

CỰC TRỊ SỐ PHỨC VÀ HÌNH HỌC

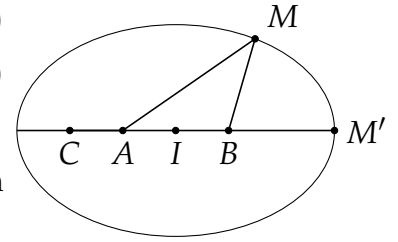
Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - i| + |z + 1 + 3i| = 6\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z - 2 - 3i|$ là

- Ⓐ $5\sqrt{5}$. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ $6\sqrt{5}$. Ⓓ $4\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z - 1 - i| + |z + 1 + 3i| = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{5}$ với $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$, $A(1; 1)$ biểu diễn số phức $1 + i$, $B(-1; -3)$ biểu diễn số phức $-1 - 3i$.

Khi đó điểm M nằm trên elip tâm I có độ dài trục lớn $6\sqrt{5}$ và A, B là hai tiêu điểm.



- $|z - 2 - 3i| = MC$ với $C(2; 3)$ biểu diễn số phức $2 + 3i$.
- $\overrightarrow{AB} = (-2; -4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.
- $\overrightarrow{AC} = (1; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{5}$.
- Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ngược hướng và $AB = 2AC$.

Gọi M' là điểm nằm trên elip sao cho A, B, M' thẳng hàng và M' khác phía A so với B .

Ta có $BM' = \frac{6\sqrt{5} - AB}{2} = 2\sqrt{5}$.

Ta thấy $MC \leq M'C$ với mọi điểm M nằm trên elip.

Do đó MC lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv M'$.

Khi đó $MC = M'C = CA + AB + BM' = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| + |z - 3 - 4i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\bar{z} - 1 + 2i|$ bằng

- Ⓐ $P_{\min} = \sqrt{17}$. Ⓑ $P_{\min} = \sqrt{34}$. Ⓒ $P_{\min} = 2\sqrt{10}$. Ⓓ $P_{\min} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$, điểm biểu diễn của z là $M(x; y)$.

Khi đó $|z + 1| + |z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10$ với $A(-1; 0)$ và $B(3; 4)$.

Suy ra M thuộc elip có độ dài trục lớn là $10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$ và hai tiêu điểm là A, B .

Mà $\overrightarrow{AB} = (4; 4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= |\bar{z} - 1 + 2i| \\ &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = MH \end{aligned}$$

Với $H(1;2)$. Dễ thấy A, B, H thẳng hàng nên H thuộc đoạn AB .

Do đó $P_{\min} \Leftrightarrow MH$ ngắn nhất khi và chỉ khi M thuộc trục nhỏ của elip.

Khi đó độ dài MH bằng một nửa trục nhỏ hay $MH = b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3, |iw + 4 + 2i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz + 2w|$.

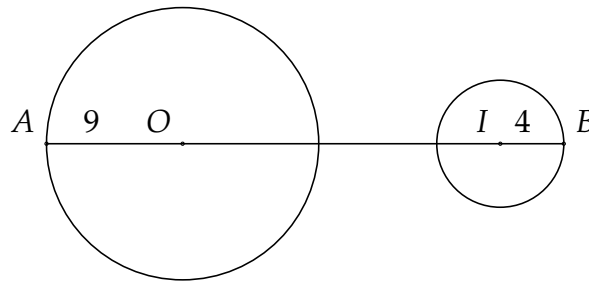
(A) $\sqrt{554} + 5$.

(B) $\sqrt{578} + 13$.

(C) $\sqrt{578} + 5$.

(D) $\sqrt{554} + 13$.

Hướng dẫn giải



Ta có $|z - 5 + 3i| = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{3iz - 15i - 9}{3i} \right| = 3 \Leftrightarrow |3iz - 9 - 15i| = 9$.

$|iw + 4 + 2i| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-i}{2}(-2w - 4 + 8i) \right| = 2 \Leftrightarrow |-2w - 4 + 8i| = 4$.

Gọi A và B là điểm biểu diễn của $3iz$ và $-2w$, khi đó A và B lần lượt thuộc các đường tròn tâm $O(9; 15)$ bán kính bằng 9 và đường tròn $I(4; -8)$ bán kính bằng 4. Ta tính được $OI = \sqrt{554}$.

Khi đó $T = |3iz + 2w| = |3iz - (-2w)| = AB$.

Do $IO = \sqrt{554} > 4 + 9$ nên hai đường tròn ngoài nhau, suy ra $AB_{\max} = AO + OI + IB = \sqrt{554} + 13$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Xét số phức z thỏa mãn $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |(1 + i)z + 2i|$.

(A) $P_{\min} = \frac{9}{\sqrt{17}}$.

(B) $P_{\min} = 3\sqrt{2}$.

(C) $P_{\min} = 4\sqrt{2}$.

(D) $P_{\min} = \sqrt{26}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử số phức z có dạng $z = a + bi$, z có biểu diễn hình học là điểm $M(a; b)$. Khi đó

$$|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{(b+2)^2 + (a-2)^2} - \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{34}. \quad (1)$$

Gọi điểm $A(2; -2)$, $B(-1; 3)$ khi đó ta có $AB = \sqrt{34}$. Kết hợp với (1) ta suy ra $MA - MB = AB \Rightarrow$

Điểm M trùng với điểm B hoặc B là trung điểm của MA . Ta xét hai trường hợp sau:

- TH1: M trùng $B \Rightarrow M(-1; 3)$. Suy ra

$$P = \sqrt{(a-b)^2 + (a+b+2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

- TH2: B là trung điểm của $MA \Rightarrow M(-4; 8)$. Suy ra

$$P = \sqrt{(a-b)^2 + (a+b+2)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

Suy ra, $\min P = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-2i}{z+3-i} \right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-2i|$ bằng

- (A) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. (B) $2\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{z-2i}{z+3-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-2i| = |z+3-i| \Leftrightarrow |x+(y-2)i| = |(x+3)+(y-1)i| \Leftrightarrow 3x+y+3=0.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 3x+y+3=0$.

Ta có $|z+3-2i| = |z-(-3+2i)|$, với $M_0(-3;2)$.

$$|z+3-2i| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } d(M_0, d) = \frac{|-9+2+3|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 6. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4-3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

- (A) $3\sqrt{5}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $5\sqrt{5}$. (D) $6\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } w = (4-3i)z + 1 - 2i \Rightarrow z = \frac{w-1+2i}{4-3i}.$$

$$\text{Nên } |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left| \frac{w-1+2i}{4-3i} \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w-1+2i| = 5\sqrt{5}.$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $I(1; -2)$ và bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

$$\text{Ta có } OI = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} < R.$$

$$\text{Do đó } \min |w| = R - OI = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i| = 2$. Mô-đun lớn nhất của z bằng

- (A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 3.

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z-3+4i| = 2$ là đường tròn có tâm $I(3; -4)$ và bán kính bằng $R = 2$. Suy ra $\max |z| = IO + R = 7$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i| + |z-5+2i| = \sqrt{34}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+1+2i|$. Khi đó tổng $M+m$ bằng

- (A) $\frac{30}{\sqrt{34}} + \sqrt{34}$. (B) $\frac{30}{\sqrt{34}} + 5$. (C) $\sqrt{34} + 6$. (D) $\frac{30}{\sqrt{34}} + 6$.

Hướng dẫn giải

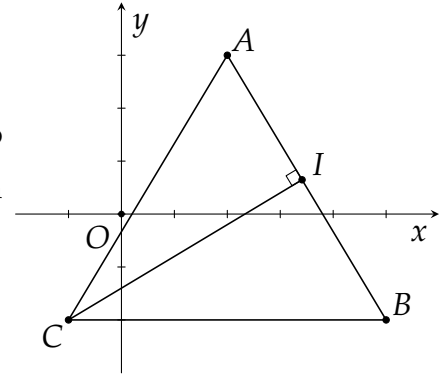
Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Gọi $I(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Ta có $A(2; 3)$, $B(5; -2)$, $C(-1; -2)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$, $z_3 = -1 - 2i$. Khi đó $AB = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + 2i| = CI$.

Theo đề bài thì $AI + BI = \sqrt{34} = AB$ nên I thuộc đoạn thẳng AB .

Phương trình của đường thẳng AB là $5x + 3y - 19 = 0$.



CI đạt giá trị nhỏ nhất khi $CI \perp AB$ hay $CI = d(C, AB) = \frac{|5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) - 19|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{30}{\sqrt{34}}$.

CI đạt giá trị lớn nhất khi I trùng với điểm đầu mút của đoạn thẳng AB .

Mặt khác $CA = \sqrt{34}$ và $CB = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của CI là 6.

Do đó $M = 6$, $m = \frac{30}{\sqrt{34}}$.

Vì vậy $M + m = \frac{30}{\sqrt{34}} + 6$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 9. Cho các số phức z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i|$ và $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i|$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3|$?

(A) $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$.

(B) $P_{\min} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(C) $P_{\min} = 4\sqrt{3}$.

(D) $P_{\min} = 4\sqrt{2}$.

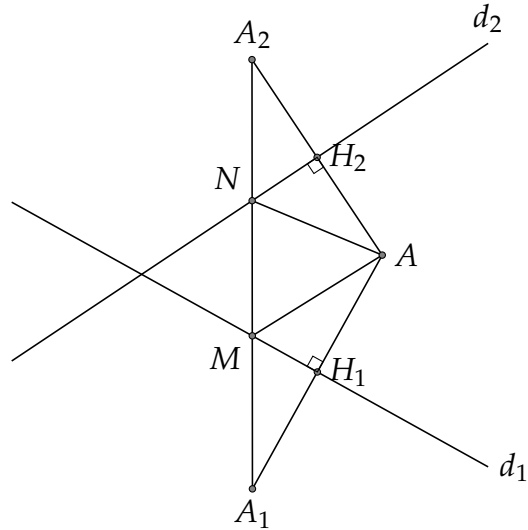
Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Ta có

• $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i| \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \Leftrightarrow 2a - 4b - 1 = 0$.
 $\Rightarrow M$ di động trên đường thẳng $d_1: 2x - 4y - 1 = 0$.

• $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i| \Leftrightarrow (c - 1)^2 + d^2 = c^2 + (d + 2)^2 \Leftrightarrow 2c + 4d + 3 = 0$.
 $\Rightarrow N$ di động trên đường thẳng $d_2: 2x + 4y + 3 = 0$.

Ta có $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} + \sqrt{(a - 3)^2 + b^2} + \sqrt{(c - 3)^2 + d^2} = MN + MA + NA$ với $A(3; 0)$.



Gọi A_1 đối xứng với A qua đường thẳng d_1 ; A_2 đối xứng với A qua đường thẳng d_2 , ta có

$$MN + MA + NA = MN + MA_1 + NA_2 \geq A_1A_2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi bốn điểm M, N, A_1, A_2 thẳng hàng.

Gọi Δ_1 là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với d_1 , ta có phương trình đường thẳng Δ_1 là $2x + y - 6 = 0$.

Gọi $H_1 = \Delta_1 \cap d_1 \Rightarrow$ tọa độ điểm H_1 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow H_1 \left(\frac{5}{2}; 1 \right) \Rightarrow A_1(2; 2).$$

Gọi Δ_2 là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với d_2 , ta có phương trình đường thẳng Δ_2 là $2x - y - 6 = 0$.

Gọi $H_2 = \Delta_2 \cap d_2 \Rightarrow$ tọa độ điểm H_2 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{10} \\ y = -\frac{9}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow H_2 \left(\frac{21}{10}; -\frac{9}{5} \right) \Rightarrow A_2 \left(\frac{6}{5}; -\frac{18}{5} \right).$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = A_1A_2 = \sqrt{\left(\frac{6}{5} - 2 \right)^2 + \left(-\frac{18}{5} - 2 \right)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 10. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

(A) $4\sqrt{13}$.

(B) $4 + 2\sqrt{13}$.

(C) $2\sqrt{53}$.

(D) $6\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có:

$$|5w + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |(2 + i)(z - 4) + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left| z - 4 + \frac{5i}{2 + i} \right| = \frac{3\sqrt{5}}{|2 + i|} \Leftrightarrow |z - 3 + 2i| = 3.$$

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z , suy ra M thuộc đường tròn (T) tâm $I(3;-2)$ bán kính $R = 3$.

Gọi $A(1;2), B(5;2)$ và $E(3;2)$ là trung điểm của AB . Ta có $P = MA + MB$.

Khi đó $P^2 = (MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 4ME^2 + AB^2$.

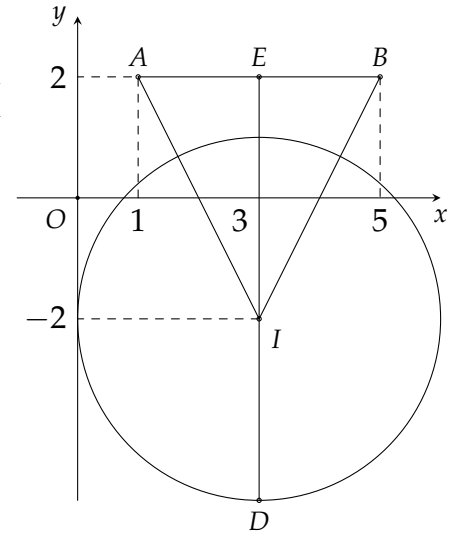
Nhận thấy E nằm ngoài đường tròn (T) , gọi D là giao điểm của tia đối của tia IE và đường tròn (T) suy ra $ME \leq ED$, với mọi M thuộc (T) .

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;0), \overrightarrow{IE} = (0;4) \Rightarrow AB \perp IE \Rightarrow DE = R + IE = 3 + 4 = 7$.

$\Rightarrow P^2 \leq 4ME^2 + AB^2 \leq 4DE^2 + AB^2 = 4 \cdot 49 + 16 = 212$.

$\Rightarrow P \leq 2\sqrt{53}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv D$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{\max} = 2\sqrt{53}$.



Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?

(A) Vô số.

(B) Một.

(C) Không.

(D) Hai.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Từ điều kiện ban đầu ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x-10)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-14)^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-10)^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-10)^2 = 25. \end{cases}$$

Để ý đường thẳng $3x - 4y + 12 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2 + (y-10)^2 = 25$, nên hệ trên chỉ có một cặp nghiệm $(x;y)$, suy ra chỉ có một số phức thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 12. Cho số phức z thỏa điều kiện $|z + 2| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$$

được viết dưới dạng $(a + b\sqrt{17}) / \sqrt{2}$ với a, b là các hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ là

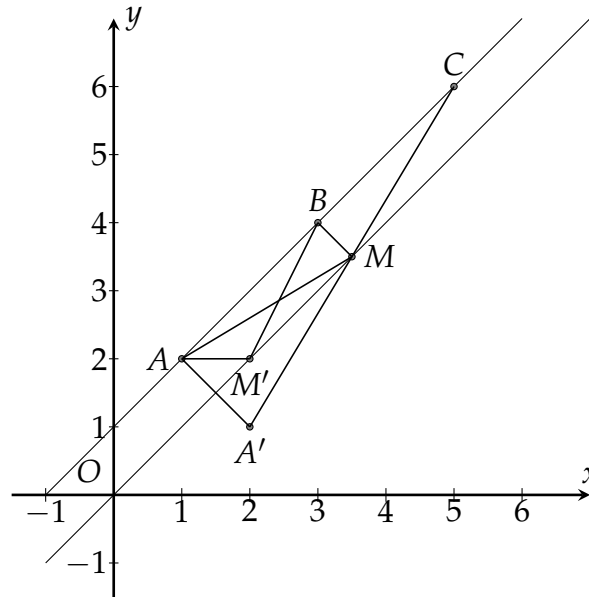
(A) 3.

