



Tác giả: **PHẠM THANH PHƯƠNG** (Đà Nẵng)

Biên tập: **Lê Bá Bảo** (Huế)

CHUYÊN ĐỀ: TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG

Chủ đề 2: TÍCH PHÂN

I. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số thực bất kì thuộc K . Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b) - F(a)$ gọi là tích phân của f từ a đến b , ký hiệu

$\int_a^b f(x)dx$. Nếu $a < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ gọi là tích phân của f trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được ký hiệu là $F(x) \Big|_a^b$, do đó nếu F là một nguyên hàm của f

trên K thì $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Vì $\int f(x)dx$ là một nguyên hàm bất kỳ của f nên ta có $\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_a^b$.

Ta gọi a là cận dưới, b là cận trên, x là biến lấy tích phân, f là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Tích phân chỉ phụ thuộc vào 2 cận tích phân và biểu thức dưới dấu tích phân, nó không phụ thuộc vào biến lấy tích phân, tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 1: $I = \int_1^3 \left(4x + \frac{1}{2x-1} \right) dx = \left(2x^2 + \frac{1}{2} \ln|2x-1| \right) \Big|_1^3 = \left(18 + \frac{1}{2} \ln 5 \right) - \left(2 + \frac{1}{2} \ln 1 \right) = 16 + \frac{1}{2} \ln 5$.

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ 2: } I &= \int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x} dx = \int_1^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int_1^3 \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - 6 + \ln 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \ln 1 \right) = \ln 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ 3: } I &= \int_1^2 \left(y^3 + 2y - \frac{2}{y} \right) dy = \left(\frac{y^4}{4} + y^2 - 2\ln|y| \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(4 + 4 - 2\ln 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 2\ln 1 \right) = \frac{27}{4} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{Ví dụ 4: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t - \sin 2t) dt = \left(2 \sin t + \frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(2 - \frac{1}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \right) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ 5: } I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (4 + \cot^2 s) ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (3 + 1 + \cot^2 s) ds = (3s - \cot s) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) - \left(\frac{3\pi}{2} - 0 \right) = \frac{-3\pi - 4}{4}. \end{aligned}$$

2. TÍNH CHẤT

Với 2 hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là 3 số thực bất kỳ thuộc K , ta có:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx, k \in \mathbb{R}.$

Dùng định nghĩa tích phân, ta chứng minh được 2 tính chất sau:

- Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0.$
- Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH, ĐƯA VỀ TÍCH PHÂN ĐƠN GIẢN

- Phương pháp này tính được các tích phân hàm đa thức, hàm có chứa dấu trị tuyệt đối, 1 số hàm lượng giác đơn giản.

- Để tính tích phân theo phương pháp này, cần phải nắm định nghĩa tích phân, các tính chất tích phân và thuộc bảng nguyên hàm để có thể biến đổi hàm dưới dấu tích phân về các hàm thường gặp. Từ đó, học sinh có thể linh hoạt đưa bài toán mới về những bài toán cơ bản.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$.

Gợi ý: Đặt $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$

$$\Leftrightarrow x = Ax + A + B, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}. \text{ Do đó } \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Ta tìm ra A, B như trên bằng phương pháp đồng nhất hệ số. Ngoài ra ta có thể phân tích và biến đổi trực tiếp như sau: $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$, cách này hiệu quả hơn.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx$.

Gợi ý: Với mọi $x \in [0;1]$, ta có: $\frac{x(x+1)}{x^2-4} = \frac{x^2+x}{x^2-4} = \frac{x^2-4+x+4}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}$.

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó: } I &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4} \right) dx = \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2-4} dx + \int_0^1 \frac{4}{x^2-4} dx \\ &= \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} + \int_0^1 \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)(x-2)} dx \\ &= \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} + \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln|x^2-4| \Big|_0^1 + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{-2}^2 |x^2-1| dx$.

Gợi ý: Ta có: $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{ khi } x^2-1 \geq 0 \\ 1-x^2, & \text{ khi } x^2-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1, & \text{ khi } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1-x^2, & \text{ khi } x \in [-1, 1] \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_{-2}^{-1} |x^2-1| dx + \int_{-1}^1 |x^2-1| dx + \int_1^2 |x^2-1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2-1) dx + \int_{-1}^1 (1-x^2) dx + \int_1^2 (x^2-1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = 4. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

Gợi ý: Dùng công thức lượng giác: $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1}{4}$

$$= \frac{\frac{1+\cos 4x}{2} + 2\cos 2x + 1}{4} = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8}$$

Khi đó : $I = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (\cos 4x + 4\cos 2x + 3) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 4x}{4} + 2\sin 2x + 3x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cdot \cos 5x dx.$

Gợi ý: Dùng công thức lượng giác: $\sin x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x)$

Ta có: $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 6x - \sin 4x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 6x}{6} + \frac{\cos 4x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{48}.$

Bài tập tương tự:

Bài tập 1. Tính $I = \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+4x+4} dx.$

Bài tập 2. Tính $I = \int_0^2 \frac{3x^2-1}{x^2-9} dx.$

Bài tập 3. Tính $I = \int_0^3 |1-x| dx.$

Bài tập 4. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx.$

Bài tập 5. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos^4 x - 3\cos^2 x) dx.$

2. PHƯƠNG PHÁP DÙNG VI PHÂN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

- Một số bài toán đơn giản không cần phải đưa ra biến mới, tức là không cần đặt $t = t(x)$, biến lấy tích phân vẫn là biến x , cận lấy tích phân không đổi. Nói cách khác, ta có thể trình bày gọn bằng công thức vi phân $dt(x) = t'(x)dx$. Cách làm này ngắn gọn, hiệu quả trong rất nhiều bài toán tích phân.

