

BÀI 1: NGUYÊN HÀM

☑_ Dạng 1. Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản

⊗-Phương pháp:

①_ Sử dụng bảng nguyên hàm

Hàm sơ cấp	Hàm số hợp $u = u(x)$	Thường gặp
①. $\int dx = x + C$	①. $\int du = u + C$	①. Vi phân $d(ax+b) = \frac{1}{a} dx$
②. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	②. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	②. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax+b)^{\alpha+1} + C$
③. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ ($x \neq 0$)	③. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ ($u(x) \neq 0$)	③. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$ ($a \neq 0$)
④. $\int \cos x dx = \sin x + C$	④. $\int \cos u du = \sin u + C$	④. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
⑤. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	⑤. $\int \sin u du = -\cos u + C$	⑤. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
⑥. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	⑥. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$ Với $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	⑥. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
⑦. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	⑦. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	⑦. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
⑧. $\int e^x dx = e^x + C$	⑧. $\int e^u du = e^u + C$	⑧. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
⑨. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)	⑨. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)	⑨. $\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C$ ($0 < a \neq 1$)

②_ Dùng máy tính cầm tay

Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Tìm $f(x)$ hoặc $F(x)$

✓. Nhấn shift $\frac{d}{dx}(F(X))|_{x=X} - f(X)$

✓. Nhấn phím Calc nhập $X = 2.5$

✓. Nếu kết quả bằng 0 (gần bằng 0) thì đó là đáp án cần chọn

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C.$

C. $\ln|2x+3| + C.$

D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+3} d(2x+3) = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$$

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Dùng máy tính cầm tay:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln(|2x+3|) \right) \Big|_{x=X} - \frac{1}{2x+3}$$

CALC X = -2

Lưu ý: Trong kết quả A và C nếu cho X = 2 thì đều cho kết quả là 0. Vậy khi có trị tuyệt đối thì cho X một giá trị cho biểu thức trong trị tuyệt đối âm.

Câu 2. Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$

B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$

C. $f(x) = 12x^2 + 2x.$

D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \left(\int f(x) dx \right)' = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Dùng máy tính cầm tay tương tự câu 1

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$ và $f(1) = 1$. Khi đó giá trị của $f(5)$ bằng

A. $\ln 2.$

B. $\ln 3.$

C. $\ln 2 + 1.$

D. $\ln 3 + 1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f'(x) dx = f(x) + C$ nên

$$f(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

Mặt khác theo đề ra ta có:

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 1 - 1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ nên}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 1$$

$$\text{Do vậy } f(5) = \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 5 - 1| + 1 = \frac{1}{2} \ln 9 + 1 = \ln 3 + 1.$$

PP nhanh trắc nghiệm

① **Tư duy :**

$$\int_1^5 f'(x) dx = f(5) - f(1)$$

$$\Rightarrow f(5) = f(1) + \int_1^5 f'(x) dx = 1 + \int_1^5 f'(x) dx$$

② **Quy trình bấm máy :** Sử dụng chức năng tính tích phân:

- Tính $\int_1^5 \frac{1}{2x-1} dx$ và lưu vào A

$$\int_1^5 \frac{1}{2x-1} dx = 1.098612289$$

- Tìm phương án có giá trị bằng $1 + A$

A.

$$1+A-(\ln(2)) = 1.405465108$$

D.

$$1+A-(\ln(3)+1) = 5.99 \times 10^{-12}$$

- Là giá trị rất nhỏ gần đến 0 nên thỏa mãn.

Chọn D

②_Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.

A. $\int f(x) dx = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln x + C$.

C. $\int f(x) dx = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + C$.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

D. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{x+1} + C$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là:

A. $x^3 + \cos x + C$.

B. $6x + \cos x + C$.

C. $x^3 - \cos x + C$.

D. $6x - \cos x + C$.

Câu 4. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là.

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C$.

C. $\ln|2x+3| + C$.

D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C$.

Câu 5. Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa công thức nào sau đây sai?

A. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

B. $\int e^x dx = e^x + C$.

C. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$

D. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

A. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

B. $F(x) = e^{2x} + x^3 + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C.$

D. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

A. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

B. $F(x) = 3e^x - x + C.$

C. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$

D. $F(x) = 3e^x + x + C.$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là

A. $e^x - \sin x + C.$

B. $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + \sin x + C.$

C. $xe^{x-1} - \sin x + C.$

D. $e^x + \sin x + C.$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3^x$ là:

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

B. $F(x) = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x \cdot \ln 3 + C.$

2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3.$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3.$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1.$

D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C.$

B. $F(x) = \cos x + \sin x + C.$

C. $F(x) = \cot x - \tan x + C.$

D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C.$

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4e^{2x} + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1.$ Tìm $F(x).$

A. $F(x) = 4e^{2x} + x^2 - 3.$

B. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1.$

C. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 + 1.$

D. $F(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1.$

- Câu 14.** Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng
A. 125. **B.** 625. **C.** 5. **D.** 25.
- Câu 15.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.
A. $F(1) = \ln 2 + 1$. **B.** $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$. **C.** $F(1) = 0$. **D.** $F(1) = \ln 2 + 2$.
- Câu 16.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 2^x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Ta có $F(x)$ bằng
A. $x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}$. **B.** $x^2 + \frac{1 - 2^x}{\ln 2}$. **C.** $1 + (2^x - 1) \ln 2$. **D.** $x^2 + 2^x - 1$.
- Câu 17.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là
A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. **B.** $F(2) = \ln 3 + 2$. **C.** $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. **D.** $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.
- Câu 18.** Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là
A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$. **B.** $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$. **C.** $-\cot x + x^2 - 1$. **D.** $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.
- Câu 19.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
A. $F(x) = \frac{-\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$. **B.** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.
C. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$. **D.** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$.
- Câu 20.** Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 1$ trên $(-\infty; +\infty)$, biết $F(0) = 2$.
A. $F(x) = \ln x - x - 1$. **B.** $F(x) = e^x - x - 1$.
C. $F(x) = \frac{1}{e^x} - x + 1$. **D.** $F(x) = e^x - x + 1$.

Bảng đáp án

1.D	2.D	3.C	4.A	5.C	6.A	7.C	8.D	9.D	10.A
11.D	12.D	13.B	14.B	15.D	16.A	17.A	18.A	19.B	20.D

Hướng dẫn giải

- Câu 1.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.

- A.** $\int f(x) dx = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln x + C$.
C. $\int f(x) dx = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f(x)dx = \int \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)dx = \int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + C.$

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

D. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

Lời giải

Chọn D

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là:

A. $x^3 + \cos x + C.$

B. $6x + \cos x + C.$

C. $x^3 - \cos x + C.$

D. $6x - \cos x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C.$

Câu 4. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C.$

C. $\ln|2x+3| + C.$

D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C.$

Lời giải

Chọn A

$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

Câu 5. Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa công thức nào sau đây sai?

A. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

B. $\int e^x dx = e^x + C.$

C. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + c.$

D. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Lời giải

Chọn C

Theo bảng nguyên hàm ta chọn câu sai là $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + c.$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

A. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

B. $F(x) = e^{2x} + x^3 + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C.$

D. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (e^{2x} + x^2) dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

Vậy $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (x^3 + 3x + 2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

A. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

B. $F(x) = 3e^x - x + C.$

C. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$

D. $F(x) = 3e^x + x + C.$

Lời giải

Chọn D

$\int e^x(3 + e^{-x}) dx = \int (3e^x + 1) dx = 3e^x + x + C.$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là

A. $e^x - \sin x + C.$

B. $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + \sin x + C.$

C. $xe^{x-1} - \sin x + C.$

D. $e^x + \sin x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int (e^x + \cos x) dx = e^x + \sin x + C.$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3^x$ là:

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

B. $F(x) = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x \cdot \ln 3 + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x) dx = \int (x + 3^x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

Câu 11. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3.$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3.$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1.$

D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \int \cos u du = \sin u + C ; \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\text{nên } \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 1 + C. \text{ Mà } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 1. \text{ Do đó } F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C.$

B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$

C. $F(x) = \cot x - \tan x + C.$

D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cot x - \tan x + C$$

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4e^{2x} + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = 4e^{2x} + x^2 - 3.$

B. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1.$

C. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 + 1.$

D. $F(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(x) = \int (4e^{2x} + 2x) dx = 2e^{2x} + x^2 + C.$$

$$F(0) = 2e^{2 \cdot 0} + 0^2 + C = 2 + C. \text{ Mà } F(0) = 1 \Rightarrow 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Do đó: } F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng:

A. 125.

B. 625.

C. 5.

D. 25.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(x) \text{ được gọi là nguyên hàm của } f(x) \text{ trên } K \text{ nếu } F'(x) = f(x), \forall x \in K$$

$$\text{Mà } y = F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } y = x^2 \text{ nên } F'(x) = x^2$$

$$\text{Vậy } F'(25) = 25^2 = 625.$$

Câu 15. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \ln 2 + 1.$

B. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1.$

C. $F(1) = 0.$

D. $F(1) = \ln 2 + 2.$

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x) dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$$

$$\text{Vì } F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) \text{ nên } F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 1.$$

$$\text{Vậy } F(1) = \frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) + 1 = \frac{1}{2} \ln 2 + 1.$$

Câu 16. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 2^x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Ta có $F(x)$ bằng

A. $x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}$.

B. $x^2 + \frac{1 - 2^x}{\ln 2}$.

C. $1 + (2^x - 1) \ln 2$.

D. $x^2 + 2^x - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int (2x + 2^x) dx = x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} + C. \text{ Do đó,}$$

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = 0 \Leftrightarrow 0^2 + \frac{2^0}{\ln 2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\ln 2}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$ và $f(1) = 2$. Khi đó giá trị của $f(2)$ bằng

A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$.

B. $F(2) = \ln 3 + 2$.

C. $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.

D. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int f'(x) dx = f(x) + C \text{ nên } f(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

$$\text{Mặt khác theo đề ra ta có: } f(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 1 - 1| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2 \text{ nên } f(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 2$$

$$\text{Do vậy } f(2) = \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 2 - 1| + 2 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

Câu 18. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$.

C. $-\cot x + x^2 - 1$.

D. $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cot \frac{\pi}{4} + C = -1 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi^2}{16}$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

A. $F(x) = \frac{-\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.

B. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.

C. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$.

D. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$+ F(x) = \int \sin(\pi - 2x) dx = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + C$$

$$+ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$$

Câu 20. Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 1$ trên $(-\infty; +\infty)$, biết $F(0) = 2$.

A. $F(x) = \ln x - x - 1$. **B.** $F(x) = e^x - x - 1$. **C.** $F(x) = \frac{1}{e^x} - x + 1$. **D.** $F(x) = e^x - x + 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C$$

$$\text{Theo bài: } F(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 - 0 + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\text{Vậy } F(x) = e^x - x + 1$$

☑_Dạng 2. Đổi biến

⊗-Phương pháp:

- 1_**
 - ✓. Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
 - ✓. Tính vi phân hai vế: $dt = \varphi'(x) dx$.
 - ✓. Biểu thị: $f(x) dx = g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = g(t) dt$.
 - ✓. Khi đó: $I = \int f(x) dx = \int g(t) dt = G(t) + C$

2_Casio: Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Tìm $f(x)$ hoặc $F(x)$

- ✓. Nhấn shift $\frac{d}{dx}(F(X))|_{x=X} - f(X)$
- ✓. Nhấn phím Calc nhập $X = 2.5$
- ✓. Nếu kết quả bằng 0 (gần bằng 0) thì đó là đáp án cần chọn

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$. A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln 1+3\cos x + C.$ B. $\int f(x) dx = \ln 1+3\cos x + C.$ C. $\int f(x) dx = 3 \ln 1+3\cos x + C.$ D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln 1+3\cos x + C.$	
Lời giải Chọn D • Đặt $t = 1 + 3\cos x \Rightarrow dt = -3\sin x dx$ $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln t + C = -\frac{1}{3} \ln 1+3\cos x + C$	PP nhanh trắc nghiệm ✎ Dùng máy tính cầm tay
Câu 2. Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx$. A. $I = \frac{2}{3} \sqrt{(\ln x+1)^3} + C.$ B. $I = \sqrt{\ln x+1} + C.$ C. $I = \frac{1}{2} \sqrt{(\ln x+1)^2} + C.$ D. $I = 2\sqrt{\ln x+1} + C.$	
Lời giải Chọn D • Đặt $t = \sqrt{\ln x+1} \Rightarrow t^2 = \ln x+1 \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x} dx$ $I = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx = 2 \int dt = 2t + C = 2\sqrt{\ln x+1} + C$	PP nhanh trắc nghiệm ✎ Dùng máy tính cầm tay
Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}$? A. $F(x) = -\frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$ B. $F(x) = \frac{8}{3}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$ C. $F(x) = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{3}{4}} + C.$ D. $F(x) = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$	
Lời giải Chọn D • Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2+1 \Rightarrow 3t^2 dt = 2x dx$ $\int x\sqrt[3]{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \frac{3}{8} t^4 + C = \frac{3}{8} (x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$	PP nhanh trắc nghiệm ✎ Dùng máy tính cầm tay.