(B) 2.

(C) 7.

(D) 4.

Hướng dẫn giải



Cách 1

- Đặt $E(-2;0)$, $F(0;-2)$, $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,6)$, $M(x,y)$ biểu diễn cho số phức z .
- Từ giả thiết, ta có M thuộc đường trung trực $\Delta : y = x$ của đoạn EF và $P = AM + BM + CM$.
- Ta chứng minh điểm M chính là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng Δ .
 - Với M' tùy ý thuộc Δ , M' khác M . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ . Nhận thấy rằng ba điểm A' , M , C thẳng hàng.
 - Ta có $AM' + BM' + CM' = A'M' + BM' + CM'$. Mà $A'M' + CM' > A'C = A'M + CM = AM + CM$. Lại có $BM' > BM$. Do đó $AM' + BM' + CM' > AM + BM + CM$.

Cách 2.

- Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết $|z + 2| = |z + 2i|$, dẫn đến $y = x$. Khi đó $z = x + xi$.
- $P = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (x-6)^2}$.
- Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (x-6)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2 + (6-x)^2} \\ &\geq \sqrt{(x-1+6-x)^2 + (x-2+5-x)^2} \\ &\geq \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x-1}{6-x} = \frac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$.

- Mặt khác

$$\sqrt{(x-3)^2 + (x-4)^2} = \sqrt{2x^2 - 14x + 25} = \sqrt{2} \sqrt{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{7}{2}$.

- Từ hai trường hợp trên, ta thấy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Khi đó $a+b=3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1+2i| = \sqrt{5}$. Khi đó số phức $w = z+1+i$ có môđun lớn nhất $|w|_{\max}$ bằng

- (A) $|w|_{\max} = 20$. (B) $|w|_{\max} = 2\sqrt{5}$. (C) $|w|_{\max} = \sqrt{5}$. (D) $|w|_{\max} = 5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z-1+2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w-2+i| = \sqrt{5} \geq |w| - |2-i| = |w| - \sqrt{5} \Rightarrow |w| \leq 2\sqrt{5}$, dấu " $=$ " xảy ra khi $w = 4-2i$. Vậy $|w|_{\max} = 2\sqrt{5}$.

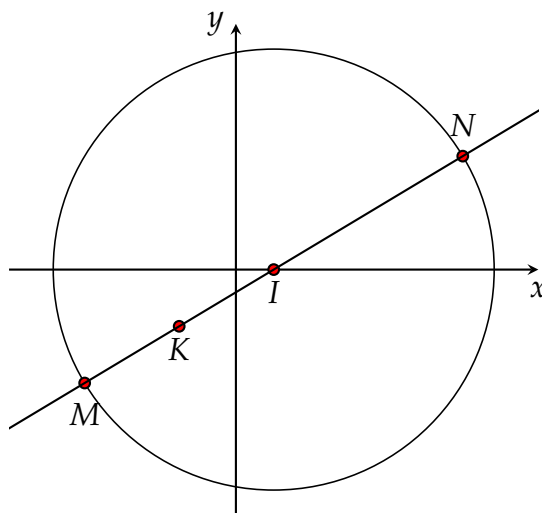
Chọn đáp án **(B)** □

Câu 14. Cho hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $|z-1| = \sqrt{34}$ và $|z+1+mi| = |z+m+2i|$ trong đó $m \in \mathbb{R}$, sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{130}$. (C) 2. (D) 10.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. $|z-1| = \sqrt{34}$ suy ra biểu diễn của z thuộc đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{34}$, $|z+1+mi| = |z+m+2i| \Leftrightarrow (2m-2)x + (4-2m)y + 3 = 0$ (d) nên biểu diễn của z thuộc đường thẳng d , dễ thấy d luôn đi điểm $K\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ cố định.



Biểu diễn của z_1, z_2 là giao điểm của đường tròn tâm I và đường thẳng d , dễ thấy $|z_1 - z_2|$ lớn nhất khi d đi qua I , khi đó $z_1 = -4 - 3i, z_2 = 6 + 3i$ và $|z_1 + z_2| = 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|2z - 3 - 4i| = 10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M - m$ bằng

(A) 5.

(B) 15.

(C) 10.

(D) 20.

Hướng dẫn giải

Giả sử số phức $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Khi đó

$$|2z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow |2(x + yi) - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow |(2x - 3) + (2y - 4)i| = 10$$

suy ra

$$(2x - 3)^2 + (2y - 4)^2 = 100 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Do đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ và bán kính $R = 5$.

Mà $|z| = OM$, ở đó O là gốc tọa độ. Do $OI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$ suy ra O nằm trong đường tròn (C) .

Do đó $\max |z| = OI + IM = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ và $\min |z| = IM - OI = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy $M - m = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = 5$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 16. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| + |z - 3 + i| = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 + 4i|$.

(A) 3.

(B) $2 + \sqrt{2}$.

(C) 5.

(D) $5 - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

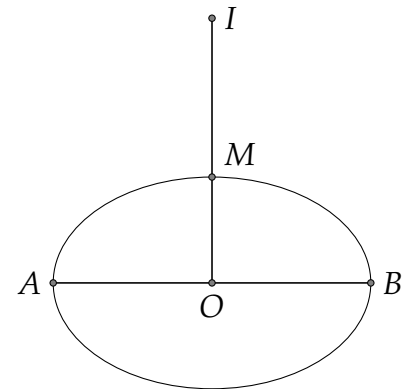
Ta nhận thấy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| + |z - 3 + i| = 6$ chính là đường elíp (E) có độ dài trục lớn bằng $2a = 6$, trục nhỏ bằng $2b = 4$ với $A(-1; 1)$ và $B(3; -1)$ là hai đỉnh trên trục lớn.

Xét điểm $I(-1; 4)$ nằm ngoài elíp (E) và I nằm trên đường trung trực của đoạn AB .

Ta có $P = |z + 1 + 4i| = MI$ với mọi điểm $M \in (E)$. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $d(I, AB) - b = 5 - 2 = 3$.

Chọn đáp án (A)

□



Câu 17. Trong mặt phẳng phức, xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' ; số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(C) $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

(D) $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$. Khi đó $z(4 + 3i) = 4a - 3b + (3a + 4b)i$ và $M(a; b); M'(a; -b), N(4a - 3b; 3a + 4b), N'(4a - 3b; -3a - 4b)$.
 $\overrightarrow{MN} = (3a - 3b; 3a + 3b)$.

Theo tính chất đối xứng thì $MNN'M'$ là hình thang cân. Do đó để $MNN'M'$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với trục Ox hay $3a + 3b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

Ta có

$$\begin{aligned} |z + 4i - 5| &= \sqrt{(a - 5)^2 + (b + 4)^2} \\ &= \sqrt{(a - 5)^2 + (-a + 4)^2} = \sqrt{2a^2 - 18a + 41} \\ &= \sqrt{2\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{9}{2}$ hay $z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$ bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 18. Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 3 + 4i$ và $|z - w| = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z| + |w|$.

- (A) $\max T = \sqrt{176}$. (B) $\max T = 14$. (C) $\max T = 4$. (D) $\max T = \sqrt{106}$.

Hướng dẫn giải

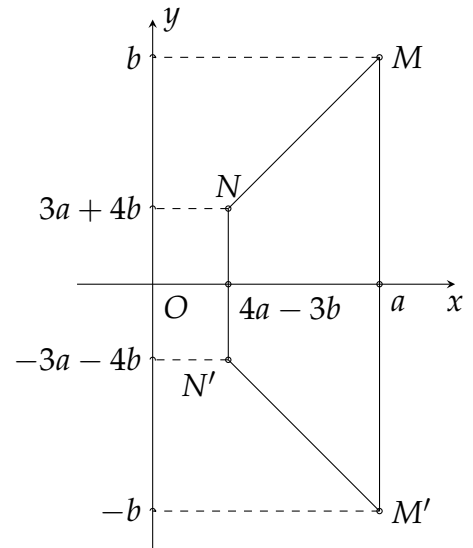
Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$); $w = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{aligned} |z + w| &= |3 + 4i| = 5 \\ \Leftrightarrow |(a + bi) + (c + di)| &= 5 \\ \Leftrightarrow |(a + c) + (b + d)i| &= 5 \\ \Leftrightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 &= 25. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} |z - w| &= 9 \\ \Leftrightarrow |(a + bi) - (c + di)| &= 9 \\ \Leftrightarrow |(a - c) + (b - d)i| &= 9 \\ \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 &= 81. \end{aligned}$$



Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+c)^2 + (b+d)^2 = 25 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = 25 \\ a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = 81 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 53.$$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có

$$|z| + |w| = \left| 1 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 1 \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \right| \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} = \sqrt{106}.$$

Với $z = -\frac{21}{10} + \frac{47}{10}i$, $w = \frac{51}{10} - \frac{7}{10}i$ luôn thỏa mãn giả thiết và $|z| + |w| = \sqrt{106}$.

Vậy $\max(|z| + |w|) = \sqrt{106}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 19. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 1 - i| \geq 1$ và $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5}$. Gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

(A) $\frac{9}{4}$.

(B) $\frac{7}{2}$.

(C) $\frac{5}{4}$.

(D) $\frac{14}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , $I(1; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $1 + i$ và $J(3; 3)$ là điểm biểu diễn số phức $3 + 3i$.

Theo giả thiết $|z - 1 - i| \geq 1 \Leftrightarrow IM \geq 1 \Leftrightarrow M$ không nằm trong (có thể thuộc) đường tròn (C) có tâm là $I(1; 1)$, bán kính $R = 1$.

Mặt khác $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow JM \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow M$ nằm trong hình tròn (C') có tâm là $J(3; 3)$, bán kính $R' = \sqrt{5}$.

Xét đường thẳng $d: x + 2y = P$

$\Rightarrow d: x + 2y - P = 0$.

Vì $M \in d$ và M nằm trong hình tròn (C') nên P nhỏ nhất hoặc lớn nhất khi d tiếp xúc với (C') đồng thời

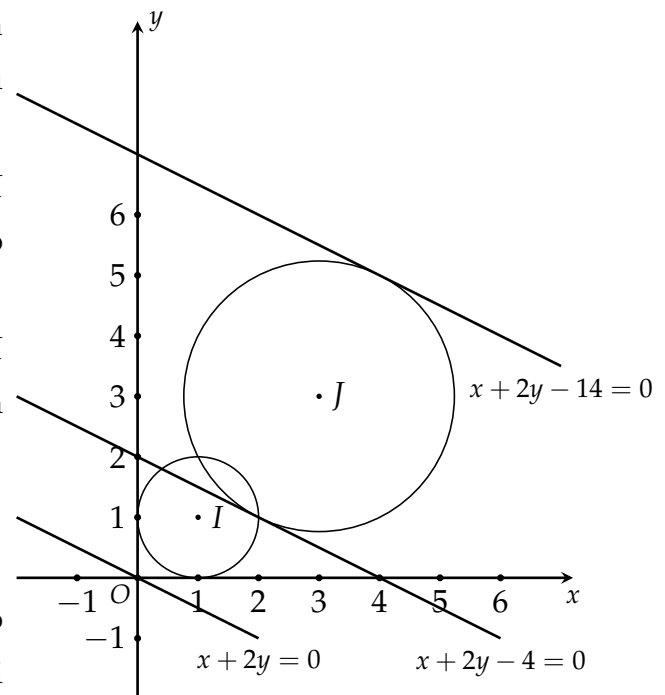
M phải không nằm trong hình tròn (C) .

Đường thẳng d tiếp xúc với (C') khi và chỉ khi

$$d(J; d) = R' \Leftrightarrow \frac{|9 - P|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |9 - P| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ P = 14. \end{cases}$$

Với $P = 4 \Rightarrow d: x + 2y - 4 = 0$. Vì M là tiếp điểm nên $JM \perp d \Rightarrow JM: 2x - y - 3 = 0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1) \Rightarrow IM = 1 = R$



$\Rightarrow M$ không nằm trong đường tròn (C).

Với $P = 14 \Rightarrow d: x + 2y - 14 = 0$. Vì M là tiếp điểm nên $JM \perp d \Rightarrow JM: 2x - y - 3 = 0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y - 14 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(4;5) \Rightarrow IM = 5 > R$

$\Rightarrow M$ không nằm trong đường tròn (C).

Vậy $m = 4$ và $M = 14 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng

(A) $\sqrt{5}$.

(B) 1.

(C) $\frac{3}{2}$.

(D) $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \\ \Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| \cdot |z - (1 - 2i)| &= |z - (1 - 2i)| \cdot |z + (-1 + 3i)| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z - (1 - 2i)| = 0 \\ |z - (1 + 2i)| = |z + (-1 + 3i)|. \end{cases} \end{aligned}$$

• Nếu $|z - (1 - 2i)| = 0 \Rightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow |z - 2 + 2i| = |-1| = 1$.

• Nếu $|z - (1 + 2i)| = |z + (-1 + 3i)| \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng $\frac{3}{2}$.

Nhận xét: Không cần xét trường hợp sau, vì trong các đáp án 1 là giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$.

(B) $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$.

(C) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$.

(D) $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

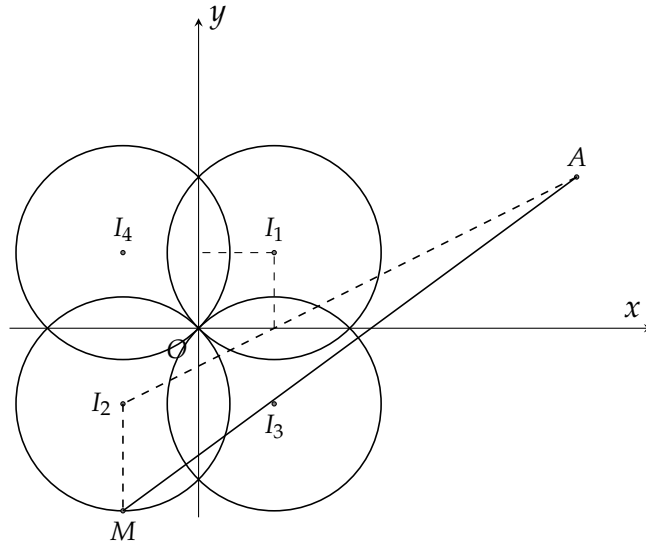
Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ (trong đó $x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Ta có

$$\begin{aligned} |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| &= |z^2| \Leftrightarrow |2x| + |2yi| = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| &= x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_1(1;1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_2(-1;-1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_3(1;-1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \text{ là đường tròn tâm } I_4(-1;1) \text{ bán kính } r = \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Mà $P = |z - 5 - 2i| = MA$ với $A(5;2)$ và M chạy trên 4 đường tròn như hình vẽ bên dưới.



Dựa vào hình minh họa, rõ ràng $P_{\max} = I_2A + r = \sqrt{36+9} + \sqrt{2} = 3\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = 5$. Tính $P = a + b$ khi $Q = |z + 2 - 2i|^2 + 2|z - 4 + i|^2 + 3|z + 2i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $P = 11$.

(B) $P = 14$.

(C) $P = 13$.

(D) $P = 12$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(a; b)$ và $I(4; 3) \Rightarrow M$ nằm trên đường tròn tâm I , bán kính 5.