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $t = t(x)$ là một hàm của biến x thì

$$\int_a^b f[t(x)] dt(x) = F[t(x)] \Big|_a^b.$$

Chẳng hạn với t là hàm bậc nhất $t = t(x) = \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$) thì

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(\alpha x + \beta) d(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta) \Big|_a^b.$$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

Gợi ý: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2}.$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

Gợi ý:
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{(e^x + 1) - e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1}$$
$$= x \Big|_0^1 - \ln|e^x + 1| \Big|_0^1 = 1 - \ln(e + 1) + \ln 2 = \ln \frac{2e}{1 + e}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

Gợi ý:
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{2} \ln|1 + \sin 2x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_1^3 \sqrt{2x + 3} dx$

Gợi ý:
$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 (2x + 3)^{\frac{1}{2}} d(2x + 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \frac{(2x + 3)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^3 = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{3}.$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(1 + e^x)^3}}$

Gợi ý:
$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(1 + e^x)^3}} = \int_0^{\ln 3} (1 + e^x)^{-\frac{3}{2}} d(1 + e^x) = \frac{(1 + e^x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{\ln 3} = \frac{-2}{\sqrt{1 + e^x}} \Big|_0^{\ln 3} = \sqrt{2} - 1.$$

Bài tập tương tự:

Bài tập 1. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$.

Bài tập 2. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan^3 x}{\cos^2 x} dx$.

Bài tập 3. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos^2 x - 1}{3 + \sin 2x} dx$.

Bài tập 4. Tính $I = \int_2^3 \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 1} dx$.

Bài tập 5. Tính $I = \int_0^{\ln 6} e^x \sqrt{e^x + 3} dx$.

3. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

- Cho các hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hai số thực a, b thuộc K , ta

có: $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$. Viết gọn: $\int_a^b u dv = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v du$.

- Nếu hàm số $f(x)$ là tích của 2 trong 4 hàm: hàm lũy thừa $y = x^\alpha$, hàm số mũ $y = a^x$, $y = e^x$, hàm lôgarit $y = \log_a x$, $y = \ln x$, hàm lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ thì ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần, tức là biến đổi $f(x)dx$ về dạng $u(x)v'(x)dx$.

- Việc lựa chọn u và dv phải thỏa mãn các điều kiện sau: du đơn giản, v dễ tìm, tích phân mới $\int_a^b vdu$ đơn giản hơn tích phân ban đầu $\int_a^b u dv$. Chọn hàm để đặt bằng u theo thứ tự ưu tiên giảm dần như sau: **hàm lôgarit, hàm lũy thừa, hàm số mũ, hàm lượng giác.**

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$.

Gợi ý: Đặt $u = \ln(1+x^2)$, $dv = x dx$, ta có: $du = \frac{2x}{1+x^2} dx$, chọn $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$.

Gợi ý: Đặt $u = x^2$, $dv = e^{-x} dx$, ta có: $du = 2x dx$, chọn $v = -e^{-x}$.

$$\text{Khi đó: } I = \left(-e^{-x} \cdot x^2 \right) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2K, \text{ với } K = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

Tính K: Đặt $u = x$, $dv = e^{-x} dx$, ta có: $du = dx$, chọn $v = -e^{-x}$.

$$\text{Khi đó: } K = \left(-x e^{-x} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - e^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\frac{2}{e} + 1.$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{5}{e} + 2.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$

Gợi ý: Đặt $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$, ta có $du = \frac{dx}{x}$, chọn $v = -\frac{1}{2x^2}$.

$$\text{Khi đó: } I = -\frac{\ln x}{2x^2} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{2x^3} = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{4x^2} \Big|_1^2 = \frac{3-2\ln 2}{16}.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$

$$\text{Gợi ý: } I = \int_e^{e^2} \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x} dx = \int_e^{e^2} \frac{x(1 - \ln x)}{x \cdot \ln^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } u = x(1 - \ln x), \quad dv = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx, \text{ ta có } du = -\ln x dx, \text{ chọn } v = -\frac{1}{\ln x}.$$

Khi đó: $I = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln x} \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = \frac{e^2}{2} - (e^2 - e) = e - \frac{e^2}{2}.$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

Gợi ý: Đặt $u = 3 + \ln x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$, ta có $du = \frac{dx}{x}$, chọn $v = -\frac{1}{x+1}$. Khi đó:

$$I = -\frac{3 + \ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^3 = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right).$$

Bài tập tương tự:

Bài tập 1. Tính $I = \int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx$.

Bài tập 2. Tính $I = \int_1^2 (x^2 + x - 1)e^x dx$.

Bài tập 3. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$.

Bài tập 4. Tính $I = \int_0^2 x \cdot e^x dx$.

Bài tập 5. Tính $I = \int_1^e \ln x dx$.

4. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

- Đặt $t = t(x)$, với x là biến ban đầu, t là biến mới. Khi đổi biến phải đổi cận.

- Cho hàm số $t = t(x)$ có đạo hàm liên tục trên K , hàm số $y = g(t)$ liên tục và hàm hợp

$g[t(x)]$ xác định trên K , a và b là 2 số thuộc K , ta có $\int_a^b g[t(x)] \cdot t'(x) dx = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t) dt$.

- Các bước thực hiện phép đổi biến số dạng 1 để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$:

+ Bước 1: Đặt $t = t(x)$, suy ra $dt = t'(x) dx$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = t(a) = \alpha$, $x = b \Rightarrow t = t(b) = \beta$.

+ Bước 2: Biến đổi $f(x) dx$ thành $g(t) dt$.

+ Bước 3: Khi đó $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C$ (đơn giản hơn tích phân đã

cho). Giả sử $G(t)$ là một nguyên hàm của $g(t)$ thì $I = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\tan^2 x + 3 \tan x + 2) \cos^2 x}$.

Gợi ý: Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Lúc đó: $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \int_0^1 \frac{(t+2) - (t+1)}{(t+1)(t+2)} dt$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$

Gợi ý: Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0, x = 2 \Rightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó: } I &= \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{1+t} 2t dt = 2 \int_0^1 \frac{t^3 + t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2 \ln|1+t| \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4 \ln 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

Gợi ý: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Khi đó: } I = - \int_1^0 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$

Gợi ý: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta có $dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Ta có: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^1 \frac{2}{8t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2} dt = -\frac{1}{t+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Gợi ý: $I = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$, đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, ta có $t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2t dt = 2x dx \Rightarrow x dx = t dt$.