②_Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Tìm $\int \frac{\ln x}{x} dx$ có kết quả là.

- A. $\ln|\ln x| + C$. B. $\ln \frac{x^2}{2} + C$. C. $\frac{x^2}{2}(\ln x - 1) + C$. D. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Câu 2. Nguyên hàm $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ bằng.

- A. $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$. B. $2\sqrt{x} + C$.
C. $2\ln|\sqrt{x}+1| + C$. D. $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$.

Câu 3. Cho hàm số $F(x) = \int x\sqrt{x^2+2} dx$. Biết $F(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}$, tính $F(\sqrt{7})$.

- A. 7. B. 11. C. $\frac{23}{6}$. D. $\frac{40}{3}$.

Câu 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = \frac{3}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là:

- A. $\frac{1}{2}e + 2$. B. $2e + 1$. C. $\frac{1}{2}e + 1$. D. $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}$.

Câu 5. Tính nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x+3} \right) dx$.

- A. $2\ln|2x+3| + C$. B. $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$. C. $\ln|2x+3| + C$. D. $\frac{1}{2}\ln(2x+3) + C$.

Câu 6. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$. B. $I = \int u^5 du$. C. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$. D. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$.

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$ là:

- A. $\frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C$. B. $2\sqrt{4+x^3} + C$. C. $\frac{1}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C$. D. $2\sqrt{(4+x^3)^3} + C$.

Câu 8. Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{33}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$. B. $\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$.
C. $\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$. D. $-\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C$.

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

- A. $\frac{1}{4} \cos^3 x + C$ B. $\frac{1}{4} \sin^3 x + C$

C. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

D. $\frac{1}{4} \sin^4 x + \cos x + C$

Câu 10. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{4}{15}$.

B. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}$.

C. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

D. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

⊠2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Nếu $F(x) = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ thì.

A. $F(x) = \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+3}} + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C$.

C. $F(x) = \sqrt{x^2+2x+3} + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+2x+3} + C$.

Câu 12. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e) - F(1)$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{e}$.

D. $I = e$.

Câu 13. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$?

A. $F(x) = \sqrt{x+1}$. B. $F(x) = 4\sqrt{x+1}$. C. $F(x) = 2\sqrt{x+1}$. D. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ là:

A. $I = x + \ln|x| + C$.

B. $I = e^x + \ln(e^x+1) + C$.

C. $I = x - \ln|x| + C$.

D. $I = e^x + 1 - \ln(e^x+1) + C$.

Câu 15. Một nguyên hàm của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^6$.

B. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3$.

C. $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$.

D. $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^3$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

A. $I = -x - \ln|1+e^x| + C$.

B. $I = x + \ln|1+e^x| + C$.

C. $I = x - \ln|1-e^x| + C$.

D. $I = x - \ln|1+e^x| + C$.

Câu 17. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng:

A. $\frac{23}{252}$.

B. $\frac{241}{252}$.

C. $\frac{52}{9}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \int \frac{3\sin x - 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$.

A. $\int f(x) dx = \ln|3\sin x - 2\cos x| + C$.

B. $\int f(x) dx = -\ln|(3\cos x + 2\sin x)| + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln|3\cos x + 2\sin x| + C$.

D. $\int f(x) dx = -\ln|-3\cos x + 2\sin x| + C$.

Câu 19. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4) du$.

B. $\int (u^2 - 3) du$.

C. $\int 2u(u^2 - 4) du$.

D. $\int (u^2 - 4) du$.

Câu 20. Kết quả của phép tính $\int \frac{dx}{e^x - 2e^{-x} + 1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$.

B. $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$.

C. $\ln(e^x - 2e^{-x} + 1) + C$.

D. $\frac{1}{3} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 2} + C$.

Bảng đáp án

1.D	2.D	3.A	4.B	5.C	6.D	7.A	8.A	9.D	10.C
11.C	12.A	13.B	14.D	15.B	16.D	17.D	18.B	19.A	20.A

Hướng dẫn giải

Câu 1. Tìm $\int \frac{\ln x}{x} dx$ có kết quả là.

A. $\ln|\ln x| + C$.

B. $\ln \frac{x^2}{2} + C$.

C. $\frac{x^2}{2}(\ln x - 1) + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Câu 2. Nguyên hàm $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ bằng.

A. $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$.

B. $2\sqrt{x} + C$.

C. $2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$.

D. $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

$\int \frac{2t}{1+t} dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$.

Câu 3. Cho hàm số $F(x) = \int x\sqrt{x^2 + 2} dx$. Biết $F(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}$, tính $F(\sqrt{7})$.

A. 7.

B. 11.

C. $\frac{23}{6}$.

D. $\frac{40}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } F(x) = \int x\sqrt{x^2+2}dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+2}d(x^2+2) = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+2})^3 + C$$

$$\text{Mà } F(\sqrt{2}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{3} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = -2$$

$$\text{Vậy } F(\sqrt{7}) = 9 - 2 = 7.$$

Câu 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = \frac{3}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}e + 2.$

B. $2e + 1.$

C. $\frac{1}{2}e + 1.$

D. $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$\text{Theo giả thiết: } F(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 1. \text{ Vậy } F\left(\frac{1}{2}\right) = 2e + 1.$$

Câu 5. Tính nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x+3}\right)dx$.

A. $2\ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$

C. $\ln|2x+3| + C.$

D. $\frac{1}{2}\ln(2x+3) + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int \left(\frac{1}{2x+3}\right)dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2x+3}\right)d(2x+3) = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$$

Câu 6. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng.

A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du.$

B. $I = \int u^5 du.$

C. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du.$

D. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } u = 4x^4 - 3 \Rightarrow du = 16x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{du}{16}; \text{ Suy ra: } I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx = \frac{1}{16} \int u^5 du.$$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$ là:

A. $\frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

B. $2\sqrt{4+x^3} + C.$

C. $\frac{1}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

D. $2\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int x^2\sqrt{4+x^3}dx &= \frac{1}{3} \int \sqrt{4+x^3}d(4+x^3) = \frac{1}{3} \int (4+x^3)^{\frac{1}{2}} d(4+x^3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (4+x^3)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{(4+x^3)^3} + C. \end{aligned}$$

Câu 8. Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng.

A. $\frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

B. $\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

C. $\frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

D. $-\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

Lời giải

Chọn A

Biến đổi $I = \int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx = \int \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{10} \cdot \frac{dx}{(x+1)^2}.$

Đặt $t = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow dt = \frac{3}{(x+1)^2} dx.$

Do đó $I = \frac{1}{3} \int t^{10} dt = \frac{1}{33} t^{11} + C = \frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4} \cos^3 x + C$

B. $\frac{1}{4} \sin^3 x + C$

C. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

D. $\frac{1}{4} \sin^4 x + \cos x + C$

Lời giải

Chọn C

Sử dụng casio: đạo hàm của đáp án tại 3 trừ hàm dưới dấu tích phân tại 3 bằng 0 thì chọn đáp án.

Câu 10. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{4}{15}.$

B. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}.$

C. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

D. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot \cos 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos 2x dx.$

Ta có:

$F(x) = \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int t^2 \cdot (1-t^2) dt = \frac{1}{2} \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{10} t^5 + C$

$= \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + C.$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{10} \sin^5 \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{15}.$

Vậy $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

Câu 11. Nếu $F(x) = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ thì:

A. $F(x) = \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C.$

C. $F(x) = \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x+3} \Rightarrow t^2 = x^2+2x+3 \Rightarrow 2tdt = 2(x+1)dx \Rightarrow (x+1)dx = tdt.$

Do đó $F(x) = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{tdt}{t} = t + C = \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

Câu 12. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e) - F(1)$

A. $I = \frac{1}{2}.$

B. $I = 1.$

C. $I = \frac{1}{e}.$

D. $I = e.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}.$

$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C = F(x) + C \Rightarrow F(e) - F(1) = \frac{1}{2}.$

Câu 13. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$?

A. $F(x) = \sqrt{x+1}.$

B. $F(x) = 4\sqrt{x+1}.$

C. $F(x) = 2\sqrt{x+1}.$

D. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{x+1}} dx = 4 \int \frac{d(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = 4\sqrt{x+1} + C.$

Họ nguyên hàm của hàm số đã cho là $\int \frac{2}{\sqrt{x+1}} dx = 4\sqrt{x+1} + C$, nên hàm số đã cho có một nguyên hàm là hàm $F(x) = 4\sqrt{x+1}.$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ là:

A. $I = x + \ln|x| + C.$

B. $I = e^x + \ln(e^x+1) + C.$

C. $I = x - \ln|x| + C.$

D. $I = e^x + 1 - \ln(e^x+1) + C.$

Lời giải

Chọn D

$I = \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx = \int \frac{e^x}{e^x+1} e^x dx.$

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow e^x = t - 1 \Rightarrow dt = e^x dx.$

Ta có $I = \int \frac{t-1}{1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = t - \ln|t| + C$.

Trở lại biến cũ ta được $I = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C$.

Câu 15. Một nguyên hàm của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$ là:

- A. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^6$. B. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3$. C. $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$. D. $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx$.

$$\Rightarrow \int x\sqrt{x^2+1}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} + C.$$

Câu 16. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

- A. $I = -x - \ln|1+e^x| + C$. B. $I = x + \ln|1+e^x| + C$.
C. $I = x - \ln|1-e^x| + C$. D. $I = x - \ln|1+e^x| + C$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}.$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C \\ = x - \ln|e^x+1| + C.$$

Câu 17. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng:

- A. $\frac{23}{252}$. B. $\frac{241}{252}$. C. $\frac{52}{9}$. D. $\frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3x-2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}dt = dx$.

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3} \int \frac{t+2}{3} t^6 dt = \frac{2}{9} \int (t^7 + 2t^6) dt = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^8}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{36} \cdot (3x-2)^8 + \frac{4}{63} \cdot (3x-2)^7 + C.$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{1}{36}, B = \frac{4}{63}, 12 \cdot \frac{1}{36} + 7 \cdot \frac{4}{63} = \frac{7}{9}.$$

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{3\sin x - 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x}$.

- A. $\int f(x) dx = \ln|3\sin x - 2\cos x| + C$. B. $\int f(x) dx = -\ln|(3\cos x + 2\sin x)| + C$.

C. $\int f(x)dx = \ln|3\cos x + 2\sin x| + C.$

D. $\int f(x)dx = -\ln|-3\cos x + 2\sin x| + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)dx = -\int \frac{d(3\cos x + 2\sin x)}{3\cos x + 2\sin x} = -\ln(3\cos x + 2\sin x) + C.$

Câu 19. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4)du.$

B. $\int (u^2 - 3)du.$

C. $\int 2u(u^2 - 4)du.$

D. $\int (u^2 - 4)du.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $u \geq 0$ nên $u^2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u du \\ x = u^2 - 1 \end{cases}.$

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{u^2-1-3}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2 - 4)du.$

Câu 20. Kết quả của phép tính $\int \frac{dx}{e^x - 2e^{-x} + 1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C.$

B. $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C.$

C. $\ln(e^x - 2e^{-x} + 1) + C.$

D. $\frac{1}{3} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 2} + C.$

☑ Dạng 3. Từng Phần

⊗ **-Phương pháp:**

◆ **_Định lý.** Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

$$\text{Khi đó: } \boxed{\int u dv = uv - \int v du. (*)}$$

❶ **_Tự luận.** Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý : Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau:

⊛ **Dạng 1.** $I = \int P(x) \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\text{Với dạng này, ta đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx \end{cases}.$$

⊛ **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\text{Với dạng này, ta đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}.$$

⊛ **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

$$\text{Với dạng này, ta đặt } \begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}.$$

❷ **_Casio:** Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Tìm $f(x)$ hoặc $F(x)$

✓. Nhấn shift $\frac{d}{dx} (f(X)) \Big|_{x=X} - F(X)$

✓. Nhấn phím Calc nhập $X = 2.5$

✓. Nếu kết quả bằng 0 (gần bằng 0) thì đó là đáp án cần chọn.

Nguyên tắc chung để đặt u và dv : Tìm được v dễ dàng và $\int v du$ tính được.

Nhấn mạnh: Thứ tự ưu tiên khi chọn đặt u : **“Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ”** (hàm lôgarit, hàm đa thức, hàm lượng giác, hàm mũ).

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos 2x$ là:

A. $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$

B. $x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C.$

C. $x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$

Lời giải

Chọn A

$$I = \int x \cos 2x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó

$$I = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Máy tính cầm tay.

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln 2x$ là:

A. $\frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $x^2 \ln 2x - \frac{x^2}{2} + C.$

C. $\frac{x^2}{2} (\ln 2x - 1) + C.$

D. $\frac{x^2}{2} \ln 2x - x^2 + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\bullet \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln 2x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx \\ = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Máy tính cầm tay

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$.