Xét $A(-2; 2), B(4; -1), C(0; -2) \Rightarrow Q = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

Gọi $H(x; y)$ là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2) + 2(x-4) + 3x = 0 \\ (y-2) + 2(y+1) + 3(y+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(1; -1).$$

$$\text{Ta có } Q = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 + 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 = 6MH^2 + HA^2 + 2HB^2 + 3HC^2 + 2\overrightarrow{MH}(\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC}) = 6MH^2 + HA^2 + 2HB^2 + 3HC^2.$$

Do A, B, C, H cố định nên $HA^2 + 2HB^2 + 3HC^2$ là hằng số, do vậy Q lớn nhất khi MH lớn nhất

$$\Leftrightarrow M, I, H \text{ theo thứ tự thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} = \frac{HM}{IM} \overrightarrow{IM}.$$

$$\text{Ta có } HI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow HM = HI + MI = 5 + 5 = 10 \Rightarrow \overrightarrow{HM} = 2\overrightarrow{IM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1 = 2(a-4) \\ b+1 = 2(b-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow P = 14.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 1 + 3i| = |z + 3 - i|$ và $P = ||z - 1 - 2i| - |z + 1 - i||$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $S = x^3 + y^3$.

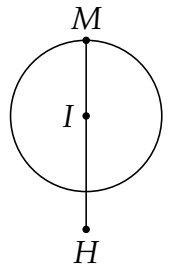
(A) $S = 0$.

(B) $S = 16$.

(C) $S = 54$.

(D) $S = 27$.

Hướng dẫn giải



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|z - 1 + 3i| = |z + 3 - i| \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Gọi $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, khi đó $P = ||z - 1 - 2i| - |z + 1 - i|| = |MA - MB|$.

Bài toán trở thành: Tìm M thuộc đường thẳng $d: x - y = 0$ sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Xét $P(x, y) = x - y$, ta có $P(A) \cdot P(B) = 2 > 0$ nên A, B nằm cùng phía đối với d .

Gọi I là giao điểm của AB với d , ta tìm được $I(3; 3)$.

Ta có $|MA - MB| \leq AB$. Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I$. Do đó P đạt giá trị lớn nhất khi tọa độ M là $(3; 3)$. Vậy $x = y = 3$ và $S = 3^3 + 3^3 = 54$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 24. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = -3$. (B) $S = 5$. (C) $S = -5$. (D) $S = 11$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(a, b)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Đặt $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, $I(6; 0)$. Theo bài ra ta có

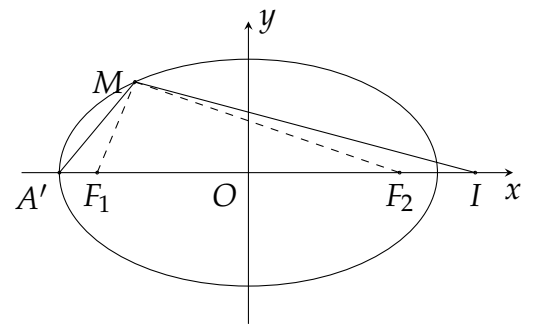
$$|z + 4| + |z - 4| = 10 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10.$$

Suy ra điểm M thuộc elip có độ dài trục lớn bằng 10.

$$|z - 6| = IM \leq IA' = 11.$$

Suy ra $|z - 6|$ lớn nhất khi $M(-5; 0)$.

Chọn đáp án **C** □



Câu 25. Gọi z_1, z_2 là hai trong tất cả các số phức thỏa mãn điều kiện $|(i - 1)z - 3i + 3| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1| + |z_2|$. Giá trị của $S = m^3 + n^3$ bằng

- (A) 72. (B) 90. (C) 54. (D) 126.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } |(i - 1)z - 3i + 3| = 2 \Leftrightarrow |(i - 1)(z - 3)| = 2 \Leftrightarrow |z - 3| = \sqrt{2}.$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z .

Ta có M nằm trên đường tròn (C) tâm $I(3; 0)$, $R = \sqrt{2}$.

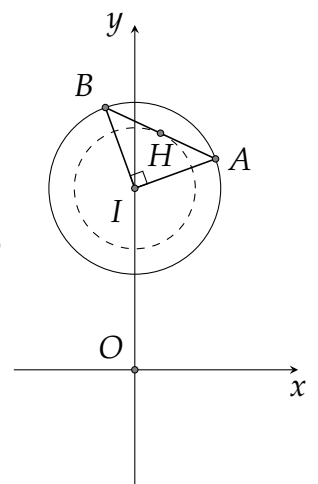
Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho z_1, z_2 . Ta có $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

Gọi H là trung điểm AB ta có tam giác IAB vuông tại I (theo định lý Pitago đảo)

$$\Rightarrow IH = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$\Rightarrow H$ chạy trên đường tròn tâm I bán kính $R = 1$.

$$P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(OA^2 + OB^2)}$$



Mặt khác theo công thức độ dài đường trung tuyến ta có

$$OA^2 + OB^2 = 2OH^2 + \frac{AB^2}{2} = 2OH^2 + \frac{2^2}{2} = 2OH^2 + 2.$$

$$\Rightarrow \max P = OI + R = 3 + 1 = 4; \min P = |OI - R| = 3 - 1 = 2 \Rightarrow m = 4; n = 2 \Rightarrow S = 64 + 8 = 72.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 26. Cho $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức thỏa điều kiện $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Tính $M + m$.

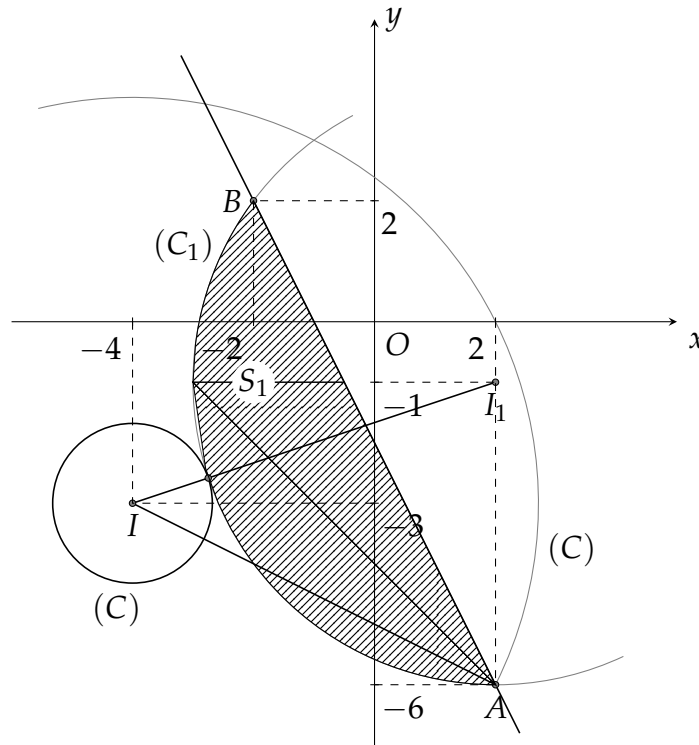
(A) $\frac{156}{5} - 20\sqrt{10}$.

(B) $60 - 20\sqrt{10}$.

(C) $\frac{156}{5} + 20\sqrt{10}$.

(D) $60 + 20\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải



- $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \Leftrightarrow 2x + y + 2 \leq 0$.
- $|z + i - 2| \leq 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 25$ là hình tròn (C_1) tâm $I_1(2; -1)$ và bán kính $R_1 = 5$.
- $M(z)$ thỏa điều kiện đề bài $\Leftrightarrow M \in (S_1)$: là phần gạch chéo kể cả biên với $A(2; -6), B(-2; 2)$.
- $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x + 6y - P = 0$. (1)

Xét điều kiện để (1) là phương trình đường tròn với tâm $I(-4; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{25 + P}$.

$$\bullet \begin{cases} M(z) \in (S_1) \\ M \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow II_1 - R_1 \leq R \leq IA \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{25 + P} \leq \sqrt{45}$$

$$\Rightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20$$

Suy ra $M + m = 60 - 20\sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 27. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn hệ thức $|z - 3 - 4i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1|^2 - |z_2|^2$.

(A) -10.

(B) -5.

(C) $-6 - 2\sqrt{5}$.

(D) $-4 - 3\sqrt{5}$.

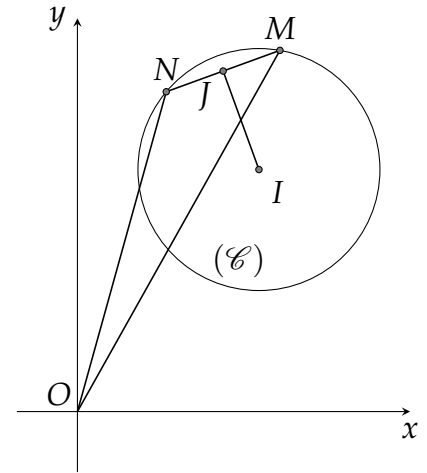
Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1 và z_2 .

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} M, N \in \mathcal{C}(I; 2) \text{ với } I(3; 4) \\ MN = 1. \end{cases}$

Ta thấy

$$\begin{aligned} P &= |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ &= \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{ON}^2 \\ &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \\ &= \overrightarrow{NM} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{OJ}, \text{ (với } J \text{ là trung điểm } MN) \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{NM} \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IJ}) \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{OI}, \text{ (vì } MN \perp IJ) \\ &= 2 \cdot MN \cdot OI \cdot \cos(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{OI}) \\ &\geq 2 \cdot MN \cdot OI \cdot (-1) \\ &\geq -10. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (A)

□

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$. Phép tịnh tiến vec-tơ $\vec{v}(1; 2)$ biến tập hợp biểu diễn số phức z thành tập hợp biểu diễn số phức z' . Tìm $P = \max |z - z'|$.

(A) $P = 15$.

(B) $P = 20 - \sqrt{5}$.

(C) $P = 10 + \sqrt{5}$.

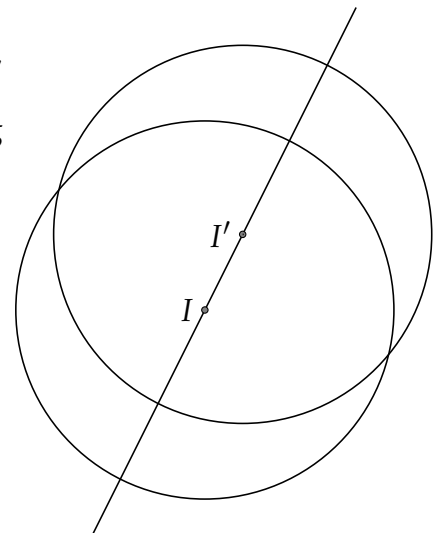
(D) $P = 12$.

Hướng dẫn giải

Xét hai đường tròn $(I; 5)$ và $(I'; 5)$ với $I(1; -2), I'(2; 0)$.

Khi đó $\max |z - z'| = AB$ với AB là các giao điểm của đường thẳng II' với $(I; 5)$ và $(I'; 5)$ (A không nằm trong $(I'; 5)$ và B không nằm trong $(I; 5)$).

Khi đó $AB = 2R + II' = 10 + \sqrt{5}$.



Chọn đáp án (C)

□

Câu 29. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + 2i| = 1$, $|z_2 - 3 - i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1 - z_2|$.

- (A) $\sqrt{13} + 6$. (B) $\sqrt{13} + 3$. (C) $\sqrt{13} + 4$. (D) $\sqrt{13} + 2$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1i$ và $z_2 = a_2 + b_2i$ (với $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$).

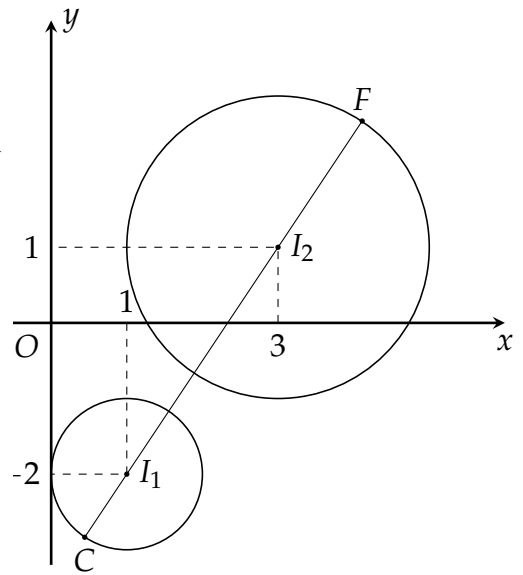
• $|z_1 - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (a_1 - 1)^2 + (b_1 + 2)^2 = 1$.

Tập hợp điểm M_1 biểu diễn z_1 là đường tròn tâm $I_1(1; -2)$ và bán kính $R_1 = 1$.

• $|z_2 - 3 - i| = 2 \Leftrightarrow (a_2 - 3)^2 + (b_2 - 1)^2 = 4$.

Tập hợp điểm M_2 biểu diễn z_2 là đường tròn tâm $I_2(3; 1)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Mà $|z_1 - z_2| = M_1M_2 \leq CF = R_1 + I_1I_2 + R_2 = 1 + \sqrt{13} + 2 = 3 + \sqrt{13}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 2\sqrt{14}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z + \sqrt{5}|$. Tính $P = m + M$.

- (A) $P = \sqrt{14} + \sqrt{5}$. (B) $P = 2\sqrt{5}$. (C) $P = 2\sqrt{14} + 2\sqrt{5}$. (D) $P = 2\sqrt{14}$.

Hướng dẫn giải

• Gọi $N(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z , $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$. Khi đó

$$|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 2\sqrt{14} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{14}.$$

• M thuộc đường elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục lớn $2a = 2\sqrt{14} \Rightarrow a = \sqrt{14}$.

• Ta có $|z + \sqrt{5}| = MF_1 = a + \frac{c}{a} \cdot x_M$ với $-\sqrt{14} \leq x \leq \sqrt{14}$.

• Từ đó suy ra $m = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \cdot (-\sqrt{14}) = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ và $M = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{14} + \sqrt{5}$.

• Vậy $P = m + M = \sqrt{14} - \sqrt{5} + \sqrt{14} + \sqrt{5} = 2\sqrt{14}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$, $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là

- (A) $16 + \sqrt{74}$. (B) $2 + \sqrt{130}$. (C) $4 + \sqrt{74}$. (D) $4 + \sqrt{130}$.

Hướng dẫn giải

• Ta có $w = 2z + 1 - i \Leftrightarrow w = 2(z - 3 + 4i + 3 - 4i) + 1 - i \Leftrightarrow w - 7 + 9i = 2(z - 3 + 4i)$.

- Ta suy ra $|w - 7 + 9i| = 2|z - 3 + 4i| \Leftrightarrow |w - 7 + 9i| = 4 \Rightarrow w \in \text{đường tròn} \begin{cases} \text{Tâm } I(7; -9) \\ R = 4 \end{cases}$.
- Vậy $|w|_{\max} = OI + R = \sqrt{7^2 + 9^2} + 4 = 4 + \sqrt{130}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 32. Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz + 1 + 2i| = 3$ và biểu thức $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T . Giá trị của tích Mn là

- (A) $10\sqrt{21}$. (B) $6\sqrt{13}$. (C) $5\sqrt{21}$. (D) $2\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $N(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Từ giả thiết, $|iz + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Ta có $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i| = 2NA + 3NB$ với $A(-5; -2)$ và $B(0; 3)$.

Nhận xét rằng A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$ ($I(-2; 1)$ là tâm đường tròn biểu diễn các số phức z).

Từ đó ta có $2NA^2 + 3NB^2 = 5NI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 105$.

Mà $T^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}NA + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}NB)^2 \leq 5(2NA^2 + 3NB^2) = 525$ hay $T \leq 5\sqrt{21}$.

