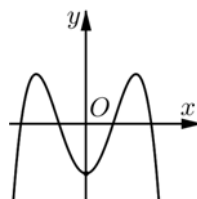
Bài tập 6. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0.$

B. $a < 0, b > 0, c < 0.$

C. $a < 0, b < 0, c > 0.$

D. $a < 0, b < 0, c < 0.$



Hướng dẫn giải.

Chọn B.

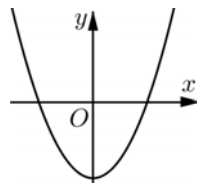
Bài tập 7. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b \geq 0, c < 0.$

B. $a > 0, b < 0, c \leq 0.$

C. $a > 0, b \geq 0, c > 0.$

D. $a < 0, b < 0, c < 0.$



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a > 0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \xrightarrow{a > 0} b \geq 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

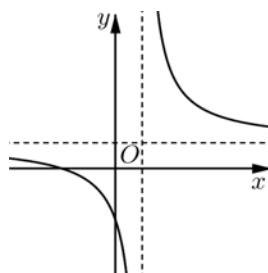
Bài tập 8. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $b > 0, c > 0, d < 0.$

B. $b > 0, c < 0, d < 0.$

C. $b < 0, c < 0, d < 0.$

D. $b < 0, c > 0, d < 0.$



Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy

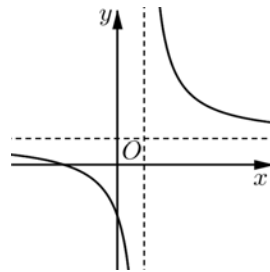
• Khi $y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$. • Khi $x = 0 \rightarrow y = \frac{b}{d} < 0 \xrightarrow{b > 0} d < 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0 \xrightarrow{d < 0} c > 0$.

Vậy $b > 0, c > 0, d < 0$.

Bài tập 99. Hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) có

đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c - ab = 0$.

D. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống (từ trái sang phải) nên suy ra đạo hàm

$$y' = \frac{c-ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \longrightarrow c-ab < 0. \text{ Vậy } a > 0, b > 0, c-ab < 0.$$

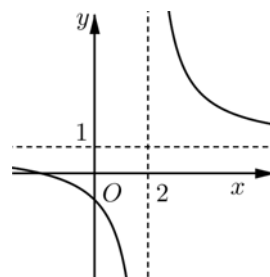
Bài tập 10. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm

số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề

nào sau đây là đúng ?

A. $y' < 0, \forall x \neq 1$. **B.** $y' < 0, \forall x \neq 2$.

C. $y' > 0, \forall x \neq 1$. **D.** $y' > 0, \forall x \neq 2$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x = 2$

là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Dạng 5: Xác định số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$-\infty$	4	-2	4	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)| - 7 = 0$ là

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $2|f(x)| - 7 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f(x) = \pm \frac{7}{2}$.

Dựa vào BBT, suy ra $f(x) = \frac{7}{2}$ có 4 nghiệm; $f(x) = -\frac{7}{2}$ có 2 nghiệm.

Cách 2. Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $|f(x)|$ như sau

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	0	x_3	1	x_4	$+\infty$
y	$+\infty$	0	4	0	2	0	4	0	$+\infty$

Dựa vào BBT $\longrightarrow 2|f(x)| - 7 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{7}{2}$ có 6 nghiệm.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Gọi m là số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 3$ và n là số nghiệm của phương trình $f(|x|) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m + n = 4$. B. $m + n = 6$. C. $m + n = 7$. D. $m + n = 8$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $g(x) = |f(x)|$ như hình bên (trong đó a là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành).

Dựa vào BBT $\longrightarrow |f(x)| = 3$ có 3 nghiệm.

x	$-\infty$	a	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	0	$+$
$g(x)$	2	0	$+\infty$	2	$+\infty$

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm $h(x) = f(|x|)$ như hình bên. Dựa vào BBT $\longrightarrow f(|x|) = 3$ có 4 nghiệm.