Đổi cận: $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2, x = \sqrt{8} \Rightarrow t = 3$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_2^3 \frac{t dt}{(t^2-1)t} = \int_2^3 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Bài tập tương tự:

Bài tập 1. Tính $I = \int_0^1 (1-x)^7 dx$.

Bài tập 2. Tính $I = \int_0^2 \frac{e^x(1+x)}{2+xe^x} dx$.

Bài tập 3. Tính $I = \int_0^1 x(2x-1)^{10} dx$.

Bài tập 4. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \cos^2 x dx$.

Bài tập 5. Tính $I = \int_0^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$.

5. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

- Đặt $x = x(t)$, với x là biến ban đầu, t là biến mới. Khi đổi biến phải đổi cận.

- Cách này áp dụng cho 1 số bài toán đặc thù mà không thể hoặc gặp khó khăn khi áp dụng phương pháp phân tích, phương pháp đổi biến dạng 1 hoặc tích phân từng phần. Sau đây là một số gợi ý cho các trường hợp cụ thể:

◦ Nếu $f(x)$ chứa $\sqrt{1-x^2}$, đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$.

$\sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$), đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$.

$\sqrt{a^2 - (\alpha x + \beta)^2}$; ($a > 0$), đặt $\alpha x + \beta = a \sin t$ hoặc $\alpha x + \beta = a \cos t$.

◦ Nếu $f(x)$ chứa $\sqrt{x^2 - 1}$, đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\sqrt{x^2 - a^2}$ ($a > 0$), đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$.

$\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 - a^2}$; ($a > 0$), đặt $\alpha x + \beta = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $\alpha x + \beta = \frac{a}{\cos t}$.

◦ Nếu $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ hoặc $f(x)$ chứa $\sqrt{x^2 + 1}$, đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ hoặc $f(x)$ chứa $\sqrt{x^2 + a^2}$ ($a > 0$), đặt $x = a \tan t$.

$f(x) = \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + a^2}$ hoặc $f(x)$ chứa $\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + a^2}$; $\alpha \neq 0$, đặt $\alpha x + \beta = a \tan t$.

Các bước thực hiện phép đổi biến số dạng 2 để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$:

+ Bước 1: Đặt $x = x(t)$, suy ra $dx = x'(t)dt$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha$, $x = b \Rightarrow t = \beta$.

+ Bước 2: Biến đổi $f(x)dx$ thành $g(t)dt$.

+ Bước 3: Khi đó $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C$ (đơn giản hơn tích phân đã cho). Giả sử $G(t)$ là một nguyên hàm của $g(t)$ thì $I = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Gợi ý: Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có: $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Gợi ý: Đặt $x = 2 \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có $dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2|\cos t| = 2\cos t$. Khi đó:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = 2 \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Gợi ý: Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \frac{-\cos t}{\sin^2 t} dt$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Ta có: $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = \frac{\cos t}{\sin t}$. Khi đó: $I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt}{\frac{\cos t}{\sin t}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$. Ta có 2 cách sau:

Cách 1: $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\tan \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\tan \frac{t}{2}\right)}{\tan \frac{t}{2}} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \sqrt{3}.$

Cách 2: Đặt $u = \tan \frac{t}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} (1 + u^2) dt \Rightarrow dt = \frac{2du}{1+u^2}$, $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$. Khi đó:

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{2du}{2u} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \ln \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

Gợi ý: Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, ta có: $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 5: $I = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx$

Gợi ý: $I = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x+3)^2 + 4} dx$. Đặt $x+3 = 2 \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, ta có $dx = 2(1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 t)}{4 \tan^2 t + 4} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{8}$.

Bài tập tương tự:

Bài tập 1. Tính $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Bài tập 2. Tính $I = \int_0^3 x^4 \sqrt{9-x^2} dx$.

Bài tập 3. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài tập 4. Tính $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Bài tập 5. Tính $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$.

6. MỘT SỐ LƯU Ý VỀ PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

- Các phép đổi biến sau đây có thể xem là đổi biến dạng 1, cũng có thể xem là đổi biến dạng 2, cách đặt $t = t(x)$ hoặc $x = x(t)$ rất đơn giản, chẳng hạn: $t = -x$, $t = \frac{\pi}{2} - x$, $t = \pi - x, \dots$ Các biến đổi thường gặp:

◦ Đổi biến với I để có $I = \alpha + \beta I \Rightarrow I = \frac{\alpha}{1-\beta}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 1$.

◦ Đổi biến với I , ta có $2I = I + I = K \Rightarrow I = \frac{1}{2} K$, với K là tích phân đơn giản.

◦ Biến đổi I thành tổng $I = I_1 + I_2$, thực hiện phép đổi biến đối với I_1 hay I_2 ta được $I_1 = -I_2$ hay $I_1 + I_2 = K$, với K là tích phân đơn giản.

- Học sinh cần đặc biệt chú ý đến tính chẵn, lẻ của hàm $f(x)$. Ta xét 3 loại tích phân sau:

* **Loại 1:** Tích phân $I = \int_{-a}^a f(x) dx$, với $a > 0$, $f(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $[-a; a]$, tức là $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-a; a]$.

Cách giải:

Cách 1: (Phân tích thành 2 tích phân) $I = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = I_1 + I_2$.

Với I_1 : đặt $t = -x \Rightarrow I_1 = -\int_a^0 f(-t) dt = -\int_0^a f(t) dt = -\int_0^a f(x) dx = -I_2 \Rightarrow I = 0$.

Cách 2: (Tích trực tiếp) Đặt $t = -x \Rightarrow I = -\int_a^{-a} f(-t) dt = \int_{-a}^a -f(t) dt = -\int_{-a}^a f(t) dt = -I$.
 $\Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$.

Ví dụ: Tính $I = \int_{-1}^1 x^{10} \sin x dx$

Gợi ý:

Cách 1: $I = \int_{-1}^0 x^{10} \sin x dx + \int_0^1 x^{10} \sin x dx = I_1 + I_2$, trong đó $I_1 = \int_{-1}^0 x^{10} \sin x dx$, $I_2 = \int_0^1 x^{10} \sin x dx$. Đối với

I_1 : đặt $t = -x$, ta có $dt = -dx$, $\sin x = -\sin t$, $x^{10} = t^{10}$.