Đẳng thức xảy ra khi N là giao của đường trung trực đoạn AB với đường tròn tâm I , bán kính $R = 3$.

Vậy $n = 2$ và $Mn = 10\sqrt{21}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 33. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z + 2 - i|$.

- (A) $m = 1$. (B) $m = \frac{2\sqrt{13}}{13}$. (C) $m = \frac{\sqrt{13}}{13}$. (D) $m = \frac{1}{13}$.

Hướng dẫn giải

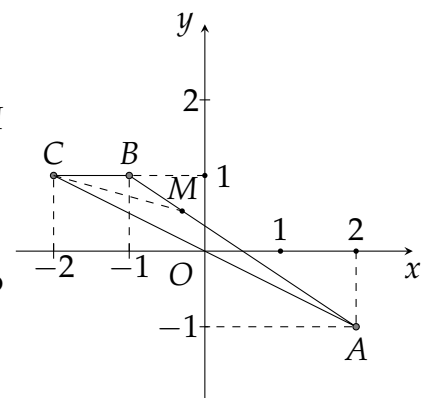
Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ biểu diễn số phức z .

Xét $A(2; -1)$, $B(-1; 1)$, ta có $AB = \sqrt{13}$.

Do $|z - 2 + i| + |z + 1 - i| = \sqrt{13} \Rightarrow MA + MB = \sqrt{13}$, suy ra M nằm trên đoạn thẳng AB .

Lấy điểm $C(-2; 1)$, ta có $|z + 2 - i| = MC$.

Vì $\vec{BC} \cdot \vec{BA} < 0 \Rightarrow \triangle ABC$ tù tại B . Do đó $|z + 2 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M trùng với B hay $z = -i + i$. Vậy $m = BC = 1$.



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 34. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = \sqrt{2}$ và $|z - 1 + 3i| + |z - 3 + 5i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $P = a + b$.

- (A) $P = -2$. (B) $P = -8$. (C) $P = 8$. (D) $P = 2$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(3; -3), B(1; -3), C(3; -5)$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Theo giả thiết ta có $|z - 3 + 3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow MA = \sqrt{2}$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm điểm M thuộc đường tròn tâm A bán kính $R = \sqrt{2}$ để $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta có $MB + MC \geq BC = 2\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn BC .

Phương trình đường thẳng $BC: x + y + 2 = 0$, phương trình đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{2}$ là

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 2.$$

$$\text{Tọa độ } M \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ (x - 3)^2 + (-x + 1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Vậy $M(2; -4) \Rightarrow P = -2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| \leq 2$ và $|z - \bar{z}| \leq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - 2i|$. Tính tổng $S = M + m$.

(A) $S = 1 + \sqrt{10}$.

(B) $S = \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

(C) $S = 4$.

(D) $S = 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

• $|z + \bar{z}| \leq 2 \Leftrightarrow |2x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 1$.

• $|z - \bar{z}| \leq 2 \Leftrightarrow |2yi| \leq 2 \Leftrightarrow |y| \leq 1$.

Từ đó ta có, tập hợp z là phần gạch sọc hình vẽ bên.

Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z , suy ra M thuộc miền gạch sọc.

Lấy $I(0, 2)$, suy ra $T = |z - 2i| = IM$, từ đó suy ra $T_{\max} = IA =$

$IB = \sqrt{10}$ và $T_{\min} = IH = 1$.

Vậy $S = M + m = 1 + \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1| + |z - 3 - 4i| = 10$. Tính giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |\bar{z} - 1 + 2i|$.

(A) $P_{\min} = \sqrt{17}$.

(B) $P_{\min} = \sqrt{34}$.

(C) $P_{\min} = 2\sqrt{10}$.

(D) $P_{\min} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z ,

lấy điểm $A(-1; 0), B(3; 4)$ và $I(1; 2)$.

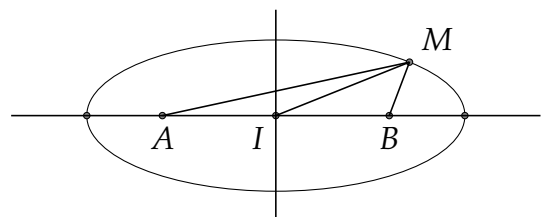
Ta có $|z + 1| + |z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow AM + BM = 10$.

Suy ra quỹ tích điểm M là đường elip với trục lớn $2a =$

10 và hai tiêu điểm $A(-1; 0), B(3; 4)$.

Nhận thấy, I là trung điểm của AB , suy ra I là tâm đối xứng của elip.

Mặt khác $P = |\bar{z} - 1 + 2i| = IM$, suy ra $P_{\min} = b$, với b là bán trục nhỏ.



Lại có $2c = AB \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$, từ đó suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 8 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$.

Vậy ta có $P_{\min} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 37. Cho số phức z và z' thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 1$, $|z' + i| = |z' - 1 - i|$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = \left| z - \frac{5}{2} - i \right| + |z - z'|$$

(A) $\frac{9\sqrt{5} - 10}{5}$.

(B) $\frac{9\sqrt{5} - 5}{5}$.

(C) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

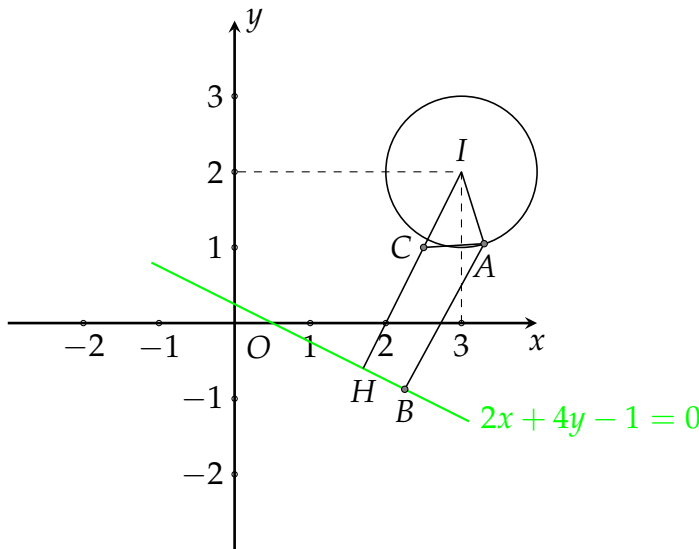
(D) $\frac{9\sqrt{5} + 5}{5}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ với $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ và $2x' + 4y' - 1 = 0$. Như vậy tập các điểm biểu diễn z là đường tròn (C) tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 1$ và tập các điểm biểu diễn z' là đường thẳng $d: 2x + 4y - 1 = 0$.

Gọi $A(x; y)$ và $B(x'; y')$ lần lượt là điểm biểu diễn của z và z' , $C = \left(\frac{5}{2}; 1\right)$ là điểm biểu diễn của $\frac{5}{2} - i$ và H là hình chiếu của C lên d . Nhận thấy rằng $IC \perp d$. Ta có $P = AB + AC \geq BI - AI + CI - IA \geq HI - AI + CI - IA = \frac{13}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{9\sqrt{5} - 10}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv B$ và A là giao của đoạn thẳng IC với đường tròn (C) .



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Khi đó $P = Ma^2 + m^2$ bằng

(A) $\frac{171}{2}$.

(B) $\frac{171}{4}$.

(C) $\frac{167}{4}$.

(D) $\frac{167}{2}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi P, A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z, -2 + i, 4 + 7i$. Khi đó

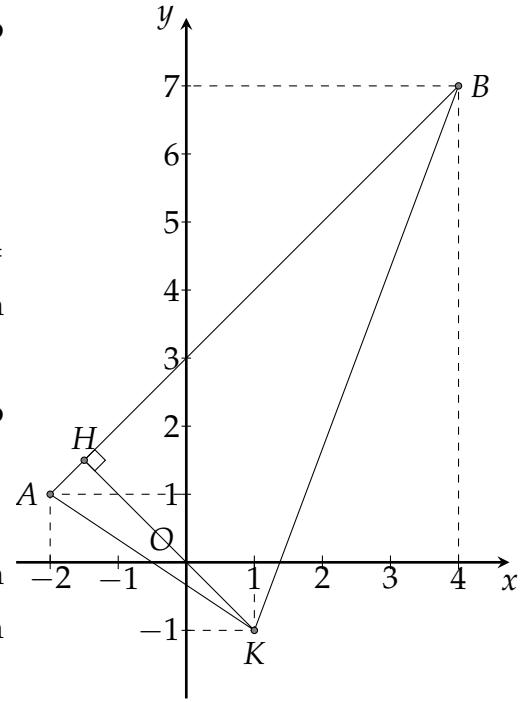
$$P(x; y), A(-2; 1), B(4; 7) \text{ và } \begin{cases} PA = |z + 2 - i| \\ PB = |z - 4 - 7i| \\ AB = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow PA + PB = AB$ hay tập hợp các điểm P biểu diễn cho số phức z là đoạn thẳng AB .

Gọi K là điểm biểu diễn số phức $1 - i \Rightarrow K(1; -1)$, khi đó $KA = \sqrt{13}, KB = \sqrt{73}$ và $|z - 1 + i| = PK$.

Ta có $M = \max\{KA, KB\} = \sqrt{73}$.

Dễ thấy tam giác KAB là tam giác có ba góc nhọn, do đó hình chiếu vuông góc H của điểm K trên đường thẳng AB nằm trong đoạn AB , do đó $m = KH = d(K, AB)$.



Đường thẳng AB có phương trình $\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{7-1}$ hay $x - y + 3 = 0$.

$$\text{Do đó } d(K, AB) = \frac{|1 - (-1) + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } M^2 + m^2 = 73 + \frac{25}{2} = \frac{171}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 2\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z - 4 + 4i|$.

(A) $P_{\max} = \frac{169}{5}$.

(B) $P_{\max} = 50$.

(C) $P_{\max} = 34$.

(D) $P_{\max} = 3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$, $M(x; y)$, $A(2; -3)$, $B(-2; -1)$, $I(4; -4)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| &= 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} &= 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow AM + BM &= 2\sqrt{5}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, $AM + BM \geq AB = 2\sqrt{5}$, kết hợp với (1) suy ra dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M nằm trong đoạn AB . (2)

Kiểm tra ta thấy $\vec{IA} = (-2; 1)$ và $\vec{IB} = (-6; 3)$ cùng phương, suy ra A, B, I thẳng hàng.

Từ đó suy ra $P = IM$ đạt giá trị lớn nhất khi M trùng A hoặc B .

Ta có $IA = \sqrt{5}$ và $IB = 3\sqrt{5}$, suy ra $P_{\max} = 3\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - z_2| + 2$

bằng

(A) $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$.

(B) $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$.

(C) $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

(D) $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z_3 = 2z_2$ thì $|z_3 - 6 - 8i| = 1$ và $P = |z - z_1| + |z - z_3| + 2$.

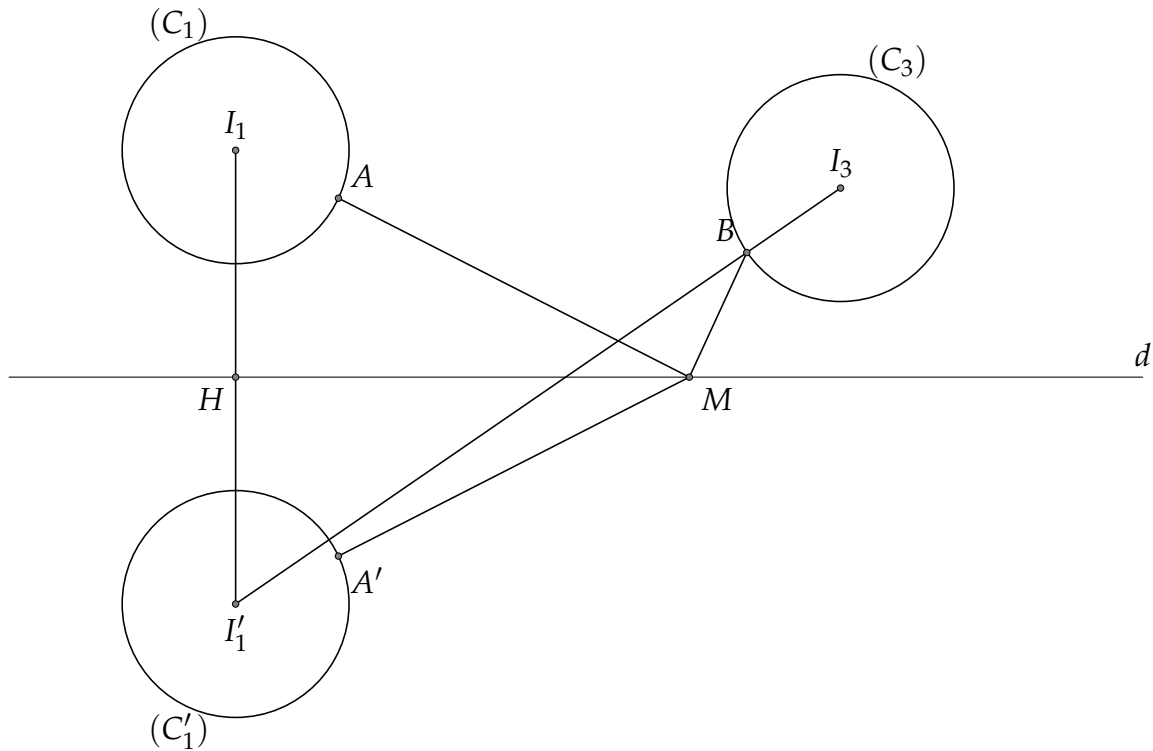
Gọi M, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho z, z_1 và z_3 . Khi đó:

Điểm A nằm trên đường tròn (C_1) có tâm $I_1(3;4)$, bán kính $R_1 = 1$;

Điểm B nằm trên đường tròn (C_3) có tâm $I_3(6;8)$, bán kính $R_3 = 1$

Và điểm M nằm trên đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $P = MA + MB + 2$.



Ta kiểm tra thấy (C_1) và (C_3) nằm cùng phía và không cắt đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

Gọi đường tròn (C'_1) có tâm I'_1 và bán kính $R'_1 = 1$ đối xứng với (C_1) qua d .

Điểm A' đối xứng với A qua d thì A' thuộc (C'_1) .

Ta có $I_1I'_1: 2x + 3y - 18 = 0$. Gọi $H = I_1I'_1 \cap d \Rightarrow H\left(\frac{72}{13}; \frac{30}{13}\right)$ suy ra $I'_1\left(\frac{105}{13}; \frac{8}{13}\right)$.

Ta có $P = MA + MB + 2 = MA' + MB + 2 = (MA' + R'_1) + (MB + R_3) \geq I'_1M + I_3M \geq I'_1I_3$.

Từ đó $P_{\min}$ khi các điểm I'_1, I_3, A', B và M thẳng hàng và $P_{\min} = I'_1I_3 = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{5}{2} - i\right| = \left|z + \frac{3}{2} + 2i\right|$. Biết biểu thức $Q = |z - 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Tính $P = a - 4b$.

(A) $P = -2$.

(B) $P = -\frac{911}{460}$.

(C) $P = -1$.

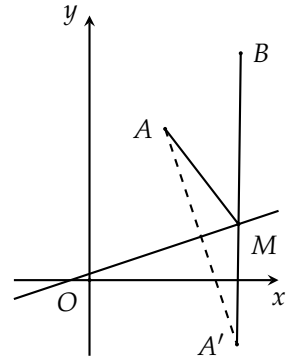
(D) $P = \frac{691}{272}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Giả thiết có được

$$\sqrt{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 6y.$$



Biểu thức $Q = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 6)^2}$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , lúc đó M thuộc đường thẳng $d: 2x - 6y + 1 = 0$.

