

NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

A - KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

B - BÀI TẬP

DẠNG 1: SỬ DỤNG LÝ THUYẾT

- Câu 1.** Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?
 (1): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có đạo hàm trên $[a; b]$.
 (2): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (4): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.
A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 2.** Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
A. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
B. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.
C. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.
D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ ($k \neq 0; k \in \mathbb{R}$).
- Câu 3.** Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
A. $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$. **B.** $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$.
C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$. **D.** $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.
- Câu 4.** Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?
A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.
D. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.
- Câu 5.** Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:
 (I). $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.
 (II). $k \cdot F(x)$ là một nguyên hàm của $k \cdot f(x)$ với $k \in \mathbb{R}$.
 (III). $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.
 Các mệnh đề đúng là

A. (II) và (III). B. Cả 3 mệnh đề. C. (I) và (III). D. (I) và (II).

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x) = F(x)$, $\forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

C. $F(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

D. $F'(x) = f'(x)$, $\forall x \in K$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K .

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

DẠNG 2: ỨNG DỤNG TRỰC TIẾP BẢNG NGUYÊN HÀM.

Câu 9. Cho $f(x) = \frac{1}{x+2}$, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Trên $(-2; +\infty)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \ln(x+2) + C_1$; trên khoảng $(-\infty; -2)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \ln(-x-2) + C_2$ (C_1, C_2 là các hằng số).

B. Trên khoảng $(-\infty; -2)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $G(x) = \ln(-x-2) - 3$.

C. Trên $(-2; +\infty)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \ln(x+2)$.

D. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ thì chúng sai khác nhau một hằng số.

Câu 10. Khẳng định nào đây **sai**?

A. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

C. $\int 2x dx = x^2 + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 11. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}$.

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

C. $\int \sin x dx = C - \cos x$.

D. $\int 2e^x dx = 2(e^x + C)$.

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số).

B. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số; $n \in \mathbb{Z}$).

C. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số).

D. $\int e^x dx = e^x - C$ (C là hằng số).

Câu 13. Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 dx$.

A. $F(x) = \pi^2 x + C$.

B. $F(x) = 2\pi x + C$.

C. $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$.

D. $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x + 2018$ là

A. $F(x) = e^x + \sin x + 2018x + C$.

B. $F(x) = e^x - \sin x + 2018x + C$.

C. $F(x) = e^x + \sin x + 2018x$.

D. $F(x) = e^x + \sin x + 2018 + C$.

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

A. $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$.

B. $4x^4 - 9x + C$.

C. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

D. $4x^3 - 9x + C$.

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e \cdot x^e + 4$ là

A. 101376.

B. $e^2 \cdot x^{e-1} + C$.

C. $\frac{x^{e+1}}{e+1} + 4x + C$.

D. $\frac{e \cdot x^{e+1}}{e+1} + 4x + C$.

Câu 17. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$.

B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

D. $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Câu 18. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int 0 dx = C$.

B. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$.

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$.

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện

$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln 2$. Tính $T = a + b$.

A. $T = -1$.

B. $T = 2$.

C. $T = -2$.

D. $T = 0$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$.

B. $F(x) = x^3 + x + C$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

D. $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Câu 22. Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x+1)^5$?

A. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18} + 8$.

B. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18} - 2$.

C. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18}$.

D. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{6}$.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

- A. $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. B. $\frac{-2}{x^2} - 2x + C$. C. $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. D. $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$.

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$ là

- A. $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x$. B. $x^7 + \ln|x| + \frac{1}{x} - 2x + C$.
C. $x^7 + \ln x + \frac{1}{x} - 2x + C$. D. $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x + C$.

Câu 25. Nguyên hàm của $f(x) = x^3 - x^2 + 2\sqrt{x}$ là:

- A. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.
C. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$. D. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2018}$ là

- A. $\sqrt{x} + \frac{x^{2019}}{673} + C$. B. $2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2019}}{2019} + C$.
C. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^{2019}}{673} + C$. D. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2017} + C$.

Câu 27. Hàm số $F(x) = e^x + \tan x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào

- A. $f(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x}$ B. $f(x) = e^x + \frac{1}{\sin^2 x}$
C. $f(x) = e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ D. $f(x) = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

Câu 28. Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln|2x| + C$ với $x \in (0; +\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

- A. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. B. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2x}$.
C. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(2x)$. D. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}$.

Câu 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

- A. $x + \frac{1}{x-1} + C$. B. $1 + \frac{1}{(x-1)^2} + C$. C. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$. D. $x^2 + \ln|x-1| + C$.

Câu 30. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3 - \frac{1}{\sin^2 x}$ là

- A. $F(x) = 3x - \tan x + C$. B. $F(x) = 3x + \tan x + C$.
C. $F(x) = 3x + \cot x + C$. D. $F(x) = 3x - \cot x + C$.

Câu 31. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x + \frac{1}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

- A. $-3\sin x + \frac{1}{x} + C$. B. $3\sin x - \frac{1}{x} + C$. C. $3\cos x + \frac{1}{x} + C$. D. $3\cos x + \ln x + C$.

- Câu 32.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là
A. $x^3 + \cos x + C$. **B.** $x^3 + \sin x + C$. **C.** $x^3 - \cos x + C$. **D.** $3x^3 - \sin x + C$.
- Câu 33.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 8\sin x$.
A. $\int f(x)dx = 6x - 8\cos x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 6x + 8\cos x + C$.
C. $\int f(x)dx = x^3 - 8\cos x + C$. **D.** $\int f(x)dx = x^3 + 8\cos x + C$.
- Câu 34.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
A. $\int f(x)dx = x + \sin x + C$. **B.** $\int f(x)dx = x - \sin x + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C$.
- Câu 35.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x$.
A. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 1 - \sin x + C$.
C. $\int f(x)dx = x \sin x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$.
- Câu 36.** $\int (x^2 + 2x^3)dx$ có dạng $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:
A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 32.
- Câu 37.** $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right)dx$ có dạng $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:
A. 1. **B.** 12. **C.** $\frac{36}{5}(1+\sqrt{3})$. **D.** Không tồn tại.
- Câu 38.** $\int ((2a+1)x^3 + bx^2)dx$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Biết rằng
 $\int ((2a+1)x^3 + bx^2)dx = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C$. Giá trị a, b lần lượt bằng:
A. 1; 3. **B.** 3; 1. **C.** $-\frac{1}{8}; 1$. **D.**
 $\frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$
- Câu 39.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $f(x) = 2x - 3\cos x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$
A. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$ **B.** $F(x) = x^2 - 3\sin x - \frac{\pi^2}{4}$
C. $F(x) = x^2 - 3\sin x + \frac{\pi^2}{4}$ **D.** $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$
- Câu 40.** Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:
A. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$ **B.** $F(x) = \cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$
C. $F(x) = -\cot x + x^2$ **D.** $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Câu 41. Nếu $\int f(x)dx = e^x + \sin^2 x + C$ thì $f(x)$ là hàm nào?

A. $e^x + \cos^2 x$

B. $e^x - \sin 2x$

C. $e^x + \cos 2x$

D. $e^x + \sin 2x$

Câu 42. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ biết $F(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$ là :

A. $4\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$.

B. $2\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$.

C. $(4\sqrt{x})^{-1} + 3\ln|x| + C$.

D. $16\sqrt{x} - 3\ln|x| + C$.

Câu 44. Tính $\int (\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x})dx$

A. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$.

B. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 4\ln|x| + C$.

C. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$.

D. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$.

Câu 45. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ thỏa mãn $F(1) = 9$ là:

A. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2$.

B. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 10$.

C. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x$.

D. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10$.

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x+1)^5$ là:

A. $\frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$.

B. $\frac{1}{6}(2x+1)^6 + C$.

C. $\frac{1}{2}(2x+1)^6 + C$.

D. $10(2x+1)^4 + C$.

Câu 47. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 0$ là

A. $2x^3 - 4x^4$.

B. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x$.

C. $x^3 - x^4 + 2x$.

D. Đáp án khác.

Câu 48. Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $F(-1) = 3$

A. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x - 3$

B. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

C. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x + 3$

D. $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3$

Câu 49. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = |x-1|$. Biết rằng $f(0) = 3$. Tính $f(2) + f(4)$?

A. 10.

B. 12.

C. 4.

D. 11.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

- Câu 51.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$. B. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$.
C. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$. D. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.
- Câu 52.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- Câu 53.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng
- A. 4. B. $\frac{13}{3}$. C. 2. D. $\frac{11}{3}$.
- Câu 54.** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$, $f(1) = 0$.
- A. $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$. B. $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$.
C. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$. D. $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.
- Câu 55.** Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 . Hàm số $f(x)$ là
- A. $x^3 + x^2 - 3x - 5$. B. $x^3 + 2x^2 - 5x - 5$. C. $2x^3 + x^2 - 7x - 5$. D. $x^3 + x^2 + 4x - 5$.
- Câu 56.** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 3)^2$ thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2[3F(1) - 2F(2)]$ bằng
- A. 10. B. -4 . C. 4. D. 2.
- Câu 57.** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + 2(m - 1)x + m + 5$, với m là tham số thực. Một nguyên hàm của $f(x)$ biết rằng $F(1) = 8$ và $F(0) = 1$ là:
- A. $F(x) = x^4 + 2x^2 + 6x + 1$ B. $F(x) = x^4 + 6x + 1$.
C. $F(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. D. Đáp án A và B

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: SỬ DỤNG LÝ THUYẾT

- Câu 1.** Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?
- (1): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có đạo hàm trên $[a; b]$.
(2): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
(3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
(4): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.
- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Khẳng định (1): Sai, vì hàm số $y = |x|$ liên tục trên $[-1; 1]$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$ nên không thể có đạo hàm trên $[-1; 1]$

Khẳng định (2): đúng vì mọi hàm số **liên tục** trên $[a; b]$ đều có **nguyên hàm** trên $[a; b]$.

Khẳng định (3): Đúng vì mọi hàm số có **đạo hàm** trên $[a; b]$ thì đều liên tục trên $[a; b]$ nên đều có **nguyên hàm** trên $[a; b]$.

Khẳng định (4): Đúng vì mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.

- Câu 2.** Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
B. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.
C. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.
D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ ($k \neq 0; k \in \mathbb{R}$).

Hướng dẫn giải

Chọn B

- Câu 3.** Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$. **B.** $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$.
C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$. **D.**
 $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của tích bằng tích các nguyên hàm. Hoặc B, C, D đúng do đó là các tính chất cơ bản của nguyên hàm nên A sai.

- Câu 4.** Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A.** $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1}$ với $\alpha \neq -1$.
D. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 5. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k \in \mathbb{R}$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (II) và (III). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (I) và (II).

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo tính chất nguyên hàm thì (I) và (II) là đúng, (III) sai.

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Mệnh đề: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì khi $k = 0$ thì $\int kf(x)dx \neq k \int f(x)dx$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x) = F(x)$, $\forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

C. $F(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

D. $F'(x) = f'(x)$, $\forall x \in K$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int f(x)dx$, $\forall x \in K \Rightarrow [F(x)]' = f(x)$, $\forall x \in K$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K .

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Hướng dẫn giải

Chọn D

Dựa theo định lí 1 trang 95 SGK 12 CB suy ra khẳng định A đúng.

Dựa theo định lí 3 Sự tồn tại nguyên hàm trang 97 SGK 12 CB kết luận B đúng.
Và C đúng dựa vào định nghĩa của nguyên hàm.

DẠNG 2: ỨNG DỤNG TRỰC TIẾP BẢNG NGUYÊN HÀM.

Câu 9. Cho $f(x) = \frac{1}{x+2}$, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A.** Trên $(-2; +\infty)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \ln(x+2) + C_1$; trên khoảng $(-\infty; -2)$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \ln(-x-2) + C_2$ (C_1, C_2 là các hằng số).
B. Trên khoảng $(-\infty; -2)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $G(x) = \ln(-x-2) - 3$.
C. Trên $(-2; +\infty)$, một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \ln(x+2)$.
D. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của của $f(x)$ thì chúng sai khác nhau một hằng số.

Hướng dẫn giải

Chọn D

D sai vì $F(x) = \ln(x+2)$ và $G(x) = \ln(-x-2) - 3$ đều là các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nhưng trên các khoảng khác nhau thì khác nhau.

Câu 10. Khẳng định nào đây **sai**?

- A.** $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$.
B. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$.
C. $\int 2x \, dx = x^2 + C$.
D. $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int \cos x \, dx = \sin x + C \Rightarrow A$ sai.

Câu 11. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- A.** $\int x^3 \, dx = \frac{x^4 + C}{4}$.
B. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$.
C. $\int \sin x \, dx = C - \cos x$.
D. $\int 2e^x \, dx = 2(e^x + C)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$.

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.** $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số).
B. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số; $n \in \mathbb{Z}$).
C. $\int 0 \, dx = C$ (C là hằng số).
D. $\int e^x \, dx = e^x - C$ (C là hằng số).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đáp án B sai vì công thức trên chỉ đúng khi bổ sung thêm điều kiện $n \neq -1$.

Câu 13. Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 \, dx$.

- A.** $F(x) = \pi^2 x + C$.
B. $F(x) = 2\pi x + C$.
C. $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$.
D. $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \pi^2 \, dx = \pi^2 x + C$ (vì π^2 là hằng số).

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x + 2018$ là

A. $F(x) = e^x + \sin x + 2018x + C$.

B. $F(x) = e^x - \sin x + 2018x + C$.

C. $F(x) = e^x + \sin x + 2018x$.

D. $F(x) = e^x + \sin x + 2018 + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

A. $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$.

B. $4x^4 - 9x + C$.

C. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

D. $4x^3 - 9x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int (2x^3 - 9)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 9x + C = \frac{x^4}{2} - 9x + C.$$

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e \cdot x^e + 4$ là

A. 101376.

B. $e^2 \cdot x^{e-1} + C$.

C. $\frac{x^{e+1}}{e+1} + 4x + C$.

D. $\frac{e \cdot x^{e+1}}{e+1} + 4x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int (e \cdot x^e + 4)dx = \frac{e \cdot x^{e+1}}{e+1} + 4x + C.$$

Câu 17. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$.

B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

D. $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int (5x^4 - 6x^2 + 1)dx = x^5 - 2x^3 + x + C.$$

Câu 18. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int 0 dx = C$.

B. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$.

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \Rightarrow C \text{ sai.}$$

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$.

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Áp dụng công thức nguyên hàm ta có } \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3\ln 2. \text{ Tính } T = a + b.$$

- A.** $T = -1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = -2$. **D.** $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2 \right) dx = \left(-\frac{a}{x} + b \ln|x| + 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = a + 1 + b \ln 2.$$

Theo giả thiết, ta có $2 - 3\ln 2 = a + 1 + b \ln 2$. Từ đó suy ra $a = 1, b = -3$.

Vậy $T = a + b = -2$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

- A.** $F(x) = x^3 + x^2 + 5$. **B.** $F(x) = x^3 + x + C$.
C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$. **D.** $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Câu 22. Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x+1)^5$?

- A.** $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18} + 8$. **B.** $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18} - 2$.
C. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18}$. **D.** $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Áp dụng $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ với $\alpha \neq -1$ và C là hằng số.

Vậy hàm số ở phương án D thỏa yêu cầu đề.

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

- A.** $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. **B.** $\frac{-2}{x^2} - 2x + C$. **C.** $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. **D.** $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \int \left(x^{-2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C.$$

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$ là

- A.** $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x$. **B.** $x^7 + \ln|x| + \frac{1}{x} - 2x + C$.

C. $x^7 + \ln x + \frac{1}{x} - 2x + C.$

D. $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int f(x) dx = x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x + C.$$

Câu 25. Nguyên hàm của $f(x) = x^3 - x^2 + 2\sqrt{x}$ là:

A. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

B. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

C. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

D. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int (x^3 - x^2 + 2\sqrt{x}) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Chọn A

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x} + \frac{x^{2019}}{673} + C.$

B. $2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2019}}{2019} + C.$

C. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^{2019}}{673} + C.$

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2017} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$\int (3\sqrt{x} + x^{2018}) dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{2018} \right) dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{2019}}{2019} + C = 2\sqrt{x^3} + \frac{x^{2019}}{2019} + C.$$

Câu 27. Hàm số $F(x) = e^x + \tan x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào

A. $f(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x}$

B. $f(x) = e^x + \frac{1}{\sin^2 x}$

C. $f(x) = e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$

D. $f(x) = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(e^x + \tan x + C)' = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}.$

Chọn D

Câu 28. Nếu $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + \ln|2x| + C$ với $x \in (0; +\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$

B. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2x}.$

C. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(2x).$

D. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Do đó $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln|2x| \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' + (\ln|2x|)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{(2x)'}{2x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ với $x \in (0; +\infty)$.

Câu 29. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

- A.** $x + \frac{1}{x-1} + C$. **B.** $1 + \frac{1}{(x-1)^2} + C$. **C.** $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$. **D.** $x^2 + \ln|x-1| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$$

Câu 30. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3 - \frac{1}{\sin^2 x}$ là

- A.** $F(x) = 3x - \tan x + C$. **B.** $F(x) = 3x + \tan x + C$.
C. $F(x) = 3x + \cot x + C$. **D.** $F(x) = 3x - \cot x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 - \frac{1}{\sin^2 x}$ là $F(x) = 3x + \cot x + C$.

Câu 31. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x + \frac{1}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

- A.** $-3\sin x + \frac{1}{x} + C$. **B.** $3\sin x - \frac{1}{x} + C$. **C.** $3\cos x + \frac{1}{x} + C$. **D.** $3\cos x + \ln x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int \left(3\cos x + \frac{1}{x^2} \right) dx = 3\sin x - \frac{1}{x} + C$.

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- A.** $x^3 + \cos x + C$. **B.** $x^3 + \sin x + C$. **C.** $x^3 - \cos x + C$. **D.** $3x^3 - \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là $x^3 - \cos x + C$.

Câu 33. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 8\sin x$.

- A.** $\int f(x) dx = 6x - 8\cos x + C$. **B.** $\int f(x) dx = 6x + 8\cos x + C$.
C. $\int f(x) dx = x^3 - 8\cos x + C$. **D.** $\int f(x) dx = x^3 + 8\cos x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x) dx = \int (3x^2 + 8\sin x) dx = x^3 - 8\cos x + C$.

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

- A.** $\int f(x) dx = x + \sin x + C$. **B.** $\int f(x) dx = x - \sin x + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1+\cos x}{2} \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C.$

Câu 35. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x.$

A. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$

B. $\int f(x)dx = 1 - \sin x + C.$

C. $\int f(x)dx = x \sin x + \cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\int f(x)dx = \int (x + \cos x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$

Câu 36. $\int (x^2 + 2x^3)dx$ có dạng $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 2.

B. 1.

C. 9.

D. 32.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int (x^2 + 2x^3)dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a .

Ta có:

$\int (x^2 + 2x^3)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + C.$

Suy ra để $\int (x^2 + 2x^3)dx$ có dạng $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$ thì $a=1, b=2$.

Chọn B

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta

lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$.

Ví dụ:

A. Thay $a=2$ vào $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$ ta được $\frac{2}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$. Lấy đạo hàm của $\frac{2}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$:

$\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C \right)' = 2x^2 + bx^3$, vì không tồn tại số hữu tỉ b sao cho

$x^2 + 2x^3 = 2x^2 + bx^3, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta loại

đáp án A

B. Thay $a=1$ vào $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$ ta được $\frac{1}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$. Lấy đạo hàm của $\frac{1}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$:

$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C \right)' = x^2 + bx^3$, vì tồn tại số hữu tỉ b sao cho $x^2 + 2x^3 = x^2 + bx^3, \forall x \in \mathbb{R}$ (cụ thể $b=2 \in \mathbb{Q}$) nên ta nhận đáp án **B**

C. Thay $a = 9$ vào $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$ ta được $3x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$. Lấy đạo hàm của $3x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$:

$$\left(3x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C\right)' = 9x^2 + bx^3, \quad \text{vì không tồn tại số hữu tỉ } b \text{ sao cho}$$

$$9x^2 + 2x^3 = 2x^2 + bx^3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên ta loại}$$

đáp án **C**

D. Thay $a = 32$ vào $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$ ta được $\frac{32}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C$. Lấy đạo hàm của

$$\frac{32}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C:$$

$$\left(\frac{32}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C\right)' = 32x^2 + bx^3, \quad \text{vì không tồn tại số hữu tỉ } b \text{ sao cho}$$

$$32x^2 + 2x^3 = 2x^2 + bx^3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên ta loại}$$

đáp án **D**

Chú ý:

Ta chỉ cần so sánh hệ số của x^2 ở 2 vế của đẳng thức $x^2 + 2x^3 = 2x^2 + bx^3$;

$$9x^2 + 2x^3 = 2x^2 + bx^3;$$

$$32x^2 + 2x^3 = 2x^2 + bx^3 \text{ và có thể loại nhanh các đáp án A, C, D}$$

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kỹ đề nên tìm giá trị của b . Nên khoanh đáp án A.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm như sau:

$$\int (x^2 + 2x^3) dx = 3x^3 + 8x^4 + C.$$

$$\text{Vì thế, } a = 9 \text{ để } \int (x^2 + 2x^3) dx = 3x^3 + 8x^4 + C \text{ có dạng } \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C.$$

Học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

D. Đáp án D sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm như sau:

$$\int (x^2 + 2x^3) dx = 3x^3 + 8x^4 + C.$$

Học sinh không đọc kỹ yêu cầu đề bài nên tìm giá trị b .

$$\text{Để } \int (x^2 + 2x^3) dx \text{ có dạng } \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + C \text{ thì } b = 32.$$

Thế là, học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm.