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = \int_1^0 t^{10} \cdot \sin t dt = -\int_0^1 t^{10} \cdot \sin t dt = -\int_0^1 x^{10} \cdot \sin x dx = -I_2$. Suy ra $I = 0$.

Cách 2: Đặt $t = -x$, ta có $dt = -dx$, $\sin x = -\sin t$, $x^{10} = t^{10}$.

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó: $I = \int_1^{-1} t^{10} \cdot \sin t dt = -\int_{-1}^1 t^{10} \cdot \sin t dt = -I$. Suy ra $2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$.

* **Loại 2:** Tích phân $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx$, với $a > 0$, $k \in \mathbb{R}$, $f(x)$ là hàm chẵn trên đoạn $[-a; a]$, tức là $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-a; a]$.

Cách giải:

Cách 1: (tách thành 2 tích phân) $I = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{k^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = I_1 + I_2$.

Với I_1 : đặt $t = -x \Rightarrow I_1 = -\int_a^0 \frac{f(-t)}{k^{-t} + 1} dt = \int_0^a \frac{f(t)}{\frac{1}{k^t} + 1} dt = \int_0^a \frac{k^t \cdot f(t)}{1 + k^t} dt = \int_0^a \frac{k^x \cdot f(x)}{1 + k^x} dx$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \int_0^a \frac{k^x \cdot f(x)}{1 + k^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$.

Cách 2: Đặt $t = -x \Rightarrow I = -\int_a^{-a} \frac{f(-t)}{k^{-t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{f(t)}{\frac{1}{k^t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{k^t \cdot f(t)}{1 + k^t} dt = \int_{-a}^a \frac{k^x \cdot f(x)}{1 + k^x} dx$

Khi đó: $2I = I + I = I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx + \int_{-a}^a \frac{k^x \cdot f(x)}{1 + k^x} dx = \int_{-a}^a f(x) dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx$.

Ví dụ: $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1}$

Gợi ý:

Cách 1: $I = \int_{-1}^0 \frac{\cos x dx}{e^x + 1} + \int_0^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1} = I_1 + I_2$, trong đó $I_1 = \int_{-1}^0 \frac{\cos x dx}{e^x + 1}$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1}$

Đối với I_1 , đặt $t = -x$, ta có $dt = -dx$, $\cos x = \cos t$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I_1 = -\int_1^0 \frac{\cos t dt}{e^{-t} + 1} = \int_0^1 \frac{\cos t dt}{\frac{1}{e^t} + 1} = \int_0^1 \frac{e^t \cdot \cos t dt}{1 + e^t} = \int_0^1 \frac{e^x \cdot \cos x dx}{1 + e^x}$.

Suy ra: $I = \int_0^1 \frac{e^x \cdot \cos x dx}{1 + e^x} + \int_0^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{(e^x + 1) \cos x dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \cos x dx = \sin x \Big|_0^1 = \sin 1$.

Cách 2: Đặt $t = -x$, ta có $dt = -dx$, $\cos x = \cos t$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó: $I = -\int_1^{-1} \frac{\cos t dt}{e^{-t} + 1} = \int_{-1}^1 \frac{\cos t dt}{\frac{1}{e^t} + 1} = \int_{-1}^1 \frac{e^t \cdot \cos t dt}{1 + e^t} = \int_{-1}^1 \frac{e^x \cdot \cos x dx}{1 + e^x}$

Suy ra: $2I = I + I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{e^x + 1} + \int_{-1}^1 \frac{e^x \cdot \cos x dx}{1 + e^x} = \int_{-1}^1 \cos x dx = \sin x \Big|_{-1}^1 = 2 \sin 1 \Rightarrow I = \sin 1$.

*** Loại 3: Tích phân** $I = \int_0^a f(x) dx$, với $a = \pi, \frac{\pi}{2}, \dots$ và $f(x)$ có chứa các hàm lượng giác

Cách giải: Ta thử đặt $t = a - x$, khi biến đổi hàm $f(x)$ về hàm $g(t)$ phải chú ý các cung có liên quan đặc biệt (hai cung bù nhau, phụ nhau,...). Chú ý tính chất của tích phân:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Ví dụ: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$, ta có $dt = -dx$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$. Khi đó:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^4 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\cos^4 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{\sin^4 t + \cos^4 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

Suy ra: $2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Vậy $I = \frac{\pi}{4}$.

Kết quả: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \frac{\pi}{4}$, với mọi số tự nhiên $n \neq 0$.

Bài tập tương tự:

Bài tập 1. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - x^5 + x^3 - x}{\cos^4 x} dx$

Gợi ý: đặt $t = -x$ Đáp án: $I = 0$

Bài tập 2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

Gợi ý: đặt $t = \frac{\pi}{4} - x$ Đáp án: $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$

Bài tập 3. $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

Gợi ý: đặt $t = -x$ Đáp án: $I = 0$

Bài tập 4. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$

Gợi ý: đặt $t = -x$ Đáp án: $I = \frac{\pi}{4}$

Bài tập 5. $I = \int_{-1}^1 \frac{\ln(x^2 + 1)}{e^x + 1} dx$

Gợi ý: đặt $t = -x$ Đáp án: $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

• **Bài toán 1:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{mx^2 + nx + p} dx$, với $m \neq 0$; $mx^2 + nx + p$ vô nghiệm.

Ta biến đổi: $I = \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x+r)^2 + s} dx$, $s > 0$. Đặt $x+r = \sqrt{s} \cdot \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $dx = \sqrt{s} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \sqrt{s} \cdot (1 + \tan^2 t) dt$ và $(x+r)^2 + s = s \cdot (1 + \tan^2 t)$.

Khi đó: $I = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{s} \cdot (1 + \tan^2 t) dt}{s \cdot (1 + \tan^2 t)} = \frac{1}{m\sqrt{s}} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{m\sqrt{s}} (t_2 - t_1)$.

Ví dụ: $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx$, đặt $x+1 = 2 \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt$, $x = -1 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 t) dt}{4 \tan^2 t + 4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{8}$.