Gọi $A(2; 4)$, $B(4; 6)$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$. Kiểm tra được A, B nằm cùng phía với d nên gọi A' là điểm đối xứng với A qua d . Ta tìm được $A' \left(\frac{39}{10}; -\frac{17}{10} \right)$.

Độ dài $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv d \cap A'B$. Đường thẳng $A'B$ có phương trình là $-77x + y + \frac{151}{5} = 0$. Từ đó tìm được $M \left(\frac{1813}{460}; \frac{681}{460} \right)$ hay $a = \frac{1813}{460}$ và $b = \frac{681}{460}$.

Kết luận, $a - 4b = -\frac{911}{460}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 42. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 12$ và $|z_2 - 3 - 4i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

(A) 0.

(B) 2.

(C) 7.

(D) 17.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Ta thấy $|z_1| = 12$.

$\Rightarrow M \in (\mathcal{C}_1)$ có tâm O và bán kính $R_1 = 12$.

Ta thấy $|z_2 - 3 - 4i| = 5$.

$\Rightarrow N \in (\mathcal{C}_2)$ có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R_2 = 5$.

Ta thấy $\vec{OI} = (3; 4) \Rightarrow OI = 5 \Rightarrow O \in (\mathcal{C}_2)$.

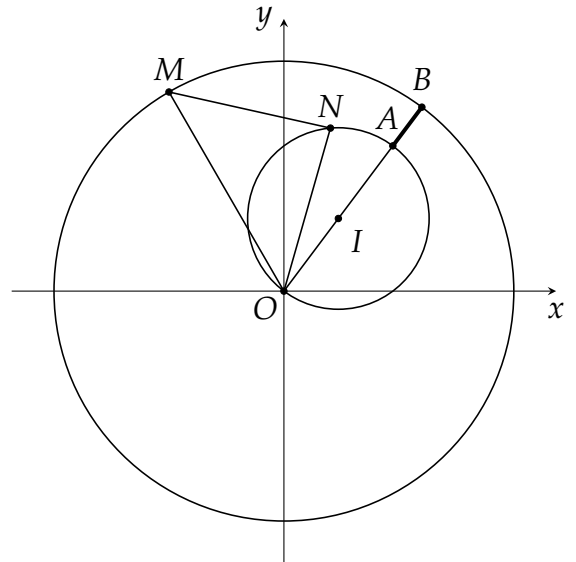
Ta có $|z_1 - z_2| = MN \geq OM - ON$.

Vì $OM = 12$ nên

$$\min(MN) = 12 - \max(ON) = 12 - 10 = 2.$$

Khi đó, $\begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases}$ với A, B là giao điểm của tia OI với $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2)$.

Chọn đáp án **(B)** □



Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $(3 - 7i)|z| = \frac{176 - 82i}{\bar{z}} + 7 + 3i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|(1 + i)z + 2 - i|$

(A) $5\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

(B) $6\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

(C) $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

(D) $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\bar{z} \neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 (3-7i)|z| &= \frac{176-82i}{\bar{z}} + 7+3i \\
 \Leftrightarrow |z| &= \frac{19+17i}{(3-7i) \cdot \bar{z}} + \frac{7+3i}{3-7i} \Leftrightarrow |z| = \frac{19+17i}{\bar{z}} - i \\
 \Leftrightarrow |z| + i &= \frac{19+17i}{\bar{z}} \Leftrightarrow (|z| + i)\bar{z} = 19+17i \\
 \Rightarrow |(|z| + i)\bar{z}| &= |19+17i| \text{ (Lấy mô-đun hai vế)} \\
 \Leftrightarrow ||z| + i| \cdot |\bar{z}| &= 5\sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{|z|^2 + 1} \cdot |z| = 5\sqrt{26}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Đặt $t = |z| > 0$, khi đó

$$(2) \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} \cdot t = 5\sqrt{26} \Leftrightarrow (t^2 + 1) \cdot t^2 = 650 \Leftrightarrow t^4 + t^2 - 650 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 25 \\ t^2 = -26 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Với $t^2 = 25 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow |z| = 5$.

$$\text{Đặt } P = |(1+i)z + 2 - i| = \left| (1+i) \left(z + \frac{2-i}{1+i} \right) \right| = \sqrt{2} \left| z - \frac{-2+i}{1+i} \right| = \sqrt{2} \left| z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) \right|.$$

Gọi $M(x; y)$, $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z và

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Khi đó $P = \sqrt{2}MA$ và M thuộc đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 5$.

Ta có $OA = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} < R = 5 \Rightarrow A$ nằm trong đường tròn (C) .

Gọi E, F là giao điểm của OA với đường tròn (C) với $AF < AE$.

Ta có $AF \leq MA \leq AE$.

Vậy P nhỏ nhất khi và chỉ khi MA nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow MA = MO - OA = 5 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P = 5\sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z - 1 - 3i| \leq |z + 2i|$ và $|w + 1 + 3i| \leq |w - 2i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - w|$.

A $\min P = \frac{3}{13}.$

B $\min P = \frac{3\sqrt{26}}{13}.$

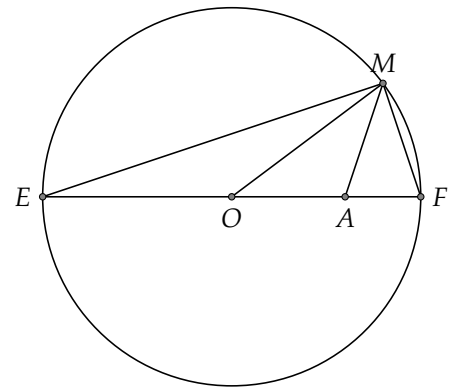
C $\min P = \frac{\sqrt{26}}{4}.$

D $\min P = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned}
 |z - 1 - 3i| &\leq |z + 2i| \\
 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 &\leq x^2 + (y+2)^2 \\
 \Leftrightarrow x + 5y &\geq 3.
 \end{aligned}$$

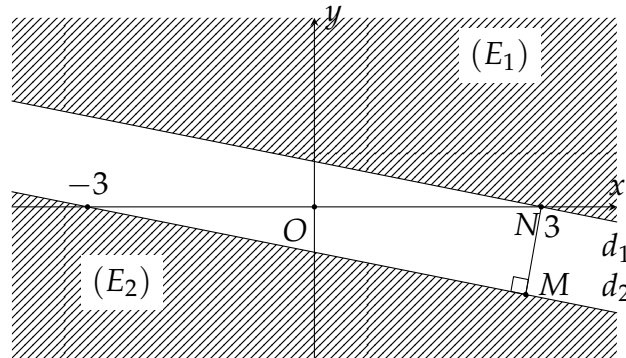


Suy ra tập hợp số phức z là miền nghiệm (E_1) của bất phương trình $x + 5y \geq 3$ (phần gạch sọc).

Gọi $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\begin{aligned} |w + 1 + 3i| &\leq |w - 2i| \\ \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 3)^2 &\leq a^2 + (b - 2)^2 \\ \Leftrightarrow a + 5b &\leq -3. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp số phức w là miền nghiệm (E_2) của bất phương trình $x + 5y \leq -3$ (phần gạch sọc).



Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức w, z . Suy ra $M \in (E_2)$ và $N \in (E_1)$.

Ta có

$$P = |z - w| = MN \Rightarrow \min P = d(d_1, d_2),$$

trong đó

$$d_1: x + 5y - 3 = 0 \text{ và } d_2: x + 5y + 3 = 0.$$

Chọn $N(3; 0) \in d_1$, suy ra

$$d(d_1, d_2) = d(N, d_2) = \frac{|3 + 5 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{3\sqrt{26}}{13}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3\sqrt{26}}{13}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 45. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình $\sqrt{3}x - y - 2018 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2\sqrt{3} + 2i|$.

- Ⓐ $\min P = \frac{1005\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\min P = \frac{1013\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\min P = 1013$. Ⓓ $\min P = 1005$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 P &= |x + yi - 2\sqrt{3} + 2i| \\
 &= |x + (\sqrt{3}x - 2018)i - 2\sqrt{3} + 2i| \\
 &= \sqrt{4x^2 - 4036\sqrt{3}x + 2016^2 + 12} \\
 &= \sqrt{(2x - 1009\sqrt{3})^2 + 1005^2} \\
 &\geq \sqrt{1005^2} = 1005.
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1005$ khi $z = \frac{1009\sqrt{3}}{2} - \frac{1009}{2}i$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 46. Trên hệ tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức z có mô-đun lớn nhất thỏa mãn $|z + 4 - 3i| = 5$. Tọa độ điểm M là

- (A)** $M(-6; 8)$. **(B)** $M(8; -6)$. **(C)** $M(8; 6)$. **(D)** $M(-8; 6)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$$||z| - |4 - 3i|| \leq |z + 4 - 3i| \leq |z| + |4 - 3i|$$

Mà $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ và do giả thiết ta suy ra $0 \leq |z| \leq 10$. Do đó $\max |z| = 10$ khi

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} |z| = 10 \\ |z + 4 - 3i| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ (a + 4)^2 + (b - 3)^2 = 25 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ a^2 + 8a + 16 + b^2 - 6b + 9 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ 4a - 3b = -50 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ b = \frac{4a + 50}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \left(\frac{4a + 50}{3}\right)^2 = 100 \\ b = \frac{4a + 50}{3} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 9a^2 + (4a + 50)^2 = 900 \\ b = \frac{4a + 50}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 + 16a^2 + 400a + 2500 = 900 \\ b = \frac{4a + 50}{3} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + 16a + 64 = 0 \\ b = \frac{4a + 50}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suy ra số phức $z = -8 + 6i$ thỏa mãn bài toán. Do đó tọa độ điểm $M(-8; 6)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$.

- (A)** $1 + \sqrt{10}$. **(B)** 4. **(C)** $\sqrt{17}$. **(D)** 5.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Số phức $1 + i, 5 + 2i$ có điểm biểu diễn lần lượt là $A(1; 1), B(5; 2)$.

Ta có $|z - 2 - 2i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ là phương trình đường tròn tâm $I(2; 2)$ bán kính $R = 2$.

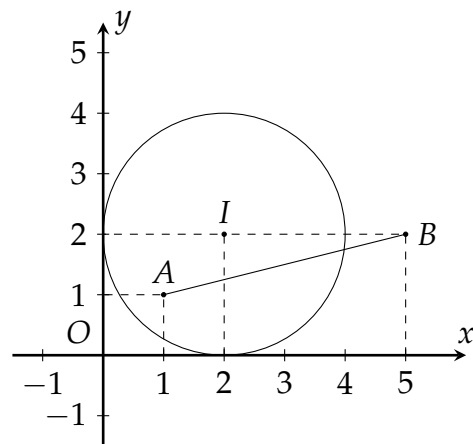
$P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i| = MA + MB$.

Nhận xét: A nằm bên trong đường tròn tâm I, B nằm ngoài đường tròn tâm I .

Dựa vào hình vẽ ta có $MA + MB \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB và đường tròn tâm I .

Khi đó $\min P = AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 48. Cho số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z^2 + 1| = |(z + i)(z + 2)|$. Khi z có mô-đun nhỏ nhất hãy tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + 2y$.

(A) $P = \frac{6}{25}$.

(B) $P = -\frac{4}{25}$.

(C) $P = \frac{4}{25}$.

(D) $P = -\frac{6}{25}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |z^2 + 1| = |(z + i)(z + 2)| \Leftrightarrow |z + i||z - i| = |z + i||z + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ |z - i| = |z + 2|. \end{cases}$$

- Với $z = -i$ ta có $|z| = 1$.
- Với z thỏa $|z - i| = |z + 2|$ thì tập hợp z là đường trung trực d của đoạn thẳng AB với $A(0; 1), B(-2; 0)$. Khi đó z có mô-đun nhỏ nhất khi điểm biểu diễn của z là hình chiếu vuông góc của O lên d .

Ta có phương trình $d: 2x + y + \frac{3}{2} = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d , phương trình $OH: x - 2y = 0$. Suy ra $H\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{10}\right)$.

Từ hai trường hợp trên ta có mô-đun z nhỏ nhất khi $z = -\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$.

Suy ra $x = -\frac{3}{5}, y = -\frac{3}{10} \Rightarrow P = -\frac{6}{25}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 49. Với các số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$, hãy tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

(A) $\max |z| = 3$.

(B) $\max |z| = 4$.

(C) $\max |z| = 7$.

(D) $\max |z| = 6$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi \Rightarrow$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

$$|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$$

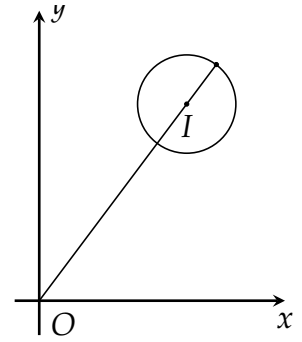
$$\Leftrightarrow |(1+i)(a+bi) + 1 - 7i| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b+1)^2 + (a+b-7)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 24 = 0$$

Do đó, $|z|_{\max} = OI + R = 5 + 1 = 6$.

Chọn đáp án **(D)**



□

Câu 50. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| = |z - i|$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

(A) $z = -1 + i$.

(B) $z = -1 - i$.

(C) $z = 1 - i$.

(D) $z = 1 + i$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z + 1 - 2i| = |z - i| \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

Vậy tập hợp số phức z thỏa điều kiện đề bài là đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$.

Gọi Δ là đường thẳng qua O và vuông góc với d . Phương trình đường thẳng $\Delta: x + y = 0$.

Gọi $H = \Delta \cap d$. Tọa độ H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Suy ra $H(-1; 1)$.

Độ dài OH là mô-đun nhỏ nhất của số phức z thỏa yêu cầu bài.

Vậy số phức thỏa yêu cầu bài là $z = -1 + i$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 51. Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$, $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$.

(A) $\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

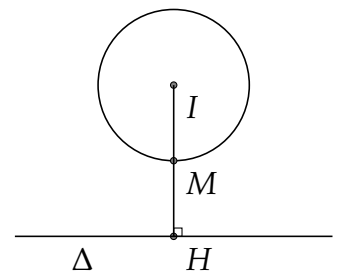
(C) $\frac{5}{2}$.

(D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

• Gọi M_1, M_2 lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Ta có M_1 thuộc đường tròn $(C): (x+5)^2 + y^2 = 5$ và M_2 thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y - 35 = 0$.

• $|z_1 - z_2| = M_1M_2$. Do đó $|z_1 - z_2|$ đạt GTNN $\Leftrightarrow M_1 \equiv M, M_2 \equiv H$. Ta có $|z_1 - z_2| = MH = d(I, \Delta) - R = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$.



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$. gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của z . Tính $M + m$.

(A) $M + m = 2$.

(B) $M + m = 8$.

(C) $M + m = 9$.

(D) $M + m = 34$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + iy$. Ta có

$$|z - 4| + |z + 4| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 10.$$

Nên điểm A là điểm thỏa mãn $AF_1 + AF_2 = 10$, với $F_1(4; 0)$ và $F_2(-4; 0)$. Do đó tập hợp các điểm A là e-líp (E) với tiêu cự $2c = 8$, độ dài trục lớn $2a = 10$, độ dài trục nhỏ $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 6$.