Câu 37. $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right) dx$ có dạng $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

- A.** 1. **B.** 12. **C.** $\frac{36}{5}(1+\sqrt{3})$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5\right) dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a .

Ta có:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 \right) dx = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1+\sqrt{3}}{30}x^6 + C.$$

Suy ra để $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 \right) dx$ có dạng $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$ thì $a = 1 \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{1+\sqrt{3}}{5} \notin \mathbb{Q}$.

Chọn D

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$.

Ví dụ:

A. Thay $a = 1$ vào $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$ ta được $\frac{1}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$. Lấy đạo hàm của $\frac{1}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$:

$$\left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C \right)' = \frac{1}{3}x^3 + bx^5, \text{ vì không tồn tại số hữu tỉ } b \text{ sao cho}$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 = \frac{1}{3}x^3 + bx^5, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên ta}$$

loại đáp án A.

B. Thay $a = 12$ vào $\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$ ta được $x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$. Lấy đạo hàm của $x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C$:

$$\left(x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C \right)' = 4x^3 + bx^5, \text{ vì không tồn tại số hữu tỉ } b \text{ sao cho}$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 = 4x^3 + bx^5, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên ta loại đáp án B}$$

C. Loại đáp án C

Ta có thể loại nhanh đáp án C vì $\frac{36}{5}(1+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$ và $a \in \mathbb{Q}$.

Vậy đáp án chính xác là đáp án **D**

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kỹ đề nên sau khi tìm được giá trị của a (không tìm giá trị của b). Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm và chỉ tìm giá trị của a như sau:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 \right) dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^4 + 6 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^6 + C = x^4 + \frac{6(1+\sqrt{3})}{5}x^6 + C.$$

$$\text{Vì thế, } a = 12 \text{ để } \int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 \right) dx = x^4 + \frac{6(1+\sqrt{3})}{5}x^6 + C \text{ có dạng } \frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C.$$

Thế là, học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ nhớ sai công thức nguyên hàm và chỉ tìm giá trị của b do không đọc kỹ yêu cầu bài toán:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 \right) dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^4 + 6 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^6 + C = x^4 + \frac{6(1+\sqrt{3})}{5}x^6 + C.$$

Vì thế, $b = \frac{36}{5}(1+\sqrt{3})$ để $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{5}x^5 \right) dx = x^4 + \frac{6(1+\sqrt{3})}{5}x^6 + C$ có dạng

$$\frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^6 + C.$$

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

Câu 38. $\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Biết rằng

$$\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C. \text{ Giá trị } a, b \text{ lần lượt bằng:}$$

A. 1; 3.

B. 3; 1.

C. $-\frac{1}{8}; 1.$

D.

$$\frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta cần tìm $\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx$.

Ta có:

$$\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx = \frac{1}{4}(2a+1)x^4 + \frac{1}{3}bx^3 + C.$$

Vì ta có giả thiết $\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C$ nên $\frac{1}{4}(2a+1)x^4 + \frac{1}{3}bx^3 + C$ có dạng $\frac{3}{4}x^4 + x^3 + C$.

$$\text{Để } \frac{1}{4}(2a+1)x^4 + \frac{1}{3}bx^3 + C \text{ có dạng } \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C \text{ thì } \begin{cases} \frac{1}{4}(2a+1) = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3}b = 1 \end{cases}, \text{ nghĩa là } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy đáp án chính xác là đáp án A.

Cách 2:

Ta loại nhanh đáp án C vì giá trị a ở đáp án C không thỏa điều kiện $a \in \mathbb{Q}$.

Tiếp theo, ta thay giá trị a, b ở các đáp án A, B vào $\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx$ và tìm $\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx$.

Ta có: $\int (3x^3 + 3x^2) dx = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C$ nên đáp án chính xác là đáp án A.

Chú ý:

Giả sử các giá trị a, b ở các đáp án A, B, C không thỏa yêu cầu bài toán thì đáp án chính xác là **Chọn D**.

Sai lầm thường gặp:

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh không chú ý đến thứ tự sắp xếp nên học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ:

Ta có:

$$\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx = (2a+1)x^4 + bx^3 + C.$$

Vì ta có giả thiết $\int ((2a+1)x^3 + bx^2) dx = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C$ nên $(2a+1)x^4 + bx^3 + C$ có dạng $\frac{3}{4}x^4 + x^3 + C$.

$$\text{Để } \frac{1}{4}(2a+1)x^4 + \frac{1}{3}bx^3 + C \text{ có dạng } \frac{3}{4}x^4 + x^3 + C \text{ thì } \begin{cases} (2a+1) = \frac{3}{4}, \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{nghĩa là } \begin{cases} a = -\frac{1}{8}. \\ b = 1 \end{cases}$$

Câu 39. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $f(x) = 2x - 3\cos x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

A. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$

B. $F(x) = x^2 - 3\sin x - \frac{\pi^2}{4}$

C. $F(x) = x^2 - 3\sin x + \frac{\pi^2}{4}$

D. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int (2x - 3\cos x) dx = x^2 - 3\sin x + C$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 3\sin \frac{\pi}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = 6 - \frac{\pi^2}{4}$$

Vậy $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Chọn D

Câu 40. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

A. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

B. $F(x) = \cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$

C. $F(x) = -\cot x + x^2$

D. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x^2 - \cot x + C$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cot \frac{\pi}{4} + C = -1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi^2}{16}$$

Vậy $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Chọn A

Câu 41. Nếu $\int f(x) dx = e^x + \sin^2 x + C$ thì $f(x)$ là hàm nào?

A. $e^x + \cos^2 x$

B. $e^x - \sin 2x$

C. $e^x + \cos 2x$

D. $e^x + \sin 2x$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(e^x + \sin^2 x + C)' = e^x + \sin 2x$

Chọn D

Câu 42. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ biết $F(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1^2}{2} + \frac{1}{1} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$

Vậy $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

Chọn D

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$ là :

A. $4\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$.

B. $2\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$.

C. $(4\sqrt{x})^{-1} + 3\ln|x| + C$.

D. $16\sqrt{x} - 3\ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} \right) dx = 4\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$.

Chọn A

Câu 44. Tính $\int (\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x}) dx$

A. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$.

B. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 4\ln|x| + C$.

C. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$.

D. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x} \right) dx = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + 4\ln|x| + C$.

Chọn D

Câu 45. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ thỏa mãn $F(1) = 9$ là:

A. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2$.

B. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 10$.

C. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x$.

D. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 2) dx = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + C$

$F(1) = 9 \Leftrightarrow 1^4 - 1^3 + 1^2 - 2.1 + C = 9 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10$.

Chọn D

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x + 1)^5$ là:

A. $\frac{1}{12}(2x + 1)^6 + C$.

B. $\frac{1}{6}(2x + 1)^6 + C$.

C. $\frac{1}{2}(2x+1)^6 + C.$

D. $10(2x+1)^4 + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^6}{6} = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C.$

Chọn A

Câu 47. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 0$ là

A. $2x^3 - 4x^4.$

B. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x.$

C. $x^3 - x^4 + 2x.$

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int (2x^2 + x^3 - 4) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - 4x + C$

$F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 0^3}{3} + \frac{0^4}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x.$

Chọn D

Câu 48. Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $F(-1) = 3$

A. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x - 3$

B. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

C. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x + 3$

D. $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int F'(x) dx = \int (4x^3 - 3x^2 + 2) dx = x^4 - x^3 + 2x + C$

$F(-1) = 3 \Leftrightarrow (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1) + C = 3 \Leftrightarrow C = 3$

Vậy $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

Chọn B

Câu 49. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = |x-1|$. Biết rằng $f(0) = 3$. Tính $f(2) + f(4)$?

A. 10.

B. 12.

C. 4.

D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Khi $x \geq 1$ thì $f(x) = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1.$

Khi $x < 1$ thì $f(x) = -\int (x-1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C_2.$

Theo đề bài ta có $f(0) = 3$ nên $C_2 = 3 \Rightarrow f(x) = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 3$ khi $x < 1$.

Mặt khác do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 3\right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C_1\right] \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 3 = \frac{1}{2} - 1 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 4.$

Vậy khi $x \geq 1$ thì $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4 \Rightarrow f(2) + f(4) = 12.$

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x + \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$; $f(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$.

B. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$.

C. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

D. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int (3 - 5\cos x) dx = 3x - 5\sin x + C$.

Lại có: $f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 - 5\sin 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$. Vậy $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

Câu 52. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

* Ta có $F(x) = -\cos x + C$, với C là hằng số tùy ý.

* Đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên

$1 = -\cos 0 + C \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\cos x + 2$. Do đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Câu 53. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 4.

B. $\frac{13}{3}$.

C. 2.

D. $\frac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int x^2 - 2x + 3 dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có $F(0) = 2 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{13}{3}$.

Câu 54. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1$,

$$F(1) = 4, \quad f(1) = 0.$$

A. $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$

B. $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

C. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$

D. $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \int (ax + bx^{-2}) dx = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^{-1}}{-1} + C = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + C$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b + C = 1 \\ \frac{a}{2} - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases} \text{ Vậy } F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

Câu 55. Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 . Hàm số $f(x)$ là

A. $x^3 + x^2 - 3x - 5.$ **B.** $x^3 + 2x^2 - 5x - 5.$ **C.** $2x^3 + x^2 - 7x - 5.$ **D.** $x^3 + x^2 + 4x - 5.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1-m)x + C.$$

$$\text{Theo đề bài, ta có } \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-m) + C + 12 = 1 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$$

Câu 56. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2 [3F(1) - 2F(2)]$ bằng

A. 10. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$3F(1) - 2F(2) = 3[F(1) - F(2)] + F(2) - F(0) + F(0) = 3 \int_2^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \frac{1}{3} = 4.$$

$$\Rightarrow \log_2 [3F(1) - 2F(2)] = \log_2 4 = 2.$$

Câu 57. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + 2(m-1)x + m + 5$, với m là tham số thực. Một nguyên hàm của $f(x)$ biết rằng $F(1) = 8$ và $F(0) = 1$ là:

A. $F(x) = x^4 + 2x^2 + 6x + 1$ **B.** $F(x) = x^4 + 6x + 1.$

C. $F(x) = x^4 + 2x^2 + 1.$

D. Đáp án A và B

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int [4x^3 + 2(m-1)x + m + 5]dx = x^4 + (m-1)x^2 + (m+5)x + C.$$

Lại có:

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ 1 + m - 1 + m + 5 + C = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy $F(x) = x^4 + 6x + 1.$

Chọn B

Câu 58. Tìm $T = \int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}} dx$?

A. $T = x.n! + n! \ln \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \right) + C.$

B. $T = x.n! - n! \ln \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \right) + C.$

C. $T = n! \ln \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \right) + C.$

D. $T = n! \ln \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \right) - x^n.n! + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \Rightarrow g'(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

Ta có: $g(x) - g'(x) = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow x^n = n!(g(x) - g'(x))$

$$\Rightarrow T = \int \frac{n! \cdot [g(x) - g'(x)]}{g(x)} dx = n! \int \left[1 - \frac{g'(x)}{g(x)} \right] dx = n! \cdot x - n! \ln = n! \cdot x - n! \ln \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \right) + C$$

Chọn B

DẠNG 3: NGUYÊN HÀM CÁC PHÂN THỨC HỮU TỈ

f(x) là hàm hữu tỉ: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

– Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta thực hiện phép chia đa thức.

– Nếu bậc của $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ và $Q(x)$ có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích $f(x)$ thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn: $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

$$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

BÀI TẬP

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$

B. $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C$

Câu 60. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + x}{\frac{x^2}{2}} + C.$

D. $F(x) = \left(\frac{\frac{x^3}{3} + x}{\frac{x^2}{2}}\right)^3 + C.$

Câu 61. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{2x^4+3}{x^2}$ là:

A. $\frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$

B. $-3x^3 - \frac{3}{x} + C.$

C. $\frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$

Câu 62. Tính nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x+3}\right) dx$

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C.$

C. $2 \ln|2x+3| + C.$

D. $\ln|2x+3| + C.$

Câu 63. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ là:

A. $F(x) = 2 \ln|2x+1| - \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = 2 \ln|2x+1| + 1.$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1.$

D. $F(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2}.$

- Câu 64.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.
- A. $F(3) = \ln 2 - 1$. B. $F(3) = \ln 2 + 1$. C. $F(3) = \frac{1}{2}$. D. $F(3) = \frac{7}{4}$.
- Câu 65.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x+1}$ và $F(0) = 2$ thì $F(1)$ bằng.
- A. $\ln 2$. B. $2 + \ln 2$. C. 3. D. 4.
- Câu 66.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{(3-2x)^3}$ là:
- A. $\frac{-1}{2(3+2x)^2} + C$. B. $\frac{1}{4(3-2x)} + C$. C. $\frac{2}{(3-2x)^2} + C$. D. $\frac{1}{2(3-2x)^2} + C$.
- Câu 67.** Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$
- A. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}$. B. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}$. C. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$. D. $\frac{x^2}{x+1}$.
- Câu 68.** Tính $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$.
- A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C$. B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$. C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$. D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C$.
- Câu 69.** $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2x+1}$. Biết $F(0) = 0$, $F(1) = a + \frac{b}{c} \ln 3$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng.
- A. 4. B. 9. C. 3. D. 12.
- Câu 70.** Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.
- A. $F_1(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$. B. $F_2(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$. C. $F_3(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$. D. $F_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
- Câu 71.** Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a + 2b = 8$. B. $a + b = 8$. C. $2a - b = 8$. D. $a - b = 8$.
- Câu 72.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$ thỏa mãn $F(2) = 3$. Tìm $F(x)$:
- A. $F(x) = x + 4 \ln|2x-3| + 1$. B. $F(x) = x + 2 \ln(2x-3) + 1$.
C. $F(x) = x + 2 \ln|2x-3| + 1$. D. $F(x) = x + 2 \ln|2x-3| - 1$.
- Câu 73.** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a \ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 74.** Tính $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$, kết quả là:

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| + C.$ **B.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$ **C.** $\ln |x^2 - 4x + 3| + C.$ **D.** $\ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

Câu 75. Nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx$ là:

A. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x-6} \right| + C.$ **B.** $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-6}{x-1} \right| + C.$
C. $\frac{1}{5} \ln |x^2 - 7x + 6| + C.$ **D.** $-\frac{1}{5} \ln |x^2 - 7x + 6| + C.$

Câu 76. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng

A. $1 + \frac{1}{2} \ln 3.$ **B.** $1 + \frac{1}{2} \ln 5.$ **C.** $1 + \ln 3.$ **D.** $\frac{1}{2}(1 + \ln 3).$

Câu 77. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{1}{4-x^2} dx$.

A. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C.$ **B.** $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$
C. $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$ **D.** $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C.$

Câu 78. Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$.

A. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2 \ln |x+2| - \ln |x+1| + C.$
B. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2 \ln |x+1| - \ln |x+2| + C.$
C. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2 \ln |x+1| + \ln |x+2| + C.$
D. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \ln |x+1| + 2 \ln |x+2| + C.$

Câu 79. Nguyên hàm $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$ là:

A. $x^2 + \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C.$ **B.** $\frac{1}{2} x^2 + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$
C. $\frac{1}{2} x^2 + \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C.$ **D.** $x^2 + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$

Câu 80. Nguyên hàm $\int \frac{3x+3}{-x^2-x+2} dx$ là:

A. $2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + C.$ **B.** $-2 \ln |x-1| + \ln |x+2| + C.$
C. $2 \ln |x-1| + \ln |x+2| + C.$ **D.** $-2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + C.$

Câu 81. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ khi biết $F(1) = \frac{1}{3}$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}.$ **B.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + \frac{13}{6}.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1}$.

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C$.

Câu 82. Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ ($4a-b \neq 0$) là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

và thỏa mãn: $2f^2(x) = [F(x)-1]f'(x)$.

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4$.

B. $a=1, b=-1$.

C. $a=1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

DẠNG 4: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ VÔ TỈ

Câu 83. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2}$ là :

A. $\frac{2x\sqrt[3]{x}}{4} + \frac{9x\sqrt{x^2}}{8} + C$.

B. $\frac{5x\sqrt{x}}{3} + \frac{27x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C$.

C. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{9x^2\sqrt[3]{x}}{5} + C$.

D. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C$.

Câu 84. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3$ là:

A. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C$.

B. $2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C$.

C. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C$.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C$.

Câu 85. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ thu được kết quả là:

A. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$

B. $-2\sqrt{1-x} + C$

C. $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C$

D. $\sqrt{1-x} + C$

Câu 86. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x^2}$. Nguyên hàm của $f(x)$ biết $F(3) = 6$ là:

A. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$.

B. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$.

C. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$.

D. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$.

Câu 87. Cho $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a(x+2)\sqrt{x+2} + b(x+1)\sqrt{x+1} + C$. Khi đó $3a+b$ bằng:

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 88. Tìm $Q = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$?

A. $Q = \sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

B. $Q = \sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

C. $Q = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| - \sqrt{x^2-1} + C$.

D. Cả đáp án B,C đều đúng.

Câu 89. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

- A. -2. B. 3. C. -3. D. 2.

Câu 90. Hàm số $F(x) = (ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a, b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}}. \text{ Tính } a+b.$$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 91. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}} \text{ trên khoảng } \left(\frac{3}{2}; +\infty\right). \text{ Tính } T = a+b+c.$$

- A. $T = 8$. B. $T = 5$. C. $T = 6$. D. $T = 7$.

DẠNG 5: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 92. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

- A. $-2\sin 2x + C$. B. $\sin 2x + C$. C. $2\sin 2x + C$. D. $\sin 2x + C$.

Câu 93. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x + 2$ là

- A. $5\cos 5x + C$. B. $-\frac{1}{5}\cos 5x + 2x + C$. C. $\frac{1}{5}\cos 5x + 2x + C$. D. $\cos 5x + 2x + C$.

Câu 94. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

- A. $x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$. B. $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. C. $x^2 - 2\cos 2x + C$. D. $x^2 + 2\cos 2x + C$.

Câu 95. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 2x$ là:

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{8} + C$. B. $\frac{x}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + C$. C. $\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + C$. D. $\frac{x}{2} + \frac{\cos 4x}{8} + C$.

Câu 96. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $\int f(x)dx = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
C. $\int f(x)dx = 6\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Câu 97. Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

- A. $f(\pi) = -3$. B. $f(\pi) = 1$. C. $f(\pi) = -1$. D. $f(\pi) = 0$.

Câu 98. Tính: $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

- A. $2\tan \frac{x}{2} + C$. B. $\tan \frac{x}{2} + C$. C. $\frac{1}{2}\tan \frac{x}{2} + C$. D. $\frac{1}{4}\tan \frac{x}{2} + C$.

Câu 99. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

- A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$. B. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.

C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1.$

D. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1.$

Câu 100. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là:

A. $\cot x - x + C.$

B. $\tan x - x + C.$

C. $-\cot x - x + C.$

D. $-\tan x - x + C.$

Câu 101. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$ và $F(0) = 1$. Khi đó, ta có $F(x)$ là:

A. $-\tan x.$

B. $-\tan x + 1.$

C. $\tan x + 1.$

D. $\tan x - 1.$

Câu 102. Cho hàm số $f(x) = \sin^4 2x$. Khi đó:

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \cos 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \cos 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$

Câu 103. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1-2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{3}{2}.$

B. $F(x) = \cos(1-2x).$

C. $F(x) = \cos(1-2x) + 1.$

D. $F(x) = \frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{1}{2}.$

Câu 104. Nguyên hàm $\int (\sin 2x + \cos x) dx$ là:

A. $\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C.$

B. $-\cos 2x + \sin x + C.$

C. $-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C.$

D. $-\cos 2x - \sin x + C.$

Câu 105. Nguyên hàm $\int [\sin(2x+3) + \cos(3-2x)] dx$ là:

A. $-2 \cos(2x+3) - 2 \sin(3-2x) + C.$

B. $-2 \cos(2x+3) + 2 \sin(3-2x) + C.$

C. $2 \cos(2x+3) - 2 \sin(3-2x) + C.$

D. $2 \cos(2x+3) + 2 \sin(3-2x) + C.$

Câu 106. Nguyên hàm $\int [\sin^2(3x+1) + \cos x] dx$ là:

A. $\frac{1}{2} x - 3 \sin(6x+2) + \sin x + C.$

B. $x - 3 \sin(6x+2) + \sin x + C.$

C. $\frac{1}{2} x - 3 \sin(3x+1) + \sin x + C.$

D. $\frac{1}{2} x - 3 \sin(6x+2) - \sin x + C.$

Câu 107. Kết quả nào dưới đây không phải là nguyên hàm của $\int (\sin^3 x + \cos^3 x) dx$?