• **Bài toán 2:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ax+b}{mx^2 + nx + p} dx$, với $m \neq 0$; $mx^2 + nx + p$ vô nghiệm.

Ta chú ý $(mx^2 + nx + p)' = 2mx + n$ và biến đổi:

$$I = \frac{a}{2m} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx + n}{mx^2 + nx + p} dx + \left(b - \frac{an}{2m}\right) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{mx^2 + nx + p} dx = \frac{a}{2m} \cdot \ln|mx^2 + nx + p| \Big|_{\alpha}^{\beta} + \left(b - \frac{an}{2m}\right) \cdot K, \quad \text{với}$$

$$K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{mx^2 + nx + p} dx \quad (\text{xem Bài toán 1}).$$

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ: } I &= \int_{-1}^1 \frac{3x+4}{x^2+2x+5} dx = \int_{-1}^1 \frac{3(x+1)+1}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+5| \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx \quad (\text{xem thêm ví dụ của Bài toán 1}) \end{aligned}$$

Lưu ý: Trong **Bài toán 1** và **Bài toán 2**, $f(x)$ là phân thức hữu tỉ có bậc tử nhỏ hơn 2. Nếu tử là đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 2 thì ta biến đổi $P(x) = Q(x) \cdot (px^2 + qx + r) + R(x)$ (nói đơn giản: chia tử cho mẫu để tìm thương $Q(x)$ và phần dư $R(x)$), suy ra

$$\frac{P(x)}{px^2 + qx + r} = Q(x) + \frac{R(x)}{px^2 + qx + r}, \quad \text{với } R(x) \text{ có bậc nhỏ hơn 2.}$$

• **Bài toán 3:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(mx^2 + nx + p)^k} dx$, với k nguyên, $k \geq 2$, $mx^2 + nx + p$ vô nghiệm.

Ta biến đổi: $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{m^k \cdot [(x+r)^2 + s]^k} dx$, $s > 0$. Đặt $x+r = \sqrt{s} \cdot \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $dx = \sqrt{s} \cdot (1 + \tan^2 t) dt$ và $[(x+r)^2 + s]^k = s^k \cdot (1 + \tan^2 t)^k$.

Khi đó: $I = \frac{1}{m^k} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{s} \cdot (1 + \tan^2 t) dt}{s^k \cdot (1 + \tan^2 t)^k} = \frac{\sqrt{s}}{m^k \cdot s^k} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^{k-1}} = \frac{\sqrt{s}}{m^k \cdot s^k} \int_{t_1}^{t_2} (\cos t)^{2k-2} dt$.

(xem thêm **Bài toán 8** sau đây về phương pháp tính tích phân của hàm $\cos^n t$).

Ví dụ: $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{[(x+1)^2 + 4]^2} dx$.

Đặt $x+1 = 2 \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$;

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 t) dt}{(4 \tan^2 t + 4)^2} = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{16} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

• **Bài toán 4:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ax + b}{(mx^2 + nx + p)^k} dx$, với k nguyên, $k \geq 2$, $m \neq 0$; $mx^2 + nx + p$ vô nghiệm.

Ta chú ý $(mx^2 + nx + p)' = 2mx + n$ và biến đổi như sau:

$$I = \frac{a}{2m} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx+n}{(mx^2+nx+p)^k} dx + \left(b - \frac{an}{2m}\right) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(mx^2+nx+p)^k} dx = \frac{a}{2m} \cdot K + \left(b - \frac{an}{2m}\right) \cdot L$$

- Với $K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx+n}{(mx^2+nx+p)^k} dx$, dùng vi phân hoặc đổi biến $t = mx^2 + nx + p$.

- Với $L = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(mx^2+nx+p)^k} dx$: xem **Bài toán 3**.

Lưu ý: Trường hợp tử là đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 2, ta dùng phương pháp đồng nhất thức (xem **Bài toán 6**) để đưa về dạng như **Bài toán 3** và **Bài toán 4**.

• **Bài toán 5:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{(ax+b)^i \cdot (cx+d)^k} dx$, với i, k là các số nguyên dương, bậc của đa thức $P(x)$

nhỏ hơn bậc của mẫu.

Đặt $f(x) = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_i}{(ax+b)^i} + \frac{B_1}{cx+d} + \frac{B_2}{(cx+d)^2} + \dots + \frac{B_k}{(cx+d)^k}$, với mọi

$x \neq -\frac{b}{a}, x \neq -\frac{d}{c}$. Đồng nhất thức để tìm $A_1, A_2, \dots, A_i, B_1, B_2, \dots, B_k$. Ngoài ra có thể dùng phương pháp hệ số bất định để tìm $A_1, A_2, \dots, A_i, B_1, B_2, \dots, B_k$.

• **Bài toán 6:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{(mx^2+nx+p)^i \cdot (qx^2+rx+s)^k} dx$, với i, k là các số nguyên dương,

mx^2+nx+p và qx^2+rx+s vô nghiệm, bậc của đa thức $P(x)$ nhỏ hơn bậc của mẫu. Đặt

$$f(x) = \frac{A_1x+B_1}{mx^2+nx+p} + \frac{A_2x+B_2}{(-)^2} + \dots + \frac{A_ix+B_i}{(-)^i} + \frac{C_1x+D_1}{qx^2+rx+s} + \frac{C_2x+D_2}{(-)^2} + \dots + \frac{C_kx+D_k}{(-)^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x)$$

là hàm dưới dấu tích phân. Đồng nhất thức hoặc dùng phương pháp hệ số bất định để tìm các số A_i, B_i, C_i, D_i ở tử các phân thức.

* **Lưu ý:**

- Ở đây ta không xét tích phân của hàm hữu tỉ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x) = Q'(x)$, vì nó đơn giản, chỉ cần đặt $t = Q(x) \Rightarrow dt = P(x)dx$ hoặc dùng vi phân.

- Nếu phân thức hữu tỉ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ có bậc $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc $Q(x)$ thì thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, trong đó bậc $P_1(x)$ bé hơn bậc $Q(x)$.