A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $F(x) = 2e^{2x} x - 2 + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} x - 2 + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } F(x) = \int x.e^{2x} dx.$$

Đặt

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Máy tính cầm tay

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$ $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$	
--	--

②_Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

- A. $-x \cos x + \sin x + C$. B. $x \sin x + \cos x + C$.
C. $x \cos x + \sin x + C$. D. $x \cos x - \sin x + C$.

Câu 2. Kết quả của $I = \int x e^x dx$ là:

- A. $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$. B. $I = e^x + x e^x + C$.
C. $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$. D. $I = x e^x - e^x + C$.

Câu 3. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả **đúng**?

- A. $F(x) = \frac{1}{4} (2x \cos 2x + \sin 2x) + C$. B. $F(x) = -\frac{1}{4} (2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.
C. $F(x) = -\frac{1}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x) + C$. D. $F(x) = \frac{1}{4} (2x \cos 2x - \sin 2x) + C$.

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)e^x$ là

- A. $x e^x + C$. B. $(x+2)e^x + C$. C. $(x-1)e^x + C$. D. $2x e^x + C$.

Câu 5. Họ các nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là:

- A. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$. B. $x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C$.
C. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$. D. $x \ln x + \frac{1}{2} x + C$.

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \int x \sin 2x dx$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi \sqrt{3}}{12}$. B. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi \sqrt{3}}{6}$.
C. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12}$. D. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{24}$.

Câu 8. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

B. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$.

A. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Câu 10. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = e + 2$.

B. $F(1) = 11e - 3$.

C. $F(1) = e + 3$.

D. $F(1) = e + 7$.

⊠2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

A. $x \ln x + x + C$.

B. $x \ln x + C$.

C. $x \ln x - x + C$.

D. $x \ln x - x$.

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 1) + C$.

Câu 13. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = -\frac{1}{4}$.

B. $ab = \frac{1}{8}$.

C. $ab = \frac{1}{4}$.

D. $ab = -\frac{1}{8}$.

Câu 14. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

A. $ab = \frac{1}{4}$.

B. $ab = -\frac{1}{8}$.

C. $ab = \frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 15. Biết $I = \int_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}} dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = 8$.

B. $S = 10$.

C. $S = 12$.

D. $S = 16$.

Câu 16. Ta có $\int x^2 \cdot e^x dx = (x^2 + mx + n)e^x + C$ khi đó $m.n$ bằng.

A. 0.

B. -4.

C. 5.

D. 4.

Câu 17. Nguyên hàm của hàm 2018 $f(x) = x.e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

D. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$.

Câu 18. Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

- A. $T = 1011$. B. $T = -3035$. C. $T = 1007$. D. $T = -5053$.

Câu 19. Biết $\int (x+3) \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Khi đó tổng $S = m^2 + n^2$ có giá trị bằng

- A. 5. B. 65. C. 41. D. 10.

Câu 20. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$.

- A. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2 \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$. B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C$.
C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C$. D. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C$.

Bảng đáp án

1.A	2.D	3.C	4.A	5.C	6.D	7.C	8.C	9.D	10.D
11.C	12.B	13.B	14.B	15.C	16.B	17.B	18.B	19.B	20.A

Hướng dẫn giải

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- A. $-x \cos x + \sin x + C$. B. $x \sin x + \cos x + C$.
C. $x \cos x + \sin x + C$. D. $x \cos x - \sin x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int x \sin x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 2. Kết quả của $I = \int x e^x dx$ là

- A. $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$. B. $I = e^x + x e^x + C$.
C. $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$. D. $I = x e^x - e^x + C$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I = \int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } I' = (x e^x - e^x + C)' = e^x + x e^x - e^x = x e^x.$$

Câu 3. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả đúng?

- A. $F(x) = \frac{1}{4} (2x \cos 2x + \sin 2x) + C$. B. $F(x) = -\frac{1}{4} (2x \cos 2x + \sin 2x) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$, ta được

$$F(x) = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)e^x$ là

A. $xe^x + C.$

B. $(x+2)e^x + C.$

C. $(x-1)e^x + C.$

D. $2xe^x + C.$

Lời giải

Chọn A

Xét $\int f(x) dx = \int (x+1)e^x dx = \int (x+1)de^x = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C.$

Câu 5. Họ các nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

B. $x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C.$

C. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

D. $x \ln x + \frac{1}{2}x + C.$

Lời giải:

Chọn C

Đặt $\begin{cases} x dx = dv \\ \ln x = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2}x^2 \\ du = \frac{1}{x} \end{cases}$. Suy ra $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2).$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C.$

Lời giải

Chọn D

Đối với nguyên hàm dạng $\int P(x) \ln[Q(x)] dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \ln[Q(x)] \\ dv = P(x) dx \end{cases}$ để tính theo phương pháp nguyên hàm từng phần.

Câu 7. Cho hàm số $y = \int x \sin 2x dx$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$

B. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$

C. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}.$

D. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{24}.$

Lời giải

Chọn C

$$y = \int x \sin 2x dx \Rightarrow y' = x \sin 2x ; y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

Câu 8. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

B. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C).$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2. \text{ Vậy } F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2.$$

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = xe^{2x}$.

A. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ v = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Câu 10. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = e + 2$.

B. $F(1) = 11e - 3$.

C. $F(1) = e + 3$.

D. $F(1) = e + 7$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int (5x+1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 5x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$F(x) = (5x+1)e^x - \int 5e^x dx = (5x+1)e^x - 5e^x + C = (5x-4)e^x + C.$$

$$\text{Mặt khác } F(0) = 3 \Leftrightarrow -4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7.$$

$$\Rightarrow F(x) = (5x-4)e^x + 7.$$

$$\text{Vậy } F(1) = e + 7.$$

Câu 11. Kết quả của $\int \ln x dx$ là

A. $x \ln x + x + C$.

B. $x \ln x + C$.

C. $x \ln x - x + C$.

D. $x \ln x - x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C.$$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C.$

Lời giải

Chọn B

$$I = \int f(x) dx = \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2t dt = dx \Rightarrow I = 2 \int t^2 \ln t^2 \cdot dt = 4 \int t^2 \ln t \cdot dt.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = t^2 dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{t^3}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt \right) = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{9} t^3 + C \right) = \frac{2}{9} t^3 (3 \ln t - 1) + C \\ &= \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln \sqrt{x} - 1) + C = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C. \end{aligned}$$

Câu 13. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = -\frac{1}{4}.$

B. $ab = \frac{1}{8}.$

C. $ab = \frac{1}{4}.$

D. $ab = -\frac{1}{8}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 14. Biết $\int x e^{2x} dx = a x e^{2x} + b e^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

A. $ab = \frac{1}{4}.$

B. $ab = -\frac{1}{8}.$

C. $ab = \frac{1}{8}.$

D. $ab = -\frac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$\text{Vậy: } a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow ab = -\frac{1}{8}.$$

Câu 15. Biết $I = \int_0^2 (3x-1) e^{\frac{x}{2}} dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = 8$.

B. $S = 10$.

C. $S = 12$.

D. $S = 16$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_0^2 (3x-1) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x-1 \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3dx \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = 2(3x-1) e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2 - \int_0^2 6e^{\frac{x}{2}} dx = 10e + 2 - 12e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2 = 10e + 2 - 12e + 12 = 14 - 2e.$$

$$\text{Vậy } a + b = 12.$$

Câu 16. Ta có $\int x^2 \cdot e^x dx = (x^2 + mx + n) e^x + C$ khi đó $m.n$ bằng.

A. 0.

B. -4.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2e^x dx = 2x e^x - 2e^x + C.$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cdot e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

$$\text{Khi đó } m.n = -4.$$

Câu 17. Nguyên hàm của hàm 2018 $f(x) = x \cdot e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x-2) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x} (x-2) + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

Câu 18. Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

A. $T = 1011$.

B. $T = -3035$.

C. $T = 1007$.

D. $T = -5053$.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ nên ta có: $(F(x))' = f(x)$, với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow (2ax^2 + x(2b + 2a) - 2c + b)e^{2x} = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}, \text{ với mọi } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2018 \\ 2b + 2a = -3 \\ -2c + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = -\frac{2021}{2} \\ c = -\frac{2023}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b + 4c = 1009 + 2 \cdot \left(-\frac{2021}{2}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2023}{4}\right) = -3035.$$

Câu 19. Biết $\int (x + 3) \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x + n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Khi đó tổng $S = m^2 + n^2$ có giá trị bằng:

A. 5.

B. 65.

C. 41.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + 3 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int (x + 3) \cdot e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} (x + 3) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} (x + 3) - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4} e^{-2x} \cdot (2x + 6 + 1) + C = -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x + 7) + C \Rightarrow m = 4; n = 7 \\ &\Rightarrow m^2 + n^2 = 65. \end{aligned}$$

Câu 20. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$.

A. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2 \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$.

B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C$.

C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C$.

D. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có $\int \sin \sqrt{x} dx = \int 2t \sin t dt$

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = 2dt \\ v = -\cos t \end{cases}$.

$$\int 2t \sin t dt = -2t \cos t + \int 2 \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

BÀI 2: TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

☑_ Dạng 1. Đổi biến số dạng 1

⊗-Phương pháp:

◆_**Định lí.** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $x \in [a; b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du.$$

◆_**Phương pháp.** Để tính tích phân: $I = \int_a^b g(x) dx$ ta thực hiện các bước:

✓. **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$

✓. **Bước 2.** Thực hiện phép đổi cận:

▪ Với $x = a$ thì $t = u(a)$.

▪ Với $x = b$ thì $t = u(b)$. (Nhớ : **đổi biến phải đổi cận**)

✓. **Bước 3.** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ đơn giản và dễ tính hơn.

◆_**Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân**

Dấu hiệu	Có thể đặt
Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$
Có $(ax + b)^n$	$t = ax + b$
Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$
Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$
Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x
Có $\sin x dx$	$t = \cos x$
Có $\cos x dx$	$t = \sin x dx$
Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$: A. $I = \frac{16}{5}$. B. $I = \frac{31}{10}$. C. $I = \frac{1}{10}$. D. $I = -\frac{1}{10}$.	
Lời giải Chọn B - Đặt $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. - Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$ - Nên $I = \int_1^2 \frac{t^4}{2} dt = \frac{t^5}{10} \Big _1^2 = \frac{31}{10}$.	PP nhanh trắc nghiệm - Để tính giá trị 1 tích phân xác định bằng máy tính 570ES. ✓. Bước 1. Sử dụng lệnh để màn hình máy tính cầm tay hiện: $\int_0^1 \square \square dx$ ✓. Bước 2. Nhập hàm số f(x) ✓. Bước 3. Nhập cận ✓. Bước 4. Ấn phím =
Câu 2. Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng? A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$. B. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$. C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$. D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$.	
Lời giải Chọn C - Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$. - Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$ - Nên $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$.	PP nhanh trắc nghiệm + Tính tích phân I bằng MTCT. + Tính tích phân từng đáp án A, B, C, D. + Đối chiếu kết quả, chọn đáp án C.
Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$. A. $I = -\frac{1}{4} \pi^4$. B. $I = -\pi^4$. C. $I = 0$. D. $I = -\frac{1}{4}$.	
Lời giải Chọn C - Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$ - Đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 1$; với $x = \pi \Rightarrow t = -1$. - Vậy $I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big _{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$.	PP nhanh trắc nghiệm ✎ Sử dụng máy tính, tính tích phân hàm lượng giác phải chuyển về đơn vị radian.

②_Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x^2 + x + 2)^5 (2x + 1) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = (x^2 + x)^5 dx$. B. $t = 2x + 1$.
C. $t = (x^2 + x)^5 (2x + 1)$. D. $t = x^2 + x + 2$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{x^5 + x^3 + 1} (5x^4 + 3x^2) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = (x^5 + x^3) dx$. B. $t = 5x^4 + 3x^2$. C. $t = \sqrt{x^5 + x^3 + 1}$. D. $t = \sqrt{x^5 + x^3} dx$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{4x^3 + 3x^2}{x^4 + x^3 + 2} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = \frac{1}{x^4 + x^3 + 2}$. B. $t = 4x^3 + 3x^2$. C. $t = \frac{4x^3 + 3x^2}{x^4 + x^3 + 2}$. D. $t = x^4 + x^3 + 2$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^5 x dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = \frac{1}{x}$. B. $t = \ln x$. C. $t = \ln^5 x$. D. $t = \frac{dx}{x}$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{x^2+x} (2x + 1) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = x^2 + 3x + 1$. B. $t = 2x + 1$. C. $t = x^2 + x$. D. $t = e^{x^2+x} (2x + 1)$.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_0^1 3^{x^3+x} (3x^2 + 1) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = x^3 + 3x^2$. B. $t = 3x^2 + x$. C. $t = x^3 + x$. D. $t = 3^{x^3+x} (3x^2 + 1)$.