Vậy $m + n = 3 + 4 = 7$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

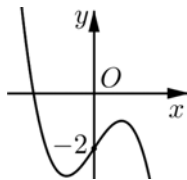
Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



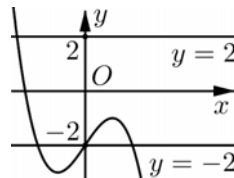
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $[f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$. Do đó số nghiệm của

phương trình $[f(x)]^2 = 4$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với hai đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: Phương trình (1) có 1 nghiệm; Phương trình (2) có 3 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.



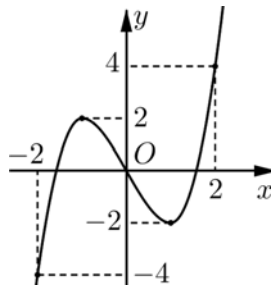
Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên $[-2; 2]$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $|f(x) - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm.

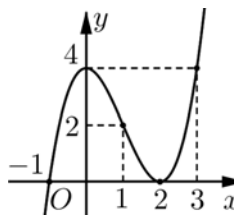
Bài tập 5: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x)-5f(x)+4} = 1 \Leftrightarrow f^3(x)-3f^2(x)+4 = 3f^2(x)-5f(x)+4$

$$\Leftrightarrow f^3(x)-6f^2(x)+5f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 & (1) \\ f(x)=1 & (2) \\ f(x)=5 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) có 2 nghiệm; (2) có 3 nghiệm; (3) có 1 nghiệm.

Bài tập 6. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

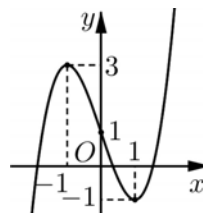
Hỏi phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

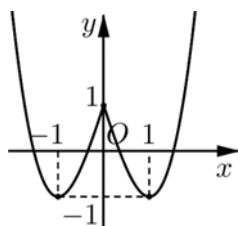


Hướng dẫn giải.

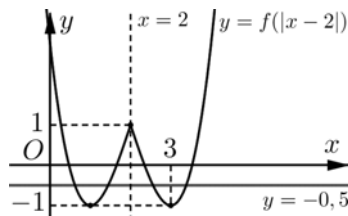
Chọn C.

Đồ thị hàm số $f(|x-2|)$, được suy từ đồ thị $f(x)$ bằng cách:

- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f(x)$ phía bên phải Oy (xóa phần đồ thị bên trái Oy) qua Oy (xem Hình 1);
- Tịnh tiến đồ thị ở bước trên sang phải 2 đơn vị (xem Hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

Từ đồ thị của hàm số $f(|x-2|)$, suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = (x-1) \cdot f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m^2 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x-1| \cdot f(x)$ tại hai điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$.

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

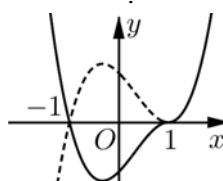
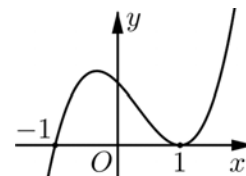
C. $0 < m < 1$.

D. $m > 1$ hoặc $m < 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số $y = (x-1) \cdot f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(x)|x-1|$ như hình bên.



Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $|x-1| \cdot f(x) = m^2 - m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$ khi và chỉ khi

$$m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}.$$

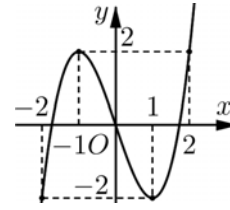
Bài tập 8. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f[f(x)] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra phương trình

$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a & (-2 < a < -1) & (1) \\ f(x) = b & (0 < b < 1) & (2) \\ f(x) = c & (1 < c < 2) & (3) \end{cases}$$

Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm.

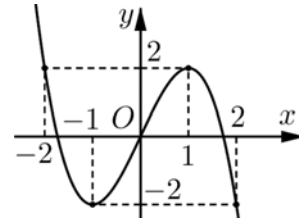
Bài tập 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) = -2$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 9.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra phương trình $f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm.

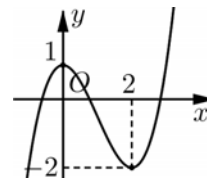
Bài tập 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x^2) + 3 = 0$ là

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.



Hướng dẫn giải.