Khi đó $m = OA_{\min} = b = 3$ và $M = OA_{\max} = a = 5$. Vậy $M + m = 8$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 53. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |z + 2 - i| = 8$. Giá trị nhỏ nhất m của $|2z + 1 + 2i|$ là

- (A)** $m = 4$. **(B)** $m = 9$. **(C)** $m = 8$. **(D)** $m = \sqrt{39}$.

Hướng dẫn giải

Gọi A, B, M, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $1 - 3i, -2 + i, z$ và $-\frac{1}{2} - i$. Khi đó, $MA + MB = 8$ và ta cần tìm GTNN của $2MC$.

Để ý rằng C là trung điểm của AB nên $4MC^2 = 2(MA^2 + MB^2) - AB^2 \geq (MA + MB)^2 - AB^2 = 64 - 25 = 39$. Vậy, GTNN cần tìm là $\sqrt{39}$, đạt được khi $MA = MB = 4$, tức M là giao điểm của đường trung trực của AB và đường tròn tâm A , bán kính 4.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 54. Cho z là số phức thỏa $|z - 1 + i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2$.

- (A)** 18. **(B)** $38 + 8\sqrt{10}$. **(C)** $18 + 2\sqrt{10}$. **(D)** $16 + 2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, khi đó:

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| = 2 &\Leftrightarrow |(x - 1) + (y + 1)i| = 2 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Như vậy điểm M biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = 2$. Ta có:

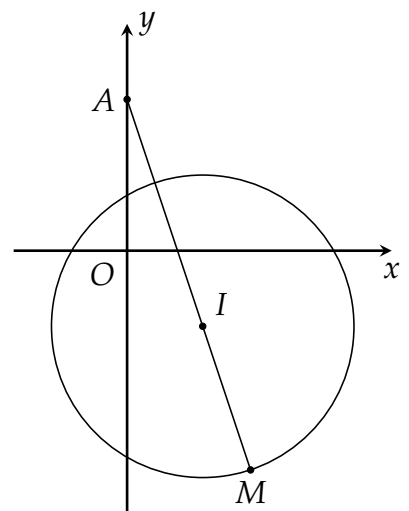
$$\begin{aligned} P &= (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \\ &= 2[x^2 + (y - 2)^2] + 10. \end{aligned}$$

Khi đó P lớn nhất $\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2$ lớn nhất, hay MA lớn nhất với $A(0; 2)$.

Nhận thấy MA lớn nhất khi M, I, A thẳng hàng và I nằm giữa M, A . Khi đó ta có $MA = AI + R = 2 + \sqrt{10}$ và

$$P = 2MA^2 + 10 = 38 + 8\sqrt{10}.$$

Chọn đáp án **(B)** □



Câu 55. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

(A) $\sqrt{313} + 16$.

(B) $\sqrt{313}$.

(C) $\sqrt{313} + 8$.

(D) $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2iz_1 = a + bi, -3z_2 = c + di$. Gọi $A(a; b), B(c; d)$ là các điểm lần lượt biểu diễn cho các số phức này. Khi đó

$$|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow (a + 6)^2 + (b + 10)^2 = 16$$

nên A thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-6; -10)$ và bán kính $R_1 = 4$.

$$|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow (c - 6)^2 + (d - 3)^2 = 144$$

nên B thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(6; 3)$ và bán kính $R_2 = 12$. Ta lại có

$$T = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = AB$$

nên T đạt giá trị lớn nhất khi $T = AB = R_1 + I_1I_2 + R_2 = 16 + \sqrt{313}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + 2i| = 1$ và $|z_2 - 2 + i| = |\bar{z}_2 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

(A) $P_{\min} = \sqrt{2} - 1$.

(B) $P_{\min} = \sqrt{2} + 1$.

(C) $P_{\min} = 0$.

(D) $P_{\min} = 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng phức. Từ giả thiết, ta suy ra M nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính bằng $R = 1$, N nằm trên đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ (là đường trung trực của đoạn thẳng mà các điểm đầu mút là điểm biểu diễn của các số phức $2 - i$ và i).

Dễ thấy d không cắt (C) nên $P_{\min} = d(I, d) - R = \sqrt{2} - 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho z là một số phức mà $(z + 1 - 2i)(\bar{z} + 3)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất P_0 của biểu thức $P = |z - 3 + 2i|$.

(A) $P_0 = 4\sqrt{2}$.

(B) $P_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(C) $P_0 = \sqrt{2}$.

(D) $P_0 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Biến đổi giả thiết ta được $x - y + 3 = 0$ (d). Gọi $A(3; -2)$ là điểm biểu diễn của số phức $3 - 2i$, M là điểm biểu diễn của z . Khi đó, M thuộc đường thẳng (d) và $P = AM$. Do đó, $P_0 = d(A, (d)) = 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 1 + 2i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là

(A) $z = 1 + \frac{3}{4}i$.

(B) $z = \frac{1}{2} + i$.

(C) $z = 3 + i$.

(D) $z = 5$.

Hướng dẫn giải

Vì $|\bar{z}| = |z|$ nên $|z| = |\bar{z} - 1 + 2i| \Leftrightarrow |\bar{z}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$.

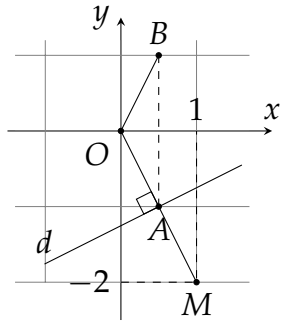
Gọi A, M lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức $\bar{z}$ và $1 - 2i$.

Từ đẳng thức trên suy ra khoảng cách từ điểm A đến O bằng khoảng cách từ điểm A đến M , suy ra A thuộc đường trung trực của OM .

Điểm thuộc đường trung trực của OM mà cách O ngắn nhất đó là trung điểm của OM , tương ứng là điểm biểu diễn của số phức $\bar{z} = \frac{1}{2} - i$.

Vậy số phức cần tìm là $z = \frac{1}{2} + i$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 59. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z - i|$ bằng

(A) 7.

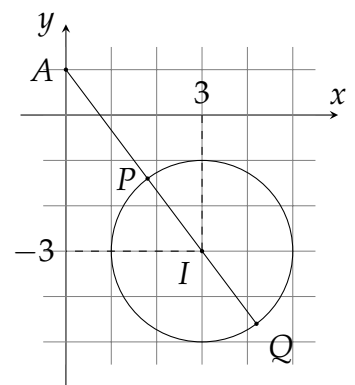
(B) 9.

(C) 6.

(D) 8.

Hướng dẫn giải

Ta có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 3i| = 2$ là đường tròn (C) tâm $I(3; -3)$, bán kính $R = 2$. Như vậy bài toán trở thành: “Tính khoảng cách lớn nhất từ điểm $A(0; 1)$ đến một điểm trên đường tròn (C) ”. Và đó chính là khoảng cách từ điểm A đến điểm Q như hình vẽ bên.



$$AQ = AI + IQ = \sqrt{3^2 + 4^2} + R = 5 + 2 = 7.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z - i|$ là 7.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 60. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 4.

(B) $2\sqrt{3}$.

(C) $3\sqrt{2}$.

(D) 3.

Hướng dẫn giải

Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i\sqrt{2})| = 1$.

Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn là $I(1; \sqrt{2})$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên I là trung điểm của AB . Ta có

$$|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{2(OA^2 + OB^2)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Đấu bằng xảy ra khi $OA = OB$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 61. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ và có mô-đun nhỏ nhất. Giá trị của $P = ab$ là

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$, ta có

$$\begin{aligned}
 |z| &= |\bar{z} - 3 + 4i| \\
 \Leftrightarrow |a + bi| &= |a - bi - 3 + 4i| \\
 \Leftrightarrow |a + bi| &= |(a - 3) - (b - 4)i| \\
 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 4)^2} \\
 \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= (a - 3)^2 + (b - 4)^2 \\
 \Leftrightarrow -6a + 9 - 8b + 16 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 6a + 8b - 25 &= 0.
 \end{aligned}$$

Tập hợp điểm của số phức z là đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$. Vậy mô-đun nhỏ nhất của số phức z là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên đường thẳng.

Xét đường thẳng qua O và vuông góc với đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$ có phương trình là $8x - 6y = 0$.

Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$. Ta có tọa độ H thỏa hệ $\begin{cases} 6x + 8y - 25 = 0 \\ 8x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Suy ra $H\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{3}{2} + 2i$. Vậy $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$ khi đó $P = 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 62. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$, số phức w thỏa mãn $|\bar{w} - 2 - 3i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$.

(A) $\sqrt{13} - 3$.

(B) $\sqrt{17} - 3$.

(C) $\sqrt{17} + 3$.

(D) $\sqrt{13} + 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$, Đặt $w = a + bi$. Khi đó

$$|z - 1 - i| = 1 \Leftrightarrow |x - 1 + (y - 1)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 1)$, $r = 1$.

$$|\bar{w} - 2 - 3i| = 2 \Leftrightarrow |a - 2 - (b + 3)i| = 2 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b + 3)^2 = 4.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; -3)$, bán kính $R = 2$.

$|z - w| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ đây là biểu thức xác định khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn cho số phức z và w .

Ta có $I_1I_2 = \sqrt{17} > R + r$ nên (C_1) nằm ngoài (C_2) .

Khi đó khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn là:

$$d = I_1I_2 - R - r = \sqrt{17} - 3.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 63. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị lớn nhất m của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

- (A) $m = 2\sqrt{2} + 2$. (B) $m = \sqrt{2} + 1$. (C) $m = 2\sqrt{2}$. (D) $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |1 - i| \cdot |z_1| = \sqrt{2}|z_1|$. Do đó P lớn nhất khi và chỉ khi $|z_1|$ lớn nhất. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 . Ta có

$$|z_1 + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(-1; 1)$, bán kính $R = 2$.

z_1 lớn nhất khi OM lớn nhất $\Rightarrow M \in OI \cap (I, R)$.

Đường thẳng OI là $y = -x$. Do đó $OI \cap (I, R) = \{A(\sqrt{2} - 1; 1 - \sqrt{2}); B(-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1)\}$.

Mà $OA = 2 - \sqrt{2}$, $OB = 2 + \sqrt{2}$.

Nên $\max OM = OB = 2 + \sqrt{2}$ khi $M \equiv B \Leftrightarrow z_1 = -\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} + 1)i$. Vậy $\max P = m = 2 + 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 64. Cho hai số phức $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Gọi z là số phức thỏa mãn $|3z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$. Tính mô-đun của số phức $w = M + mi$.

- (A) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (D) 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ (C). Gọi K, A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z, z_1, z_2 . Khi đó $T = OK + KA + KB$.

Ta có A, B, O thuộc đường tròn (C) và tam giác ABO đều. Suy ra $m = 2OA = 2$. Đồng thức xảy ra khi K trùng với O, A, B

Gọi K thuộc cung AB , ta có $KA \cdot KB = OA \cdot BK + AB \cdot OK \Leftrightarrow KA = KB + OK$ suy ra $T_2 = KA = \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Vậy $|w| = \sqrt{\frac{16 \cdot 3}{9} + 4} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 65. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z - 3 - 2i| \leq 1 \\ |w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z - w|$.

- (A) $P_{\min} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2}$. (B) $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$. (C) $P_{\min} = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}$. (D) $P_{\min} = \sqrt{2} + 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ và $w = a + bi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |z - 3 - 2i| \leq 1 \\ |w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + yi - 3 - 2i| \leq 1 \\ |a + bi + 1 + 2i| \leq |a + bi - 2 - i| \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \leq 1 \\ \sqrt{(a+1)^2 + (b+2)^2} \leq \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1 \\ a + b \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy điểm biểu diễn hai số phức z và w trên mặt phẳng tọa độ Oxy tương ứng là điểm thuộc hình tròn $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ và nửa mặt phẳng được giới hạn bởi phương trình $x + y = 0$. Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z - w| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, nghĩa là tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm biểu diễn của z và w .

$$\text{Khoảng cách đó là } d_{(I;d)} - R = \frac{|3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} - 1 = \frac{5\sqrt{2}-2}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 66. Cho hai số phức z_1, z_2 có điểm biểu diễn lần lượt là M_1, M_2 cùng thuộc đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 1$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

(A) $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **(B)** $P = \sqrt{2}$. **(C)** $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **(D)** $P = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có M_1, M_2 thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 1$.

$$|z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow M_1M_2 = 1 \Leftrightarrow \triangle OM_1M_2 \text{ là tam giác đều cạnh bằng } 1.$$

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm } M_1M_2 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } P = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}| = |2\overrightarrow{OH}| = 2OH = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$.

(A) 8. **(B)** 20. **(C)** $2\sqrt{5}$. **(D)** $4\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| \\ & \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 2y^2 = x^2 + (y+3)^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20. \end{aligned}$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20$ với bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

$$P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i| = |z+i| + 2|z-4-7i| = MA + 2MB \text{ với } A(0;-1), B(4;7) \text{ lần lượt biểu}$$

diễn số phức $z_1 = -i, z_2 = 4 + 7i$.

Ta có $A(0; -1), B(4; 7) \in (C)$ và $AB = 4\sqrt{5} = 2R$ nên AB là đường kính đường tròn (C) .

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 80.$$

$$\text{Mặt khác: } P = MA + 2MB \leq \sqrt{5(MA^2 + MB^2)} = 20.$$

Dấu bằng xảy ra khi $MB = 2MA$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 20.

Chọn đáp án **B**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. C	5. A	6. B	7. A	8. D	9. D	10. C
11. B	12. A	13. B	14. C	15. A	16. A	17. A	18. D	19. B	20. B
21. B	22. B	23. C	24. C	25. A	26. B	27. A	28. C	29. B	30. D
31. D	32. A	33. A	34. A	35. A	36. A	37. A	38. A	39. D	40. C
41. B	42. B	43. A	44. B	45. D	46. D	47. C	48. D	49. D	50. A
51. C	52. B	53. D	54. B	55. A	56. A	57. A	58. B	59. A	60. A
61. D	62. B	63. A	64. A	65. C	66. D	67. B			

CỰC TRỊ SỐ PHỨC ĐẠI SỐ

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 2| + 2|z - 2|$

- (A) $\max T = 5\sqrt{2}$. (B) $\max T = 2\sqrt{10}$. (C) $\max T = 3\sqrt{5}$. (D) $\max T = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó, do $|z| = 1$ nên $a^2 + b^2 = 1$.

Ta có: $T = \sqrt{(a+2)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a-2)^2 + b^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left[\sqrt{(a+2)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a-2)^2 + b^2} \right]^2 \leq (1^2 + 2^2) \left[(a+2)^2 + b^2 + (a-2)^2 + b^2 \right] = 5 \left[2(a^2 + b^2) + 8 \right] = 50$$

Vậy $\max T = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Gọi a là phần thực của số phức z thỏa mãn $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực và $|z|$ là nhỏ nhất. Tìm a .

- (A) $a = \frac{8}{5}$. (B) $a = \frac{2}{5}$. (C) $a = \frac{3}{5}$. (D) $a = \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có:

$$(z - 1)(\bar{z} + 2i) = [(a - 1) + bi][a - (b - 2)i] = a(a - 1) + b(b - 2) + [ab - (a - 1)(b - 2)]i.$$

$$(z - 1)(\bar{z} + 2i) \text{ là số thực } \Leftrightarrow ab - (a - 1)(b - 2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - 2a.$$

$$\text{Khi đó } z = a + (2 - 2a)i. \text{ Suy ra } |z| = \sqrt{a^2 + (2 - 2a)^2} = \sqrt{5a^2 - 8a + 4} = \sqrt{5\left(a - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Từ đây, ta được $\min |z| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ khi $a = \frac{4}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phần thực số phức $w = z^3 + \frac{1}{z^3}$, trong đó z là số phức có $|z| = 1$. Tính $P = M^2 + m^2$.