Câu 7. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = \sin^6 x$. B. $t = \sin x$. C. $t = \cos x$. D. $t = \sin^6 x \cdot \cos x$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \cdot \sin x dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = \cos^6 x$. B. $t = \sin x$. C. $t = \cos x$. D. $t = \cos^6 x \cdot \sin x$.

Câu 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = \tan^6 x$. B. $t = \tan x$. C. $t = \cos x$. D. $t = \cos^2 x$.

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^6 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất.

- A. $t = \cot^6 x$. B. $t = \sin x$. C. $t = \cot x$. D. $t = \sin^2 x$.

☒2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng:

- A. 6. B. 8. C. 9. D. 10.

- Câu 12.** Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?
- A. $3 \int_0^1 t dt$. B. $\int_0^1 t^3 dt$. C. $3 \int_0^1 t^2 dt$. D. $3 \int_0^1 t^3 dt$.
- Câu 13.** Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, với cách đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?
- A. $\int_0^{\sqrt{2}} t dt$. B. $\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt$. C. $\int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt$. D. $\int_1^{\sqrt{2}} dt$.
- Câu 14.** Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx$ bằng
- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 15.** Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.
- A. 1. B. 9. C. 3. D. 7.
- Câu 16.** Cho $\int_0^4 f(x) dx = 2018$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$
- A. $I = 0$. B. $I = 2018$. C. $I = 4036$. D. $I = 1009$.
- Câu 17.** Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$. Tính tích phân $J = \int_0^2 f(2x) dx$.
- A. $J = 32$. B. $J = 64$. C. $J = 8$. D. $J = 16$.
- Câu 18.** Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng:
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.
- Câu 19.** Với cách đổi biến $u = \sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}} dx$ trở thành:
- A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2-1) du$. B. $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2-1) du$. C. $2 \int_1^2 (u^2-1) du$. D. $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2-1}{u} du$.
- Câu 20.** Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$, mệnh đề nào dưới đây sai?
- A. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$. B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. D. $I = \frac{14}{9}$.

Bảng đáp án

1.D	2.C	3.D	4.B	5.C	6.C	7.B	8.C	9.B	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

11.D

12.D

13.A

14.B

15.D

16.B

17.A

18.C

19.B

20.B

Hướng dẫn giải(phần TH)

Câu 11. Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$ khi đó $a+b$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 3 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3$; $x = 2 \Rightarrow t = 7$

Nên $I = \int_3^7 \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$

Câu 12. Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?

A. $3 \int_0^1 t dt$.

B. $\int_0^1 t^3 dt$.

C. $3 \int_0^1 t^2 dt$.

D. $3 \int_0^1 t^3 dt$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow t^3 = (1-x) \Rightarrow 3t^2 = -dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$

Nên $I = - \int_1^0 t \cdot 3t^2 dt = \int_0^1 3t^3 dt$

Câu 13. Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, với cách đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?

A. $\int_0^{\sqrt{2}} t dt$.

B. $\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt$.

C. $\int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt$.

D. $\int_1^{\sqrt{2}} dt$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

Nên $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t} dt = \int_1^{\sqrt{2}} dt$.

Câu 14. Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x \Rightarrow -dt = \sin x \cdot dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \pi \Rightarrow t = -1$.

Khi đó: $I = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$.

Câu 15. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

- A. 1. B. 9. C. 3. **D. 7.**

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \cdot dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Khi đó: $I = \int_0^1 f(t) dt = 7$.

Câu 16. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 2018$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$.

- A. $I = 0$. **B. $I = 2018$.** C. $I = 4036$. D. $I = 1009$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^2 f(2x) dx \stackrel{2x=t}{=} \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt$.

$\int_0^2 f(4-2x) dx \stackrel{4-2x=t}{=} -\frac{1}{2} \int_4^0 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt$

Suy ra $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 f(x) dx = 2018$.

Câu 17. Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$. Tính tích phân $J = \int_0^2 f(2x) dx$.

- A. $J = 32$. B. $J = 64$. C. $J = 8$. **D. $J = 16$.**

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4$.

$J = \int_0^2 f(2x) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} I = 16$.

Câu 18. Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng:

- A. 1. B. 0. **C. 2.** D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$I = -\frac{1}{2} \int_1^0 e^t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{2}.$$

Câu 19. Với cách đổi biến $u = \sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}} dx$ trở thành:

A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du$. B. $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du$. C. $2 \int_1^2 (u^2 - 1) du$. D. $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} du$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow u^2 = 1+3\ln x \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{2u}{3} du$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow u=1 \\ x=e \Rightarrow u=2 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{(u^2 - 1)}{u \cdot 3} \cdot \frac{2u}{3} du = \frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du$

Câu 20. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$. B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. D. $I = \frac{14}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+3\ln x \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{2t}{3} dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=e \Rightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^2 t \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt = \frac{14}{9}$.

☑_ Dạng 2. Đổi biến số dạng 2

☑_ Phương pháp: Để tính tích phân: $I = \int_a^b f(x) dx$, mà biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
3. $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cdot \cos 2t$

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 1.

C. 0

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

• Đặt $x = \sin t$ ta có $dx = \cos t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Vậy

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

PP nhanh trắc nghiệm

✓. Bước 1. Sử dụng lệnh để màn hình máy tính cầm tay hiện:



✓. Bước 2. Nhập hàm số f(x)

✓. Bước 3. Nhập cận

✓. Bước 4. Ấn phím =

Câu 2. Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{12}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

• Đặt $x = \tan t$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

PP nhanh trắc nghiệm

✓. Bước 1. Sử dụng lệnh để màn hình máy tính cầm tay hiện



✓. Bước 2. Nhập hàm số f(x)

✓. Bước 3. Nhập cận

✓. Bước 4. Ấn phím =

Câu 3. Khi đổi biến $x = \sqrt{5} \tan t$ thì tích phân $I = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x^2+5}$ trở thành tích phân nào sau đây?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{5} dt.$

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}}{5} dt.$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{5} dt.$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = \sqrt{5} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{5}(1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận.

$$x = \sqrt{5} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = 0 \Rightarrow t = 0$$

I trở thành

PP nhanh trắc nghiệm



+ Tính tích phân I bằng mt.

+ Tính tích phân từng đáp án A,B,C,D.

+ Đối chiếu kết quả, chọn đáp án C.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}(1+\tan^2 t) dt}{5 \tan^2 t + 5} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}(1+\tan^2 t) dt}{5(\tan^2 t + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5} dt}{5}.$$

② Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒ 1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = x^2 + 3$. B. $x = \sqrt{3} \tan t$. C. $t = \sqrt{3} \sin x$. D. $x = t^2 + 3$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 16}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = x^2 + 16$. B. $t = 4 \sin x$. C. $x = 4 \tan t$. D. $x = t^2 + 4$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^5 \frac{dx}{x^2 + 25}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = x^2 + 25$. B. $x = t^2 + 5$. C. $t = 5 \sin x$. D. $x = 5 \tan t$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{dx}{x^2 + 7}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = x^2 + 7$. B. $x = \sqrt{7} \tan t$. C. $t = 7 \sin x$. D. $x = t^2 + 7$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = 4 + x^2$. B. $x = 4 \tan t$. C. $t = 4 \sin x$. D. $x = t^2 + 4$.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $x = 2 \tan t$. B. $t = 4 - x^2$. C. $x = 2 \sin t$. D. $t = 2 \sin x$.

Câu 7. Tính tích phân $I = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $x = 3 \cos t$. B. $t = 9 - x^2$. C. $x = 3 \tan t$. D. $t = 3 \tan x$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = 25 - x^2$. B. $x = 5 \cos t$. C. $x = 5 \tan t$. D. $t = 5 \tan x$.

Câu 9. Tích phân $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = 16 - x^2$. B. $x = 4 \tan t$. C. $t = 4 \sin x$. D. $x = 4 \cos t$.

Câu 10. Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất:

- A. $t = 3 - x^2$ B. $x = \sqrt{2} \cos t$ C. $x = \sqrt{3} \tan t$ D. $t = 3 \tan x$

2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Đổi biến số $x = 4\sin t$ của tích phân $\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx$ ta được:

- A. $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$. B. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$.
C. $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$. D. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$.

Câu 12. Tích phân $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ bằng:

- A. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dx$. B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$. C. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$.

Câu 13. Đổi biến $x = 2\sin t$ tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành:

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$. B. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$. C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$

Câu 14. Khi đổi biến $x = 3\tan t$ thì tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$ trở thành tích phân nào sau đây?

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dt$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} dt$ C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dt$ D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dt$

Câu 15. Tích phân $\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{\frac{9}{25} + x^2}$ bằng:

- A. $\frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt$. B. $\frac{5}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt$. C. $-\frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt$. D. $-\frac{5}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt$.

Câu 16. Tích phân $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ với $a > 0$ bằng:

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt$. B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$. C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} dt$.

Câu 17. Tích phân: $I = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$ với $a > 0$ bằng:

- A. $\frac{a^4\pi}{8}$. B. $\frac{a^4\pi}{16}$. C. $\frac{a^4\pi}{4}$. D. $\frac{a^4\pi}{32}$.

Câu 18. Tích phân: $I = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ bằng:

A. $\frac{81\pi}{8}$.

B. $\frac{81\pi}{4}$.

C. $\frac{81^4\pi}{16}$.

D. $\frac{81\pi}{32}$.

Câu 19. Tích phân: $I = \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$ bằng:

A. 32π .

B. 64π .

C. 16π .

D. 8π .

Câu 20. Tích phân: $I = \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx$ bằng:

A. 32π .

B. 64π .

C. 16π .

D. 8π .

Bảng đáp án

1.B	2.C	3.D	4.B	5.B	6.C	7.A	8.B	9.D	10.B
11.B	12.C	13.A	14.B	15.A	16.A	17.B	18.C	19.B	20.B

Hướng dẫn giải(phần TH)

Câu 11. Đổi biến số $x = 4\sin t$ của tích phân $\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx$ ta được:

A. $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$.

B. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$.

C. $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$.

D. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = 4\sin t$ ta có $dx = 4\cos t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \sqrt{8} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Vậy: $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos t| \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$.

Câu 12. Tích phân $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ bằng

A. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dx$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$.

C. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \sin t$ ta có $dx = \cos t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Câu 13. Đổi biến $x = 2\sin t$ tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành:

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt.$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = 2\sin t$ ta có $dx = 2\cos t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$

$$\text{Vậy: } I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$$

Câu 14. Khi đổi biến $x = 3\tan t$ thì tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$ trở thành tích phân nào sau đây?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dt$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} dt$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dt$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dt$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = 3\tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = 3(1+\tan^2 t) dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9+9\tan^2 t} \cdot 3(1+\tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} dt.$$

BÀI 3: TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

☑ **Dạng 1.** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx.$

⊗ **Phương pháp:**

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \int \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}.$

① **Bài tập minh họa:**

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx.$

A. $I = e^2.$

B. $I = -e^2.$

C. $I = e.$

D. $I = 3e^2 - 2e.$

⊗ **Lời giải**

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = \int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2$$
$$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

PP nhanh trắc nghiệm

- Tính tích phân

$$\int_1^2 xe^x dx$$

7.389056099

- Lưu kết quả bằng biến A

Ans→A
7.389056099

- Kiểm tra các đáp án: A đúng

A - e^2
0

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx.$

A. $I = \frac{5-3e^2}{4}.$

B. $I = \frac{5-3e^2}{4}.$

C. $I = \frac{5-3e^2}{4}.$

D. $I = \frac{5-3e^2}{4}.$

⊗ **Lời giải**

Chọn B

PP nhanh trắc nghiệm

⊗ Tính tích phân:

• Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$ (chọn $C = 0$)

$$\Rightarrow I = (x - 2) \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{5 - 3e^2}{4}.$$

$$\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$$

-4.291792074

- Lưu kết quả bằng biến B

Ans→B

-4.291792074

- Kiểm tra các đáp án: B đúng

B - $\left(\frac{5-3e^2}{4}\right)$

0

Câu 3. Tích phân $\int_0^\pi (3x + 2) \cos^2 x dx$ bằng:

A. $\frac{3}{4} \pi^2 - \pi.$

B. $\frac{3}{4} \pi^2 + \pi.$

C. $\frac{1}{4} \pi^2 + \pi.$

D. $\frac{1}{4} \pi^2 - \pi.$

Lời giải

Chọn B

• Đặt $I = \int_0^\pi (3x + 2) \cos^2 x dx$. Ta có:

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (3x + 2)(1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^\pi (3x + 2) dx + \int_0^\pi (3x + 2) \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} (I_1 + I_2).$$

$$I_1 = \int_0^\pi (3x + 2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi.$$

$$I_2 = \int_0^\pi (3x + 2) \cos 2x dx. \text{ Dùng tích phân từng phần}$$

Đặt $\begin{cases} u = 3x + 2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$

Khi đó

$$I_2 = \frac{1}{2} (3x + 2) \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx$$

$$= 0 + \frac{3}{4} (\cos 2x) \Big|_0^\pi = 0.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi \right) = \frac{3}{4} \pi^2 + \pi.$$

PP nhanh trắc nghiệm

Tính tích phân:

$$\int_0^\pi (3x+2)(\cos(x))^2 dx$$

10.54379595

- Lưu kết quả bằng biến C

Ans→C

10.54379595

Kiểm tra các đáp án: B đúng

C - $\left(\frac{3}{4} \pi^2 + \pi\right)$

0

②_Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết:(10 câu)

Câu 1. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

B. $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

C. $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

D. $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos x dx$.

A. $\pi - 2$.

B. $\pi - 3$.

C. $\pi - 1$.

D. $\pi - 4$.

Câu 3. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ là:

A. $\frac{\pi}{8}$.

B. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$.

D. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

Câu 4. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx$ bằng:

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin x dx$ bằng:

A. $I = \pi - 1$.

B. $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

C. $I = 1 - \pi$.

D. $I = 1 - \frac{\pi}{2}$.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \sin 3x dx$

A. $\frac{5}{9}$

B. $-\frac{5}{9}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $-\frac{5}{8}$

Câu 7. Tính tích phân $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$

A. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$

B. $\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$

C. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{3}{4}$

D. $\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{4}$

Câu 8. Tính tích phân $I_8 = \int_1^2 (2x-1)e^x dx$

A. $e^2 - e$.

B. $e^2 + e + 1$.

C. $e^2 + e$

D. $e^2 + e - 1$.

Câu 9. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-1)e^{3x} dx$

A. $\frac{4-e^2}{9}$

B. $\frac{4+e^3}{9}$

C. $\frac{4-2e^3}{9}$

D. $\frac{4-e^3}{9}$

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^1 (e^{-2x} + x)e^x dx$

A. $2 - \frac{1}{e}$

B. $3 - \frac{1}{e}$

C. $1 - \frac{1}{e}$

D. $4 - \frac{1}{e}$

⊠2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx$

A. $2e - 5$

B. $2e - 3$

C. $2e - 1$

D. $2e - 4$

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x-1}) dx$

A. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{10}$

C. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{14}$

D. $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{14}$

Câu 13. Cho $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $I = 3e - 1 + 2 \int_0^1 e^x dx$. B. $I = 3e - 1 - 2 \int_0^1 e^x dx$. C. $I = 3e + 2 \int_0^1 e^x dx$. D. $I = 3e - 2 \int_0^1 e^x dx$.

Câu 14. Biết tích phân $\int_0^1 (x-3)e^x dx = a + be$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm tổng $a+b$.

A. $a + b = 1$.

B. $a + b = 25$.

C. $a + b = 4 - 3e$.

D. $a + b = -1$.

Câu 15. Cho biết tích phân $I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = \frac{a.e^4 + b.e^2 + c}{4}$ với a, b, c là các ước nguyên của 4.

Tính tổng: $a + b + c$

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 16. Cho $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 2$ và $2f(1) - f(0) = 1$. Tính $\int_0^1 f(x) dx = ?$

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Câu 17. Cho $\int_0^1 (2x+1)f'(x) dx = 3$ và $3f(1) - f(0) = 1$. Tính $\int_0^1 f(x) dx = ?$

A. $I = -1$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = 1$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 18. Tính $J = \int_0^\pi x \sin x dx$.

A. $-\pi$.

B. π .

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 19. Biết $\int_0^1 (x+2020)e^x dx = a.e + b$. Với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b$

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = 3$.

D. $T = 4$.

Câu 20. Tính $I = \int_1^2 xe^x dx$.

A. $I = e^2$.

B. $I = -e^2$.

C. $I = 3e^2 - 2e$.

D. $I = e$.

Bảng đáp án

1.C	2.B	3.D	4.D	5.A	6.B	7.A	8.C	9.D	10.A
11.B	12.C	13.B	14.A	15.D	16.A	17.A	18.B	19.A	20.A

☑_ Dạng 2.

☑_ Dạng 2. : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln(ax) dx$

⊗-Phương pháp:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int f(x) dx \end{cases}$$

Câu 1. Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a.e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$ nên $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$I = \int_1^e x \ln x dx = \left. \frac{x^2}{2} \ln x \right|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_4^5 (x+1)\ln(x-3)dx$?

- A. $10\ln 2$. B. $10\ln 2 + \frac{19}{4}$. C. $\frac{19}{4} - 10\ln 2$. **D. $10\ln 2 - \frac{19}{4}$.**

Lời giải

• **Chọn D**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-3) \\ dv = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-3} dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 + x \end{cases}$$

$$I = \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) \ln(x-3) \Big|_4^5 - \int_4^5 \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{x-3} dx$$

$$= \frac{35}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_4^5 \frac{x^2 - 9 + 9}{x-3} dx - \int_4^5 \frac{x-3+3}{x-3} dx$$

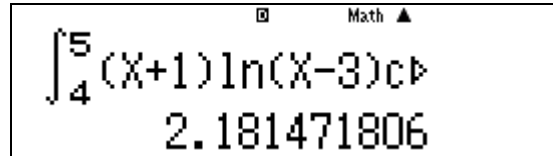
$$= \frac{35}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 3 + 9 \ln 2 \right) - (1 + 3 \ln 2)$$

$$= 10 \ln 2 - \frac{19}{4}.$$

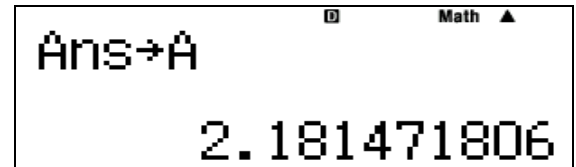
PP nhanh trắc nghiệm

Quy trình bấm máy.

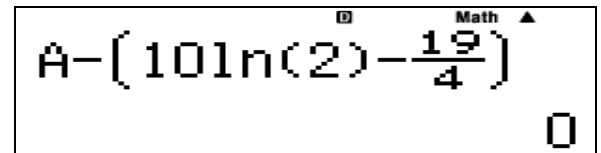
🔗 Bấm máy tính:



🔗 Lưu kết quả:



🔗 Kiểm tra kết quả:



Câu 3. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1)dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

- A. 33. B. 25. C. 42. **D. 39.**

Lời giải

• **Chọn D**

• Xét $I = \int_0^2 2x \ln(x+1)dx = 6$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2xdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$I = (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx$$

$$= 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3.$$

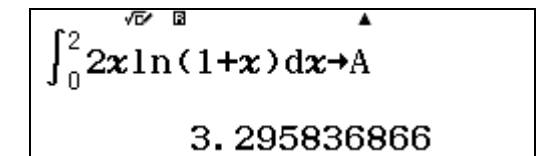
Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39$.

PP nhanh trắc nghiệm

🔗 ① Quy trình bấm máy.

Ta có $a \cdot \ln b = \ln b^a$

Bước 1.



Bước 2. $A = \ln b^a \Leftrightarrow b^a = e^A$



Bước 3. Bấm Shift + FACT



Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39$.

②_Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết:(10 câu)

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_1^e (x+2) \ln x dx$:

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Câu 2. Nếu đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x+1)dx \end{cases}$ thì tích phân $I = \int_1^e (2x+1) \ln x dx$ trở thành:

- A. $I = (x^2 + x) \Big|_1^e - \int_1^e (x+1) dx$. B. $I = x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x+1) dx$.
C. $I = x^2 \ln x \Big|_1^e + \int_1^e x dx$. D. $I = (x^2 + x) \ln x \Big|_1^e + \int_1^e (x+1) dx$.

Câu 3. Tính tích phân $J = \int_0^2 x \ln(x+1) dx$.

- A. $J = \frac{4}{3} \ln 3$. B. $J = \frac{5}{3} \ln 3$. C. $J = \frac{3}{2} \ln 3$. D. $J = \frac{3}{4} \ln 3$.

Câu 4. Biết rằng $\int_1^2 \ln(x+1) dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = -2$.

Câu 5. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $a + b$.

- A. 33. B. 25. C. 42. D. 6.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_4^5 (x+1) \ln(x-3) dx$?

- A. $10 \ln 2$. B. $10 \ln 2 + \frac{19}{4}$. C. $\frac{19}{4} - 10 \ln 2$. D. $10 \ln 2 - \frac{19}{4}$.

Câu 7. Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

- A. 42. B. 21. C. 12. D. 32.

Câu 8. Biết $\int_2^3 \ln(x-1) dx = a \ln 2 + b$ với a, b là các số nguyên. Khi đó, $a + b$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 9. Tính $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2$. Tính $T = a + 3b$.

- A. $T = 1$. B. $T = 5$. C. $T = 3$. D. $T = 4$.

Câu 10. Tích Phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$ là :

- A. $3 \ln 3$. B. $2 \ln 2$. C. $3 \ln 3 - 2$. D. $2 - 3 \ln 3$.

2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$. B. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$. C. $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$. D. $\frac{1}{4}(1 + \ln 2)$.

Câu 12. Tích phân $K = \int_1^2 (2x - 1) \ln x dx$ bằng:

- A. $K = 3 \ln 2 + \frac{1}{2}$. B. $K = \frac{1}{2}$. C. $K = 3 \ln 2$. D. $K = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 20. B. 10. C. 17. D. 12.

Câu 14. Biết $I = \int_1^e x^2 \ln x dx = ae^3 + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $9(a + b)$ bằng

- A. 3. B. 10. C. 9. D. 6.

Câu 15. Biết $\int_0^2 2x \ln(x + 1) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

- A. 33. B. 25. C. 42. D. 39.

Câu 16. Biết $\int_0^2 (4x - 1) \ln x dx = a \ln 2 + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $2a + b$.

- A. 5. B. 8. C. 13. D. 10.

Câu 17. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

- A. $P = 6$. B. $P = -6$. C. $P = 5$. D. $P = 4$.

Câu 18. Cho $\int_2^5 \ln(x^2 - x) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + 2b - c$.

- A. $S = 23$. B. $S = 20$. C. $S = 17$. D. $S = 11$.

Câu 19. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x + 1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, m là các số nguyên dương và là phân số tối giản.

Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a + b}{c}$.

- A. $S = \frac{2}{3}$. B. $S = \frac{5}{6}$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \frac{1}{3}$.

Câu 20. Cho $a > b > -1$. Tích phân $I = \int_a^b \ln(x + 1) dx$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - a + b.$

B. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - b + a.$

C. $I = \frac{1}{(x+1)} \Big|_a^b.$

D. $I = x \ln(x+1) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{x}{x+1} dx.$

Bảng đáp án

1.C	2.D	3.C	4.A	5.D	6.D	7.B	8.B	9.D	10.C
11.A	12.D	13.A	14.A	15.D	16.D	17.D	18.B	19.B	20.B

☑_ Dạng 3.

☑_ Dạng 3. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \cdot \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$

⊗-Phương pháp:

Đặt: $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \begin{bmatrix} a \cos ax \\ -a \sin ax \end{bmatrix} dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx.$

A. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 2}{2}.$

B. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{2}.$

C. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$

D. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.$

Lời giải

Chọn D

• $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$I = \cos x \cdot e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^x dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^x dx \quad (*)$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$

PP nhanh trắc nghiệm

Tính:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$
1.90523869

Ans→A
1.90523869

Kiểm tra các đáp án:

$A - \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$
0

$$J = \sin x \cdot e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - I \quad (2^*)$$

Thay (2*) vào (*) ta có: $I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-x} dx$.

A. $\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}} + 2}{2}$.

B. $\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}} - 2}{2}$.

C. $\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.

D. $\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

• $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-x} dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$I = -\sin x \cdot e^{-x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{-x} dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} + J(*)$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{-x} dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$J = -\cos x \cdot e^{-x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-x} dx$$

$$= 1 - I \quad (2^*)$$

Thay (2*) vào (*) ta có: $I = \frac{-e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

PP nhanh trắc nghiệm

Tính:

Kiểm tra các đáp án:

Câu 3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \sin 2x dx$

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

Chọn B

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \sin x \cos x dx.$$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{\sin x} \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^{\sin x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 2 \sin x e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$= 2e - 2e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Tính:

② Bài tập áp dụng:

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx$:

A. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{5}.$

B. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 2}{5}.$

C. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 3}{5}.$

D. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 4}{5}.$

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \cos 2x dx$:

A. $I = \frac{1 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

B. $I = \frac{2 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

C. $I = \frac{3 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

D. $I = \frac{4 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

A. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 2.$

B. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1.$

C. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 3.$

D. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}.$

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$.

A. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 3}{5}.$

B. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 1}{5}.$

C. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 2}{5}.$

D. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 4}{5}.$

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 3x dx$

A. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{7}.$

B. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{8}.$

C. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{9}.$

D. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{10}.$

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{3x} \cos x dx$

A. $I = \frac{3}{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \right) e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{10}.$

B. $I = \frac{3}{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \right) e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{10}.$

C. $I = \frac{3}{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \right) e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{10}.$

D. $I = \frac{3}{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \right) e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{10}.$

Câu 7. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \sin x dx$

A. $I = \frac{1 - \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}.$

B. $I = \frac{1 + \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}.$

C. $I = \frac{1 - \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}.$

D. $I = \frac{1 + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}.$

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin x dx$

A. $I = \frac{(\sqrt{3}-2)e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{2}.$

B. $I = \frac{(\sqrt{3}-2)e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{3}.$

C. $I = \frac{(\sqrt{3}-2)e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{4}.$

D. $I = \frac{(\sqrt{3}-2)e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{5}.$

Câu 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos^2 x dx$

A. $I = \frac{3e^{\frac{\pi}{4}} - 3}{5}.$

B. $I = \frac{3e^{\frac{\pi}{4}} - 2}{5}.$

C. $I = \frac{3e^{\frac{\pi}{4}} - 4}{5}.$

D. $I = \frac{3e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{5}.$

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin^2 x dx$

A. $I = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{5}.$

B. $I = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}} - 2}{5}.$

C. $I = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}} - 3}{5}.$

D. $I = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}} - 4}{5}.$

Bảng đáp án

1.A	2.A	3.B	4.C	5.D	6.B	7.A	8.D	9.A	10.B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

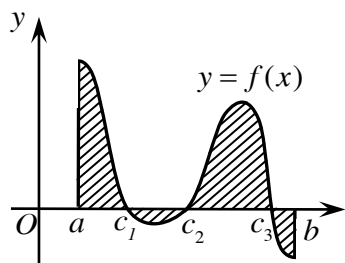
BÀI 4: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

☑_ Dạng 1. Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng

☑_ Dạng 1. Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng

⊗-Phương pháp:

❶ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

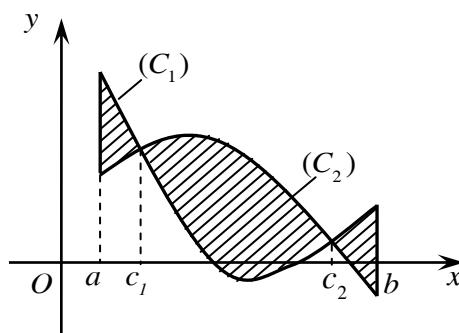


$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

❷ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$,

$y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$.

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

A. $\frac{9}{2}$.

B. 7.

C. 5.

D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

• Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

là: $2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-2}^1 |-x^2 - x + 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \right|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

PP nhanh trắc nghiệm

✎ • Trên $[-1; 2]$ hàm số $y = f(x) = -x^2 - x + 2$

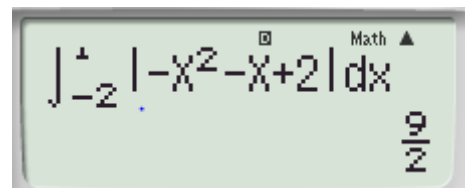
không đổi dấu nên $\int_{-2}^1 |f(x)| dx = \left| \int_{-2}^1 f(x) dx \right|$.

• **Quy trình bấm máy.**

- Nhập biểu thức $\int_{-2}^1 |-x^2 - x + 2| dx$ vào màn hình

bằng cách bấm lần lượt các phím sau:

- Khi đó trên màn hình xuất hiện



Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

B. $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

C. $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

D. $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

Lời giải

Chọn B

• Ta có $S = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x^2} \right| dx$.

Vì $\forall x \in [1; e]$, $\ln x \geq 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \Rightarrow S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

PP nhanh trắc nghiệm

✎ Xét dấu của hàm số $y = \frac{\ln x}{x^2}$ trên đoạn $[1; e]$.

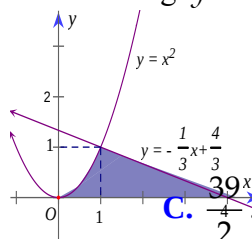
Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành như hình vẽ.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{56}{3}$.

C. $\frac{4}{2}$.

D. $\frac{11}{6}$.



Lời giải

Chọn D

• Dựa vào đồ thị ta có:

Diện tích hình phẳng cần tìm là

PP nhanh trắc nghiệm

✎ • **Quy trình bấm máy.**

- Nhập biểu thức $\int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx$ vào màn

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}x \right) \Big|_1^4$$

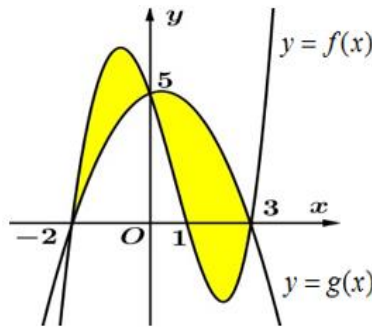
$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}.$$

hình (thao tác tương tự câu 1).
- Khi đó trên màn hình xuất hiện

② Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Diện tích phần hình phẳng tô đen trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) dx.$

B. $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx.$

C. $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx.$

D. $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx.$

Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^3 + 11x - 6$ và $y = 6x^2$ là

A. 52.

B. 14.

C. $\frac{1}{4}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$ bằng

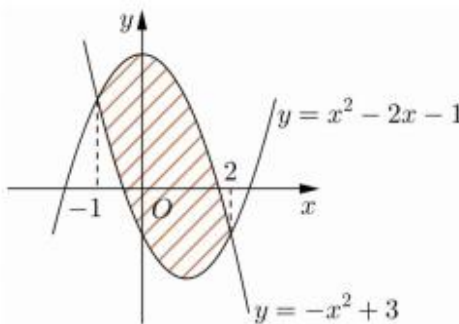
A. $\frac{7}{3}.$

B. $\frac{4}{3}.$

C. $\frac{8}{3}.$

D. 1.

Câu 4. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



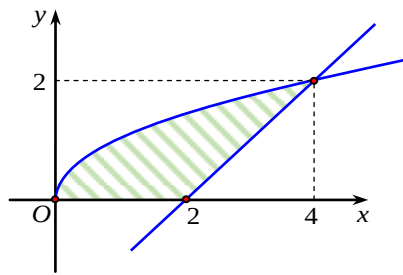
A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$.

Câu 5. Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x - 2$ trong hình sau



A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}$.

B. $S = \frac{343}{12}$.

C. $S = \frac{793}{4}$.

D. $S = \frac{397}{4}$.

Câu 7. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (H): $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ.

Khi đó giá trị của S bằng

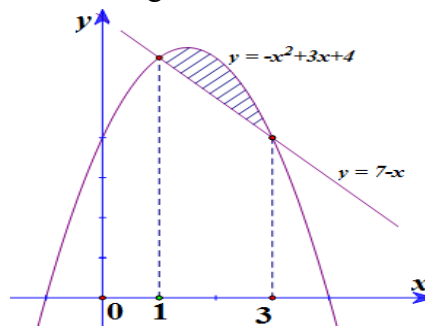
A. $S = 2\ln 2 - 1$.

B. $S = \ln 2 + 1$.

C. $S = \ln 2 - 1$.

D. $S = 2\ln 2 + 1$.

Câu 8. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



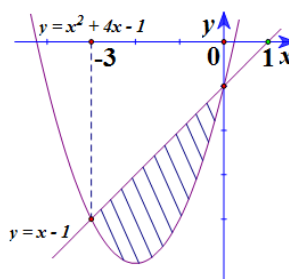
A. $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$.

B. $\int_1^3 (-x^2 + 2x + 11) dx$.

C. $\int_1^3 (x^2 - 2x - 11) dx$.

D. $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$.

Câu 9. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



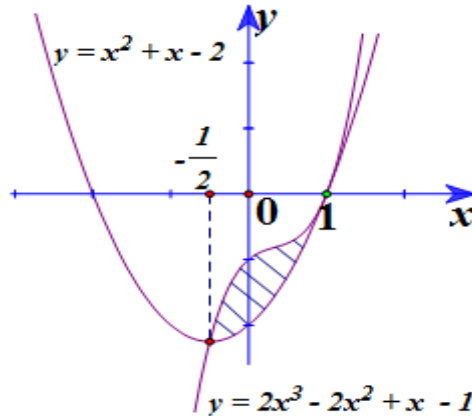
A. $\int_{-3}^0 (x^2 + 3x) dx$.

B. $\int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx$.

C. $\int_{-3}^0 (-x^2 - 5x + 2) dx.$

D. $\int_{-3}^0 (x^2 + 5x - 2) dx.$

Câu 10. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + 3x^2 - 1) dx.$

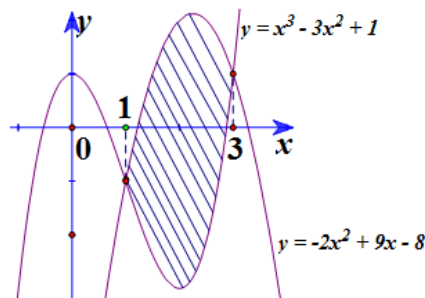
B. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - x^2 + 2x - 3) dx.$

C. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx.$

D. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + x^2 - 2x + 3) dx.$

2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



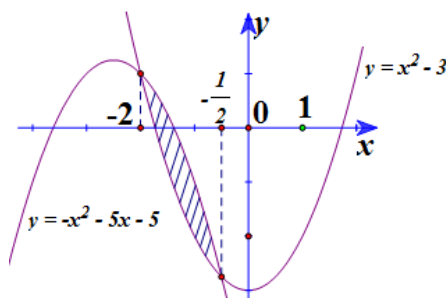
A. $\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) dx.$

B. $\int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 9x + 7) dx.$

C. $\int_1^3 (-x^3 + x^2 + 9x - 9) dx.$

D. $\int_1^3 (x^3 - x^2 - 9x + 9) dx.$

Câu 12. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (5x - 8) dx.$

B. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (2x^2 + 5x + 2) dx.$

C. $\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-5x-8) dx.$

D. $\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-2x^2-5x-2) dx.$

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3$ và $y = x^5$?

A. $S = 1.$

B. $S = 2.$

C. $S = \frac{1}{6}.$

D. $S = \frac{1}{3}.$

Câu 14. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

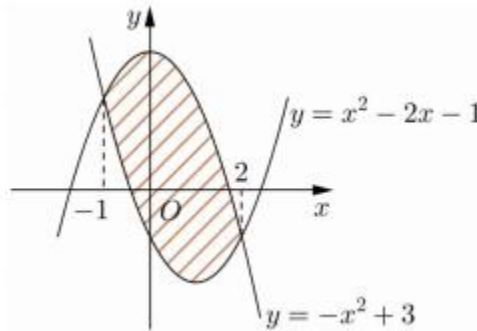
A. $S = \frac{2000}{3}.$

B. $S = 2008.$

C. $S = 2000.$

D. $S = \frac{2008}{3}.$

Câu 15. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox .

A. 11.

B. $\frac{34}{3}.$

C. $\frac{31}{3}.$

D. $\frac{32}{3}.$

Câu 17. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục Ox, Oy và đường thẳng $x = 2$. Tính S hình phẳng trên.

A. $e^4 - 1.$

B. $\frac{1}{2}(e^4 - 1).$

C. $\frac{1}{2}e^4.$

D. $\frac{1}{2}(e^4 + 1).$

Câu 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(P): y = -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7)$, $(H): y = \frac{x-7}{3-x}$.

A. 3,455.

B. $9 - 8\ln 2.$

C. $3 - \ln 4.$

D. $\frac{161}{9} + 4\ln 3 + 8\ln 2.$

Câu 19. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

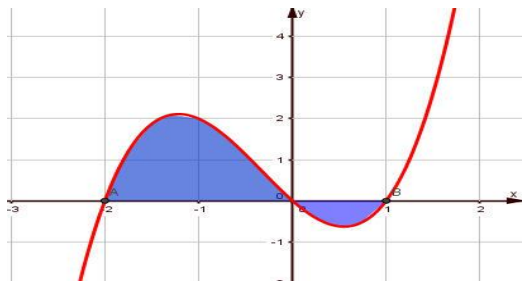
A. $S = \frac{2000}{3}.$

B. $S = 2008.$

C. $S = 2000.$

D. $S = \frac{2008}{3}.$

Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là



A. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x)dx$

C. $S = \int_0^{-2} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$

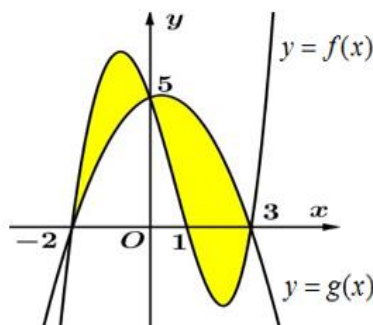
D. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

Bảng đáp án

1.C	2.D	3.A	4.C	5.B	6.A	7.A	8.A	9.B	10.C
11.C	12.D	13.C	14.D	15.D	16.D	17.B	18.B	19.D	20.D

Hướng dẫn giải(phần TH)

Câu 1. Diện tích phần hình phẳng tô đen trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x))dx$.