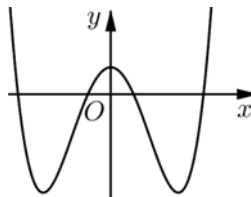
Chọn C.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Khi đó phương trình đã cho trở thành: $f(t) = -\frac{3}{2}$. (*)

Số nghiệm của (*) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$. Dựa vào đồ

thị, phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 < 0 & (\text{loại}) \\ 0 < t_2 < 2 & \longrightarrow x = \pm\sqrt{t_2} \\ t_3 > 2 & \longrightarrow x = \pm\sqrt{t_3} \end{cases}$.

Bài tập 11. Cho hàm số $y = x^4 + mx^2 + n$ với $m, n \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có k nghiệm thực phân biệt, $k \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $k = 2, mn < 0$.

B. $k = 2, mn > 0$.

C. $k = 4, mn < 0$.

D. $k = 4, mn > 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, suy ra $k = 4$.

Do đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $m < 0$, ta thấy hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $n > 0 \rightarrow mn < 0$.

Dạng 6: Biện luận số nghiệm của phương trình

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$		$+$
y	2	1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1 < m < \frac{3}{2}$.

B. $1 \leq m < \frac{3}{2}$.

C. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

D. $1 < m < 2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

YCBT $\Leftrightarrow 1 < 2m - 1 < 2 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}$.

Nhận xét: Sai lầm hay gặp là cho $1 \leq 2m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$		$-$
y	-3	$+\infty$	2	$+\infty$	3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m \leq -2$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq -2, m \geq 1$.

D. $m < -2, m > 1$.

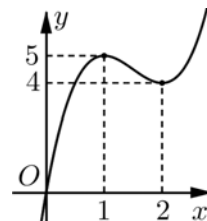
Hướng dẫn giải.

Chọn D.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 > 3 \\ 2m+1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Nhận xét: Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3 \leq 2m+1 \leq 3$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|) + m = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $m < -5$.

B.

$-5 < m < -4$.

C. $4 < m < 5$.

D. $m > -4$.

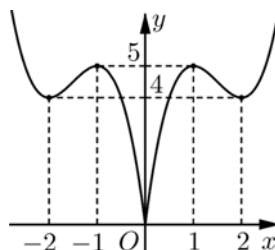
Hướng dẫn giải.

Chọn B.

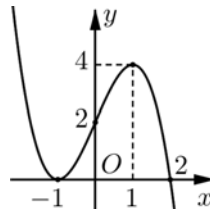
Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.

Ta có $f(|x|) + m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = -m$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 4 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.



Bài tập 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2|f(x)| - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

C. 7.

D. 8.

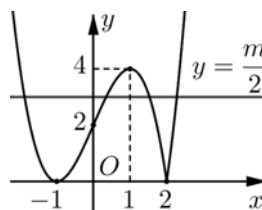
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.

Ta có $2|f(x)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{m}{2}$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 8$.



Bài tập 5. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $(0; 4)$.

B. $(4; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Phân tích: $(x-1)(x^2+mx+m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+mx+m=0 \end{cases} \quad (1)$

YCBT $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+m \cdot 1+m \neq 0 \\ \Delta = m^2-4m > 0 \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

- Nếu nhẩm được một nghiệm x_0 thì phương trình tương đương $\begin{cases} x=x_0 \\ ax^2+b'x+c'=0 \end{cases}$.
- Cô lập tham số m và lập bảng biến thiên hoặc dùng đồ thị.
- Nếu không nhẩm được nghiệm và không cô lập được m thì bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị, cụ thể:
 - Đồ thị cắt trục hoành đúng ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$.
 - Đồ thị có hai điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} = 0$.
 - Đồ thị có một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$ hoặc hàm số không có cực trị.

Chú ý: Nếu $y' = 3ax^2+2bx+c=0$ nhẩm được hai nghiệm thì tính y_{CD}, y_{CT} dễ dàng. Trường hợp không nhẩm được nghiệm thì dùng mối liên hệ hai nghiệm đó là hệ thức Viet.

Bài tập 6. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $(-4; 0)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -4)$.