- Đa thức $Q(x)$ khác 0 với hệ số thực có duy nhất 1 cách phân tích thành tích các nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai với biệt thức $\Delta < 0$. Bài toán 5 và Bài toán 6 đã xét $Q(x) = (ax+b)^i \cdot (cx+d)^k$ và $Q(x) = (mx^2+nx+p)^i \cdot (qx^2+rx+s)^k$. Cách làm tương tự đối với đa

thức $Q(x) = (ax+b)^i \cdot (cx+d)^j \cdot (mx^2+nx+p)^k \cdot (qx^2+rx+s)^h$ trong đó i, j, k, h là các số nguyên dương, hai tam thức mx^2+nx+p và qx^2+rx+s vô nghiệm. Cụ thể, ta đặt

$$f(x) = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_i}{(ax+b)^i} + \frac{B_1}{cx+d} + \frac{B_2}{(cx+d)^2} + \dots + \frac{B_j}{(cx+d)^j}$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{mx^2+nx+p} + \frac{C_2x+D_2}{(mx^2+nx+p)^2} + \dots + \frac{C_kx+D_k}{(mx^2+nx+p)^k} + \frac{E_1x+F_1}{qx^2+rx+s} + \frac{E_2x+F_2}{(qx^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{E_hx+F_h}{(qx^2+rx+s)^h}$$

với mọi $x \neq -\frac{b}{a}, x \neq -\frac{d}{c}$. Đồng nhất thức hoặc dùng phương pháp hệ số bất định để tìm các số ở tử các phân thức.

Ví dụ: $I = \int_2^3 \frac{3x^4 + x^2 + x + 2}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} dx$

Ta có: $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

$$\Rightarrow I = \int_2^3 \frac{3x^4 + x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} dx$$

Đặt $\frac{3x^4 + x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1} + \frac{Dx+E}{x^2 + x + 1}, \forall x \neq 1$

Quy đồng, rút gọn 2 mẫu, đồng nhất các hệ số ở 2 vế ta được hệ 5 phương trình 5 ẩn, tính được $A=2, B=1, C=-1, D=0, E=1$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_2^3 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \int_2^3 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

$$= \int_2^3 \frac{2}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= \left[2\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) \right]_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \int_2^3 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Với $I_1 = \int_2^3 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$ đặt $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Với $I_2 = \int_2^3 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$ đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

• **Bài toán 7:** (Một số kỹ thuật khác dùng trong tích phân hàm hữu tỉ)

* Thứ nhất, kỹ thuật giảm chênh lệch giữa bậc tử và bậc mẫu:

Ví dụ 1: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4 + 1}$ (Nhiều tài liệu gọi đây là kỹ thuật “Nhảy tầng lầu”)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{t^2 + 2} - \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{du}{u^2 - 2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^6 + 1}$ (Kỹ thuật “Nhảy tầng lầu” đơn giản chỉ là kỹ thuật phân tích – rút gọn)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^4 + 1) - (x^4 - 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2 - (x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} + \int_1^2 \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 - x^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \int_1^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \int_1^2 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} \right], \text{ lần lượt đặt } x = \tan t, \quad x^3 = \tan t, \quad u = x + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

*** Thứ hai, kỹ thuật phân tích tử thức để rút gọn mẫu thức:**

Ví dụ 3: $I = \int_1^2 \frac{dx}{5x^5 + 20x} = \frac{1}{5} \int_1^2 \frac{dx}{x(x^4 + 4)} = \frac{1}{20} \int_1^2 \frac{(x^4 + 4) - x^4}{x(x^4 + 4)} dx = \frac{1}{20} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4 + 4} \right) dx.$

Ví dụ 4: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)(x+7)(x+8)}$

$$= \frac{1}{8} \int_1^2 \frac{x(x+7) - (x-1)(x+8)}{x(x-1)(x+7)(x+8)} dx = \frac{1}{8} \int_1^2 \left(\frac{1}{(x-1)(x+8)} - \frac{1}{x(x+7)} \right) dx$$

*** Thứ ba, làm xuất hiện đạo hàm ở tử thức rồi đặt ẩn phụ:**

Ví dụ 5: $I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 1)}{x^6 - 14x^3 - 1} dx$

Chia tử và mẫu cho x^3 ta được:
$$I = \int_1^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 2\right)}{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - 14} dx = \int_1^2 \frac{\left(x - \frac{1}{x} + 2\right) d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 14}.$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, ta được:
$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t+2}{t^3+3t-14} dt = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t+2}{(t-2)(t^2+2t+7)} dt.$$

Ví dụ 6: $I = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

Chia tử và mẫu cho x^2 ta được:
$$I = \int_1^2 \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = \int_1^2 \frac{dt}{t^2 + 2} \quad (\text{với } t = x - \frac{1}{x})$$

*** Thứ tư, đặt ẩn phụ** $t = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow dt = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} dx$ (còn gọi “**chồng chất nhị thức**”)

Ví dụ 7: $I = \int_{-1}^2 \frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}} dx = \int_{-1}^2 \left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10} \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}$

Đặt $t = \frac{3x-5}{x+2} \Rightarrow dt = \frac{11}{(x+2)^2} dx \Rightarrow \frac{dx}{(x+2)^2} = \frac{dt}{11}$. Khi đó $I = \frac{1}{11} \int_{-8}^{\frac{1}{4}} t^{10} dt$.

Ví dụ 8:
$$I = \int_1^2 \frac{1}{(3x-2)^7 (3x+4)^3} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^7 \cdot (3x+4)^{10}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^7} \cdot \frac{1}{(3x+4)^8} \cdot \frac{dx}{(3x+4)^2}$$

Đặt $t = \frac{3x-2}{3x+4} \Rightarrow dt = \frac{18}{(3x+4)^2} dx \Rightarrow \frac{dx}{(3x+4)^2} = \frac{dt}{18}$.

Ta có: $t = \frac{3x-2}{3x+4} = 1 - \frac{6}{3x+4} \Rightarrow \frac{1}{3x+4} = \frac{1-t}{6}$. Khi đó: $I = \int_{\frac{1}{7}}^{\frac{2}{5}} \frac{1}{t} \cdot \frac{(1-t)^8}{6^8} \cdot \frac{dt}{18}$

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

- Bài toán 8:** $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ (Ví dụ 4 phần II.1): dùng công thức, đưa về $\cos 2x, \cos 4x$.
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$ (Ví dụ 3 phần II.4): đổi biến dạng 1 với cách đặt $t = \cos x$.