A. $3 \cos x \cdot \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x + C.$

B. $\frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x) + C.$

C. $3\sqrt{2} \sin 2x \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C.$

D. $3\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C.$

Câu 108. Cho hàm số $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$ là:

A. $3 \sin 3x + \sin x$

B. $\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}$

C. $\frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

D. $\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$

- Câu 109.** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cot^2 x$ là:
A. $\cot x - x + C$ **B.** $-\cot x - x + C$ **C.** $\cot x + x + C$ **D.** $\tan x + x + C$
- Câu 110.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính $F(0)$.
A. $F(0) = -4 + 6 \ln 2$. **B.** $F(0) = -4 - 6 \ln 2$. **C.** $F(0) = 4 - 6 \ln 2$. **D.** $F(0) = 4 + 6 \ln 2$.
- Câu 111.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
A. $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$. **B.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$. **C.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. **D.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$.
- Câu 112.** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (1 + \sin x)^2$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$
A. $F(x) = \frac{3}{2}x + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x$. **B.** $F(x) = \frac{3}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x$.
C. $F(x) = \frac{3}{2}x - 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x$. **D.** $F(x) = \frac{3}{2}x + 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x$.
- Câu 113.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{-3 \sin 3x + 2 \cos 3x}{5 \sin 3x - \cos 3x}$.
A. $-\frac{17}{26}x + \frac{7}{78} \ln |5 \sin 3x - \cos 3x| + C$. **B.** $-\frac{17}{26}x - \frac{7}{78} \ln |5 \sin 3x - \cos 3x| + C$.
C. $\frac{17}{26}x + \frac{7}{78} \ln |5 \sin 3x - \cos 3x| + C$. **D.** $\frac{17}{26}x - \frac{7}{78} \ln |5 \sin 3x - \cos 3x| + C$.
- Câu 114.** Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 115.** Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng
A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 116.** $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = 2 \sin x \cos 3x$ và $F(0) = 0$, khi đó
A. $F(x) = \cos 4x - \cos 2x$. **B.** $F(x) = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{1}{8}$.
C. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$. **D.** $F(x) = \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}$.
- Câu 117.** Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm số nào sau đây không phải nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.
A. $F_1(x) = -\cos x$. **B.** $F_2(x) = 2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}$.
C. $F_3(x) = -2 \sin\left(\alpha + \frac{x}{2}\right) \sin\left(\alpha - \frac{x}{2}\right)$. **D.** $F_4(x) = 2 \cos \frac{\alpha+x}{2} \sin \frac{\alpha-x}{2}$.
- Câu 118.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 2x + \frac{1}{2}$.
A. $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = 2 \tan 2x - 2x + C$. **B.** $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \tan 2x - \frac{x}{2} + C$.
C. $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \tan 2x - x + C$. **D.** $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\tan 2x}{2} - \frac{x}{2} + C$.

Câu 119. Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(x) = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}$.

B. $f(x) = \frac{-\cos x - 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$.

C. $f(x) = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$.

D. $f(x) = \cos x + 3\sin x$.

Câu 120. Hàm số $f(x) = \frac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Giá trị

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng?

A. $\frac{3\pi - 11\ln 2}{4}$.

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{8}$.

D. $\frac{3\pi - \ln 2}{4}$.

Câu 121. Tìm $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$?

A. $I = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C$.

B. $I = x + \ln|\sin x + \cos x| + C$.

C. $I = x - \ln|\sin x + \cos x| + C$.

D. $I = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + C$.

Câu 14. Biết $I = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$. Kết quả của A, B lần lượt là

A. $A = B = \frac{1}{2}$.

B. $A = B = -\frac{1}{2}$.

C. $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$.

D. $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$.

Câu 122. Tìm $I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$?

A. $I = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) \right) + C$.

B. $I = x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C$.

C. $I = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) \right) + C$.

D. $I = x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C$.

Câu 123. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -3\sin 2x + 2\cos x - e^x$ là

A. $-6\cos 2x + 2\sin x - e^x + C$.

B. $6\cos 2x - 2\sin x - e^x + C$.

C. $\frac{3}{2}\cos 2x - 2\sin x - e^x + C$.

D. $\frac{3}{2}\cos 2x + 2\sin x - e^x + C$.

Câu 124. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x$,

$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}, f(0) = 0, f(\pi) = 1$. Tỉ số giữa $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $2(\log_2 e + 1)$.

B. 2.

C. $\frac{1(1 + \ln 2)}{2 + \ln 2}$.

D. $2(1 - \log_2 e)$.

DẠNG 6: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ MŨ LÔGARIT

Câu 125. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C.$

B. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C.$

C. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C.$

D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 126. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2018x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2018} \cdot e^{2018x} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^{2018x} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2018e^{2018x} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^{2018x} \ln 2018 + C.$

Câu 127. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{2x}$, biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = e^{2x}.$

B. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = 2e^{2x} - 1.$

D. $F(x) = e^x.$

Câu 128. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{3x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}.$

B. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}.$

C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 1.$

D. $F(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}.$

Câu 129. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x \ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1.$

B. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1.$

C. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1.$

D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1.$

Câu 131. Tính $\int (2 + e^{3x})^2 dx$

A. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

B. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{5}{6}e^{6x} + C$

C. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{6x} + C$

D. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

Câu 132. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x(1 - e^{-x})$ và $F(0) = 3$ thì $F(x)$ là?

A. $e^x - x$

B. $e^x - x + 2$

C. $e^x - x + C$

D. $e^x - x + 1$

Câu 133. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$ là:

A. $e^x + e^{-x} + C.$

B. $e^x - e^{-x} + C.$

C. $-e^x + e^{-x} + C.$

D. $e^x + e^x + C.$

Câu 134. Hàm số $F(x) = e^x + e^{-x} + x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^{-x} + e^x + 1$

B. $f(x) = e^x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

C. $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$

D. $f(x) = e^x + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

Câu 135. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$ là :

A. $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2x}}{2} + C.$

B. $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + C.$

C. $\frac{e^{3x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2} + C.$

D. $\frac{e^{-2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{2} + C.$

Câu 136. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2^{-3x}$ là :

A. $\frac{3^{2x}}{2 \cdot \ln 3} + \frac{2^{-3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

B. $\frac{3^{2x}}{2 \cdot \ln 3} - \frac{2^{-3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

C. $\frac{3^{-2x}}{2 \cdot \ln 3} + \frac{2^{3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

D. $\frac{3^{-2x}}{2 \cdot \ln 3} - \frac{2^{3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

Câu 137. Hàm số $y = f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x) = e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{e^x}$.

A. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = e^x - e^{-x} + C.$

B. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x - e^{-x} + C.$

C. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = \frac{1}{2}e^x - e^{-x} + C.$

Câu 138. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

A. $\int f(x) dx = e^{-x} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x + C.$

Câu 139. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Câu 140. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x} \left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x} \right)$.

A. $F(x) = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

B. $F(x) = 12^x + x\sqrt{x} + C.$

C. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x}}{4^x} \right).$

D. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x} \ln 4}{4^x} \right).$

Câu 141. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

A. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

Câu 142. Tính $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx$

- A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$ B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$ C. $84^x + C$ D. $84^x \ln 84 + C$

Câu 143. Nguyên hàm $\int \frac{e^{2x+1} - 2}{\sqrt[3]{e^x}} dx$ là:

- A. $\frac{5}{3} e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3} e^{\frac{x}{3}} + C.$ B. $\frac{5}{3} e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3} e^{\frac{x}{3}} + C.$
C. $\frac{5}{3} e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3} e^{\frac{x}{3}} + C.$ D. $\frac{5}{3} e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3} e^{\frac{x}{3}} + C.$

Câu 144. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ và $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$ là

- A. $S = \{2\}.$ B. $S = \{-2; 2\}.$ C. $S = \{1; 2\}.$ D. $S = \{-2; 1\}.$

Câu 145. Hàm số $F(x) = \frac{1}{27} e^{3x+1} (9x^2 - 24x + 17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây.

- A. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{3x+1}.$ B. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x+1}.$
C. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{3x+1}.$ D. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x-1}.$

Câu 146. Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

- A. $a = 1, b = -7.$ B. $a = -1, b = -7.$ C. $a = -1, b = 7.$ D. $a = 1, b = 7.$

Câu 147. Tìm $F = \int x^n e^x dx$?

- A. $F = e^x \left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n \right] + x^n + C.$
B. $F = e^x \left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n \right] + C.$
C. $F = n!e^x + C.$
D. $F = x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n + e^x + C.$

Câu 148. Giả sử $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

- A. -2 B. 3 C. 2 D. 5

Câu 149. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- A. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$ B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$
C. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$ D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

Câu 150. Giả sử $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

- A. -2 B. 3 C. 2 D. 5

Câu 151. Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

- A. $T = -3035.$ B. $T = 1007.$ C. $T = -5053.$ D. $T = 1011.$

Câu 152. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f[F(0)]$.

A. $-e^{-1}$.

B. $20e^2$.

C. $9e$.

D. $3e$.

Câu 153. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2017)$.

A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2017} + 1}{\ln 2}$.

B. $T = 2^{2017 \cdot 2018}$.

C. $T = \frac{2^{2017} - 1}{\ln 2}$.

D. $T = \frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$

B. $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{5+2x^4}{x^2} dx = \int \left(\frac{5}{x^2} + 2x^2 \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C.$

Chọn A

Câu 60. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + x}{\frac{x^2}{2}} + C.$

D. $F(x) = \left(\frac{\frac{x^3}{3} + x}{\frac{x^2}{2}} \right)^3 + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^2 dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^2} dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C.$

Chọn A

Câu 61. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{2x^4+3}{x^2}$ là:

A. $\frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$

B. $-3x^3 - \frac{3}{x} + C.$

C. $\frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2x^4+3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$

Chọn A

Câu 62. Tính nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x+3} \right) dx$

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C.$

C. $2 \ln|2x+3| + C.$

D. $\ln|2x+3| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int \left(\frac{1}{2x+3} \right) dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2x+3} \right) d(2x+3) = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$

Câu 63. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ là:

A. $F(x) = 2 \ln|2x+1| - \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = 2 \ln|2x+1| + 1.$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1.$

D. $F(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln\left|2\left(\frac{e-1}{2}\right)+1\right| + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1.$$

Câu 64. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1.$

B. $F(3) = \ln 2 + 1.$

C. $F(3) = \frac{1}{2}.$

D. $F(3) = \frac{7}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C.$$

$$\text{Theo đề } F(2) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(3) = \ln 2 + 1.$$

Câu 65. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x+1}$ và $F(0) = 2$ thì $F(1)$ bằng.

A. $\ln 2.$

B. $2 + \ln 2.$

C. $3.$

D. $4.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$F(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \text{ mà } F(0) = 2 \text{ nên } F(x) = \ln|x+1| + 2.$$

$$\text{Do đó } F(1) = 2 + \ln 2.$$

Câu 66. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{(3-2x)^3}$ là :

A. $\frac{-1}{2(3+2x)^2} + C.$

B. $\frac{1}{4(3-2x)} + C.$

C. $\frac{2}{(3-2x)^2} + C.$

D. $\frac{1}{2(3-2x)^2} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{2}{(3-2x)^3} dx = \frac{1}{2(3-2x)^2} + C.$$

Chọn D

Câu 67. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$

A. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}.$

B. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}.$

C. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}.$

D. $\frac{x^2}{x+1}.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{x^2 + x - 1}{x+1}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} 2x + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}.$$

Chọn B

- Câu 68.** Tính $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$.
- A.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C$. **B.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$. **C.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$. **D.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{1}{x(x-3)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C$.

Chọn D

- Câu 69.** $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2x+1}$. Biết $F(0) = 0$, $F(1) = a + \frac{b}{c} \ln 3$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng.
- A.** 4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \left(3x^2 + \frac{1}{2x+1} \right) dx = x^3 + \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$.

Do $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = x^3 + \frac{1}{2} \ln |2x+1|$.

Vậy $F(1) = 1 + \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow a = 1; b = 1; c = 2 \Rightarrow a+b+c = 4$.

- Câu 70.** Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

A. $F_1(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$. **B.** $F_2(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$. **C.** $F_3(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $F_4(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$(F_1(x))' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án A là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_2(x))' = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, đáp án B không phải là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_3(x))' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án C là nguyên hàm của $f(x)$.

$(F_4(x))' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, đáp án D là nguyên hàm của $f(x)$.

- Câu 71.** Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln |x+1| + b \ln |x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có

$$\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \int \frac{1}{x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x-2} dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C.$$

Vậy $\begin{cases} a=5 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=8.$

Câu 72. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$ thỏa mãn $F(2) = 3$. Tìm $F(x)$:

A. $F(x) = x + 4 \ln|2x-3| + 1.$

B. $F(x) = x + 2 \ln(2x-3) + 1.$

C. $F(x) = x + 2 \ln|2x-3| + 1.$

D. $F(x) = x + 2 \ln|2x-3| - 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int \frac{2x+1}{2x-3} dx = \int \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right) dx = x + 2 \ln|2x-3| + C.$

Lại có $F(2) = 3 \Leftrightarrow 2 + 2 \ln|1| + C = 3 \Leftrightarrow C = 1.$

Câu 73. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a \ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \left(x - \ln|x^2+1| \right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Khi đó $a = -1, b = 2, c = 1.$

Vậy $a+b+c = 2.$

Câu 74. Tính $\int \frac{1}{x^2-4x+3} dx$, kết quả là:

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

C. $\ln|x^2-4x+3| + C.$

D. $\ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

Chọn B

Câu 75. Nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2-7x+6} dx$ là:

A. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x-6} \right| + C.$

B. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-6}{x-1} \right| + C.$

C. $\frac{1}{5} \ln|x^2-7x+6| + C.$

D. $-\frac{1}{5} \ln|x^2-7x+6| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \frac{1}{x^2-7x+6} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-6)} dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{5} (\ln|x-6| - \ln|x-1|) + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-6}{x-1} \right| + C.$$

Chọn B

Câu 76. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng

- A.** $1 + \frac{1}{2} \ln 3$. **B.** $1 + \frac{1}{2} \ln 5$. **C.** $1 + \ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}(1 + \ln 3)$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$.

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1 \Rightarrow F(-2) = 1 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

Câu 77. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{1}{4-x^2} dx$.

- A.** $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$. **B.** $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$.
C. $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$. **D.** $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có $I = -\int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$.

Câu 78. Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$.

- A.** $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2 \ln|x+2| - \ln|x+1| + C$.
B. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2 \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.
C. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2 \ln|x+1| + \ln|x+2| + C$.
D. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2 \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.

Câu 79. Nguyên hàm $\int \frac{2x^3-6x^2+4x+1}{x^2-3x+2} dx$ là:

- A.** $x^2 + \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C$. **B.** $\frac{1}{2} x^2 + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$.
C. $\frac{1}{2} x^2 + \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C$. **D.** $x^2 + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = \int \left(2x + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = x^2 + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$$

Chọn D

Câu 80. Nguyên hàm $\int \frac{3x+3}{-x^2-x+2} dx$ là:

A. $2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$

B. $-2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C.$

C. $2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C.$

D. $-2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \frac{3x+3}{-x^2-x+2} dx = \int \frac{3x+3}{(1-x)(x+2)} dx = \int \left(\frac{2}{1-x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = -2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$$

Chọn B

Câu 81. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ khi biết $F(1) = \frac{1}{3}$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}.$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + \frac{13}{6}.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1}.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \left(x + 1 - \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C = F(x).$$

$$\text{Mà } F(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 + 1 + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = -\frac{13}{6} \text{ nên } F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}.$$

Câu 82. Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ ($4a-b \neq 0$) là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

$$\text{và thỏa mãn: } 2f^2(x) = [F(x)-1]f'(x).$$

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4.$

B. $a=1, b=-1.$

C. $a=1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}.$

D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F(x) = \frac{ax+b}{x+4} \text{ là nguyên hàm của } f(x) \text{ nên } f(x) = F'(x) = \frac{4a-b}{(x+4)^2} \text{ và}$$

$$f'(x) = \frac{2b-8a}{(x+4)^3}.$$

$$\text{Do đó: } 2f^2(x) = (F(x)-1)f'(x) \Leftrightarrow \frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4} = \left(\frac{ax+b}{x+4} - 1 \right) \frac{2b-8a}{(x+4)^3}$$

$$\Leftrightarrow 4a-b = -(ax+b-x-4) \Leftrightarrow (x+4)(1-a) = 0 \Leftrightarrow a=1 \text{ (do } x+4 \neq 0)$$

Với $a=1$ mà $4a-b \neq 0$ nên $b \neq 4$.

Vậy $a=1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+ Vì $4a - b \neq 0$ nên loại được ngay phương án A: $a = 1, b = 4$ và phương án D: $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

+ Để kiểm tra hai phương án còn lại, ta lấy $b = 0, a = 1$. Khi đó, ta có

$$F(x) = \frac{x}{x+4}, \quad f(x) = \frac{4}{(x+4)^2}, \quad f'(x) = -\frac{8}{(x+4)^3}.$$

Thay vào $2f^2(x) = (F(x) - 1)f'(x)$ thấy đúng nên

Chọn C

DẠNG 4: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ VÔ TỈ

Câu 83. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2}$ là :

A. $\frac{2x\sqrt[3]{x}}{4} + \frac{9x\sqrt{x^2}}{8} + C.$

B. $\frac{5x\sqrt{x}}{3} + \frac{27x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C.$

C. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{9x^2\sqrt[3]{x}}{5} + C.$

D. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2}) dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3 \cdot \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C.$

Chọn D

Câu 84. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3$ là:

A. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

B. $2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3 \right) dx = 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 3x + C = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$$

Chọn A

Câu 85. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ thu được kết quả là:

A. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$

B. $-2\sqrt{1-x} + C$

C. $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C$

D. $\sqrt{1-x} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C.$ **Chọn B**

Câu 86. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x^2}$. Nguyên hàm của $f(x)$ biết

$F(3) = 6$ là:

A. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}.$

B. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}.$

C. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}.$

D. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x} + C.$$

Theo đề bài, ta lại có: $F(3) = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3} + \frac{1}{3} + C = 6 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}.$$

Chọn B

- Câu 87.** Cho $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a(x+2)\sqrt{x+2} + b(x+1)\sqrt{x+1} + C$. Khi đó $3a + b$ bằng:
- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. **C. $\frac{4}{3}$.** D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} &= \int (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C \\ \Rightarrow a &= \frac{2}{3}; b = -\frac{2}{3} \\ \Rightarrow 3a + b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- Câu 88.** Tìm $Q = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$?
- A. $Q = \sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$. B. $Q = \sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.
C. $Q = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| - \sqrt{x^2-1} + C$. **D. Cả đáp án B,C đều đúng.**

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases}$

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 1$ thì

$$Q = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

Trường hợp 2: Nếu $x < -1$ thì

$$Q = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| - \sqrt{x^2-1} + C$$

Chọn D

- Câu 89.** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng
- A. -2 . **B. 3 .** C. -3 . D. 2 .

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1 \right) dx = \sqrt{x+1} + (m-1)x + C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Vậy $F(x) = \sqrt{x+1} + 2x - 1$.

- Câu 90.** Hàm số $F(x) = (ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a, b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Tính $a + b$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F'(x) = a\sqrt{4x+1} + (ax+b) \cdot \frac{2x}{\sqrt{4x+1}} = \frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}.$$

$$\text{Để } F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \text{ thì } \frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}} = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=12 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Do đó $a+b=1$.