- (A) $P = 8$. (B) $P = 5$. (C) $P = 29$. (D) $P = 10$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } z = a + bi \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2a \quad w = z^3 + \frac{1}{z^3} \Leftrightarrow w = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = 8a^3 - 6a.$$

$$\text{Do } a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1.$$

Xét hàm số $f(a) = 8a^3 - 6a$ với $a \in [-1; 1]$ có $\max f(a) = 2$ và $\min f(a) = -2$.

$$\text{Vậy } P = M^2 + m^2 = 8$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - i| = 2\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $H = |z + 3 - 2i| + |z - 3 + 4i|$. Tính $M + m$.

- (A) $2\sqrt{26} + 6\sqrt{2}$. (B) $16\sqrt{2}$. (C) $11\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{26} + 8\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $H = |z + 3 - 2i| + |-z + 3 - 4i| \geq |z + 3 - 2i - z + 3 - 4i| = |6 - 6i| = 6\sqrt{2}$.

Đặt $w = z - 2 - i \Rightarrow |w| = 2\sqrt{2}$.

Đặt $w = a + bi$ ta có $a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 16 \Rightarrow a + b \leq 4$.

Ta có $H = |w + 5 - i| + |w - 1 + 5i| = \sqrt{(a + 5)^2 + (b - 1)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 5)^2}$.

$$\Rightarrow H^2 \leq (1 + 1)[(a + 5)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)^2 + (b + 5)^2]$$

$$\Rightarrow H \leq 2(2a^2 + 2b^2 + 8(a + b) + 52) \leq 2(2 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 52) = 200.$$

Do đó $H \leq 10\sqrt{2}$. Vậy $M + m = 16\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Mô-đun của số phức $z - 2 - i$ bằng

(A) $\sqrt{5}$.

(B) 9.

(C) 25.

(D) 5.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (\forall x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$ (1).

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= |z + 2|^2 - |z - i|^2 \\ &= (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2 = 4x + 2y + 3 \\ &= 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23 \\ &\leq \sqrt{20} \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} + 23 = 33. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $\frac{x - 3}{y - 4} = \frac{4}{2}$ kết hợp với (1) suy ra $\begin{cases} x = y = 5 \Rightarrow z = 5 + 5i \\ x = 1, y = 3 \Rightarrow z = 1 + 3i. \end{cases}$

Thử lại ta có $M_{\max} = 33 \Leftrightarrow z = 5 + 5i \Rightarrow |z - 2 - i| = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Mô-đun của số phức z bằng

(A) 10.

(B) $5\sqrt{2}$.

(C) 13.

(D) $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trên Oxy , ta có

$$|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

$$\text{Và } P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2 = 4x + 2y + 3.$$

$$\Rightarrow P = 4x + 2y + 3 = [4(x - 3) + 2(y - 4)] + 23 \leq \sqrt{4^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} + 23 = 33.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \frac{y - 4}{2} = t \\ 4(x - 3) + 2(y - 4) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ t = 0,5. \end{cases}$$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất khi $z = 5 + 5i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Giá trị của $M \cdot m$ bằng

- Ⓐ $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. Ⓑ $\frac{13\sqrt{3}}{8}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = |z + 1| \leq |z| + 1 = 2$ nên $t \in [0; 2]$. Vì $|z| = 1$ nên $z \cdot \bar{z} = 1$, suy ra

$$P = |z + 1| + |z^2 - z + z \cdot \bar{z}| = |z + 1| + |z + \bar{z} - 1|.$$

Ta lại có

$$t^2 = |z + 1|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1) = 2 + (z + \bar{z})$$

nên $z + \bar{z} = t^2 - 2$. Vậy $P = f(t) = t + |t^2 - 3|$, với $t \in [0; 2]$. Ta viết lại hàm số $f(t)$ như sau:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + t - 3 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t \leq 2 \\ -t^2 + t + 3 & \text{khi } 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có

$$f'(t) = \begin{cases} 2t + 1 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t < 2 \\ -2t + 1 & \text{khi } 0 < t < \sqrt{3} \end{cases}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Khi đó, $f(0) = 3$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$; $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; $f(2) = 3$.

Vậy $M = \frac{13}{4}$; $m = \sqrt{3}$ nên $M \cdot m = \frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 8. Xét các số phức $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + mi$, ($m \in \mathbb{R}$). Giá trị nhỏ nhất của mô-đun số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng

- Ⓐ $\frac{2}{5}$. Ⓑ $\frac{1}{5}$. Ⓒ $\frac{3}{5}$. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{4 + m^2}}{5} \geq \frac{2}{5}$, $\forall m \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $m = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của mô-đun số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng $\frac{2}{5}$.

Chọn đáp án Ⓐ

□

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S = M + m$.

- Ⓐ $S = 9$. Ⓑ $S = 8$. Ⓒ $S = 2\sqrt{21}$. Ⓓ $S = -2\sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, khi đó $\bar{z} = a - bi$

Xét $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 10 \Leftrightarrow |z + 2 - i| + |\bar{z} - 2 + i| = 10$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M(z)$, $N(\bar{z})$, $A(-2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(2; 1)$, khi đó $MC = NB$.

Khi đó ta được $MA + MC = 10$, quỹ tích điểm M là Elip với $\begin{cases} AC = 4 \\ 2a = 10 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{21} = 1$.

(phương trình Elip với hệ trục tọa độ IXY với $I(0;1)$ là trung điểm của đoạn AC)

Áp dụng công thức đổi trục tọa độ $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$ ta được $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$.

Đặt $\begin{cases} a = 5 \sin t \\ b = 1 + \sqrt{21} \cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 2\pi]$, ta được $|z|^2 = OM^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow |z|^2 = 25 \sin^2 t + (1 + \sqrt{21} \cos t)^2 = -4 \cos^2 t + 2\sqrt{21} \cos t + 26 = f(t).$$

Xét hàm số $f(t) = -4 \cos^2 t + 2\sqrt{21} \cos t + 26$, đặt $\cos t = a \in [-1; 1]$,

Ta được hàm $f(a) = -4a^2 + 2\sqrt{21}a + 26$, $f'(a) = -8a + 2\sqrt{21} > 0 \Leftrightarrow a < \frac{2\sqrt{21}}{8}$

$\Rightarrow f(a)$ đồng biến trên $[-1; 1] \Rightarrow \begin{cases} \max f(a) = 1 + \sqrt{21} & \text{khi } a = \cos t = 1 \\ \min f(a) = -1 + \sqrt{21} & \text{khi } a = \cos t = -1 \end{cases}$.

Vậy $M + m = 2\sqrt{21}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 10. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính $P = -a + 4b$ khi $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $P = 7$.

(B) $P = 6$.

(C) $P = 5$.

(D) $P = 4$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned} 4(z - \bar{z}) - 15i &= i(z + \bar{z} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow 4(2bi) - 15i &= i(2a - 1)^2 \\ \Leftrightarrow 8b - 15 &= (2a - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 &= 2b - \frac{15}{4}. \quad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $2b - \frac{15}{4} \geq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{15}{8}$.

Ta có

$$\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b + 3)^2 = b^2 + 8b + \frac{21}{4}.$$

Xét hàm số $f(b) = b^2 + 8b + \frac{21}{4}$ trên $\left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$ ta có bảng biến thiên

b	$\frac{15}{8}$	$+\infty$
$f'(b)$	+	
$f(b)$	$f\left(\frac{15}{8}\right)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = \frac{15}{8}$, khi đó $a = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } P = -a + 4b = -\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{15}{8} = 7.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho số phức $z = \cos 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)i$ với $\alpha \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\cos^2 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha + 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \sqrt{2 - \sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} - \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô-đun nhỏ nhất là

- (A) $-\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$. (B) $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$. (C) $-\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$. (D) $\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| &= |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = |x - yi + 1 - 2i| \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \\ &\Leftrightarrow -2x + 1 + 2y + 1 = 2x + 1 + 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y = -3 \Rightarrow (4x + 2y)^2 = 9 \\ &\Rightarrow 9 \leq (4^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \Rightarrow |z| \geq \frac{3}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 2x + y = -3 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{3}{10} \end{cases}. \text{ Vậy } z = -\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

- (A) $P_{\max} = 2\sqrt{26}$. (B) $P_{\max} = 104$. (C) $P_{\max} = 32 + 3\sqrt{2}$. (D) $P_{\max} = 4\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \geq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Suy ra $P = |z_1| + |z_2| \leq 2\sqrt{26}$, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ z_1 + z_2 = 8 + 6i \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{17}{5} + \frac{19}{5}i \\ z_2 = 8 + 6i - z_1 \end{cases}$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{26}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1| = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} + 3 \right|$, gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức có mô-đun nhỏ nhất. Tính $S = 2a + b$.

(A) 0.

(B) -4.

(C) 2.

(D) -2.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z + 1| = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} + 3 \right| \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a+3)^2} \Leftrightarrow b^2 = 4a + 8$.

Lại có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 8}$ nhỏ nhất khi $a = -2 \Rightarrow b = 0$.

Vậy $S = 2a + b = -4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i|$ bằng

(A) $4 + 2\sqrt{3}$.

(B) $2 + \sqrt{3}$.

(C) $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$.

(D) $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. Suy ra $x, y \in [-2; 2]$.

Khi đó

$$P = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 2|y-2| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}\right) + 2|y-2|.$$

Bằng phép biến đổi tương đương với chú ý $|x| \geq x$, ta có: Với mọi số thực a, b, c, d ,

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2};$$

dấu “=” xảy ra khi $ad = bc \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức này với $a = x + 1, c = 1 - x, b = d = y$ và tính chất của giá trị tuyệt đối ta có

$$P \geq 2\sqrt{(x+1+1-x)^2 + (y+y)^2} + 2(2-y) = 4\sqrt{1+y^2} - 2y + 4.$$

Xét hàm số $f(y) = 4\sqrt{1+y^2} - 2y + 4$ liên tục trên $[-2; 2]$. Ta có $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in [-2; 2]$.

Ta có $f(2) = 4\sqrt{5}, f(-2) = 4\sqrt{5} + 8, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4 + 2\sqrt{3}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4 + \frac{10}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\min_{[-2; 2]} f(y) = 4 + 2\sqrt{3} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\text{Khi đó } P \geq f(y) \geq 4 + 2\sqrt{3}, \quad \forall y \in [-2; 2]. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)y = y(1-x) \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } 4 + 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 16. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 1 - 4i|$. Tìm phần thực của số phức có mô-đun nhỏ nhất.

(A) -1 .

(B) -2 .

(C) 4 .

(D) 3 .

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, khi đó ta có $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 1 - 4i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+4)^2} \Leftrightarrow x = -2 - y.$$

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2+y)^2 + y^2} = \sqrt{2y^2 + 4y + 4} = \sqrt{2(y+1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = -1 \Rightarrow x = -1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

(A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(C) $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

(D) $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$. Khi đó, các điểm M, M', N, N' lần lượt có tọa độ $M(a, b), M'(a, -b), N(4a - 3b, 3a + 4b), N'(4a - 3b, -3a - 4b)$. Vì M, M', N, N' lần lượt là 4 đỉnh của một hình chữ nhật nên có 2 trường hợp xảy ra.

- Trường hợp 1: Tứ giác $MM'N'N$ là hình chữ nhật.
- Trường hợp 2: Tứ giác $MM'NN'$ là hình chữ nhật.

Ta có $P = |z + 4i - 5| = |z - (5 - 4i)|$. Đặt $K(5; -4)$. Khi đó $P = |MK|$.

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình chữ nhật.

Vì M đối xứng với M' qua trục Ox , N đối xứng với N' qua trục Ox nên I thuộc trục Ox hay điểm I có tung độ bằng 0.

Trường hợp 1: Tứ giác $MM'N'N$ là hình chữ nhật.

Tung độ của điểm I bằng 0 nên $-3a - 3b = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$.

Do đó điểm M thuộc đường thẳng $d_1: x + y = 0$.

Đoạn MK ngắn nhất có độ dài bằng khoảng cách từ điểm K đến đường thẳng d_1 và bằng

$$\frac{|5 \cdot 1 - 4 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

. Trường hợp 2: Tứ giác $MM'NN'$ là hình chữ nhật.

Tương tự trường hợp 1, ta được điểm M thuộc đường thẳng $d_2: 3x + 5y = 0$. Đoạn thẳng MK ngắn nhất có độ dài là $\frac{|3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$.
 Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$, với z là số phức khác 0

và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

- (A) $\frac{M}{m} = 5$. (B) $\frac{M}{m} = 3$. (C) $\frac{M}{m} = \frac{3}{4}$. (D) $\frac{M}{m} = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$, ta có

$$\bullet P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \frac{|z+i|}{|z|} \leq \frac{|z|+|i|}{|z|} = 1 + \frac{1}{|z|} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rõ ràng khi $z = 2i$ thì $P = \frac{3}{2}$. Do đó $M = \frac{3}{2}$.

$$\bullet P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \frac{|z+i|}{|z|} \geq \frac{||z|-|i||}{|z|} = 1 - \frac{1}{|z|} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Rõ ràng khi $z = -2i$ thì $P = \frac{1}{2}$. Do đó $m = \frac{1}{2}$.

Như vậy: $\frac{M}{m} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Trong các số phức z có phần ảo dương thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó mô-đun của số phức $w = z_1 + z_2$ là

- (A) $|w| = 2\sqrt{2}$. (B) $|w| = 2$. (C) $|w| = \sqrt{2}$. (D) $|w| = 1 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} |z^2 + 1| = 2|z| &\Leftrightarrow |z^2 + 1|^2 = 4|z|^2 \\ &\Leftrightarrow 4|z|^2 = (z^2 + 1)(\overline{z^2 + 1}) \\ &\Leftrightarrow (z^2 + 1)(\overline{z^2 + 1}) = 4z \cdot \bar{z} \\ &\Leftrightarrow (z \cdot \bar{z})^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 - 4z \cdot \bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + \bar{z})^2 + (z \cdot \bar{z})^2 - 6(z \cdot \bar{z}) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z + \bar{z})^2 + |z|^4 - 6|z|^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^4 - 6|z|^2 + 1 = -(z + \bar{z})^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq |z|^2 \leq 3 + 2\sqrt{2} \\ &\Rightarrow \sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Do đó $\begin{cases} |z_1| = \sqrt{2} - 1 \\ |z_2| = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$. Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} |z_1| = \sqrt{2} - 1 \\ |z_2| = \sqrt{2} + 1 \\ z + \bar{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z_1 = (\sqrt{2} - 1)i \\ z_1 = (1 - \sqrt{2})i \text{ (loại)} \end{cases} \\ \begin{cases} z_2 = (\sqrt{2} + 1)i \\ z_2 = -(1 + \sqrt{2})i \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow |w| = |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 20. Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$, giả sử số phức có mô-đun nhỏ nhất có dạng $z = a + bi$. Khi đó $S = \frac{a}{b}$ bằng bao nhiêu?

A $\frac{2}{3}$.

B $\frac{1}{3}$.

C $\frac{1}{4}$.

D $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Khi đó

$$\begin{aligned} |z + 1 - 5i| &= |\bar{z} + 3 - i| \\ \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b - 5)^2 &= (a + 3)^2 + (b + 1)^2 \\ \Leftrightarrow a + 3b - 4 &= 0 \Leftrightarrow a = 4 - 3b. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(4 - 3b)^2 + b^2} = \sqrt{10b^2 - 24b + 16} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{10}b - \frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{16}{10}} \geq \frac{4}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = \frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{5}$. Suy ra $\min |z| = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

Vậy $S = \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z + 2| + |(1 + i)z - 2| = 4\sqrt{2}$. Gọi $m = \max |z|$, $n = \min |z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$.