B. $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x))dx$.

C. $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x))dx + \int_0^3 (g(x) - f(x))dx$.

D. $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x))dx + \int_0^3 (f(x) - g(x))dx$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ta có diện tích phần hình phẳng tô đen trong hình vẽ bên dưới được tính là:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^3 |f(x) - g(x)|dx \\
 &= \int_{-2}^0 |f(x) - g(x)|dx + \int_0^3 |f(x) - g(x)|dx \\
 &= \int_{-2}^0 (f(x) - g(x))dx + \int_0^3 (g(x) - f(x))dx.
 \end{aligned}$$

Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^3 + 11x - 6$ và $y = 6x^2$ là

A. 52.

B. 14.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $x^3 + 11x - 6 = 6x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\text{Diện tích của hình phẳng là: } S = \left| \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_1^2 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_2^3 \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

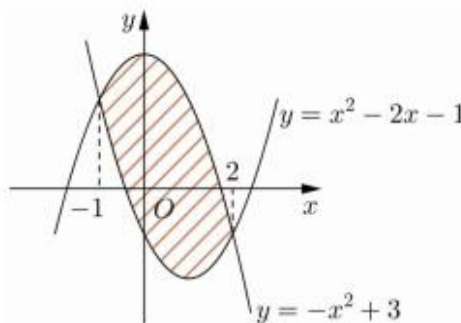
D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Diện tích của hình phẳng là } S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

Câu 4. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$.

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$.

Lời giải

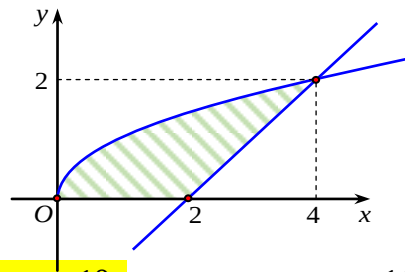
Chọn C

Từ đồ thị ta thấy $-x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1, \forall x \in [-1; 2]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 5. Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x - 2$ trong hình sau



A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^4 |\sqrt{x} - (x-2)| dx = \int_0^4 \sqrt{x} - (x-2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^4 = \frac{10}{3}.$$

Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}$.

B. $S = \frac{343}{12}$.

C. $S = \frac{793}{4}$.

D. $S = \frac{397}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích cần tìm là: } S &= \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_{-3}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Câu 7. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ.

Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = 2\ln 2 - 1$.

B. $S = \ln 2 + 1$.

C. $S = \ln 2 - 1$.

D. $S = 2\ln 2 + 1$.

Lời giải

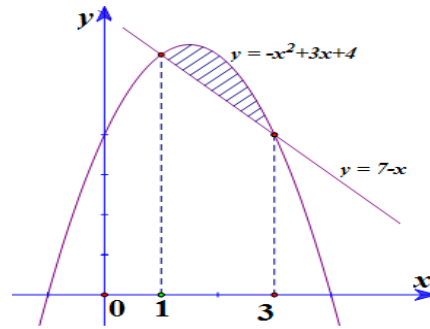
Chọn A

$$(H): y = \frac{x-1}{x+1}, (H) \text{ cắt trục } Ox, Oy \text{ lần lượt tại } A(1;0), B(0;-1).$$

$$\text{Gọi } (K) \text{ là hình phẳng giới hạn bởi các đường } y = \frac{x-1}{x+1}, y = 0, x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } S &= \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| \quad (\text{do } \frac{x-1}{x+1} \text{ không đổi dấu với } x \in (0;1)) \\ &= \left| \left[x - 2\ln|1+x| \right]_0^1 \right| = 2\ln 2 - 1. \text{ Vậy } S = 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Câu 8. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$.

B. $\int_1^3 (-x^2 + 2x + 11) dx$.

C. $\int_1^3 (x^2 - 2x - 11) dx$.

D. $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$.

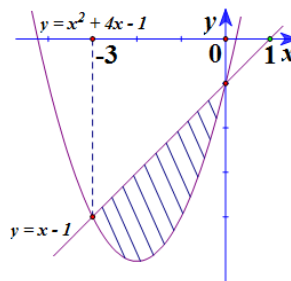
Lời giải

Chọn A

Ta thấy: $\forall x \in [1; 3]: -x^2 + 3x + 4 \geq 7 - x$ nên

$$S = \int_1^3 [(-x^2 + 3x + 4) - (7 - x)] dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx.$$

Câu 9. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-3}^0 (x^2 + 3x) dx$.

B. $\int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx$.

C. $\int_{-3}^0 (-x^2 - 5x + 2) dx$.

D. $\int_{-3}^0 (x^2 + 5x - 2) dx$.

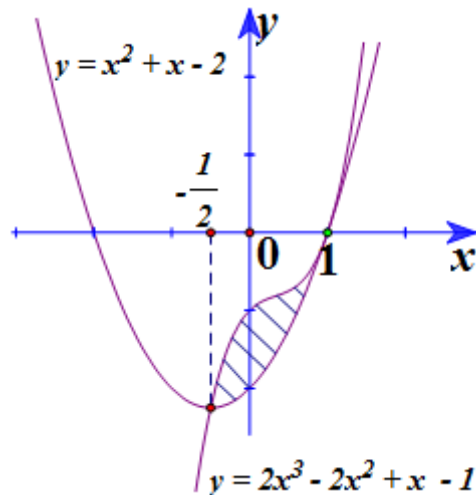
Lời giải

Chọn B

Ta thấy: $\forall x \in [-3; 0]: x - 1 \geq x^2 + 4x - 1$ nên

$$S = \int_{-3}^0 [(x - 1) - (x^2 + 4x - 1)] dx = \int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx.$$

Câu 10. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + 3x^2 - 1) dx.$

B. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - x^2 + 2x - 3) dx.$

C. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx.$

D. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + x^2 - 2x + 3) dx.$

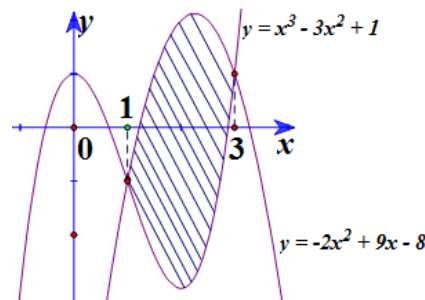
Lời giải

Chọn C

Ta thấy: $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]: 2x^3 - 2x^2 + x - 1 \geq x^2 + x - 2$ nên

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 [(2x^3 - 2x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 2)] dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx.$$

Câu 11. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) dx.$

B. $\int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 9x + 7) dx.$

C. $\int_1^3 (-x^3 + x^2 + 9x - 9) dx.$

D. $\int_1^3 (x^3 - x^2 - 9x + 9) dx.$

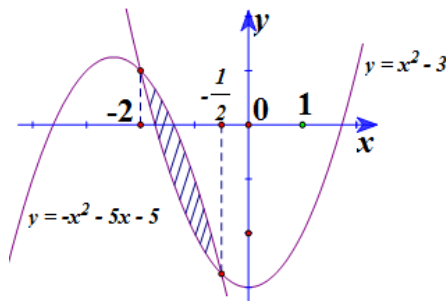
Lời giải

Chọn C

Ta thấy: $\forall x \in [1; 3]: -2x^2 + 9x - 8 \geq x^3 - 3x^2 + 1$ nên

$$S = \int_1^3 [(-2x^2 + 9x - 8) - (x^3 - 3x^2 + 1)] dx = \int_1^3 (-x^3 + x^2 + 9x - 9) dx.$$

Câu 12. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (5x - 8) dx$.

B. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (2x^2 + 5x + 2) dx$.

C. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-5x - 8) dx$.

D. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-2x^2 - 5x - 2) dx$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy: $\forall x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]: -x^2 - 5x - 5 \geq x^2 - 3$ nên

$$S = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [(-x^2 - 5x - 5) - (x^2 - 3)] dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-2x^2 - 5x - 2) dx.$$

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3$ và $y = x^5$?

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{1}{6}$.

D. $S = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^5 = x^3 \Leftrightarrow x^5 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3$ và $y = x^5$ là:

$$S = \int_{-1}^1 |x^5 - x^3| dx.$$

Cách 1: Bấm máy tính

Ta được $S = \int_{-1}^1 |x^5 - x^3| dx = \frac{1}{6}$.

Cách 2: Giải tự luận

$$S = \int_{-1}^1 |x^5 - x^3| dx = \left| \int_{-1}^0 (x^5 - x^3) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^5 - x^3) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{1}{6}.$$

Câu 14. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$.

B. $S = 2008$.

C. $S = 2000$.

D. $S = \frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
VT		+	0	-	0	+

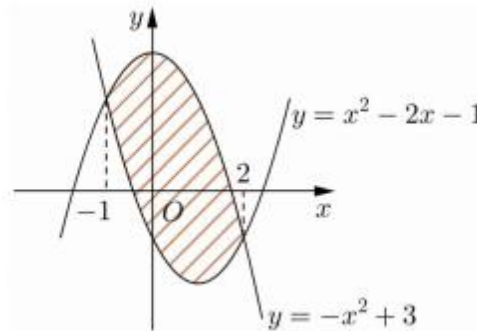
Diện tích cần tìm:

$$S = \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}.$$

Cách 2: Dùng MTCT Casio fx 580VN X

Câu 15. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

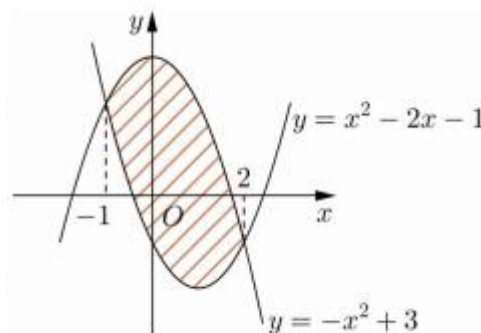
B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

Lời giải

Chọn D



Từ đồ thị hai hàm số $y = -x^2 + 3$ và $y = x^2 - 2x - 1$ ta có $-x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1, \forall x \in [-1; 2].$

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^2 \left[(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox .

- A. 11. B. $\frac{34}{3}$. C. $\frac{31}{3}$. **D. $\frac{32}{3}$.**

Lời giải

Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox .

$$\text{Xét phương trình } 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } S = \int_0^4 |4x - x^2| dx = \left| \int_0^4 (4x - x^2) dx \right| = \left| \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \right| = \frac{32}{3}.$$

Câu 17. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục Ox, Oy và đường thẳng $x = 2$. Tính S hình phẳng trên.

- A. $e^4 - 1$. **B. $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$.** C. $\frac{1}{2}e^4$. D. $\frac{1}{2}(e^4 + 1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } S = \int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - 1.$$

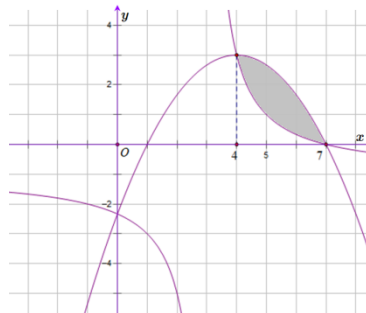
Câu 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(P): y = -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7)$, $(H): y = \frac{x-7}{3-x}$.

- A. 3,455. **B. $9 - 8\ln 2$.** C. $3 - \ln 4$. D. $\frac{161}{9} + 4\ln 3 + 8\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7) = \frac{x-7}{3-x} \Leftrightarrow (x-7)(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 7 \end{cases}.$$



$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng là } S &= \int_4^7 \left| \frac{x-7}{3-x} + \frac{1}{3}(x^2-8x+7) \right| dx = \int_4^7 \left| \frac{x-7}{3-x} + \frac{1}{3}(x^2-8x+7) \right| dx \\ &= \left| \int_4^7 \left(\frac{x-7}{3-x} + \frac{1}{3}(x^2-8x+7) \right) dx \right| = \left| \left(-1 - \frac{4}{3-x} + \frac{1}{3}(x^2-8x+7) \right) \right|_4^7 \\ &= \left| \left(-x + 4 \ln|3-x| + \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x \right) \right) \right|_4^7 = 9 - 8 \ln 2. \end{aligned}$$

Câu 19. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$.