Câu 91. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}} \text{ trên khoảng } \left(\frac{3}{2}; +\infty\right). \text{ Tính } T = a + b + c.$$

A. $T = 8$.

B. $T = 5$.

C. $T = 6$.

D. $T = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F'(x) = f(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Tính } F'(x) &= (2ax+b)\sqrt{2x-3} + (ax^2+bx+c) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{(2ax+b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$$

$$\Rightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c = 20x^2 - 30x + 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ -3b + c = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 7.$$

DẠNG 5: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 92. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \cos 2x$ là

- A.** $-2 \sin 2x + C$. **B.** $\sin 2x + C$. **C.** $2 \sin 2x + C$. **D.** $\sin 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2 \cos 2x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C = \sin 2x + C.$$

Câu 93. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x + 2$ là

- A.** $5 \cos 5x + C$. **B.** $-\frac{1}{5} \cos 5x + 2x + C$. **C.** $\frac{1}{5} \cos 5x + 2x + C$. **D.** $\cos 5x + 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (\sin 5x + 2) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + 2x + C.$$

Câu 94. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

- A.** $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$. **B.** $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. **C.** $x^2 - 2 \cos 2x + C$. **D.** $x^2 + 2 \cos 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (2x + \sin 2x) dx = x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Câu 95. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 2x$ là:

- A.** $\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{8} + C$. **B.** $\frac{x}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + C$. **C.** $\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} + C$. **D.** $\frac{x}{2} + \frac{\cos 4x}{8} + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \cos^2 2x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

Chọn D

Câu 96. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)$.

- A.** $\int f(x) dx = 3 \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + C$. **B.** $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + C$.
C. $\int f(x) dx = 6 \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Áp dụng công thức: } \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C.$$

Câu 97. Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

- A.** $f(\pi) = -3$. **B.** $f(\pi) = 1$. **C.** $f(\pi) = -1$. **D.** $f(\pi) = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = -2 \sin 2x - \cos x$$

$$\text{Do đó: } f(\pi) = 1.$$

Câu 98. Tính: $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

- A.** $2 \tan \frac{x}{2} + C$. **B.** $\tan \frac{x}{2} + C$. **C.** $\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$. **D.** $\frac{1}{4} \tan \frac{x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C$.

Chọn B

Câu 99. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

- A.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$. **B.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.
C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1$. **D.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\square \int f(x) dx = \int (6x + \sin 3x) dx = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C = F(x).$$

$$\square F(0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{3} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1.$$

Vậy $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Câu 100. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là:

- A.** $\cot x - x + C$. **B.** $\tan x - x + C$. **C.** $-\cot x - x + C$. **D.** $-\tan x - x + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \tan x - x + C$.

Chọn B

Câu 101. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$ và $F(0) = 1$. Khi đó, ta có $F(x)$ là:

- A.** $-\tan x$. **B.** $-\tan x + 1$. **C.** $\tan x + 1$. **D.** $\tan x - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int -\frac{dx}{\cos^2 x} = -\tan x + C$. Mà $F(0) = 1 \Leftrightarrow -\tan 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = -\tan x + 1$.

Chọn B

Câu 102. Cho hàm số $f(x) = \sin^4 2x$. Khi đó:

- A.** $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \cos 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \cos 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int \sin^4 2x \cdot dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 4x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 4x + \cos 8x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C. \end{aligned}$$

Chọn D

Câu 103. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1-2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{3}{2}$.

B. $F(x) = \cos(1-2x)$.

C. $F(x) = \cos(1-2x) + 1$.

D. $F(x) = \frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin(1-2x) dx = -\frac{1}{2} [-\cos(1-2x)] + C = \frac{1}{2} \cos(1-2x) + C.$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos\left(1-2 \cdot \frac{1}{2}\right) + C = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cos(1-2x) + \frac{1}{2}.$$

Câu 104. Nguyên hàm $\int (\sin 2x + \cos x) dx$ là:

A. $\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C$. **B.** $-\cos 2x + \sin x + C$.

C. $-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C$.

D. $-\cos 2x - \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int (\sin 2x + \cos x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C.$$

Chọn C

Câu 105. Nguyên hàm $\int [\sin(2x+3) + \cos(3-2x)] dx$ là:

A. $-2 \cos(2x+3) - 2 \sin(3-2x) + C$.

B. $-2 \cos(2x+3) + 2 \sin(3-2x) + C$.

C. $2 \cos(2x+3) - 2 \sin(3-2x) + C$.

D. $2 \cos(2x+3) + 2 \sin(3-2x) + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int [\sin(2x+3) + \cos(3-2x)] dx = -2 \cos(2x+3) - 2 \sin(3-2x) + C.$$

Chọn A

Câu 106. Nguyên hàm $\int [\sin^2(3x+1) + \cos x] dx$ là:

A. $\frac{1}{2} x - 3 \sin(6x+2) + \sin x + C$.

B. $x - 3 \sin(6x+2) + \sin x + C$.

C. $\frac{1}{2} x - 3 \sin(3x+1) + \sin x + C$.

D. $\frac{1}{2} x - 3 \sin(6x+2) - \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int [\sin^2(3x+1) + \cos x] dx = \int \left[\frac{1 - \cos(6x+2)}{2} + \cos x \right] dx = \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(6x+2) + \cos x \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}x - 3\sin(6x+2) + \sin x + C$$

Chọn A

Câu 107. Kết quả nào dưới đây không phải là nguyên hàm của $\int (\sin^3 x + \cos^3 x) dx$?

A. $3\cos x \cdot \sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x + C$.

B. $\frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x) + C$.

C. $3\sqrt{2} \sin 2x \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C$.

D. $3\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int (\sin^3 x + \cos^3 x) dx = 3\cos x \cdot \sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x + C$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x) + C = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin 2x \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + C$$

Chọn C

Câu 108. Cho hàm số $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$ là:

A. $3\sin 3x + \sin x$

B. $\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}$

C. $\frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

D. $\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \cos 3x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \sin 0 + \frac{1}{4} \sin 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$$

Chọn D

Câu 109. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cot^2 x$ là:

A. $\cot x - x + C$

B. $-\cot x - x + C$

C. $\cot x + x + C$

D. $\tan x + x + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \cot^2 x dx = \int (\cot^2 x + 1 - 1) dx = -\cot x - x + C.$$

Chọn B

Câu 110. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -4 + 6 \ln 2$.

B. $F(0) = -4 - 6 \ln 2$.

C. $F(0) = 4 - 6 \ln 2$.

D. $F(0) = 4 + 6 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx.$$

$$F(x) = \int \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x}{1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}} dx = \int \frac{4 \sin 2x \cdot \cos 2x}{3 + \cos 2x} dx = \int \frac{-2 \cdot \cos 2x \cdot (3 + \cos 2x)'}{3 + \cos 2x} dx$$

$$= -2 \int \frac{(3 + \cos 2x) - 3}{3 + \cos 2x} d(3 + \cos 2x) = -2 \int \left(1 - \frac{3}{3 + \cos 2x} \right) d(3 + \cos 2x)$$

$$= -2(3 + \cos 2x) + 6 \ln |3 + \cos 2x| + C.$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2(3 + \cos \pi) + 6 \ln |3 + \cos \pi| + C = 0 \Leftrightarrow C = 4 - 6 \ln 2.$$

$$\Rightarrow F(0) = -2(3 + \cos 0) + 6 \ln |3 + \cos 0| + 4 - 6 \ln 2 = -4 + 6 \ln 2.$$

Cách 2:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx = F(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -F(0).$$

$$\Rightarrow F(0) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx \approx 0,15888.$$

Câu 111. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$. **B.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$. **C.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. **D.** $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int \tan^2 x dx = \int [(\tan^2 x + 1) - 1] dx = \tan x - x + C.$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Câu 112. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (1 + \sin x)^2$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x$. **B.** $F(x) = \frac{3}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x$.

C. $F(x) = \frac{3}{2}x - 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x$. **D.** $F(x) = \frac{3}{2}x + 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$\int (1 + \sin x)^2 dx = \int (1 + 2 \sin x + \sin^2 x) dx = \int \left(1 + 2 \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin \pi + c = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{3}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

Câu 113. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{-3 \sin 3x + 2 \cos 3x}{5 \sin 3x - \cos 3x}$.

A. $-\frac{17}{26}x + \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C.$

B. $-\frac{17}{26}x - \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C.$

C. $\frac{17}{26}x + \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C.$

D. $\frac{17}{26}x - \frac{7}{78}\ln|5\sin 3x - \cos 3x| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$-3\sin 3x + 2\cos 3x = A(5\sin 3x - \cos 3x) + B(15\cos 3x + 3\sin 3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5A + 3B = -3 \\ -A + 15B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-17}{26} \\ B = \frac{7}{78} \end{cases}$$

Câu 114. Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) dx = \int (1 - \sin 4x) dx = x + \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$$\text{Mà } \int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C \text{ nên } \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5.$$

Câu 115. Tính $I = \int 8\sin 3x \cos x dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I = \int 8\sin 3x \cos x dx = 4 \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\cos 4x - 2\cos 2x + C \Rightarrow a = -1, b = -2.$$

Câu 116. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = 2\sin x \cos 3x$ và $F(0) = 0$, khi đó

A. $F(x) = \cos 4x - \cos 2x.$

B. $F(x) = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{1}{8}.$

C. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}.$

D. $F(x) = \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin 4x - \sin 2x \Rightarrow F(x) = -\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C, \text{ vì } F(0) = 0 \text{ nên } C = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Nên } F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}.$$

Câu 117. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm số nào sau đây không phải nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

A. $F_1(x) = -\cos x.$ **B.** $F_2(x) = 2\sin \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}.$

C. $F_3(x) = -2\sin\left(\alpha + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{x}{2}\right).$

D. $F_4(x) = 2\cos \frac{\alpha+x}{2} \sin \frac{\alpha-x}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Đáp án A là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

$2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2} = \cos \alpha - \cos x$. Đáp án B là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

$-2 \sin \left(\alpha + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\alpha - \frac{x}{2} \right) = \cos(2\alpha) - \cos x$. Đáp án C là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

$2 \cos \frac{\alpha+x}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-x}{2} = \sin \alpha - \sin x$. Đáp án D không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

Câu 118. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 2x + \frac{1}{2}$.

- A. $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \tan 2x - 2x + C$. B. $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \tan 2x - \frac{x}{2} + C$.
C. $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \tan 2x - x + C$. D. $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\tan 2x}{2} - \frac{x}{2} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\tan 2x}{2} - \frac{x}{2} + C$.

Câu 119. Hàm số $F(x) = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

- A. $f(x) = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}$. B. $f(x) = \frac{-\cos x - 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$.
C. $f(x) = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$. D. $f(x) = \cos x + 3\sin x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f(x) = F'(x) = (\ln|\sin x - 3\cos x|)' = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$.

Câu 120. Hàm số $f(x) = \frac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Giá trị

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng?

- A. $\frac{3\pi - 11\ln 2}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{3\pi}{8}$. D. $\frac{3\pi - \ln 2}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \frac{\frac{3}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{11}{2}(-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$
 $\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \frac{3}{2}x + \int \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx$
 $= \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \int \frac{1}{\cos x + \sin x} d(\cos x + \sin x) = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \ln|\cos x + \sin x| + C$.

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{8} + \frac{11}{2} \ln \sqrt{2} + C = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow C = -\frac{11}{4} \ln 2$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + C = \frac{3\pi}{4} - \frac{11}{4} \ln 2.$$

Câu 121. Tìm $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$?

A. $I = \frac{1}{2} (x + \ln |\sin x + \cos x|) + C.$

B. $I = x + \ln |\sin x + \cos x| + C.$

C. $I = x - \ln |\sin x + \cos x| + C.$

D. $I = \frac{1}{2} (x - \ln |\sin x + \cos x|) + C.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } T = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow I + T = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = x + C_1 \quad (1)$$

Ta lại có:

$$I - T = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx =$$

$$\Leftrightarrow I - T = - \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = - \ln |\sin x + \cos x| + C_2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2) ta có hệ: } \begin{cases} I + T = x + C_1 \\ I - T = - \ln |\sin x + \cos x| + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{2} (x - \ln |\sin x + \cos x|) + C \\ T = \frac{1}{2} (x + \ln |\sin x + \cos x|) + C \end{cases}$$

Chọn D

Câu 14. Biết $I = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$. Kết quả của A, B lần lượt là

A. $A = B = \frac{1}{2}.$

B. $A = B = -\frac{1}{2}.$

C. $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$

D. $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) = \frac{A(\cos x + \sin x) + B(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$\Rightarrow \sin x = A(\cos x + \sin x) + B(\cos x - \sin x) = (A + B) \cos x + (A - B) \sin x$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 122. Tìm $I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$?

A. $I = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) \right) + C.$ **B.** $I = x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C.$

C. $I = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) \right) + C.$ **D.** $I = x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt: $T = \int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

$$\Rightarrow I + T = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx + \int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = x + C_1 \quad (1)$$

Mặt khác:

$$I - T = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx - \int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$\Leftrightarrow I - T = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x} dx$$

$$\Leftrightarrow I - T = \int \frac{2\cos 2x}{2 - \sin^2 2x} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C_2 \quad (2)$$

Từ (1); (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} I + T = x + C_1 \\ I - T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) \right) + C \\ T = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right) \right) + C \end{cases}$$

Chọn C

Câu 123. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -3\sin 2x + 2\cos x - e^x$ là

A. $-6\cos 2x + 2\sin x - e^x + C.$ **B.** $6\cos 2x - 2\sin x - e^x + C.$

C. $\frac{3}{2}\cos 2x - 2\sin x - e^x + C.$ **D.** $\frac{3}{2}\cos 2x + 2\sin x - e^x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int (-3\sin 2x + 2\cos x - e^x) dx = \frac{3}{2}\cos 2x + 2\sin x - e^x + C.$$

Câu 124. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x$,

$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 1$. Tỉ số giữa $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $2(\log_2 e + 1).$ **B.** $2.$ **C.** $\frac{1(1 + \ln 2)}{2 + \ln 2}.$ **D.** $2(1 - \log_2 e).$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C = \begin{cases} -\ln \cos x + C_1 & \text{khi } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\ln(-\cos x) + C_2 & \text{khi } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ và } f(\pi) = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} -\ln \cos x & \text{khi } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\ln(-\cos x) + 1 & \text{khi } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (\ln 2 + 1) \text{ và } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{Vậy tỉ số cần tìm là } 2(\log_2 e + 1)$$

DẠNG 6: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ MŨ LÔGARIT

Câu 125. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$.

B. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.

C. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C$.

D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int 5^{2x} dx = \int 25^x dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.

Câu 126. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2018x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2018} \cdot e^{2018x} + C$.

B. $\int f(x) dx = e^{2018x} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2018e^{2018x} + C$.

D. $\int f(x) dx = e^{2018x} \ln 2018 + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng.

Câu 127. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{2x}$, biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = e^{2x}$. **B.** $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$. **C.** $F(x) = 2e^{2x} - 1$. **D.** $F(x) = e^x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$.

Theo giả thiết: $F(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$.

Câu 128. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{3x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{2}{3}$.

B. $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$.

C. $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x} + 1$.

D. $F(x) = -\frac{1}{3} e^{3x} + \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$.

Lại có $F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$

Câu 129. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$$

$$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x \ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1.$

B. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1.$

C. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1.$

D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \int (2018^x \ln 2018 - \cos x) dx = 2018^x - \sin x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2018^0 - \sin 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2018^x - \sin x + 1.$$

Câu 131. Tính $\int (2 + e^{3x})^2 dx$

A. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

B. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{5}{6}e^{6x} + C$

C. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{6x} + C$

D. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int (2 + e^{3x})^2 dx = \int (4 + 4e^{3x} + e^{6x}) dx = 4x + \frac{4e^{3x}}{3} + \frac{e^{6x}}{6} + C.$$

Chọn D

Câu 132. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x(1 - e^{-x})$ và $F(0) = 3$ thì $F(x)$ là?

A. $e^x - x$

B. $e^x - x + 2$

C. $e^x - x + C$

D. $e^x - x + 1$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int e^x(1 - e^{-x}) dx = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C$$

$$F(0) = 3 \Leftrightarrow e^0 - 0 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = e^x - x + 2$$

Chọn B

Câu 133. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$ là:

A. $e^x + e^{-x} + C.$

B. $e^x - e^{-x} + C.$

C. $-e^x + e^{-x} + C.$

D. $e^x + e^x + C.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} + C.$$

Chọn A

Câu 134. Hàm số $F(x) = e^x + e^{-x} + x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^{-x} + e^x + 1$

B. $f(x) = e^x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

C. $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$

D. $f(x) = e^x + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (e^x + e^{-x} + 1) dx = e^x - e^{-x} + x + C.$

Chọn C

Câu 135. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$ là :

A. $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2x}}{2} + C.$

B. $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + C.$

C. $\frac{e^{3x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2} + C.$

D. $\frac{e^{-2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{2} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (e^{2x} - e^{-3x}) dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + C.$

Chọn B

Câu 136. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2^{-3x}$ là :

A. $\frac{3^{2x}}{2 \cdot \ln 3} + \frac{2^{-3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

B. $\frac{3^{2x}}{2 \cdot \ln 3} - \frac{2^{-3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

C. $\frac{3^{-2x}}{2 \cdot \ln 3} + \frac{2^{3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

D. $\frac{3^{-2x}}{2 \cdot \ln 3} - \frac{2^{3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (3^{2x} - 2^{-3x}) dx = \frac{3^{2x}}{2 \cdot \ln 3} + \frac{2^{-3x}}{3 \cdot \ln 2} + C.$

Chọn A

Câu 137. Hàm số $y = f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x) = e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{e^x}$.

A. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = e^x - e^{-x} + C.$

B. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x - e^{-x} + C.$

C. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = 2e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = \frac{1}{2}e^x - e^{-x} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x) = e^{2x}$ nên ta có: $f(x) = (F(x))' = 2e^{2x}.$

Khi đó: $\int \frac{f(x)+1}{e^x} dx = \int \frac{2e^{2x}+1}{e^x} dx = \int (2e^x + e^{-x}) dx = 2e^x - e^{-x} + C.$

Câu 138. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x}).$

A. $\int f(x) dx = e^{-x} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + C.$

Câu 139. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = -xe^{x^2} \neq xe^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y = xe^{x^2}$.

Câu 140. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x} \left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x}\right).$

A. $F(x) = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

B. $F(x) = 12^x + x\sqrt{x} + C.$

C. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x}}{4^x}\right).$

D. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x} \ln 4}{4^x}\right).$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) = 2^{2x} \left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x}\right) = 12^x - \sqrt{x}$

Nên $F(x) = \int (12^x - \sqrt{x}) dx = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

Câu 141. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5}\right).$

A. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\int f(x) dx = \int (2017e^x - 2018x^{-5}) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

Câu 142. Tính $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx$

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$

C. $84^x + C$

D. $84^x \ln 84 + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C.$

Chọn A

Câu 143. Nguyên hàm $\int \frac{e^{2x+1} - 2}{\sqrt[3]{e^x}} dx$ là:

A. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

B. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

C. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

D. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \frac{e^{2x+1}-2}{\sqrt[3]{e^x}} dx = \int \left(\frac{e^{2x+1}}{e^{\frac{x}{3}}} - \frac{2}{e^{\frac{x}{3}}} \right) dx = \int \left(e^{2x+1-\frac{x}{3}} - 2e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \int \left(e^{\frac{5}{3}x+1} - 2e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{3}} + C$$

Chọn D

Câu 144. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+3}$ và $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x+3) = 2$ là

A. $S = \{2\}.$

B. $S = \{-2; 2\}.$

C. $S = \{1; 2\}.$

D. $S = \{-2; 1\}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \frac{dx}{e^x+3} = \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+3} \right) dx = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x+3)) + C.$

Do $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4$ nên $C = 0$. Vậy $F(x) = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x+3)).$

Do đó: $3F(x) + \ln(e^x+3) = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Chọn A

Câu 145. Hàm số $F(x) = \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2-24x+17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây.

A. $f(x) = (x^2+2x-1)e^{3x+1}.$

B. $f(x) = (x^2-2x-1)e^{3x+1}.$

C. $f(x) = (x^2-2x+1)e^{3x+1}.$

D. $f(x) = (x^2-2x-1)e^{3x-1}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$F'(x) = \left(\frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2-24x+17) \right)' = \frac{1}{27} \left[3e^{3x+1}(9x^2-24x+17) + e^{3x+1}(9x^2-24x+17)' \right] \\ = \frac{1}{27} \left[3e^{3x+1}(9x^2-24x+17) + e^{3x+1}(18x-24) \right] = \frac{1}{27}e^{3x+1}(27x^2-54x+27) = e^{3x+1}(x^2-2x+1)$$

Câu 146. Cho hai hàm số $F(x) = (x^2+ax+b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2+3x+6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a=1, b=-7.$

B. $a=-1, b=-7.$

C. $a=-1, b=7.$

D. $a=1, b=7.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F'(x) = (-x^2 + (2-a)x + a-b)e^{-x} = f(x)$ nên $\begin{cases} 2-a=3 \\ a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-7 \end{cases}.$

Câu 147. Tìm $F = \int x^n e^x dx$?