D. $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Xét hàm bậc ba $y = x^3 - 3x^2$, có

$$y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow y_{CD} = 0 \\ x=2 \longrightarrow y_{CT} = -4 \end{cases}$$

Dựa vào dấu hiệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CD} \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Bài tập 7. Cho phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m = -\frac{1}{2}, m = -1$.

B. $m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{5}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}, m = \frac{5}{2}$.

D. $m = 1, m = -\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Xét hàm bậc ba $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, có

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow y_{CD} = 0 \\ x=1 \longrightarrow y_{CT} = -1 \end{cases}$$

Dựa vào dấu hiệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = y_{\text{CD}} \\ 2m+1 = y_{\text{CT}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = 0 \\ 2m+1 = -1 \end{cases}$.

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 0$. C. $m \neq 3$. D. $m > 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{3} \neq 0 \\ y(0) \cdot y\left(\frac{2m}{3}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 \cdot \left(\frac{-4m^3}{27} + 4\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Bài tập 9. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có đúng hai điểm chung với trục hoành.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = \sqrt[3]{2}$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D. $m = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có hai điểm cực trị và tích hai cực trị bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ y(0) \cdot y(2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 \cdot (-4m^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Bài tập 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3mx + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m \leq 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m) \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

- **TH1.** Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 0$.
- **TH2.** Hàm số có hai cực trị $y_{\text{CD}}, y_{\text{CT}}$ thỏa mãn $y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ y(-\sqrt{m}) \cdot y(\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2 + 2m\sqrt{m})(2 - 2m\sqrt{m}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m < 1$.

Bài tập 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-1)+1$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt $A(1;1)$, B , C .

- A. $m \neq 0$. B. $m < \frac{9}{4}$. C. $0 \neq m < \frac{9}{4}$. D. $m = 0, m > \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ph trình h đ đ: $-x^3 + 3x - 1 = m(x-1)+1$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x - 2 + m = 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Bài tập 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

- A. $m > -3$. B. $m = -3$. C. $m > -2$. D. $m = -2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

$$\text{Ph trình h đ đ: } x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Đề } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

$$\text{Giả sử } x_1 = 1. \text{ Khi đó } x_2, x_3 \text{ là hai nghiệm của } (*). \text{ Theo Viet, ta có: } \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 x_3 = -m - 2 \end{cases}$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 = 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) = 4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài tập 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4, với $M(1;3)$.

- A. $m = 3$. B. $m = 2, m = 3$. C. $m = -2, m = -3$. D. $m = -2, m = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

$$\text{Ph trình h đ đ: } x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases} (*)$$

Đề d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -2 \neq m < -1 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của } (*). \text{ Theo định lí Viet, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải sử } B(x_1; x_1 + 4), C(x_2; x_2 + 4). \text{ Ta có } BC = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \text{ và } d[M, d] = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{YCBT: } S_{\triangle MBC} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(M, d)BC = 4 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 (\text{thỏa mãn}) \\ m = -2 (\text{loại}) \end{cases}.$$

Bài tập 14. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$ là

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; 3)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

$$\text{Phương trình hđđ: } x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (m - 2) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2$.

Giả sử $x_2 > 1$ thì $x_1 = 2 - x_2 < 1$, suy ra $x_1 < 1 < x_2$.

Theo giả thiết $BA = BC$ nên B là trung điểm của AC do đó $x_B = 1$ và $x_A = x_1, x_C = x_2$. Khi đó ta có $x_A + x_C = 2x_B$ nên d luôn cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $AB = BC$. Vậy với $m < 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = 2, m = -1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

$$\text{Ta có } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \xrightarrow{\text{Viet}} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \xrightarrow{x_1 + x_3 = 2x_2} x_2 = -\frac{b}{3a}.$$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8 = 0. \quad (*)$$

Từ giả thiết suy ra phương trình (*) có một nghiệm $x = m$.

$$\text{Thay } x = m \text{ vào phương trình } (*), \text{ ta được } m^3 - 3m \cdot m^2 + 6m \cdot m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Thử lại: } \bullet \text{ Với } m = -1, \text{ ta được } x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 : \text{ thỏa mãn.} \\ x = 2 \end{cases}$$

• Với $m = 2$, ta được $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: không thỏa mãn.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài tập 16. Với điều kiện nào của tham số k thì phương trình $4x^2(1 - x^2) = 1 - k$ có bốn nghiệm phân biệt?