A 4^{1009} .

B 5^{1009} .

C 6^{1009} .

D 2^{1009} .

Hướng dẫn giải

- Chia cả hai vế đẳng thức trong giả thiết cho $|1 + i|$, ta được

$$\begin{aligned} 4 &= |z - 1 + i| + |z + 1 - i| \\ &\geq |z - 1 + i + z + 1 - i| \end{aligned}$$

$$= 2|z|,$$

hay $|z| \leq 2$, đẳng thức xảy ra khi $z = \sqrt{2}(1 - i)$. Do đó $m = 2$.

- Giả sử $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\begin{aligned} 16 &= [|z + 1 - i| + |z - 1 + i|]^2 \\ &= \left[\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \right]^2 \\ &\leq 2 \left[(x-1)^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 \right] \\ &= 2(2x^2 + 2y^2 + 4), \end{aligned}$$

suy ra $x^2 + y^2 \geq 2$, hay $|z| \geq \sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $z = 1 + i$. Do đó $n = \sqrt{2}$.

Vậy $w = 2\sqrt{2}i$, suy ra $|w| = 6^{1009}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 22. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có mô-đun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z - 4 - 2i| = |z - 2|$. Tính $P = x^2 + y^2$.

(A) 32.

(B) 16.

(C) 8.

(D) 10.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z - 4 - 2i| = |(x - 4) + (y - 2)i| = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}$.

Tương tự $|z - 2| = |(x - 2) + yi| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$.

Do giả thiết ta có

$$\begin{aligned} |z - 4 - 2i| &= |z - 2| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x. \end{aligned}$$

Khi đó $P = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8$.

Vì $(x - 2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $P \geq 8$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 2$ suy ra $y = 2$. Vậy $\min P = 8$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Mô-đun của số phức $w = M + mi$ là

(A) $|w| = 3\sqrt{137}$.

(B) $|w| = \sqrt{1258}$.

(C) $|w| = 2\sqrt{309}$.

(D) $|w| = 2\sqrt{314}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
P &= |a + 2 + bi|^2 - |a + (b - 1)i|^2 \\
&= (a + 2)^2 + b^2 - a^2 - (b - 1)^2 \\
&= a^2 + 4a + 4 + b^2 - a^2 - b^2 + 2b - 1 \\
&= 4a + 2b + 3.
\end{aligned}$$

Vậy $P = 4a + 2b + 3$.

$$\text{Ta có } |a - 3 + i(b - 4)| = \sqrt{5} \Rightarrow |a - 3 + i(b - 4)|^2 = 5 \Rightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 5.$$

$$\text{Do đó ta có thể đặt } \begin{cases} a = 3 + \sqrt{5} \sin t \\ b = 4 + \sqrt{5} \cos t \end{cases}, \text{ với } t \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow P = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t + 23.$$

$$\text{Xét } f(t) = 4\sqrt{5} \sin t + 2\sqrt{5} \cos t.$$

$$\text{Chia hai vế của } f(t) \text{ cho } \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 10.$$

$$\Rightarrow \frac{f(t)}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin t + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos t.$$

$$\text{Vì } \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \text{ nên ta có thể đặt } \begin{cases} \cos u = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin u = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ với } u \in [0; \pi].$$

$$\text{Khi đó } \frac{f(t)}{10} = \cos u \sin t + \sin u \cos t = \sin(t + u).$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin(u + t) \leq 1 \text{ nên } -1 \leq \frac{f(t)}{10} \leq 1 \Rightarrow -10 \leq f(t) \leq 10 \Rightarrow 13 \leq f(t) + 23 \leq 33$$

hay $13 \leq P \leq 33$.

$$\text{Suy ra } M = 33; m = 13 \Rightarrow w = 33 + 13i.$$

$$\text{Khi đó } |w| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1 \right| = 2$. Giá trị lớn nhất của mô-đun số phức z là

(A) $\sqrt{3}$. **(B)** 3. **(C)** 2. **(D)** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1 \right| = 2 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 2 \Leftrightarrow |i| \cdot |-iz + 1| = 2 \Leftrightarrow |z + i| = 2.$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức về mô-đun ta có } 2 = |z + i| = |z - (-i)| \geq |z| - |-i|.$$

$$\text{Suy ra } |z| \leq 3.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - |z^4 + 1|$. Tính $M - m$

(A) $M - m = 1$. **(B)** $M - m = 3$. **(C)** $M - m = 6$. **(D)** $M - m = 12$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |z| = 1 \Leftrightarrow |z^2| = 1 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 \in \mathbb{R} \text{ và } -2 \leq z^2 + \bar{z}^2 \leq 2.$$

Ta có $P =$

$$\begin{aligned}
 &= \left| z^5 + \bar{z}^3 + 6z \right| - \left| z^4 + 1 \right| \\
 &= \left| z \left(z^4 + \frac{\bar{z}^3}{z} + 6 \right) \right| - \left| z^2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right| \\
 &= \left| z^4 + \bar{z}^4 + 6 \right| - \left| z^2 + \bar{z}^2 \right| \\
 &= \left| (z^2 + \bar{z}^2)^2 + 4 \right| - \left| z^2 + \bar{z}^2 \right| \\
 &= (z^2 + \bar{z}^2)^2 + 4 - 2|z^2 + \bar{z}^2| \\
 &= \left(|z^2 + \bar{z}^2| - 1 \right)^2 + 3.
 \end{aligned}$$

Khi đó $m = 3; M = 4$. Vậy $M - m = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 26. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

- (A)** $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. **(B)** $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. **(C)** $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. **(D)** $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1}{2} = |iz_1 + \sqrt{2}| \geq \left| |iz_1| - \sqrt{2} \right| = \left| |z_1| - \sqrt{2} \right|$.

Suy ra $|z_1| - \sqrt{2} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow |z_1| \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Do đó $|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |(1 - i)z_1| = \sqrt{2}|z_1| \geq \sqrt{2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $z_1 = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 27. Xét các số phức z thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$. Tìm phần thực của số phức z sao cho $|z|$ nhỏ nhất.

- (A)** $\frac{1}{5}$. **(B)** $-\frac{2}{5}$. **(C)** $-\frac{1}{5}$. **(D)** $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 |iz - 3| = |z - 2 - i| &\Leftrightarrow |xi - y - 3| = |(x - 2) + (y - 1)i| \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow x + 2y = -1 \Leftrightarrow x = -2y - 1.
 \end{aligned}$$

Khi đó, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1 - 2y)^2 + y^2} = \sqrt{5 \left(y + \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

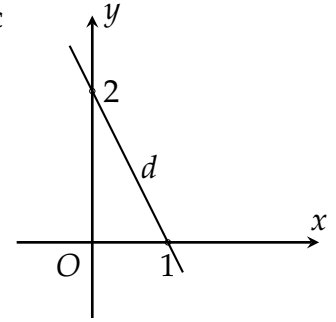
Suy ra, $|z|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ khi $y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 28.

Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng d trong hình vẽ bên là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z . Khi đó $|z|$ có giá trị nhỏ nhất bằng

- (A) $\frac{5}{5}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

Mô-đun của số phức z là độ dài đoạn thẳng OM với M là điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên d , M chính là điểm biểu diễn của số phức $|z|$ có mô-đun nhỏ nhất. Gọi $A(1;0)$, $B(0;2)$, xét tam giác vuông OAB có các cạnh $OA = 1$, $OB = 2$, ta có $OM = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 3 + 2i| + |z - 3 - 6i| = 10$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 8 - 2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $P = \frac{118}{25}$. (B) $P = 9$. (C) $P = -5$. (D) $P = -\frac{118}{25}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(-3; -2)$, $B(3; 6)$ và điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Ta có $|z + 3 + 2i| + |z - 3 - 6i| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10 = AB$.

Suy ra $M(a; b)$ thuộc đoạn thẳng AB . Phương trình đường thẳng $AB : y = \frac{4}{3}x + 2$.

Vì $M(a; b)$ thuộc đường thẳng AB nên $b = \frac{4}{3}a + 2, a \in [-3; 3]$.

$$|z + 8 - 2i| = \sqrt{(a+8)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{(a+8)^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}a^2 + 16a + 64}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}\left(a + \frac{72}{25}\right)^2 + \frac{1024}{25}} \geq \frac{32}{5}, \forall a \in [-3; 3].$$

Vậy $|z + 8 - 2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{32}{5}$ khi $a = -\frac{72}{25}$ và $b = -\frac{46}{25} \Rightarrow a + b = -\frac{118}{25}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{|z - 3 + 4i| + 1}{3|z - 3 + 4i| - 3} = \frac{1}{2}$ và mô-đun $|z|$ lớn nhất.

Tính tổng $S = a + b$.

- (A) $S = 2$. (B) $S = -1$. (C) $S = -2$. (D) $S = 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = |z - 3 + 4i|$, ta được phương trình $\frac{t + 11}{3t - 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t + 2 = 3t - 3 \Rightarrow t = 5$.

$$|z - 3 + 4i| = 5 \Leftrightarrow |a + bi - 3 + 4i| = 5 \Leftrightarrow |(a - 3) + (b + 4)i| = 5 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a + 8b = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 6a - 8b.$$

Ta có $(6a - 8b)^2 \leq 100(a^2 + b^2)$, suy ra $|z|^4 \leq 100|z|^2 \Leftrightarrow |z|^4 - 100|z|^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq |z|^2 \leq 100 \Leftrightarrow$

$$0 \leq |z| \leq 10. \text{ Giá trị lớn nhất của } |z| \text{ bằng } 10 \text{ khi } \begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ a^2 + b^2 = 6a - 8b \\ \frac{a}{6} = -\frac{b}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - 8b = 100 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -8 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = -2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 31. Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b > 0$) thỏa mãn $|z| = 1$. Tính $P = 2a + 4b^2$ khi $|z^3 - z + 2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $P = 4$.

(B) $P = 2 - \sqrt{2}$.

(C) $P = 2$.

(D) $P = 2 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$z = a + bi, |z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 - a^2.$$

Để ý $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ và $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ nên

$$|z^3 - z + 2| = \left| z \left(z^2 - 1 + \frac{2}{z} \right) \right| = |z| \cdot \left| z^2 - 1 + \frac{2\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \right| = |z^2 - 1 + 2\bar{z}| = |(a + bi)^2 - 1 - 2a - 2bi| = |(a^2 - b^2 - 1) + 2b(a - 1)i| = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4b^2(a - 1)^2}.$$

$$\text{Thay } f(a) = (a^2 + a - 1)^2 + (1 - a^2)(a - 1)^2 = 4a^3 - a^2 - 4a + 2 \text{ trên } [-1; 1].$$

$$f'(a) = 12a^2 - 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \text{ hoặc } a = -\frac{1}{2}.$$

$$f(-1) = 1, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}, f(1) = 1.$$

$$\text{Suy ra } \max |z^3 - z + 2| = 13 \text{ khi } a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 2a + 4b^2 = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 32. Xét các số phức $z = a + bi$ thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $4 + \sqrt{3}$.

(B) $2 + \sqrt{3}$.

(C) $4 - \sqrt{3}$.

(D) 3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } z - 3 - 2i = a + bi - 3 - 2i = t = x + yi \Rightarrow |t| = 2 \text{ và } x^2 + y^2 = 4.$$

$$\text{Ta có } |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = |t + 4| + 2|t + 1 - 3i| = \sqrt{x^2 + 8x + 16 + y^2} + 2|t + 1 - 3i|$$

$$= 2\sqrt{\frac{4 + 16 + 8x}{4}} + 2|t + 1 - 3i| = 2\sqrt{5 + 2x} + 2|t + 1 - 3i|$$

$$= 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x + 1)^2 + (3 - y)^2} \geq 2(|y| + |3 - y|) \geq 6.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y(3 - y) \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = -1 \\ b - 2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 33. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

(A) $\sqrt{10} + 1$.

(B) $3\sqrt{5} - 1$.

(C) $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.

(D) $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1 = x + yi$ khi đó ta có $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ tương đương với

$$4(x^2 + (1 - y)^2) = (2y + 2)^2$$

$$4x^2 + 4 - 8y + 4y^2 = 4y^2 + 8y + 4$$

$$x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4} (P).$$

Gọi $z_2 = a + bi$ khi đó ta có $(a - 10)^2 + (b - 1)^2 = 1$, từ đó suy ra z_2 nằm trên đường tròn

$$(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 1 (C).$$

Nhận thấy đường tròn (C) có tâm $I(10;1)$ và bán kính $R = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| + 1 \geq |z_1 - z_0| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_1 - z_0| - 1$ (I là điểm biểu diễn của z_0).

Xét hàm số $f(x) = |z_1 - z_0|^2 = (x - 10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 = \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} - 20x + 101$,

có $f'(x) = \frac{x^3}{4} + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 4) \left(\frac{x^2}{4} + x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 4$, suy ra $f(x) \geq f(4) = 45, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy ta có $|z_1 - z_2| \geq |z_1 - z_0| - 1 \geq \sqrt{45} - 1 = 3\sqrt{5} - 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = 4 + 4i$ và z_2 là giao điểm giữa IM và đường tròn (C) (M là điểm biểu diễn của z_1).

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 1| = |z + 3 - 2i|$ và $w = z + m + i$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số.

Giá trị của m để ta luôn có $|w| \geq 2\sqrt{5}$ là

- (A)** $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{cases}$
(B) $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}$
(C) $-3 \leq m < 7$
(D) $3 \leq m \leq 7$.

Hướng dẫn giải

Ta có $z = w - m - i$ nên $|w - m - 1 - i| = |w - m + 3 - 3i|$

Gọi $w = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|(a - m - 1) + (b - 1)i| = |(a - m + 3) + (b - 3)i| \Leftrightarrow (a - m - 1)^2 + (b - 1)^2 = (a - m + 3)^2 + (b - 3)^2$$

Suy ra $b = 2a - 2m + 4$. Ta lại có

$$|w|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (2a - 2m + 4)^2 = 5a^2 + 8(2 - m)a + 4m^2 - 16m + 16.$$

Để $|w| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5a^2 + 8(2 - m)a + 4m^2 - 16m - 4 \geq 0$ với mọi a .

$$\text{Tương đương với } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 16(2 - m)^2 - 5(4m^2 - 16m - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

- (A)** $m = \sqrt{2} - 1$.
(B) $m = 2\sqrt{2}$.
(C) $m = 2$.
(D) $m = 2\sqrt{2} - 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|z_1| + |1 - i| \geq |z_1 + 1 - i| = 2 \Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = k(1 - i), (k \in \mathbb{R}, k \geq 0) \\ |z_1 + 1 - i| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = (\sqrt{2} - 1)(1 - i)$.

Lại có $|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |z_1(1 - i)| = |z_1| \cdot |1 - i| = |z_1| \cdot \sqrt{2} \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Chọn đáp án **D**

□

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A | 2. D | 3. A | 4. B | 5. D | 6. B | 7. A | 8. A | 9. C | 10. A |
| 11. B | 12. C | 13. A | 14. B | 15. A | 16. A | 17. B | 18. B | 19. A | 20. B |
| 21. C | 22. C | 23. B | 24. B | 25. A | 26. B | 27. C | 28. B | 29. D | 30. C |
| 31. C | 32. A | 33. B | 34. B | 35. D | | | | | |