A. $F = e^x \left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n \right] + x^n + C.$

B. $F = e^x \left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n \right] + C.$

C. $F = n!e^x + C.$

D. $F = x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n + e^x + C.$

Hướng dẫn giải

Lưu ý: ta luôn có điều sau $\left[e^x f(x) \right]' = e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) + C = e^x \left[f(x) + f'(x) \right] + C$

$$F = \int e^x \left[\left(x^n + n \cdot x^{n-1} \right) - n \left(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} \right) + n(n-1) \left(x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} \right) + \dots + n!(-1)^{n-1}(x+1) + n!(-1)^n \right] dx$$

$$\Leftrightarrow F = e^x \left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!(-1)^{n-1}x + n!(-1)^n \right] + C$$

Chọn B

Câu 148. Giả sử $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C.$ Khi đó $a + b + c + d$ bằng

A. -2

B. 3

C. 2

D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$ nên

$$\begin{aligned} \left((ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C \right)' &= (3ax^2 + 2bx + c)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= (2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d)e^{2x} \\ &= (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 5 \\ 2b + 2c = -2 \\ c + 2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } a + b + c + d = 3.$$

Câu 149. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$

A. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int f(x) dx = \int \left(2017e^x - 2018x^{-5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$$

Câu 150. Giả sử $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C.$ Khi đó $a + b + c + d$ bằng

A. -2

B. 3

C. 2

D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int e^{2x} (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4) dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C$ nên

$$\begin{aligned} \left((ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x} + C \right)' &= (3ax^2 + 2bx + c)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= (2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d)e^{2x} \\ &= (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 5 \\ 2b + 2c = -2 \\ c + 2d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } a + b + c + d = 3.$$

Câu 151. Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

A. $T = -3035$.

B. $T = 1007$.

C. $T = -5053$.

D. $T = 1011$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ nên ta có: $(F(x))' = f(x)$, với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow (2ax^2 + x(2b + 2a) - 2c + b)e^{2x} = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}, \text{ với mọi } x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2018 \\ 2b + 2a = -3 \\ -2c + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = -\frac{2021}{2} \\ c = -\frac{2023}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b + 4c = 1009 + 2 \cdot \left(-\frac{2021}{2}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2023}{4}\right) = -3035.$$

Câu 152. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f[F(0)]$.

A. $-e^{-1}$.

B. $20e^2$.

C. $9e$.

D. $3e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$F'(x) = (ax^2 + bx + c)'e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(e^{-x})' = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$F'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

Vì $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$ nên:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x} = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Như vậy } F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^{-x} \Rightarrow F(0) = (-2 \cdot 0^2 + 0 - 1)e^{-0} = -1.$$

$$\text{Bởi vậy } f[F(0)] = f(-1) = (2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2)e = 9e.$$

Câu 153. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2017)$.

A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2017} + 1}{\ln 2}$. **B.** $T = 2^{2017 \cdot 2018}$. **C.** $T = \frac{2^{2017} - 1}{\ln 2}$. **D.** $T = \frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \frac{1}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

Khi đó:

$$T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2017)$$

$$= \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2017}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1 - 2^{2018}}{1 - 2} = \frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

BÀI TẬP

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐƯA VÀO VI PHÂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = 2\ln(1+x^2) + C.$

B. $\int f(x)dx = 3\ln(1+x^2) + C.$

C. $\int f(x)dx = 4\ln(1+x^2) + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln(1+x^2) + C.$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x(x^2+1)^4$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(1;6)$. Khi đó $F(x)$ là:

A. $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{4} - \frac{2}{5}.$

B. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{10} - \frac{15}{8}.$

C. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{10} + \frac{15}{8}.$

D. $F(x) = \frac{1}{10}(x^2+1)^5 + \frac{14}{5}.$

Câu 3. Tính $\int \frac{-2x}{1-x^2} dx$ thu được kết quả là:

A. $\frac{1+x}{1-x} + C.$

B. $\frac{x}{1-x} + C.$

C. $\frac{1}{1-x} + C.$

D. $\ln|1-x^2| + C.$

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4}$ là:

A. $2\ln|x^2+x+4| + C.$

B. $\ln|x^2+x+4| + C.$

C. $\frac{\ln|x^2+x+4|}{2} + C.$

D. $4\ln|x^2+x+4| + C.$

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2+x}{x^2+4x-4}$ là :

A. $\frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x-4| + C.$

B. $\ln|x^2+4x-4| + C.$

C. $2\ln|x^2+4x-4| + C.$

D. $4\ln|x^2+4x-4| + C.$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ là:

A. $2\ln|x^2+4| + C$

B. $\frac{\ln|x^2+4|}{2} + C$

C. $\ln|x^2+4| + C$

D. $4\ln|x^2+4| + C$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+4}$ là:

A. $3\ln|x^3+4| + C$

B. $-3\ln|x^3+4| + C$

C. $\ln|x^3+4|+C$

D. $-\ln|x^3+4|+C$

Câu 8. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ là:

A. $\frac{1}{2}\ln|x+1|$

B. $2\ln(x^2+1)$

C. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

D. $\ln(x^2+1)$

Câu 9. Tính $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4-1} dx$

A. $F(x) = \ln|x^4-1|+C$

B. $F(x) = \frac{1}{4}\ln|x^4-1|+C$

C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^4-1|+C$

D. $F(x) = \frac{1}{3}\ln|x^4-1|+C$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x-3}$ là:

A. $-\ln|\cos x-3|+C$

B. $2\ln|\cos x-3|+C$

C. $-\frac{\ln|\cos x-3|}{2}+C$

D. $4\ln|\cos x-3|+C$

Câu 11. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$. B. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$. C. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$. D.

$F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$ là:

A. $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

B. $-\frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

C. $\sin^3 x + \sin^5 x + C$.

D. $\sin^3 x - \sin^5 x + C$.

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4}\cos^4 x + C$.

B. $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$.

C. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

D. $-\cos^2 x + C$.

Câu 14. Tính $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx$

A. $\frac{3\sin x - \sin 3x}{12} + C$

B. $\frac{3\cos x - \cos 3x}{12} + C$

C. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

D. $\sin x \cdot \cos^2 x + C$

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ là:

A. $\ln\left|\cot \frac{x}{2}\right| + C$

B. $\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$

C. $-\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$

D. $\ln|\sin x| + C$

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ là:

A. $\ln|\cos x| + C$

B. $-\ln|\cos x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

D. $\ln(\cos x) + C$

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

A. $\int f(x) dx = \ln|\sin x + \cos x| + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln|1 + \sin 2x| + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|1 + \sin 2x| + C$.

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$ là:

A. $-e^x - 3 + C$

B. $3e^x + 9 + C$

C. $-2\ln|e^x + 3| + C$

D. $\ln|e^x + 3| + C$

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x2^{x^2}$ là:

A. $\frac{1}{\ln 2 \cdot 2^{x^2}} + C$

B. $\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2} + C$

C. $\frac{\ln 2}{2^{x^2}} + C$

D. $\ln 2 \cdot 2^{x^2} + C$

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x^2}$ là:

A. $\frac{-e^x}{2} + C$.

B. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$.

C. $-e^x + C$.

D. $e^{x^2} + C$.

Câu 21. Tính $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$

A. $e^{x^2+1} + C$.

B. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

C. $\frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$.

D. $\frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$.

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln^2 x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln x + C$

D. $\int f(x) dx = e^x + C$

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$ là:

A. $\ln 2x + C$.

B. $\ln^2 x + C$.

C. $\frac{\ln^2 2x}{2} + C$.

D. $\frac{\ln x}{2} + C$.

Câu 24. Nguyên hàm $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx (x > 0)$ bằng

A. $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$.

B. $x + \ln^2 x + C$.

C. $\ln^2 x + \ln x + C$.

D. $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Câu 25. Tính $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x + 1}}$

A. $F(x) = 2\sqrt{2\ln x + 1} + C$

B. $F(x) = \sqrt{2\ln x + 1} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2\ln x + 1} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2\ln x + 1} + C$

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là:

A. $\ln^2 x + C$

B. $\ln x + C$

C. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$

D. $\frac{\ln x}{2} + C$

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \ln(x^2 + 1)$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2 + 1) + C$

B. $\ln(x^2 + 1) + C$

C. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2 + 1) + C$

D. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2 + 1) + C$

Câu 28. Tính $\int \frac{dx}{x \ln x}$

A. $\ln x + C$

B. $\ln |x| + C$

C. $\ln(\ln x) + C$

D. $\ln |\ln x| + C$

Câu 29. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7$.

A. $F(x) = 2\sqrt{2x-1}$.

B. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1$.

C. $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4$.

D. $F(x) = \sqrt{2x-1} - 10$.

Câu 30. Họ nguyên hàm $\int x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)} + C$.

B. $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)} + C$.

C. $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)^4} + C$.

D. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)^4} + C$.

Câu 31. Biết $\int f(x) dx = 2x \ln(3x-1) + C$ với $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x) dx = 2x \ln(9x-1) + C$.

B. $\int f(3x) dx = 6x \ln(3x-1) + C$.

C. $\int f(3x) dx = 6x \ln(9x-1) + C$.

D. $\int f(3x) dx = 3x \ln(9x-1) + C$.

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐỔI BIẾN SỐ

HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

Câu 32. Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax+b) dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a} F(ax+b) + C$

B. $a F(ax+b) + C$

C. $\frac{1}{a} F(ax+b) + C$

D. $F(ax+b) + C$

Câu 33. Hàm số $f(x) = x(1-x)^{10}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} - \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

B. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

C. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} + \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

D. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} - \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

Câu 34. Tính $\int \frac{dx}{(1+x^2)x}$ thu được kết quả là:

A. $\ln|x|(x^2+1)+C.$

B. $\ln|x|\sqrt{1+x^2}+C.$

C. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

D. $\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x^2}{1+x^2}+C.$

Câu 35. Tính $\int x(x+1)^3 dx$ là:

A. $\frac{(x+1)^5}{5} + \frac{(x+1)^4}{4} + C$

B. $\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

C. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

Câu 36. Tìm nguyên hàm $\int x(x^2+7)^{15} dx$

A. $\frac{1}{2}(x^2+7)^{16}+C.$ **B.** $-\frac{1}{32}(x^2+7)^{16}+C.$ **C.** $\frac{1}{16}(x^2+7)^{16}+C.$ **D.** $\frac{1}{32}(x^2+7)^{16}+C$

Câu 37. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt: $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du.$

B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du.$

C. $I = \int u^5 du.$

D. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du.$

Câu 38. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}.$

B. $\frac{241}{252}.$

C. $\frac{52}{9}.$

D. $\frac{7}{9}.$

Câu 39. Giả sử $\int x(1-x)^{2017} dx = \frac{(1-x)^a}{a} - \frac{(1-x)^b}{b} + C$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $2a-b$ bằng:

A. 2017.

B. 2018.

C. 2019.

D. 2020.

Câu 40. Nguyên hàm của $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ là:

A. $\ln|t|+C$, với $t = x^2+1$.

B. $-\ln|t|+C$, với $t = x^2+1$.

C. $\frac{1}{2} \ln|t|+C$, với $t = x^2+1$.

D. $-\frac{1}{2} \ln|t|+C$, với $t = x^2+1$.

Câu 41. Tính $\int \frac{2x}{(x^2+9)^4} dx$ là:

A. $-\frac{1}{5(x^2+9)^5}+C$

B. $-\frac{1}{3(x^2+9)^3}+C$

C. $-\frac{4}{(x^2+9)^5}+C$

D. $-\frac{1}{(x^2+9)^3}+C$

Câu 42. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của $K = \int \frac{(7x-1)^{2017}}{(2x+1)^{2019}} dx$?

A. $\frac{1}{18162} \cdot \left(\frac{7x-1}{2x+1} \right)^{2018}.$

B. $\frac{18162(2x+1)^{2018} + (7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}.$

C. $\frac{-18162(2x+1)^{2018} + (7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}.$

D. $\frac{18162(2x+1)^{2018} - (7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}.$

Câu 43. Với phương pháp đổi biến số $(x \rightarrow t)$, nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2+1} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2 + C.$

B. $\frac{1}{2}t + C.$

C. $t^2 + C.$

D. $t + C.$

Câu 44. Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

A. $-1.$

B. $1.$

C. $3.$

D. $-3.$

HÀM CHỨA CĂN THỨC

Câu 45. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2x+3} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

D. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+3} + C.$

Câu 46. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C.$

Câu 47. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $F(1) = 1$.

A. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}.$

C. $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}.$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{5}{3}.$

Câu 48. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 49. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3$

B. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ là:

A. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

B. $-2\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

C. $\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

D. $\frac{-1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

B. $-\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

C. $2\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

D. $-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt[3]{3x-1}$ là:

A. $\frac{1}{21}\sqrt[3]{(3x-1)^7} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x-1)^5} + C.$

B. $\frac{1}{18}\sqrt[3]{(3x-1)^6} + \frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + C.$

C. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x-1)^3} + \sqrt[3]{(3x-1)} + C.$

D. $\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-1)} + C.$

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt[3]{1-2x}$ là:

A. $-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{6} + \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^6}}{12} + C$

B. $-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{8} + \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{14} + C$

C. $\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{6} - \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^6}}{12} + C$

D. $\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{8} - \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{14} + C$

Câu 54. Cho $I = \int x^3\sqrt{x^2+5}dx$, đặt $u = \sqrt{x^2+5}$ khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I = \int (u^4 - 5u^2)du.$

B. $I = \int u^2du.$

C. $I = \int (u^4 - 5u^3)du.$

D.

$I = \int (u^4 + 5u^3)du.$

Câu 55. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2-1)dx.$

B. $I = \int_1^3 u^2(u^2-1)du.$

C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3.$

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1)du.$

Câu 56. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u(u^2-4)du.$

B. $\int (u^2-4)du.$

C. $\int 2(u^2-4)du.$

D. $\int (u^2-3)du.$

Câu 57. Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(2\sqrt{x^2+1}+5)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa

$F(0) = 6$. Tính $F\left(\frac{3}{4}\right)$.

A. $\frac{125}{16}.$

B. $\frac{126}{16}.$

C. $\frac{123}{16}.$

D. $\frac{127}{16}.$

Câu 58. Tính tích phân: $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Tổng $a+b$ là

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Câu 59. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$

B. $-\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2}+C$

C. $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2}+C$

D. $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$

Câu 60. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $\sqrt{x^2+1}+C$

B. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$

C. $2\sqrt{x^2+1}+C$

D. $4\sqrt{x^2+1}+C$

Câu 61. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}$ là:

A. $-2\sqrt{4-x^2}+C$.

B. $4\sqrt{4-x^2}+C$.

C. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C$.

D. $-4\sqrt{4-x^2}+C$.

Câu 62. Với phương pháp đổi biến số $(x \rightarrow t)$, nguyên hàm $I = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$ bằng:

A. $\sin t + C$.

B. $-t + C$.

C. $-\cos t + C$.

D. $t + C$.

Câu 63. Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm

$F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a+b+c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Câu 64. $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$, trong đó a, b

là hai số hữu tỉ. Giá trị b, a lần lượt bằng:

A. 2; 1.

B. 1; 1.

C. $a, b \in \emptyset$

D. 1; 2.

$$T = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x^n+1)^{n+1}}}$$

Câu 65. Tìm

A. $T = \left(\frac{1}{x^n} + 1 \right)^{-\frac{1}{n}} + C$

B. $T = \left(\frac{1}{x^n} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} + C$

C. $T = (x^n+1)^{-\frac{1}{n}} + C$

D. $T = (x^n+1)^{\frac{1}{n}} + C$.

Câu 66. Tìm $R = \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$?

A. $R = -\frac{\tan 2t}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right)$.

B. $R = -\frac{\tan 2t}{2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right)$.

C. $R = \frac{\tan 2t}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right)$.

D. $R = \frac{\tan 2t}{2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right)$.

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 67. Theo phương pháp đổi biến số với $t = \cos x, u = \sin x$, nguyên hàm của

$$I = \int (\tan x + \cot x) dx \text{ là:}$$

A. $-\ln|t| + \ln|u| + C.$

B. $\ln|t| - \ln|u| + C.$

C. $\ln|t| + \ln|u| + C.$

D. $-\ln|t| - \ln|u| + C.$

Câu 68. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Câu 69. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$. Kết quả là

A. $\frac{\sqrt{1 + \sin^2 x}}{2} + C.$

B. $\sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$

C. $-\sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$

D. $2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$

Câu 70. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}.$

B. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

C. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

D. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{4}{15}.$

Câu 71. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C.$

Câu 72. Theo phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm của $I = \int \frac{2 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt[3]{1 - \sin 2x}} dx$ là:

A. $2\sqrt[3]{t} + C.$

B. $6\sqrt[3]{t} + C.$

C. $3\sqrt[3]{t} + C.$

D. $12\sqrt[3]{t} + C.$

HÀM MŨ - LÔGARIT

Câu 73. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A. $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C.$

B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C.$

Câu 74. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1 + e^x}.$

A. $I = x - \ln|1 - e^x| + C.$

B. $I = x + \ln|1 + e^x| + C.$

C. $I = -x - \ln|1 + e^x| + C.$

D. $I = x - \ln|1 + e^x| + C.$

Câu 75. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2e^x + 3}$ thỏa mãn $F(0) = 10$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \frac{1}{3}(x - \ln(2e^x + 3)) + 10 + \frac{\ln 5}{3}.$

B. $F(x) = \frac{1}{3}(x + 10 - \ln(2e^x + 3)).$

C. $F(x) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x + \frac{3}{2}\right)\right) + 10 + \ln 5 - \ln 2.$

D.

$F(x) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x + \frac{3}{2}\right)\right) + 10 - \frac{\ln 5 - \ln 2}{3}.$

Câu 76. Với phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2 + C.$

B. $t^2 + C.$

C. $2t^2 + C.$

D. $4t^2 + C.$

Câu 77. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x)$?

A. $y = 2^{\sin x + \cos x} + C.$

B. $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}.$

C. $y = \ln 2 \cdot 2^{\sin x + \cos x}.$

D.

$y = -\frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C.$

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C.$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C.$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C.$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$

Câu 79. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là

A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|\ln x| + C.$

B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x^2 \cdot \ln x| + C.$

C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x + \ln x| + C.$

D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x \cdot \ln x| + C.$

Câu 80. $\int ((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x) dx$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2}\sin 2x + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a, b lần lượt bằng:

A. 3; 1.

B. 1; 3.

C. 3; 2.

D. 6; 1.

Câu 81. Tìm $I = \int \frac{e^x(3x-2) + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1)} dx$?

A. $I = x + \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C.$

B. $I = x - \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C.$

C. $I = \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C.$

D. $I = \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} - 1) + C.$

Câu 82. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)^x + 2017x}{\ln[(e \cdot x^2 + e)^{x^2+1}]}$?

- A.** $\ln(x^2+1)+1008\ln[\ln(x^2+1)+1]$.
- B.** $\ln(x^2+1)+2016\ln[\ln(x^2+1)+1]$.
- C.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2016\ln[\ln(x^2+1)+1]$.
- D.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1008\ln[\ln(x^2+1)+1]$.

Câu 83. Tìm $G = \int \frac{2x^2 + (1+2\ln x) \cdot x + \ln^2 x}{(x^2 + x \ln x)^2} dx$?

- A.** $G = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$.
- B.** $G = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$.
- C.** $G = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$.
- D.** $G = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \ln x} + C$.

Câu 84. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $h(x) = \frac{1 - \ln x}{x^{1-n} \cdot \ln x \cdot (x^n + \ln^n x)}$?

- A.** $\frac{1}{n} \ln|x| - \frac{1}{n} \ln|x^n + \ln^n x| + 2016$.
- B.** $\frac{1}{n} \ln|x| + \frac{1}{n} \ln|x^n + \ln^n x| + 2016$.
- C.** $-\frac{1}{n} \ln|x| + \frac{1}{n} \ln|x^n + \ln^n x| + 2016$.
- D.** $-\frac{1}{n} \ln|x| - \frac{1}{n} \ln|x^n + \ln^n x| - 2016$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐƯA VÀO VI PHÂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = 2\ln(1+x^2) + C.$

B. $\int f(x)dx = 3\ln(1+x^2) + C.$

C. $\int f(x)dx = 4\ln(1+x^2) + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln(1+x^2) + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2x \cdot dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C.$

Chọn D

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x(x^2+1)^4$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(1;6)$. Khi đó $F(x)$ là:

A. $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{4} - \frac{2}{5}.$

B. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{10} - \frac{15}{8}.$

C. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{10} + \frac{15}{8}.$

D. $F(x) = \frac{1}{10}(x^2+1)^5 + \frac{14}{5}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $F(x) = \int x(x^2+1)^4 dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^4 d(x^2+1) = \frac{1}{10}(x^2+1)^5 + C$

$M(1;6) \in (C): y = F(x) \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{10}(1+1)^5 + C \Leftrightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{10}(x^2+1)^5 + \frac{14}{5}$

Chọn D

Câu 3. Tính $\int \frac{-2x}{1-x^2} dx$ thu được kết quả là:

A. $\frac{1+x}{1-x} + C.$

B. $\frac{x}{1-x} + C.$

C. $\frac{1}{1-x} + C.$

D. $\ln|1-x^2| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{-2x \cdot dx}{1-x^2} = \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = \ln|1-x^2| + C.$

Chọn D

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4}$ là:

A. $2\ln|x^2+x+4| + C.$

B. $\ln|x^2+x+4| + C.$

C. $\frac{\ln|x^2+x+4|}{2} + C.$

D. $4\ln|x^2+x+4| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx = \int \frac{d(x^2+x+4)}{x^2+x+4} = \ln|x^2+x+4| + C.$

Chọn B

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2+x}{x^2+4x-4}$ là :

A. $\frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x-4| + C$.

B. $\ln|x^2+4x-4| + C$.

C. $2\ln|x^2+4x-4| + C$.

D. $4\ln|x^2+4x-4| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{x+2}{x^2+4x-4} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2+4x+4)}{x^2+4x+4} = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x-4| + C$.