- A.** $0 < k < 2$. **B.** $k < 3$. **C.** $-1 < k < 1$. **D.** $0 < k < 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Xét hàm trùng phương $y = 4x^2(1-x^2) = -4x^4 + 4x^2$, có

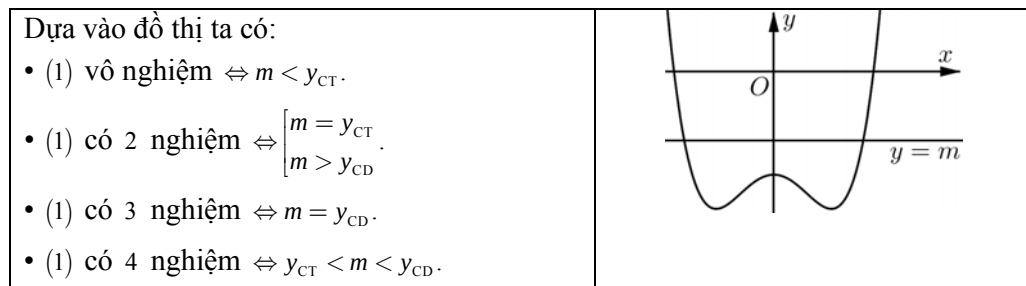
$$y' = -16x^3 + 8x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y(0) = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \end{cases}.$$

YCBT $\Leftrightarrow y_{CT} < 1 - k < y_{CD} \Leftrightarrow 0 < 1 - k < 1 \Leftrightarrow 0 < k < 1$.

Biện luận số nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ ($a > 0, b < 0$). (1)

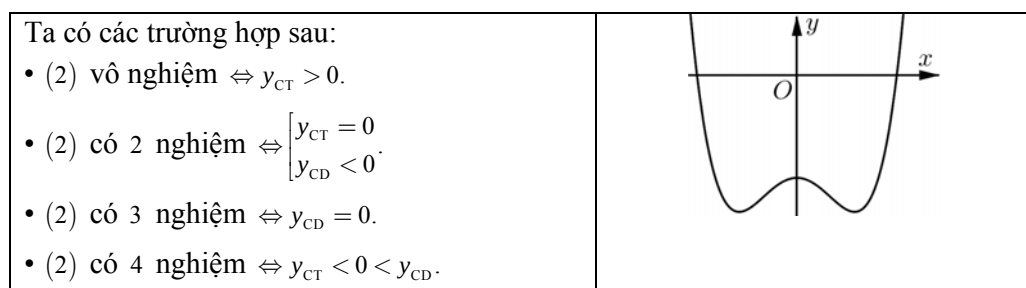
Cách 1. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng $y = m$ (có phương song song với trục hoành)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng như sau:



Cách 2. Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m \iff ax^4 + bx^2 + c - m = 0$. (2)

Do hệ số $a > 0, b < 0$ nên đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c - m$ có dạng như sau:



Bài tập 17. Cho hàm số $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

- A.** $m > 1$. **B.** $m > -\sqrt{2}$. **C.** $m > \sqrt{2}$. **D.** $0 < m \neq 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Xét hàm trùng phương $y = x^4 - m(m+1)x^2 + m^3$, có

$$y' = 4x^3 - 2m(m+1)x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y = m^3 \\ x^2 = \frac{m(m+1)}{2} \longrightarrow y = -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 \end{cases}.$$

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có ba điểm cực trị và $y_{CT} < 0 < y_{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2} > 0 \\ -\frac{m^2(m+1)^2}{4} + m^3 < 0 < m^3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1.$$

Bài tập 18. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Xét hàm trùng phương $y = -x^4 + 2(2+m)x^2 - 4 - m$, có

$$y' = -4x^3 + 4(2+m)x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2+m \end{cases}.$$

Dựa vào dấu hiệu của hàm trùng phương với hệ số của x^4 âm, ta có các trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