Tương tự đối với các hàm: $\sin^2 x, \sin^4 x, \sin^6 x, \dots, \cos^2 x, \cos^4 x, \cos^6 x, \dots$ (số mũ chẵn).

$\sin^3 x, \sin^5 x, \sin^7 x, \dots, \cos^3 x, \cos^5 x, \cos^7 x, \dots$ (số mũ lẻ).

• **Bài toán 9:**
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{d \sin x + e \cos x + f} dx$$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, ta có: $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ta có: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ và } d \sin x + e \cos x + f = \frac{2t.d + (1-t^2).e + (1+t^2).f}{1+t^2} = \frac{mt^2 + nt + p}{1+t^2}.$$

Đổi cận: $x = \alpha \Rightarrow t = \tan \frac{\alpha}{2} = t_1, x = \beta \Rightarrow t = \tan \frac{\beta}{2} = t_2$.

Khi đó: $I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2dt}{mt^2 + nt + p}$ (xem **Bài toán 1** nếu mẫu vô nghiệm hoặc **Bài toán 5** nếu mẫu có nghiệm).

• **Bài toán 10:**
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \sin x + b \cos x + c}{d \sin x + e \cos x + f} dx$$

Đặt $\frac{a \sin x + b \cos x + c}{d \sin x + e \cos x + f} = A + B \cdot \frac{d \cos x - e \sin x}{d \sin x + e \cos x + f} + \frac{C}{d \sin x + e \cos x + f}, \forall x \in D \text{ (TXĐ)}$

$$\Leftrightarrow a \sin x + b \cos x + c = A(d \sin x + e \cos x + f) + B(d \cos x - e \sin x) + C, \forall x \in D$$

Đồng nhất các hệ số của $\sin x, \cos x$ và hệ số tự do để tìm A, B, C .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(A + B \cdot \frac{d \cos x - e \sin x}{d \sin x + e \cos x + f} \right) dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C dx}{d \sin x + e \cos x + f} \\ &= \left(Ax + B \cdot \ln |d \sin x + e \cos x + f| \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + C \cdot K, \end{aligned}$$

trong đó $K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{d \sin x + e \cos x + f}$ (xem Bài toán 9)

Ví dụ: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$

Đặt $\sin x + 7 \cos x + 6 = A(4 \sin x + 3 \cos x + 5) + B(4 \cos x - 3 \sin x) + C, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin x + 7 \cos x + 6 = (4A - 3B) \sin x + (3A + 4B) \cos x + 5A + C, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A - 3B = 1 \\ 3A + 4B = 7 \\ 5A + C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{4 \cos x - 3 \sin x}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} + \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \right) dx \\ &= \left(x + \ln |4 \sin x + 3 \cos x + 5| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + K, \text{ với } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1, \text{ do đó}$$

$$K = \int_0^1 \frac{2}{8t+3(1-t^2)+5(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2} dt = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + \frac{1}{6}.$$

Lưu ý: Nếu $b=c=f=0$ hoặc $a=c=f=0$ thì có thể phân tích tử số $P(x)$ để tìm nhanh các số

$$A, B \text{ thỏa mãn: } \frac{P(x)}{d \sin x + e \cos x} = \frac{A(d \sin x + e \cos x) + B(d \cos x - e \sin x)}{d \sin x + e \cos x}, \text{ việc này khá đơn giản}$$

(Kỹ thuật thêm bớt).

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

• **Bài toán 11:** $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t-x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow (t-x)^2 = 1+x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x=-1 \Rightarrow t=\sqrt{2}-1, x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}+1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(t^2+1)dt}{t^2(1+t)} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t} - \ln|t| + 2\ln|t+1| \right) \Big|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(2 + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2\ln \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[2 + 2\ln(\sqrt{2}-1) + 2\ln(\sqrt{2}+1) \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

Chú ý: với cách đặt $t = \sqrt{mx} + \sqrt{mx^2 + nx + p}$ có thể giải được 1 số bài toán đặc thù.

• **Bài toán 12:** $I = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^2+4} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=x \\ dv=x\sqrt{x^2+4} dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \frac{1}{3} x(x^2+4)\sqrt{x^2+4} \Big|_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 (x^2+4)\sqrt{x^2+4} dx \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \int_0^2 x^2 \sqrt{x^2+4} dx - \frac{4}{3} \int_0^2 \sqrt{x^2+4} dx \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} I - \frac{4}{3} \int_0^2 \sqrt{x^2+4} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } I &= 8\sqrt{2} - \int_0^2 \sqrt{x^2 + 4} \, dx = 8\sqrt{2} - \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + 4} + 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| \right] \Big|_0^2 \\ &= 8\sqrt{2} - \left[2\sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \right] = 6\sqrt{2} - 2 \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Tổng quát: $I = \int_a^\beta x^2 \sqrt{x^2 \pm a} \, dx, (a > 0)$

Cách giải: (phương pháp tích phân từng phần) Đặt $u = x, dv = x\sqrt{x^2 \pm a} \, dx$.