Chọn A

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ là:

A. $2\ln|x^2+4| + C$

B. $\frac{\ln|x^2+4|}{2} + C$

C. $\ln|x^2+4| + C$

D. $4\ln|x^2+4| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2x}{x^2+4} = \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \ln|x^2+4| + C$

Chọn C

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+4}$ là:

A. $3\ln|x^3+4| + C$

B. $-3\ln|x^3+4| + C$

C. $\ln|x^3+4| + C$

D. $-\ln|x^3+4| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{3x^2 \cdot dx}{x^3+4} = \int \frac{d(x^3+4)}{x^3+4} = \ln|x^3+4| + C$

Chọn C

Câu 8. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln|x+1|$

B. $2\ln(x^2+1)$

C. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

D. $\ln(x^2+1)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{x \cdot dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

Chọn C

Câu 9. Tính $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4-1} dx$

A. $F(x) = \ln|x^4-1| + C$

B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4-1| + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^4-1| + C$

D. $F(x) = \frac{1}{3} \ln|x^4-1| + C$

Ta có: $\int \frac{x^3}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1} = \frac{1}{4} \ln|x^4-1| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{x^3}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1} = \frac{1}{4} \ln|x^4-1| + C$

Chọn B

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 3}$ là:

A. $-\ln|\cos x - 3| + C$

B. $2\ln|\cos x - 3| + C$

C. $-\frac{\ln|\cos x - 3|}{2} + C$

D. $4\ln|\cos x - 3| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{\sin x}{\cos x - 3} dx = \int \frac{-d(\cos x - 3)}{\cos x - 3} = -\ln|\cos x - 3| + C$

Chọn A

Câu 11. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$. **B.** $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$. **C.** $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$. **D.**

$F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$.

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$ là:

A. $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

B. $-\frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

C. $\sin^3 x + \sin^5 x + C$.

D. $\sin^3 x - \sin^5 x + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot \cos x \cdot dx$
 $= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Chọn A

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4}\cos^4 x + C$.

B. $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$.

C. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

D. $-\cos^2 x + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

Chọn B

Câu 14. Tính $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx$

A. $\frac{3\sin x - \sin 3x}{12} + C$

B. $\frac{3\cos x - \cos 3x}{12} + C$

C. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

D. $\sin x \cdot \cos^2 x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Chọn C

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ là:

A. $\ln \left| \cot \frac{x}{2} \right| + C$

B. $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$

C. $-\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$

D. $\ln |\sin x| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x \cdot dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{-\sin x \cdot dx}{\cos^2 x - 1} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$

Chọn B

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ là:

A. $\ln |\cos x| + C$

B. $-\ln |\cos x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

D. $\ln(\cos x) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$

Chọn B

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}$.

A. $\int f(x) dx = \ln |\sin x + \cos x| + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C$.

C. $\int f(x) dx = \ln |1 + \sin 2x| + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |1 + \sin 2x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng công thức $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ và $2\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = (\sin x + \cos x)^2$

Hàm số được rút gọn thành $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$

Nguyên hàm $\int f(x) dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C$

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$ là:

A. $-e^x - 3 + C$

B. $3e^x + 9 + C$

C. $-2\ln |e^x + 3| + C$

D. $\ln |e^x + 3| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx = \int \frac{d(e^x + 3)}{e^x + 3} = \ln |e^x + 3| + C$

Chọn D

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x2^{x^2}$ là:

A. $\frac{1}{\ln 2 \cdot 2^{x^2}} + C$

B. $\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2} + C$

C. $\frac{\ln 2}{2^{x^2}} + C$

D. $\ln 2 \cdot 2^{x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 2x \cdot 2^{x^2} dx = \frac{1}{\ln 2} \int 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 = \frac{1}{\ln 2} \int d(2^{x^2}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2} + C$

Chọn B

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x^2}$ là:

A. $\frac{-e^x}{2} + C$

B. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$

C. $-e^x + C$

D. $e^{x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int d(e^{x^2}) = e^{x^2} + C$

Chọn D

Câu 21. Tính $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$

A. $e^{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

C. $\frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

D. $\frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int d(e^{x^2+1}) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

Chọn C

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln^2 x + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

C. $\int f(x) dx = \ln x + C$

D. $\int f(x) dx = e^x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$ là :

A. $\ln 2x + C$

B. $\ln^2 x + C$

C. $\frac{\ln^2 2x}{2} + C$

D. $\frac{\ln x}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{\ln 2x}{x} dx = \int \ln 2x \cdot d(\ln 2x) = \frac{\ln^2 2x}{2} + C$

Chọn C

Câu 24. Nguyên hàm $\int \frac{1+\ln x}{x} dx (x > 0)$ bằng

A. $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$

B. $x + \ln^2 x + C$

C. $\ln^2 x + \ln x + C$

D. $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \frac{1+\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \ln x d(\ln x) = \ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

Câu 25. Tính $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x+1}}$

A. $F(x) = 2\sqrt{2\ln x+1} + C$

B. $F(x) = \sqrt{2\ln x+1} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2\ln x+1} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2\ln x+1} + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int d(\sqrt{2\ln x+1}) = \sqrt{2\ln x+1} + C.$$

Chọn B

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là:

A. $\ln^2 x + C$

B. $\ln x + C$

C. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$

D. $\frac{\ln x}{2} + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Chọn C

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1)$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

B. $\ln(x^2+1) + C$

C. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

D. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1) dx = \int \ln(x^2+1) d(\ln(x^2+1)) = \frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$$

Chọn D

Câu 28. Tính $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

A. $\ln x + C$

B. $\ln |x| + C$

C. $\ln(\ln x) + C$

D. $\ln |\ln x| + C$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C$$

Chọn D

Câu 29. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7$.

A. $F(x) = 2\sqrt{2x-1}$.

B. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1$.

C. $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4$.

D. $F(x) = \sqrt{2x-1} - 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int \frac{2}{\sqrt{2x-1}} dx = 2 \int \frac{d(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}} = 2\sqrt{2x-1} + C;$$

Do $F(5) = 7$ nên $6 + C = 7 \Rightarrow C = 1$.

Câu 30. Họ nguyên hàm $\int x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)} + C$. **B.** $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)} + C$. **C.** $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)^4} + C$. **D.** $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)^4} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int x \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 1)^4} + C$.

Câu 31. Biết $\int f(x) dx = 2x \ln(3x - 1) + C$ với $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A.** $\int f(3x) dx = 2x \ln(9x - 1) + C$. **B.** $\int f(3x) dx = 6x \ln(3x - 1) + C$.
C. $\int f(3x) dx = 6x \ln(9x - 1) + C$. **D.** $\int f(3x) dx = 3x \ln(9x - 1) + C$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= 2x \ln(3x - 1) + C \Rightarrow \int f(3x) dx = \frac{1}{3} \int f(3x) d(3x) = \frac{1}{3} 2 \cdot (3x) \ln(3 \cdot 3x - 1) + C \\ &= 2x \ln(9x - 1) + C \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = 2x \ln(3x - 1) + C \Rightarrow f(x) = (2x \ln(3x - 1) + C)' = 2 \ln(3x - 1) + \frac{6x}{3x - 1}.$$

$$\text{Khi đó } f(3x) = 2 \ln(9x - 1) + \frac{18x}{9x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \int f(3x) dx &= \int \left[2 \ln(9x - 1) + \frac{18x}{9x - 1} \right] dx = 2 \int \ln(9x - 1) dx + \int \left(2 + \frac{2}{9x - 1} \right) dx \\ &= \frac{2}{9} [(9x - 1) \ln(9x - 1) - 9x] + 2x + \frac{2}{9} \ln(9x - 1) + C = 2 \ln(9x - 1) + C. \end{aligned}$$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐỔI BIẾN SỐ

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = F[u(x)] + C$.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$, suy ra $dt = u'(x)dx$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$.

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

Câu 32. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a}F(ax+b) + C$

B. $a.F(ax+b) + C$

C. $\frac{1}{a}F(ax+b) + C$

D. $F(ax+b) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int f(ax+b)dx$

Đặt: $t = ax+b \Rightarrow dt = adx \Rightarrow \frac{1}{a}dt = dx$.

Khi đó: $I = \frac{1}{a} \int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C$

Suy ra: $I = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Chọn C

Câu 33. Hàm số $f(x) = x(1-x)^{10}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} - \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

B. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

C. $\frac{(x-1)^{11}}{11} + \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

D. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} - \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x(1-x)^{10} \cdot dx$. Đặt: $t = 1-x \Rightarrow -dt = dx, x = 1-t$.

Khi đó $I = \int (t-1) \cdot t^{10} \cdot dt = \int (t^{11} - t^{10}) \cdot dt = \frac{1}{12}t^{12} - \frac{1}{11}t^{11} + C$

Suy ra $I = \frac{1}{12}(1-x)^{12} - \frac{1}{11}(1-x)^{11} + C$.

Chọn A

Câu 34. Tính $\int \frac{dx}{(1+x^2)x}$ thu được kết quả là:

A. $\ln|x|(x^2+1) + C$.

B. $\ln|x|\sqrt{1+x^2} + C$.

C. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

D. $\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{(1+x^2)x} = \int \frac{x dx}{(1+x^2)x^2}$. Đặt: $t = 1+x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} dt = x \cdot dx, x^2 = t-1$.

Khi đó: $I = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t \cdot (t-1)} dt = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{1+x^2} \right| + C$.

Chọn D

Câu 35. Tính $\int x(x+1)^3 dx$ là:

A. $\frac{(x+1)^5}{5} + \frac{(x+1)^4}{4} + C$

B. $\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

C. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x(x+1)^3 dx$

Đặt: $t = x+1 \Rightarrow dt = dx, x = t-1$

Khi đó: $I = \int (t-1) \cdot t^3 \cdot dt = \int (t^4 - t^3) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \right) + C$

Suy ra: $I = \frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

Chọn B

Câu 36. Tìm nguyên hàm $\int x(x^2+7)^{15} dx$

A. $\frac{1}{2}(x^2+7)^{16} + C$. **B.** $-\frac{1}{32}(x^2+7)^{16} + C$. **C.** $\frac{1}{16}(x^2+7)^{16} + C$. **D.** $\frac{1}{32}(x^2+7)^{16} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 7 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$

Ta có $\int x(x^2+7)^{15} dx = \frac{1}{2} \int t^{15} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{32} (x^2+7)^{16} + C$.

Câu 37. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt: $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$. **B.** $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$. **C.** $I = \int u^5 du$. **D.** $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$u = 4x^4 - 3 \Rightarrow du = 16x^3 dx \Rightarrow \frac{1}{16} du = x^3 dx$.

$\Rightarrow I = \frac{1}{16} \int u^5 du$.

Câu 38. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$.

B. $\frac{241}{252}$.

C. $\frac{52}{9}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}dt = dx$.

Ta có: $\frac{2}{3} \int \frac{t+2}{3} \cdot t^6 dt = \frac{2}{9} \int (t^7 + 2t^6) dt = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^8}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{36} \cdot (3x-2)^8 + \frac{4}{63} \cdot (3x-2)^7 + C$.

Suy ra $A = \frac{1}{36}$, $B = \frac{4}{63}$, $12 \cdot \frac{1}{36} + 7 \cdot \frac{4}{63} = \frac{7}{9}$.

Câu 39. Giả sử $\int x(1-x)^{2017} dx = \frac{(1-x)^a}{a} - \frac{(1-x)^b}{b} + C$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $2a - b$ bằng:

- A.** 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int x(1-x)^{2017} dx = \int (x-1+1)(1-x)^{2017} dx = \int ((1-x)^{2017} - (1-x)^{2018}) dx = -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C$$

Vậy $a = 2019, b = 2018 \Rightarrow 2a - b = 2020$.

Chọn D

Câu 40. Nguyên hàm của $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ là:

- A.** $\ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$. **B.** $-\ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$.
C. $\frac{1}{2}\ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$. **D.** $-\frac{1}{2}\ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+1} dx = \dots = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C$.

Chọn C

Câu 41. Tính $\int \frac{2x}{(x^2+9)^4} dx$ là:

- A.** $-\frac{1}{5(x^2+9)^5} + C$ **B.** $-\frac{1}{3(x^2+9)^3} + C$
C. $-\frac{4}{(x^2+9)^5} + C$ **D.** $-\frac{1}{(x^2+9)^3} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{2x}{(x^2+9)^4} dx$

Đặt: $t = x^2 + 9 \Rightarrow dt = 2x dx$

Khi đó: $I = \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4} dt = -\frac{1}{3t^3} + C$

Suy ra: $I = -\frac{1}{3(x^2+9)^3} + C$

Chọn B

Câu 42. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của $K = \int \frac{(7x-1)^{2017}}{(2x+1)^{2019}} dx$?

A. $\frac{1}{18162} \cdot \left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{2018}$.

B. $\frac{18162(2x+1)^{2018} + (7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}$.

C. $\frac{-18162(2x+1)^{2018} + (7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}$.

D. $\frac{18162(2x+1)^{2018} - (7x-1)^{2018}}{18162(2x+1)^{2018}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $K = \int \frac{(7x-1)^{2017}}{(2x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2} dx$

Đặt $t = \frac{7x-1}{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{9}{(2x+1)^2} dx \Leftrightarrow \frac{dt}{9} = \frac{1}{(98x+1)^2} dx$

$\Rightarrow K = \frac{1}{9} \int t^{2017} dt = \frac{t^{2018}}{18162} + C = \frac{1}{18162} \cdot \left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{2018} + C$

Chọn D

Câu 43. Với phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2+1} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2 + C$.

B. $\frac{1}{2}t + C$.

C. $t^2 + C$.

D. $t + C$.

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$.

$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+1} dx = \dots = \int dt = t + C$.

Chọn D

Câu 44. Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. -3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$.

Đặt $t = x^2+3x$, khi đó $dt = (2x+3)dx$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$.

Trở lại biến x , ta có $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$.

Vậy $g(x) = x^2+3x+1$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3.

HÀM CHỨA CĂN THỨC

Câu 45. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2x+3} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

D. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+3} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $I = \int (\sqrt{2x+3})dx.$

Đặt $\sqrt{2x+3} = t \Leftrightarrow t^2 = 2x+3 \Leftrightarrow 2tdt = 2dx.$

$$I = \int t \cdot t dt = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+3})^3 + C \Leftrightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$$

Câu 46. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int \sqrt[3]{x+1}dx.$

Đặt: $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow 3t^2dt = dx.$

$$\Rightarrow I = \int t \cdot 3t^2dt = \int 3t^3dt = \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$

Câu 47. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $F(1) = 1.$

A. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$ **B.** $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}.$

C. $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}2} + \frac{1}{2}.$ **D.** $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{5}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int \sqrt{x}dx$

Đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra $t^2 = x$ và $dx = 2tdt$. Khi đó $I = \int t \cdot 2tdt = \frac{2}{3}t^3 + C \Rightarrow I = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

Vì $F(1) = 1$ nên $C = \frac{1}{3}$. Vậy $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}.$

Câu 48. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = tdt.$

Khi đó ta có $\int \frac{1}{2}\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

Câu 49. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3$

B. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x\sqrt{1+x^2}dx$

Đặt: $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow t.dt = x.dx$ Khi đó: $I = \int t.t.dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$

Suy ra: $I = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3 + C$

Chọn A

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ là:

A. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

B. $-2\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

C. $\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

D. $\frac{-1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx.$

Khi đó: $I = \int t.2t.dt = \int 2t^2.dt = \frac{2t^3}{3} + C$

Suy ra: $I = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$

Chọn A

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

B. $-\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

C. $2\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

D. $-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int 2x\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt: $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow -2tdt = 2xdx.$

Khi đó: $I = \int t.(-2t).dt = \int -2t^2.dt = -\frac{2t^3}{3} + K$

Suy ra: $I = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$

Chọn D

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt[3]{3x-1}$ là:

A. $\frac{1}{21}\sqrt[3]{(3x-1)^7} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x-1)^5} + C.$

B. $\frac{1}{18}\sqrt[3]{(3x-1)^6} + \frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + C.$

C. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x-1)^3} + \sqrt[3]{(3x-1)} + C.$

D. $\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-1)} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x\sqrt[3]{3x-1}dx$. Đặt: $t = \sqrt[3]{3x-1} \Rightarrow t^3 = 3x-1 \Rightarrow t^2 \cdot dt = dx$

Khi đó: $I = \int \frac{t^3+1}{3} \cdot t \cdot t^2 \cdot dt = \frac{1}{3} \int (t^6 + t^4) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} \right) + C$

Suy ra $I = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7}\sqrt[3]{(3x-1)^7} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-1)^5} \right) + C.$

Chọn A

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt[3]{1-2x}$ là:

A. $-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{6} + \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^6}}{12} + C$

B. $-\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{8} + \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{14} + C$

C. $\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3}}{6} - \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^6}}{12} + C$

D. $\frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{8} - \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{14} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int 2x\sqrt[3]{1-2x}dx$

Đặt: $t = \sqrt[3]{1-2x} \Rightarrow t^3 = 1-2x \Rightarrow -\frac{3}{2}t^2 \cdot dt = dx.$

Mặt khác: $2x = 1-t^3$

Khi đó: $I = -\int (1-t^3)t \frac{3}{2}t^2 \cdot dt = -\frac{3}{2} \int (t^3 - t^6) dt = -\frac{3}{2} \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7} \right) + C$

Suy ra: $I = -\frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{(1-2x)^4}}{4} - \frac{\sqrt[3]{(1-2x)^7}}{7} \right) + C.$

Chọn B

Câu 54. Cho $I = \int x^3\sqrt{x^2+5}dx$, đặt $u = \sqrt{x^2+5}$ khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I = \int (u^4 - 5u^2)du.$

B. $I = \int u^2du.$

C. $I = \int (u^4 - 5u^3)du.$

D.

$I = \int (u^4 + 5u^3)du.$

Hướng dẫn giải.

Chọn A

Đặt $u = \sqrt{x^2+5} \Rightarrow u^2 = x^2+5 \Rightarrow udu = xdx$

Khi đó: $I = \int x^3\sqrt{x^2+5}dx = \int x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2+5}dx = \int (u^2-5) \cdot u \cdot udu = \int (u^4-5u^2)du$

Câu 55. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 (x^2 - 1) dx.$

B. $I = \int_1^3 u^2 (u^2 - 1) du.$

C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3.$

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2 (u^2 - 1) du.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$I = \int_0^4 x \sqrt{1+2x} dx$$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 - 1) \Rightarrow dx = u du$, đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1$, $x=4 \Rightarrow u=3$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^2 - 1) u^2 du.$

Câu 56. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u(u^2 - 4) du.$

B. $\int (u^2 - 4) du.$

C. $\int 2(u^2 - 4) du.$

D. $\int (u^2 - 3) du.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $u \geq 0$ nên $u^2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u du \\ x = u^2 - 1 \end{cases}.$

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u^2 - 1 - 3}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2 - 4) du.$

Câu 57. Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} (2\sqrt{x^2+1} + 5)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa

$F(0) = 6$. Tính $F\left(\frac{3}{4}\right)$.

A. $\frac{125}{16}.$

B. $\frac{126}{16}.$

C. $\frac{123}{16}.$

D. $\frac{127}{16}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t dt = x dx.$

$$\int f(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} (2\sqrt{x^2+1} + 5) dx = \int (2t + 5) dt = t^2 + 5t + C = (x^2 + 1) + 5\sqrt{x^2+1} + C.$$

$F(0) = 6 \Rightarrow C = 0.$

Vậy $F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{125}{16}.$

Câu 58. Tính tích phân: $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Tổng $a+b$ là

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$$

Đặt $u = \sqrt{3x+1} \rightarrow x = \frac{u^2-1}{3} \rightarrow dx = \frac{1}{3}2udu$

Đổi cận: $x=1 \rightarrow u=2$ $x=5 \rightarrow u=4$

Vậy $I = \int_2^4 \frac{2}{u^2-1} du = \int_2^4 \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)} du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right|_2^4 = \ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{3} = 2 \ln 3 - \ln 5$

Do đó $a=2$; $b=-1 \rightarrow a+b=1$.