• Hàm số có một cực trị và cực trị đó âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \leq 0 \\ -4-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -2.$

• Hàm số có ba điểm cực trị và giá trị cực đại âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ y(\pm\sqrt{2+m}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m < 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-3; -2; -1\}.$

Bài tập 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $0 < m < 1.$ B. $m < -2, m > 5.$ C. $1 < m < \frac{3}{2}.$ D. $0 < m < \frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-3}{x+1} = x - 2m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow x - 3 = (x - 2m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$

Bài tập 20. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

- A. $m < 0.$ B. $m \neq 0.$ C. $m > 0.$ D. $0 < m \neq 1.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đường thẳng d có dạng $y = m(x - 1) = mx - m.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+2}{x-1} = mx - m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow x + 2 = (mx - m)(x - 1) \Leftrightarrow \underbrace{mx^2 - (2m+1)x + m - 2}_{g(x)} = 0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ mg(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m[m - (2m + 1) + m - 2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Bài tập 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số

$y = \frac{-2x + 1}{x + 1}$ (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

A. $\begin{cases} m = -7 \\ m = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -7 \\ m = 5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-2x + 1}{x + 1} = -x + m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = (-x + m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m + 1)^2 - 4(1 - m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$. Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$ và $B(x_2; -x_2 + m)$.

$$\text{YCBT: } AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 - 4(1 - m) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài tập 22. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x - 1}$

(C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x}{x - 1} = x - m + 2 \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x = (x - m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0. \quad (*)$$

Ta có $\Delta = m^2 - 2m + 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ giao điểm của d và (C).

$$\text{Ta có } AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2(m + 1)^2 - 8(m - 2) = 2(m - 1)^2 + 16 \geq 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Bài tập 23. Tìm giá trị thực của tham số k sao cho đường thẳng $d: y = x + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

- A. $k = -4$. B. $k = -3$. C. $k = -1$. D. $k = -2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = x + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x + 2k + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = k^2 - 2k > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k < 0 \end{cases}.$$

Gọi $x_1 \neq x_2$ là hai nghiệm của (*). Giả sử $A(x_1; x_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; x_2 + 2k + 1)$.

$$\text{YCBT: } d[A, Ox] = d[B, Ox] \Leftrightarrow |x_1 + 2k + 1| = |x_2 + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2k + 1 = -(x_2 + 2k + 1) \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4k - 2 \Leftrightarrow -2k = -4k - 2 \Leftrightarrow k = -1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài tập 24. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$.

$$\text{YCBT } \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - m) + m(3 - m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài tập 25. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -2$. B. $m = 0$. C. $m = -\frac{1}{5}$. D. $m = -\frac{11}{5}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = -3x+m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (-3x+m)(x-1) \Leftrightarrow 3x^2 - (1+m)x + m+1 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 10m - 11 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{1+m}{3}$ và $x_1 x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Giả sử $A(x_1; -3x_1+m)$ và $B(x_2; -3x_2+m)$. Suy ra $G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{-3(x_1+x_2)+2m}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{YCBT: } G \in \Delta &\longrightarrow \frac{x_1+x_2}{3} - 2 \cdot \frac{-3(x_1+x_2)+2m}{3} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+m}{9} - 2 \cdot \frac{-(m+1)+2m}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5} \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $4S_{\Delta IAB} = 15$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị.

A. $m = -5$.

B. $m = 5$.

C. $m = \pm 5$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-4}{x-1} = 2x+m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x-4 = (2x+m)(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m-4)x - m+4 = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{4-m}{2}$ và $x_1 x_2 = \frac{4-m}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1+m)$ và $B(x_2; 2x_2+m)$.

$$\text{YCBT: } 4S_{IAB} = 15 \Leftrightarrow 2AB \cdot d[I, AB] = 15 \Leftrightarrow 2AB \cdot \frac{|m|}{\sqrt{5}} = 15 \Leftrightarrow 4AB^2 \cdot m^2 = 1125$$

$$\Leftrightarrow 20(x_1 - x_2)^2 m^2 = 1125 \Leftrightarrow 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] m^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 16)m^2 = 225 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow m = \pm 5 \text{ (thỏa mãn)}.$$