B. $S = 2008$.

C. $S = 2000$.

D. $S = \frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

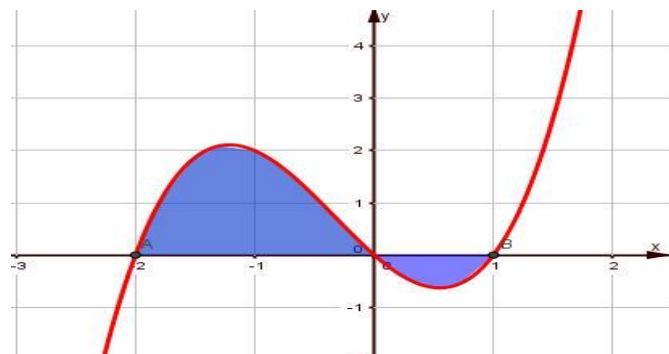
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
VT		+	-	+

Diện tích cần tìm:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}. \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng MTCT Casio fx 580VN X

Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là



A. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx$

C. $S = \int_0^{-2} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$

D. $S = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

Lời giải

Chọn D

$\forall x \in [-2; 0], f(x) \geq 0; \forall x \in [0; 1], f(x) \leq 0$ nên ta có: $S = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

☑_ Dạng 2. Ứng dụng của tích phân tính thể tích

☑_ Dạng 2. Ứng dụng của tích phân tính thể tích

⊗-*Phương pháp:*

1. Bài toán 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$; $y = 0$ và $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox .

* **Phương pháp giải:** áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

2. Bài toán 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = f(x)$; $y = g(x)$ quay quanh trục Ox .

* **Phương pháp giải:**

+ Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = a$, $x = b$

+ Khi đó thể tích cần tìm: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$

3. Bài toán 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $x = g(y)$; $y = a$; $y = b$

* **Phương pháp giải:** áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b x^2 dy$

4. Bài toán 4: Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi: $x = f(y)$; $x = g(y)$ và $y = a$, $y = b$.

* **Phương pháp giải:**

Áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b |f^2(y) - g^2(y)| dy$

5. Bài toán 5: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi một đường cong (C) kín.

* **Phương pháp giải:**

1/ Khi (D) quay quanh trục Ox :

Chia đường cong (C) thành 2 cung: $y_1 = f_1(x)$ và $y_2 = f_2(x)$ với $x \in [a; b]$ và

$f_1(x) \geq f_2(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó thể tích cần tính là:

①_Bài tập minh họa:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. D. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

Chọn B

✖ Học thuộc công thức.

• $\forall x \in [a; b]$ ta có $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Câu 2. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$.

B. $V = \frac{124\pi}{3}$.

C. $V = \frac{124}{3}$.

D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

Chọn C

✖ Ta nhập biểu thức $\int_1^3 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2} dx$ như sau:

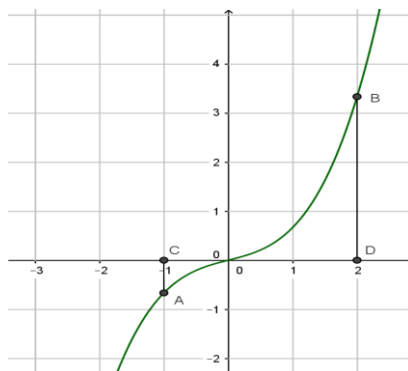
y3Q(s3Q(dp2R1E3=

+ Màn hình hiển thị:

$\int_1^3 3x \sqrt{3x^2 - 2} dx$
41.33333333

Chọn C

Câu 3. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên dưới). Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$

B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Lời giải

Chọn A

• Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx$$

$$= -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b.$$

PP nhanh trắc nghiệm

➤ Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có thể chọn một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ để thay thế, ví dụ chọn $f(x) = x$, suy ra

$$a = \int_{-1}^0 x dx = -\frac{1}{2}, b = \int_0^2 x dx = 2,$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^2 |x| dx = \frac{5}{2}$$

Lại thấy $b - a = \frac{5}{2}$, chọn A

② Bài tập áp dụng: (10 câu NB; 10 câu TH)

☒ 1. Nhận biết: (10 câu)

Câu 1. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sin x$; Ox ; $x = 0$; $x = \pi$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{\pi^2}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. π .

D. π^2 .

Câu 2. Cho hình (H) giới hạn bởi $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$ và $y = 0$. Thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. 2π .

C. $\frac{\pi^2}{4}$.

D. $\frac{\pi^2}{2}$.

Câu 3. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} \ln x$, trục Ox , $x = 1$, $x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox .

A. $\frac{\pi(e^2 + 1)}{4}$.

B. $\frac{\pi(e - 1)}{3}$.

C. $\frac{\pi(e + 1)}{3}$.

D. $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$.

Câu 4. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox bằng:

A. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$. **B.** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. **C.** $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. **D.** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$.

Câu 5. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $2\ln 2 + 1$. B. $2\pi \ln 2 + \pi$. C. $2\pi \ln 2 - \pi$. D. $2\ln 2 - 1$.

Câu 6. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{4\pi}{3}$ B. $V = 2\pi$ C. $V = \frac{4}{3}$ D. $V = 2$

Câu 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = 2\pi^2$. B. $V = 2\pi(\pi + 1)$. C. $V = 2\pi$. D. $V = 2(\pi + 1)$.

Câu 8. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. B. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. D. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

Câu 10. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. D. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

⊠2. Thông hiểu: (10 câu)

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Câu 12. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Câu 13. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x - x^2, y = 0$.

- A. $\frac{16}{15}$. B. $\frac{16}{15}\pi$. C. $\frac{81}{10}\pi$. D. $\frac{16}{15\pi}$.

- Câu 14.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = -x^3 + x^2 + 2, y = 2$.
- A. $\frac{12}{35}\pi$. B. $\frac{3564}{35}\pi$. C. $\frac{3654}{35}\pi$. D. $\frac{729}{35}$.
- Câu 15.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2, y = x^3$.
- A. $\frac{1536}{35}\pi$. B. $\frac{256}{35}\pi$. C. $\frac{1536}{35}$. D. $\frac{265}{35}$.
- Câu 16.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 0, x = 1$.
- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{4\pi}{7}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{7}$.
- Câu 17.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2 - 3; y = 1; y = 2; x = 0$.
- A. 8π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{9\pi}{4}$. D. $\frac{206}{15}$.
- Câu 18.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $xy = 9, y = 0, x = 1, x = 3$.
- A. 54π . B. 6π . C. 12π . D. 6 .
- Câu 19.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos(\pi x), y = 0, x = 0, x = \frac{1}{\pi}$.
- A. $\frac{\pi(\pi+2)}{8}$. B. $\frac{\pi(\sin 2 + 2)}{4}$. C. $\frac{\sin 2 + 2}{4}$. D. $\frac{\pi + 2}{8}$.
- Câu 20.** Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos^2 x, y = 0, x = 0, x = \pi$.
- A. $\frac{\pi^2}{2}$. B. $\frac{3\pi}{8}$. C. $\frac{3\pi^2}{8}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Bảng đáp án

1.A	2.D	3.D	4.A	5.C	6.A	7.B	8.A	9.A	10.A
11.A	12.D	13.C	14.A	15.B	16.D	17.C	18.A	19.B	20.C

Hướng dẫn giải

- Câu 1.** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sin x; Ox; x = 0; x = \pi$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

- A. $\frac{\pi^2}{2}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. π^2 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Thể tích khối tròn xoay là } V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \cdot dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

- Câu 2.** Cho hình (H) giới hạn bởi $y = \sin x, x = 0, x = \pi$ và $y = 0$. Thể tích khối tròn xoay khi

quay (H) quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. 2π .

C. $\frac{\pi^2}{4}$.

D. $\frac{\pi^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay (H) quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 3. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} \ln x$, trục Ox , $x = 1$, $x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox .

A. $\frac{\pi(e^2 + 1)}{4}$.

B. $\frac{\pi(e - 1)}{3}$.

C. $\frac{\pi(e + 1)}{3}$.

D. $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V_{Ox} = \pi \int_1^e x \ln^2 x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$. Suy ra $V_{Ox} = \pi \left(\left(\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \right) \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx \right)$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$.

Suy ra $V_{Ox} = \pi \left(\left(\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \right) \Big|_1^e - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x \right) \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e x dx \right)$
 $= \pi \left(\left(\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \right) \Big|_1^e - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x \right) \Big|_1^e + \left(\frac{1}{4} x^2 \right) \Big|_1^e \right) = \pi \left(\frac{e^2 - 1}{4} \right).$

Câu 4. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d : $y = 2x$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

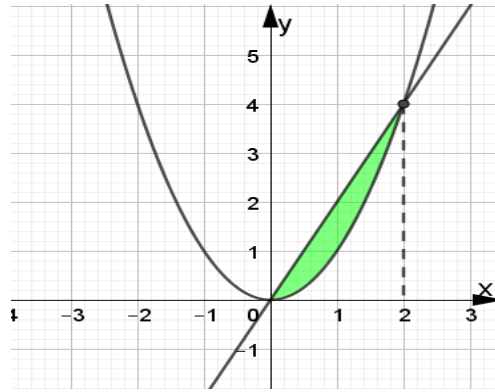
B. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.

D. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thể tích của khối tròn xoay là $\pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$

Câu 5. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

A. $2\ln 2 + 1$.

B. $2\pi \ln 2 + \pi$.

C. $2\pi \ln 2 - \pi$.

D. $2\ln 2 - 1$.

Lời giải

Chọn C

Giao của đồ thị hàm số $y = \sqrt{\ln x}$ với trục Ox có hoành độ là nghiệm của phương trình $\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Gọi V là thể tích vật thể cần tìm, ta có: $V = \pi \int_1^2 \ln x dx = \pi \left[x \ln x \right]_1^2 - \pi \int_1^2 dx = 2\pi \ln 2 - \pi$

Câu 6. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4\pi}{3}$

B. $V = 2\pi$

C. $V = \frac{4}{3}$

D. $V = 2$

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Câu 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi^2$.

B. $V = 2\pi(\pi + 1)$.

C. $V = 2\pi$.

D. $V = 2(\pi + 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $\sqrt{2 + \sin x} = 0$ vô nghiệm nên:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{2 + \sin x} \right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1).$$

Câu 8. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. **B.** $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. **C.** $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. **D.** $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Câu 9. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. **B.** $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. **C.** $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. **D.** $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

Câu 10. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. **D.** $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

Lời giải

Chọn A

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 12. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành.

Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. **D. $V = (e^2 - 5)\pi$.**

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1)dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 2(x-1) \frac{e^{2x}}{2} dx = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Gọi } I_1 = \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = 4\pi (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = 2\pi - \pi e^{2x} \Big|_0^1 = 2\pi - \pi e^2 + \pi = 3\pi - \pi e^2$$

$$\text{Vậy } V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - I_1 = -2\pi - (3\pi - \pi e^2) = \pi(e^2 - 5)$$

Câu 13. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x - x^2$, $y = 0$.

- A. $\frac{16}{15}$. B. $\frac{16}{15}\pi$. **C. $\frac{81}{10}\pi$.** D. $\frac{16}{15\pi}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Thể tích: } V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \frac{81}{10}\pi.$$

Câu 14. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = -x^3 + x^2 + 2$, $y = 2$.

- A. $\frac{12}{35}\pi$.** B. $\frac{3564}{35}\pi$. C. $\frac{3654}{35}\pi$. D. $\frac{729}{35}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } -x^3 + x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Thể tích: } V = \pi \int_0^1 \left| (-x^3 + x^2 + 2)^2 - 2^2 \right| dx = \frac{12}{35}\pi.$$

Câu 15. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2, y = x^3$.

A. $\frac{1536}{35}\pi$.

B. $\frac{256}{35}\pi$.

C. $\frac{1536}{35}$.

D. $\frac{265}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2x^2 = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Thể tích: $V = \pi \int_0^2 |x^6 - 4x^4| dx = \frac{256}{35}\pi$.

Câu 16. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 0, x = 1$.

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{4\pi}{7}$.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Thể tích: $V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}\pi$.

Câu 17. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2 - 3; y = 1; y = 2; x = 0$.

A. 8π .

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{9\pi}{4}$.

D. $\frac{206}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = 2x^2 - 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y+3}{2}}$ nên thể tích của khối tròn xoay được tạo thành là:

$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{y+3}{2}} \right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{y+3}{2} \right) dy = \pi \left(\frac{y^2}{4} + \frac{3}{2}y \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}\pi.$$

Câu 18. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $xy = 9, y = 0, x = 1, x = 3$.

A. 54π .

B. 6π .

C. 12π .

D. 6 .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $xy = 9 \Leftrightarrow y = \frac{9}{x}$ Thể tích: $V = \pi \int_1^3 \frac{81}{x^2} dx = 54\pi$.

Câu 19. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos(\pi x), y = 0, x = 0, x = \frac{1}{\pi}$.

A. $\frac{\pi(\pi+2)}{8}$.

B. $\frac{\pi(\sin 2 + 2)}{4}$.

C. $\frac{\sin 2 + 2}{4}$.

D. $\frac{\pi+2}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Thể tích: } V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2(\pi x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} [1 + \cos(2\pi x)] dx = \frac{\pi(\sin 2 + 2)}{4}.$$

Câu 20. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

A. $\frac{\pi^2}{2}$.

B. $\frac{3\pi}{8}$.

C. $\frac{3\pi^2}{8}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Thể tích: } V = \pi \int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3\pi^2}{8}.$$