Câu 59. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$

B. $-\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$

C. $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$

D. $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow -tdt = xdx$

Khi đó: $I = -\int \frac{(1-t^2)}{t} tdt = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C$.

Thay $t = \sqrt{1-x^2}$ ta được $I = \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2} + C = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$.

Chọn D

Câu 60. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $\sqrt{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$

C. $2\sqrt{x^2+1} + C$

D. $4\sqrt{x^2+1} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2t.dt = 2x.dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{2t.dt}{t} = 2t + C$

Suy ra: $I = 2\sqrt{x^2+1} + C$.

Chọn C

Câu 61. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}$ là:

A. $-2\sqrt{4-x^2} + C$.

B. $4\sqrt{4-x^2} + C$.

C. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C$.

D. $-4\sqrt{4-x^2} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}} dx$. Đặt: $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t^2 = 4-x^2 \Rightarrow -4tdt = 4x dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{-4tdt}{t} = -4t + C \Rightarrow I = -4\sqrt{4-x^2} + C.$

Chọn D

Câu 62. Với phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm $I = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$ bằng:

- A.** $\sin t + C.$ **B.** $-t + C.$ **C.** $-\cos t + C.$ **D.** $t + C.$

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi: $I = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx.$

Đặt $x-1 = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt.$

$\Rightarrow I = \int dt = t + C.$

Chọn D

Câu 63. Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm

$F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a+b+c$ bằng

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$

Khi đó $\int \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt$

$= t^5 + 5t^3 + 7t + C = \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C$

$= (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C$

Vậy $F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S = a+b+c = 3.$

Câu 64. $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$, trong đó a, b

là hai số hữu tỉ. Giá trị b, a lần lượt bằng:

- A.** 2; 1. **B.** 1; 1. **C.** $a, b \in \emptyset$ **D.** 1; 2.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a .

Ta có:

$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) dx = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) dx + \int \sqrt{x+1} dx.$

Để tìm $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ ta đặt $I_1 = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) dx$ và $I_2 = \int \sqrt{x+1} dx$ và tìm

$I_1, I_2.$

*Tìm $I_1 = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$.

$$I_1 = \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

*Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1} dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$ ta được $t^2 = x+1, 2tdt = dx$.

Suy ra $I_2 = \int \sqrt{x+1} dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C_2$.

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1 + \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$$

Suy ra để $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$ thì

$$a = 1 \in \mathbb{Q}, b = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Vậy đáp án chính xác là đáp án **D**

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a, b ở các đáp án vào $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$. Sau đó, với

mỗi a, b ở các đáp án A, B, D ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không chú ý đến thứ tự b, a nên học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

*Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1} dx$.

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$ ta được $t^2 = x+1, tdt = dx$.

Suy ra $I_2 = \int \sqrt{x+1} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C_2$.

$$\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + C_1 + \frac{1}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C_2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$$

Suy ra để $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ có dạng $\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C$ thì

$$a = 1 \in \mathbb{Q}, b = 1 \in \mathbb{Q}.$$

Thế là, học sinh khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

*Tìm $I_2 = \int \sqrt{x+1} dx$.

$$I_2 = \int \sqrt{x+1} dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + C_2.$$

Suy ra $\int \left(x^3 + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) dx$ không thể có dạng

$$\frac{a}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x + \frac{b}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C, \text{ với } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Nên không tồn tại a, b thỏa yêu cầu bài toán.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

$$T = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x^n+1)^{n+1}}}$$

Câu 65. Tìm ?

A. $T = \left(\frac{1}{x^n} + 1 \right)^{-\frac{1}{n}} + C$

B. $T = \left(\frac{1}{x^n} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} + C$

C. $T = (x^n + 1)^{-\frac{1}{n}} + C$

D. $T = (x^n + 1)^{\frac{1}{n}} + C.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } T = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x^n+1)^{n+1}}} = \int \frac{dx}{x^{n+1} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x^n} + 1\right)^{n+1}}} = \int \frac{x^{-n-1}}{\left(\frac{1}{x^n} + 1\right)^{1+\frac{1}{n}}} dx = \int x^{-n-1} \left(\frac{1}{x^n} + 1\right)^{-1-\frac{1}{n}} dx$$

$$\text{Đặt: } t = \frac{1}{x^n} + 1 \Rightarrow dt = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{n} \int t^{-1-\frac{1}{n}} dt = t^{-\frac{1}{n}} + C = \left(\frac{1}{x^n} + 1\right)^{-\frac{1}{n}} + C$$

Chọn A

Câu 66. Tìm $R = \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$?

A. $R = -\frac{\tan 2t}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right).$

B. $R = -\frac{\tan 2t}{2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right).$

C. $R = \frac{\tan 2t}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right).$

D. $R = \frac{\tan 2t}{2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$ với $t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right).$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } x = 2 \cos 2t \text{ với } t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} dx = -4 \sin 2t \cdot dt \\ \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = \sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}} = \sqrt{\frac{4\sin^2 t}{4\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = -\int \frac{1}{4\cos^2 2t} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \cdot 4 \sin 2t \cdot dt = -\int \frac{2\sin^2 t}{\cos^2 2t} dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{\cos^2 2t} dt$$

$$\Leftrightarrow R = -\int \frac{1}{\cos^2 2t} dt + \int \frac{1}{\cos 2t} dt = -\frac{\tan 2t}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin 2t}{1-\sin 2t} \right| + C$$

Chọn A

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 67. Theo phương pháp đổi biến số với $t = \cos x, u = \sin x$, nguyên hàm của $I = \int (\tan x + \cot x) dx$ là:

A. $-\ln|t| + \ln|u| + C.$

B. $\ln|t| - \ln|u| + C.$

C. $\ln|t| + \ln|u| + C.$

D. $-\ln|t| - \ln|u| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (\tan x + \cot x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$

Xét $I_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow I_1 = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C_1.$

Xét $I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow I_2 = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C_2.$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = -\ln|t| + \ln|u| + C$

Chọn A

Câu 68. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 0}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} + \pi = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 69. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$. Kết quả là

A. $\frac{\sqrt{1 + \sin^2 x}}{2} + C.$

B. $\sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$

C. $-\sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$

D. $2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C.$

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{1 + \sin^2 x}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + \sin^2 x \Rightarrow 2t dt = \sin 2x dx \Rightarrow \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \int \frac{2t}{t} dt$

$= \int 2 dt = 2t + C = 2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$

Câu 70. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}.$

B. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

C. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

D. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{4}{15}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot \cos 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos 2x dx.$

Ta có:

$$F(x) = \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int t^2 \cdot (1-t^2) dt = \frac{1}{2} \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{10} t^5 + C$$

$$= \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + C.$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{10} \sin^5 \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{15}.$$

Vậy $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

Câu 71. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int f(x) dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x) \cdot (1-\cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ $I = \int \frac{(1-t^2) \cdot (1-t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} (-dt)$

$$= \int \left(-\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln |t| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos x^{-4} - \cos x^{-2} - \ln |\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln |\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + \frac{1}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$$

Câu 72. Theo phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm của $I = \int \frac{2 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt[3]{1 - \sin 2x}} dx$ là:

- A.** $2\sqrt[3]{t} + C$. **B.** $6\sqrt[3]{t} + C$. **C.** $3\sqrt[3]{t} + C$. **D.** $12\sqrt[3]{t} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$I = \int \frac{2 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt[3]{1 - \sin 2x}} dx = \int \frac{2(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x \Rightarrow dt = (\sin x + \cos x) dx.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}} dt = 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)} t^{\frac{1}{3}} + C = 6\sqrt[3]{t} + C.$$

Chọn B

HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 73. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

- A.** $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$. **B.** $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\text{Do đó, ta có } \int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

Câu 74. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

- A.** $I = x - \ln|1 - e^x| + C$. **B.** $I = x + \ln|1 + e^x| + C$.
C. $I = -x - \ln|1 + e^x| + C$. **D.** $I = x - \ln|1 + e^x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}.$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C = x - \ln|e^x+1| + C$$

Câu 75. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2e^x+3}$ thỏa mãn $F(0) = 10$. Tìm $F(x)$.

- A.** $F(x) = \frac{1}{3} \left(x - \ln(2e^x+3)\right) + 10 + \frac{\ln 5}{3}$. **B.** $F(x) = \frac{1}{3} \left(x + 10 - \ln(2e^x+3)\right)$.

C. $F(x) = \frac{1}{3} \left(x - \ln \left(e^x + \frac{3}{2} \right) \right) + 10 + \ln 5 - \ln 2$. **D.**

$$F(x) = \frac{1}{3} \left(x - \ln \left(e^x + \frac{3}{2} \right) \right) + 10 - \frac{\ln 5 - \ln 2}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{2e^x + 3} dx = \int \frac{e^x}{(2e^x + 3)e^x} dx.$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Suy ra

$$F(x) = \int \frac{1}{(2t+3)t} dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t}{2t+3} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{e^x}{2e^x + 3} \right) + C = \frac{1}{3} (x - \ln(2e^x + 3)) + C.$$

Vì $F(0) = 10$ nên $10 = \frac{1}{3}(0 - \ln 5) + C \Leftrightarrow C = 10 + \frac{\ln 5}{3}$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{3} (x - \ln(2e^x + 3)) + 10 + \frac{\ln 5}{3}$.

Câu 76. Với phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2 + C$. **B.** $t^2 + C$. **C.** $2t^2 + C$. **D.** $4t^2 + C$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \ln 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot \frac{1}{2x} dx \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

$$\Rightarrow \int \frac{\ln 2x}{x} dx = \dots = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C.$$

Chọn A

Câu 77. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x)$?

A. $y = 2^{\sin x + \cos x} + C$. **B.** $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}$. **C.** $y = \ln 2 \cdot 2^{\sin x + \cos x}$. **D.**

$$y = -\frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C.$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I = \int 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x) dx = \int 2^{\sin x + \cos x} (\cos x - \sin x) dx$.

Đặt: $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x) dx$.

$$\Rightarrow I = \int 2^t dt = \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2} + C.$$

Vậy hàm số đã cho có 1 nguyên hàm là hàm số: $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$. **B.** $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$.

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$. **D.** $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^t \ln 2 dt = 2 \cdot 2^t + C = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C \text{ nên A sai.}$$

Ngoài ra:

+ D đúng vì $F(x) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C$.

+ B đúng vì $F(x) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 2 + C = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C'$.

+ C đúng vì $F(x) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 + C = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C'$.

Cách 2: Ta thấy B, C, D chỉ khác nhau một hằng số nên theo định nghĩa nguyên hàm thì chúng phải là nguyên hàm của cùng một hàm số. Chỉ còn mình A “lẻ loi” nên chắc chắn sai thì A sai thôi.

Cách 3: Lấy các phương án A, B, C, D đạo hàm cũng tìm được A sai.

Câu 79. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là

A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$.

B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C$.

C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C$.

D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $I = \int f(x) dx = \int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx$.

Đặt $x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt$. Khi đó ta có $I = \int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x \cdot \ln x| + C$

Câu 80. $\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ có dạng $\frac{a}{6} e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2} \sin 2x + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a, b lần lượt bằng:

A. 3; 1.

B. 1; 3.

C. 3; 2.

D. 6; 1.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int \left((x+1)e^{2(x+1)} + \cos 2x \right) dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a .

Ta có:

$$\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx = \int \left((x+1)e^{(x^2-5x+4)+(7x-3)} + \cos 2x \right) dx = \int (x+1)e^{(x+1)^2} dx + \int \cos 2x dx$$

Để tìm $\int \left((x+1)e^{(x^2-5x+4)} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ ta đặt $I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2} dx$ và $I_2 = \int \cos 2x dx$ và tìm I_1, I_2 .

*Tìm $I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2} dx$.

Đặt $t = (x+1)^2; dt = 2(x+1)(x+1)' dx = 2(x+1) dx$.

$$I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C_1 = \frac{1}{2} e^{(x+1)^2} + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

*Tìm $I_2 = \int \cos 2x \, dx$.

$$I_2 = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_2.$$

$$\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} e^{(x+1)^2} + C_1 + \frac{1}{2} \sin 2x + C_2 = \frac{1}{2} e^{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Suy ra để $\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ có dạng $\frac{a}{6} e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2} \sin 2x + C$ thì $a = 3 \in \mathbb{Q}, b = 1 \in \mathbb{Q}$.

Chọn A

Cách 2:

Sử dụng phương pháp loại trừ bằng cách thay lần lượt các giá trị a, b ở các đáp án vào

$$\frac{a}{6} e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2} \sin 2x + C \text{ và lấy đạo hàm của chúng.}$$

Sai lầm thường gặp

B. Đáp án B sai.

Một số học sinh sai lầm ở chỗ không để ý đến thứ tự sắp xếp b, a nên khoanh đáp án B và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:

Tìm $I_2 = \int \cos 2x \, dx$.

$$I_2 = \int \cos 2x \, dx = \sin 2x + C_2.$$

$$\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} e^{(x+1)^2} + C_1 + \sin 2x + C_2 = \frac{1}{2} e^{(x+1)^2} + \sin 2x + C.$$

Suy ra để $\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ có dạng $\frac{a}{6} e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2} \sin 2x + C$ thì $a = 3 \in \mathbb{Q}, b = 2 \in \mathbb{Q}$.

D. Đáp án D sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm ở chỗ:

Tìm $I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2} \, dx$.

$$\text{Đặt } t = (x+1)^2; dt = (x+1)(x+1)' \, dx = (x+1) \, dx.$$

$$I_1 = \int (x+1)e^{(x+1)^2} \, dx = \int e^t \, dt = e^t + C_1 = e^{(x+1)^2} + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_2$ nên ta được:

$$\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx = I_1 + I_2 = e^{(x+1)^2} + C_1 + \frac{1}{2} \sin 2x + C_2 = e^{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Suy ra để $\int \left((x+1)e^{x^2-5x+4} \cdot e^{7x-3} + \cos 2x \right) dx$ có dạng $\frac{a}{6} e^{(x+1)^2} + \frac{b}{2} \sin 2x + C$ thì $a = 6 \in \mathbb{Q}, b = 1 \in \mathbb{Q}$.

$$I = \int \frac{e^x (3x-2) + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} (e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1)} \, dx$$

Câu 81. Tìm ?

A. $I = x + \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C.$

B. $I = x - \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C.$

C. $I = \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C.$

D. $I = \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} - 1) + C.$

Hướng dẫn giải

$$I = \int \frac{e^x(3x-2) + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1)} dx = \int \frac{\sqrt{x-1}(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1)} dx = \int dx + \int \frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1)} dx$$

$$\text{Đặt: } t = e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow dt = \left(\frac{e^x}{2\sqrt{x-1}} + e^x \sqrt{x-1} \right) dx = \frac{e^x(2x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx$$

Vậy

$$\Rightarrow I = \int dx + \int \frac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1)} dx = x + \int \frac{1}{t} dt = x + \ln|t| + C = x + \ln(e^x \cdot \sqrt{x-1} + 1) + C$$

Chọn A

Câu 82. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)^x + 2017x}{\ln[(e \cdot x^2 + e)^{x^2+1}]}$?

A. $\ln(x^2+1) + 1008 \ln[\ln(x^2+1)+1]$.

B. $\ln(x^2+1) + 2016 \ln[\ln(x^2+1)+1]$.

C. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2016 \ln[\ln(x^2+1)+1]$.

D. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1008 \ln[\ln(x^2+1)+1]$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } I = \int \frac{\ln(1+x^2)^x + 2017x}{\ln[(e \cdot x^2 + e)^{x^2+1}]} dx$$

+Ta

có:

$$I = \int \frac{\ln(1+x^2)^x + 2017x}{\ln[(e \cdot x^2 + e)^{x^2+1}]} dx = \int \frac{x \ln(1+x^2) + 2017x}{(x^2+1)[\ln(1+x^2) + \ln e]} dx = \int \frac{x[\ln(1+x^2) + 2017]}{(x^2+1)[\ln(1+x^2) + 1]} dx$$

$$+ \text{Đặt: } t = \ln(1+x^2) + 1 \Rightarrow dt = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t+2016}{2t} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2016}{t} \right) dt = \frac{1}{2} t + 1008 \ln t + C$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} + 1008 \ln[\ln(x^2+1)+1] + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1008 \ln[\ln(x^2+1)+1] + C$$

Chọn D

$$G = \int \frac{2x^2 + (1+2\ln x) \cdot x + \ln^2 x}{(x^2 + x \ln x)^2} dx$$

Câu 83. Tìm ?

A. $G = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$.

B. $G = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$.

C. $G = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$.

D. $G = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \ln x} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$G = \int \frac{2x^2 + (1 + 2 \ln x) \cdot x + \ln^2 x}{(x^2 + x \ln x)^2} dx = \int \frac{[x^2 + 2x \ln x + \ln^2 x] + x + x^2}{x^2 (x + \ln x)^2} dx = \int \frac{(x + \ln x)^2 + x(x + 1)}{x^2 (x + \ln x)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow G = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x(x + \ln x)^2} \right) dx = -\frac{1}{x} + \int \frac{x+1}{x(x + \ln x)^2} dx = \frac{-1}{x} + J \quad \left(J = \int \frac{x+1}{x(x + \ln x)^2} dx \right)$$

Xét nguyên hàm: $J = \int \frac{x+1}{x(x + \ln x)^2} dx$

+ Đặt: $t = x + \ln x \Rightarrow dt = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$$\Rightarrow J = \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{-1}{t} + C = \frac{-1}{x + \ln x} + C$$

Do đó: $G = \frac{-1}{x} + J = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x + \ln x} + C$

Chọn A

Câu 84. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $h(x) = \frac{1 - \ln x}{x^{1-n} \cdot \ln x \cdot (x^n + \ln^n x)}$?

A. $\frac{1}{n} \ln |x| - \frac{1}{n} \ln |x^n + \ln^n x| + 2016.$

B. $\frac{1}{n} \ln |x| + \frac{1}{n} \ln |x^n + \ln^n x| + 2016.$

C. $-\frac{1}{n} \ln |x| + \frac{1}{n} \ln |x^n + \ln^n x| + 2016.$

D. $-\frac{1}{n} \ln |x| - \frac{1}{n} \ln |x^n + \ln^n x| - 2016.$

Hướng dẫn giải

Ta

có:

$$L = \int \frac{1 - \ln x}{x^{1-n} \cdot \ln x \cdot (x^n + \ln^n x)} dx = \int \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \frac{1}{x^{-n-1} \cdot \ln x \cdot (x^n + \ln^n x)} dx = \int \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{\ln x}{x} \left(1 + \frac{\ln^n x}{x^n} \right)} dx$$

Đặt: $t = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow dt = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \Rightarrow L = \int \frac{dt}{t(t^n + 1)} = \int \frac{t^{n-1} dt}{t^n(t^n + 1)}$

+ Đặt $u = t^n + 1 \Rightarrow du = n \cdot t^{n-1} dt$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{n} \int \frac{du}{u(u-1)} = \frac{1}{n} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{1}{n} \cdot [\ln |u-1| - \ln |u|] + C = \frac{1}{n} \cdot \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| + C$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1}{n} \cdot \ln \left| \frac{t^n}{t^n + 1} \right| + C = \frac{1}{n} \cdot \ln \left| \frac{\frac{\ln^n x}{x^n}}{\frac{\ln^n x}{x^n} + 1} \right| + C = \frac{1}{n} \cdot \ln \left| \frac{\ln^n x}{\ln^n x + x^n} \right| + C$$

Chọn A

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u , v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức. u

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

BÀI TẬP

DẠNG 1.

Câu 1. Tìm $\int x \sin 2x dx$ ta thu được kết quả nào sau đây?

A. $x \sin x + \cos x + C$

B. $\frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x$

D. $\frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

A. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$.

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

D. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$.

Câu 3. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 4. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

A. $x \sin x - \cos x + C$.

B. $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

C. $x \sin x + \cos x + C$.

D. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của $I = \int x \sin^2 x dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x \sin 2x - \cos 2x) + C$.

B. $\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + C$.

C. $\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x\right) + C$.

D. Đáp án A và C đúng.

Câu 6. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

B. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

C. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

D. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

A. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C$.

B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C$.

C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C$.

D. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$.

Câu 8. Nguyên hàm của $I = \int x \sin x \cos^2 x dx$ là:

A. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

B. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{2}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

C. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

D. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{2}{3}t^3 + C, t = \sin x$.

Câu 9. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là:

A. $x \tan x - \ln |\cos x|$

B. $x \tan x + \ln (\cos x)$

C. $x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Câu 10. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là:

A. $x \cot x - \ln |\sin x|$

B. $-x \cot x + \ln (\sin x)$

C. $-x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

- Câu 11.** Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.
- A. $-\frac{1}{2}\ln 10$. B. $-\frac{1}{4}\ln 10$. C. $\frac{1}{2}\ln 10$. D. $\ln 10$.

DẠNG 2.

- Câu 12.** Họ nguyên hàm của $\int e^x(1+x)dx$ là:
- A. $I = e^x + xe^x + C$. B. $I = e^x + \frac{1}{2}xe^x + C$.
C. $I = \frac{1}{2}e^x + xe^x + C$. D. $I = 2e^x + xe^x + C$.
- Câu 13.** Biết $\int xe^{2x}dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .
- A. $ab = -\frac{1}{4}$. B. $ab = \frac{1}{4}$. C. $ab = -\frac{1}{8}$. D. $ab = \frac{1}{8}$.
- Câu 14.** Cho biết $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(ax+b) + C$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và C là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.
- A. $a + 2b = 0$. B. $b > a$. C. ab . D. $2a + b = 0$.
- Câu 15.** Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó $a+b$ là
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 16.** Biết $\int (x+3).e^{-2x}dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.
- A. $S = 10$. B. $S = 5$. C. $S = 65$. D. $S = 41$.
- Câu 17.** Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x}dx$.
- A. $I = -(2x+1)e^{-x} + C$. B. $I = -(2x-1)e^{-x} + C$.
C. $I = -(2x+3)e^{-x} + C$. D. $I = -(2x-3)e^{-x} + C$.
- Câu 18.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.
- A. $F(1) = 11e - 3$. B. $F(1) = e + 3$. C. $F(1) = e + 7$. D. $F(1) = e + 2$.
- Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = (2x-3)e^x$. Nếu $F(x) = (mx+n)e^x$ ($m, n \in \mathbb{R}$) là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu $m-n$ bằng
- A. 7. B. 3. C. 1. D. 5.
- Câu 20.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.
- A. $6 - \frac{15}{e}$. B. $4 - \frac{10}{e}$. C. $\frac{15}{e} - 4$. D. $\frac{10}{e}$.

DẠNG 3.

- Câu 21.** Kết quả của $\int \ln x dx$ là:
- A. $x \ln x + x + C$ B. Đáp án khác
C. $x \ln x + C$ D. $x \ln x - x + C$
- Câu 22.** Nguyên hàm của $I = \int x \ln x dx$ bằng với:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int x dx + C.$

B. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

C. $x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

D. $x^2 \ln x - \int x dx + C.$

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2).$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

Câu 24. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}?$

A. $\frac{-\ln 2x - x \ln 2}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1999.$

B. $\frac{-\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1998.$

C. $\frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2016.$

D. $\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2017.$

Câu 25. Họ nguyên hàm của $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx$ là:

A. $\cot x \cdot \ln(\cos x) + x + C.$

B. $-\cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$

C. $\cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$

D. $-\cot x \cdot \ln(\cos x) + x + C.$

Câu 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

Câu 27. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0.$ Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$

B. $0.$

C. $\frac{7}{3} \ln 2.$

D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right)?$

A. $x^4 \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) - 2x^2.$

B. $\left(\frac{x^4-16}{4} \right) \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) - 2x^2.$

C. $x^4 \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) + 2x^2.$

D. $\left(\frac{x^4-16}{4} \right) \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) + 2x^2.$

Câu 29. Tìm $H = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2}?$

A. $H = \frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

B. $H = \frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} - \tan x + C.$

C. $H = \frac{-x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

D. $H = \frac{-x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} - \tan x + C.$

Câu 30. $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 31. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:

A. $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}.$ **B.** $I = \frac{2 - e^2}{e^2}.$ **C.** $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}.$ **D.** $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}.$

Câu 32. Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -2.$ **B.** $S = 1.$ **C.** $S = 2.$ **D.** $S = 0.$

Câu 33. Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 .

Biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính $a + b$?

A. 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 34. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right).$ **B.** $a \in \left(0; \frac{1}{2018}\right].$ **C.** $a \in [1; 2018).$ **D.** $a \in [2018; +\infty).$

DẠNG 4:

Câu 35. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

B. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Câu 36. Tìm $J = \int e^x \cdot \sin x dx$?

A. $J = \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x) + C.$

B. $J = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

C. $J = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

D. $J = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x + 1) + C.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1.

Câu 1. Tìm $\int x \sin 2x dx$ ta thu được kết quả nào sau đây?

A. $x \sin x + \cos x + C$

B. $\frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x$

D. $\frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x \sin 2x dx$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Chọn B

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

A. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$.

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

D. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int f(x) dx = \int x \sin x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \text{ Ta có } \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int f(x) dx = \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 3. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 4. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

A. $x \sin x - \cos x + C$.

B. $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

C. $x \sin x + \cos x + C$.

D. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Suy ra $a = 1$.

Khi đó $\int g(x) dx = \int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của $I = \int x \sin^2 x dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x \sin 2x - \cos 2x) + C$.

B. $\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + C$.

C. $\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x\right) + C$.

D. Đáp án A và C đúng.

Hướng dẫn giải

Ta

biến

đổi:

$$I = \int x \sin^2 x dx = \int x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\int x \cos 2x dx}_{I_1} + C_1$$

$$I_1 = \int x \cos 2x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x \right) + C = \frac{1}{8} (2x^2 - 2x \sin 2x - \cos 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} (x^2 + x \sin 2x) + C$$

Chọn C

Câu 6. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

B. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

C. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

D. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

Khi

đó

$$I = \int (x-1) \sin 2x dx = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} (x-1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Câu 7. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

A. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C.$

B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C.$

C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C.$

D. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có $\int \sin \sqrt{x} dx = \int 2t \sin t dt$

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = 2dt \\ v = -\cos t \end{cases}$

$\int 2t \sin t dt = -2t \cos t + \int 2 \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$

Câu 8. Nguyên hàm của $I = \int x \sin x \cos^2 x dx$ là:

A. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

B. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{2}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

C. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

D. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{2}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

Hướng dẫn giải

Ta đặt:

$\begin{cases} u = x \\ du = \sin x \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ u = -\cos^3 x dx \end{cases}.$

$\Rightarrow I = \int x \sin x \cos^2 x dx = -x \cos^3 x + \underbrace{\int \cos^3 x dx}_{I_1} + C_1.$

Xét $I_1 = \int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx.$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$

$\Rightarrow I_1 = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C_2.$

$\Rightarrow I = -x \cos^3 x + I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C.$

Chọn A

Câu 9. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là :

A. $x \tan x - \ln |\cos x|$

B. $x \tan x + \ln (\cos x)$

C. $x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int v du = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$

Chọn C

Câu 10. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là :

A. $x \cot x - \ln |\sin x|$

B. $-x \cot x + \ln (\sin x)$

C. $-x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int v du = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$

Chọn B

Câu 11. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn

$F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

A. $-\frac{1}{2} \ln 10$.

B. $-\frac{1}{4} \ln 10$.

C. $\frac{1}{2} \ln 10$.

D. $\ln 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = \int xf'(x) dx = \int x df(x) = xf(x) - \int f(x) dx$

Ta lại có: $\int f(x) dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= x \tan x + \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C \Rightarrow F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln |\cos x| + C$

Lại có: $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, do đó: $F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln |\cos x|$.

$\Rightarrow F(a) = af(a) - a \tan a - \ln |\cos a|$

Khi đó $f(a) = \frac{a}{\cos^2 a} = a(1 + \tan^2 a) = 10a$ và $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow |\cos a| = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a) - 10a^2 + 3a = 10a^2 - 3a - \ln \left| \frac{1}{\sqrt{10}} \right| - 10a^2 + 3a = \frac{1}{2} \ln 10$.

DẠNG 2.

Câu 12. Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:

A. $I = e^x + xe^x + C$.

B. $I = e^x + \frac{1}{2} xe^x + C$.

C. $I = \frac{1}{2} e^x + xe^x + C$.

D. $I = 2e^x + xe^x + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$I = \int e^x (1+x) dx = \int e^x dx + \int e^x x dx = e^x + C_1 + \underbrace{\int xe^x dx}_{I_1}$.

Xét $I_1 = \int e^x x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1 = xe^x - \int xe^x dx \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}xe^x + C_2.$$

$$\Rightarrow I = e^x + \frac{1}{2}xe^x + C.$$

Chọn B

Câu 13. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

A. $ab = -\frac{1}{4}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = \frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$\text{Vậy: } a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow ab = -\frac{1}{8}.$$

Câu 14. Cho biết $\int xe^{2x} dx = \frac{1}{4}e^{2x}(ax+b) + C$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và C là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $a + 2b = 0$.

B. $b > a$.

C. ab .

D. $2a + b = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \int xe^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C. \text{ Suy ra } a = 2, b = -1.$$

Câu 15. Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó $a+b$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \int (2x+3)e^x dx = (ax+b)e^x, \text{ nghĩa là:}$$

$$[(ax+b)e^x]' = (2x+3)e^x$$

$$\Leftrightarrow a.e^x + e^x(ax+b) = (2x+3)e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x(ax+a+b) = (2x+3)e^x$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta được: } a=2 \text{ và } b=1$$

$$\text{Vậy } a+b=3.$$

Chọn B

Câu 16. Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

A. $S = 10$.

B. $S = 5$.

C. $S = 65$.

D. $S = 41$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+3 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \int (x+3).e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}.e^{-2x}(x+3) - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2x}.(2x+6+1) + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+7) + C \Rightarrow m=4; n=7.\end{aligned}$$

$$S = m^2 + n^2 = 65.$$

Câu 17. Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x} dx$.

A. $I = -(2x+1)e^{-x} + C$.

B. $I = -(2x-1)e^{-x} + C$.

C. $I = -(2x+3)e^{-x} + C$.

D. $I = -(2x-3)e^{-x} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Ta có $I = -(2x-1)e^{-x} + \int 2.e^{-x} dx = -(2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -(2x+1)e^{-x} + C$.

Câu 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 11e - 3$.

B. $F(1) = e + 3$.

C. $F(1) = e + 7$.

D. $F(1) = e + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int (5x+1)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 5x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$F(x) = (5x+1)e^x - \int 5e^x dx = (5x+1)e^x - 5e^x + C = (5x-4)e^x + C$.

Mặt khác $F(0) = 3 \Leftrightarrow -4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7$.

$\Rightarrow F(x) = (5x-4)e^x + 7$.

Vậy $F(1) = e + 7$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = (2x-3)e^x$. Nếu $F(x) = (mx+n)e^x$ ($m, n \in \mathbb{R}$) là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu $m-n$ bằng

A. 7.

B. 3.

C. 1.

D. 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Tính $\int (2x-3)e^x dx$.

Đặt $u = 2x-3 \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$. Suy ra:

$\int (2x-3)e^x dx = (2x-3)e^x - 2 \int e^x dx + C = (2x-3)e^x - 2e^x + C = (2x-5)e^x + C$

Suy ra: $m = 2$; $n = -5$ Vậy $m-n = 7$.

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6 - \frac{15}{e}$.

B. $4 - \frac{10}{e}$.

C. $\frac{15}{e} - 4$.

D. $\frac{10}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $I = \int f(x) dx = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx$.

Đặt $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$ khi đó $I = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx = 3 \int e^t t^2 dt$.

Đặt $\begin{cases} t^2 = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t dt = du \\ e^t = v \end{cases} \Rightarrow I = 3 \left(e^t t^2 - 2 \int e^t t dt \right) = 3e^t t^2 - 6 \int e^t t dt$.

Tính $\int e^t t dt$.

Đặt $\begin{cases} t = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = du \\ e^t = v \end{cases} \Rightarrow \int e^t t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t$.

Vậy $\Rightarrow I = 3e^t t^2 - 6(e^t t - e^t) + C \Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) + C$.

Theo giả thiết ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) - 4$

$\Rightarrow F(-1) = \frac{15}{e} - 4$.

DẠNG 3.

Câu 21. Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

A. $x \ln x + x + C$

B. Đáp án khác

C. $x \ln x + C$

D. $x \ln x - x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \ln x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

Khi đó: $I = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Chọn D

Câu 22. Nguyên hàm của $I = \int x \ln x dx$ bằng với:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int x dx + C$.

B. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C$.

C. $x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C$.

D. $x^2 \ln x - \int x dx + C$.

Hướng dẫn giải

Ta đặt:

$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx$.

Chọn B

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C$.

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{suy ra } \int f(x) dx &= \int x \ln(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x-2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{2} + C. \end{aligned}$$

Câu 24. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$?

$$\text{A. } \frac{-\ln 2x - x \ln 2}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1999.$$

$$\text{B. } \frac{-\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1998.$$

$$\text{C. } \frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2016.$$

$$\text{D. } \frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2017.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{-\ln x}{x+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|) + C = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

Chọn A

Câu 25. Họ nguyên hàm của $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx$ là:

$$\text{A. } \cot x \cdot \ln(\cos x) + x + C.$$

$$\text{B. } -\cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$$

$$\text{C. } \cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$$

$$\text{D. } -\cot x \cdot \ln(\cos x) + x + C.$$

Hướng dẫn giải

Ta đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\tan x dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = -\cot x \cdot \ln(\cos x) - \int dx = -\cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$$

Chọn B

Câu 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 1) + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int f(x)dx = \int \sqrt{x} \ln x \cdot dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$\Rightarrow I = 2 \int t^2 \ln t^2 \cdot dt = 4 \int t^2 \ln t \cdot dt.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = t^2 dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{t^3}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt \right) = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{9} t^3 + C \right) = \frac{2}{9} t^3 (3 \ln t - 1) + C$$

$$= \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln \sqrt{x} - 1) + C$$

$$= \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$$

Câu 27. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$

B. 0.

C. $\frac{7}{3} \ln 2.$

D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-3; 0)$ và $(0; +\infty)$.

$$\text{Tính } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+3} dx \\ v = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{x+3}{3x} \end{cases} \quad (\text{Chọn } C = -\frac{1}{3})$$

$$\text{Suy ra: } F(x) = \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{x+3}{3x} \ln(x+3) + \int \frac{1}{3x} dx = -\frac{x+3}{3x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln|x| + C.$$

• Xét trên khoảng $(-3; 0)$, ta có: $F(-2) = \frac{1}{3} \ln 2 + C_1$; $F(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + C_1$

• Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có:

$$F(1) = -\frac{4}{3} \ln 4 + C_2 = -\frac{8}{3} \ln 2 + C_2; \quad F(2) = -\frac{5}{6} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln 2 + C_2$$

$$\text{Suy ra: } F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \ln 2 + C_1 \right) + \left(-\frac{8}{3} \ln 2 + C_2 \right) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{7}{3} \ln 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } F(-1) + F(2) &= \left(\frac{2}{3} \ln 2 + C_1 \right) + \left(-\frac{5}{6} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln 2 + C_2 \right) \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{7}{3} \ln 2 = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5. \end{aligned}$$

Cách 2: (Tận dụng máy tính)

• Xét trên khoảng $(-3; 0)$, ta có:

$$F(-1) - F(-2) = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx \approx 0,231 \rightarrow A \text{ (lưu vào } A)(1)$$

• Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có:

$$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx \approx 0,738 \rightarrow B \text{ (lưu vào } A)(2)$$

• Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được:

$$F(-1) + F(2) - F(-2) - F(1) = A + B \Leftrightarrow F(-1) + F(2) = A + B \approx 0,969.$$

So các phương án ta

Chọn A

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)$?

A. $x^4 \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) - 2x^2.$

B. $\left(\frac{x^4-16}{4}\right) \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) - 2x^2.$

C. $x^4 \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) + 2x^2.$

D. $\left(\frac{x^4-16}{4}\right) \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) + 2x^2.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{16x}{x^4-16} \\ v = \frac{x^4}{4} - 4 = \frac{x^4-16}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x^4 \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) dx = \left(\frac{x^4-16}{4}\right) \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) - \int 4x dx = \left(\frac{x^4-16}{4}\right) \ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right) - 2x^2 + C$$

Chọn B

Câu 29. Tìm $H = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$?

A. $H = \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

B. $H = \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} - \tan x + C.$

C. $H = \frac{-x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

D. $H = \frac{-x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} - \tan x + C.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } H = \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} \cdot \frac{x}{\cos x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{x}{\cos x} \\ dv = \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \frac{d(x \sin x + \cos x)}{(x \sin x + \cos x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x \sin x + \cos x}{\cos^2 x} dx \\ v = -\frac{1}{x \sin x + \cos x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = -\frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x \sin x + \cos x} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{-x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C$$

Chọn C

Câu 30. $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a .

Ta có:

$$\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx + \int x \ln x dx.$$

Để tìm $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ ta đặt $I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ và $I_2 = \int x \ln x dx$ và tìm I_1, I_2 .

$$* I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, $t \geq 1$ ta được $t^2 = x^2+1$, $xdx = tdt$.

Suy ra:

$$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_1 = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

$$* I_2 = \int x \ln x dx.$$

Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}, \text{ ta được:}$$

$$I_2 = \int x \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2.$$

$$\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2.$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Suy ra để $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì

$$a = 2 \in \mathbb{Q}, b = 3 \in \mathbb{Q}.$$

Chọn B

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Không khuyến khích cách này vì việc tìm đạo hàm của hàm hợp phức tạp và có 4 đáp án nên việc tìm đạo hàm trở nên khó khăn.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kỹ đề nên chỉ tìm giá trị của b . Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

$$* I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Dùng phương pháp đổi biến.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1 \text{ ta được } t^2 = x^2+1, tdt = 2x dx.$$

Suy ra:

$$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\begin{aligned} \int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx &= I_1 + I_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2 \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

Suy ra để $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì $a=1, b=3$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

D. Đáp án D sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

$$* I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Dùng phương pháp đổi biến.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1 \text{ ta được } t^2 = x^2+1, tdt = 2x dx.$$

Suy ra:

$$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\begin{aligned} \int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx &= I_1 + I_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2 \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

Suy ra để $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì

$$a=1 \in \mathbb{Q}, b=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}.$$

Thế là, học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm do tính sai giá trị của b .

Câu 31. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:

- A.** $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$. **B.** $I = \frac{2 - e^2}{e^2}$. **C.** $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}$. **D.** $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2}\right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Tính $I = \int_1^e f'(x) \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} \ln x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$.

Khi đó $I = f(x) \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f'(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^e = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$.

Câu 32. Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$.

Tính $S = a + b$.

- A.** $S = -2$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1 + \ln x}{x^2}\right) dx$.

Đặt $\begin{cases} 1 + \ln x = u \\ \frac{1}{x^2} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ -\frac{1}{x} = v \end{cases}$ khi đó

$I = -\frac{1}{x}(1 + \ln x) + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 2) + C \Rightarrow a = -1; b = 2$.

Vậy $S = a + b = 1$.

Câu 33. Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 .

Biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính $a + b$?

- A.** 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \frac{-3a}{(x+1)^4} + be^x + bxe^x$ nên $f'(0) = -3a + b = -22$ (1).

$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x \right] dx = a \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} + b \int_0^1 xe^x dx = aI + bJ$.

Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{1}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 = \frac{3}{8}$.

Tính $J = \int_0^1 xe^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $J = \left(xe^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x - e^x\Big|_0^1 = 1$. Suy ra $\frac{3}{8}a + b = 5$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} -3a + b = -22 \\ \frac{3a}{8} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy $a + b = 10$.

Câu 34. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$. **B.** $a \in \left(0; \frac{1}{2018}\right]$. **C.** $a \in [1; 2018)$. **D.** $a \in [2018; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int \frac{e^x}{x} dx \quad (1)$$

• Tính $\int e^x \ln(ax) dx$:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x \ln(ax) dx = e^x \ln(ax) - \int \frac{e^x}{x} dx$$

• Thay vào (1), ta được: $F(x) = e^x \ln(ax) + C$.

$$\text{Với } \begin{cases} F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\ F(2018) = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{a}} \ln 1 + C = 0 \\ e^{2018} \ln(a \cdot 2018) + C = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \ln(a \cdot 2018) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{e}{2018}.$$

• Vậy $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$.

DẠNG 4:

Câu 35. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$. **B.** $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$.
C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. **D.** $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \\ \Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Câu 36. Tìm $J = \int e^x \cdot \sin x dx$?

A. $J = \frac{e^x}{2} (\cos x - \sin x) + C$. **B.** $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$.
C. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$. **D.** $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x + 1) + C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \sin x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x \cdot dx \\ v_1 = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + T \quad \left(T = \int e^x \cdot \cos x dx \right)$$

Tính $T = \int e^x \cdot \cos x dx$:

$$\Rightarrow T = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - J$$

$$\Rightarrow J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J \Leftrightarrow 2J = e^x (\sin x - \cos x) \Leftrightarrow J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Chọn C