• **Bài toán 13:** $I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

Cách 1: Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt, I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{\cos^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^2 t)^2}$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t \, dt, I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{(u+1)^2 (u-1)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} \right) du$

$$= \frac{1}{4} \left(\ln \frac{u+1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$$

Cách 2: Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow (t-x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t},$

$$\Rightarrow dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \text{ và } \sqrt{x^2 + 1} = t - \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = 1 + \sqrt{2}.$

Khi đó: $I = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3} \right) dt = \left(\frac{t^2}{8} + \frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{8t^2} \right) \Big|_1^{1+\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$$

Cách 3: (Tích phân từng phần) Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}, dv = dx, ta có du = \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, v = x.$

Khi đó: $I = x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{2} - K, \text{ với } K = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

Ta có: $K = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

$$= I - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^1 = I - \ln(1 + \sqrt{2})$$

Suy ra: $I = \sqrt{2} - [I - \ln(1 + \sqrt{2})] \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right].$

* Một số công thức nguyên hàm cần chú ý:

• Vì $\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}} \right]' = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}}$ nên $I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C, \forall a > 0.$ (1)

Nếu không chứng minh công thức (1) bằng đạo hàm, có thể biến đổi như sau:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \int \frac{d(x^2 \pm a)}{2\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C.$$

• Vì $\left[\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$ nên $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C, \forall a > 0.$ (2)

Nếu không chứng minh công thức (2) bằng đạo hàm, có thể biến đổi như sau:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a}} dx = \int \frac{d(x + \sqrt{x^2 \pm a})}{x + \sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

Mở rộng công thức (2), ta có: $\int \frac{1}{\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 \pm a}} dx = \frac{1}{\alpha} \ln|\alpha x + \beta + \sqrt{(\alpha x + \beta)^2 \pm a}| + C.$

• Vì $\left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a}) \right]' = \sqrt{x^2 \pm a}$ nên

$$\int \sqrt{x^2 \pm a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C, \forall a > 0. \quad (3)$$

Nếu không chứng minh công thức (3) bằng đạo hàm, ta thực hiện như sau:

Đặt $I = \int \sqrt{x^2 \pm a} dx$ và $u = \sqrt{x^2 \pm a}, dv = dx$, ta được:

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2 \pm a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = x\sqrt{x^2 \pm a} - \int \frac{x^2 \pm a \mp a}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = x\sqrt{x^2 \pm a} - \left(\int \sqrt{x^2 \pm a} dx \mp \int \frac{a}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx \right) \text{ Suy ra:} \\ &= x\sqrt{x^2 \pm a} - I \pm \int \frac{a}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = x\sqrt{x^2 \pm a} - I \pm a \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C \end{aligned}$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} \pm \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

• **Bài toán 14:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{mx^2 + nx + p}} dx$

Đặt $\Delta = n^2 - 4mp$. (Ta không xét $\Delta = 0$, đơn giản)

– Nếu $\Delta < 0$ và $m > 0$ thì $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{(x+r)^2 + s}} dx, s > 0$. Đặt $x+r = \sqrt{s} \tan t$ hoặc xem thêm công

thức (2) nói trên.

– Nếu $\Delta > 0$ và $m > 0$ thì $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{(x+r)^2 - s}} dx = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}} dx, s > 0$.

Đặt $x+r = \frac{\sqrt{s}}{\sin t}$ hoặc đặt $t = \sqrt{x-x_1} + \sqrt{x-x_2}$ hoặc xem thêm công thức (2) nói trên.

– Nếu $\Delta > 0$ và $m < 0$ thì $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{-m} \cdot \sqrt{s - (x+r)^2}} dx$, $s > 0$. Đặt $x+r = \sqrt{s} \sin t$.

Sau đây là 3 ví dụ ứng với 3 trường hợp trên.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$.

Ta có: $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} dx$.

Cách 1: Đặt $x-1 = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, ta có $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $x=1 \Rightarrow t=0$, $x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Ta có: $\sqrt{(x-1)^2 + 1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}$.

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt$.

Đặt $u = \sin t$, ta được: $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Cách 2: $I = \ln \left| x-1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1} \right| \Big|_1^2 = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}}$.

Cách 1: $I = \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2 - 16}}$

Đặt $x+5 = \frac{4}{\sin t}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, ta có $dx = \frac{-4 \cos t}{\sin^2 t} dt$, $x=-1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=3 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Ta có: $\sqrt{(x+5)^2 - 16} = \sqrt{\frac{16}{\sin^2 t} - 16} = \sqrt{\frac{16 \cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{4 \cos t}{\sin t}$

Khi đó: $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{-4 \cos t}{\sin^2 t} dt}{\frac{4 \cos t}{\sin t}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sin t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t dt}{1 - \cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t dt}{\cos^2 t - 1}$

Đặt $u = \cos t$, ta được: $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 = \ln(2 + \sqrt{3})$

Cách 2: $I = \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+9)}}$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+9}} \right) dx = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9}}{2\sqrt{(x+1)(x+9)}} dx = \frac{t dx}{2\sqrt{(x+1)(x+9)}}$

Suy ra: $\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+9)}} = \frac{2dt}{t}$, $x = -1 \Rightarrow t = 2\sqrt{2}$, $x = 3 \Rightarrow t = 2 + 2\sqrt{3}$.

Khi đó: $I = \int_{2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{3}} \frac{2dt}{t} = 2\ln|t| \Big|_{2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{3}} = 2\ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \ln(2+\sqrt{3})$.

Cách 3: $I = \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2 - 16}} = \ln \left| x+5 + \sqrt{(x+5)^2 - 16} \right| \Big|_{-1}^3 = \ln \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = \ln(2+\sqrt{3})$.

Ví dụ 3: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-1)^2}}$

Đặt $x-1 = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, ta có: $dx = 2\cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$

Ta có: $\sqrt{4 - (x-1)^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t$. Khi đó: $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{2\cos t dt}{2\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 dt = \frac{\pi}{6}$.

• **Bài toán 15:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ax+b}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx$

Ta chú ý $(mx^2+nx+p)' = 2mx+n$ và biến đổi như sau (Kỹ thuật thêm bớt):

$$I = \frac{a}{2m} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx+n}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx + \left(b - \frac{an}{2m}\right) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{mx^2+nx+p}} = \frac{a}{2m} \cdot K + \left(b - \frac{an}{2m}\right) \cdot L$$

- Với $K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx+n}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx$: đặt $t = mx^2+nx+p$, $K = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_{t_1}^{t_2}$.

- Với $L = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{mx^2+nx+p}}$: xem **Bài toán 14** nói trên.

Ví dụ: $I = \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \int_1^2 \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} dx + 2 \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

• **Bài toán 16:** $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx$

Ta biến đổi: $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{A \cdot (mx^2+nx+p) + B \cdot (2mx+n) + C}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx$

$$= A \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{mx^2+nx+p} dx + B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx+n}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx + C \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{mx^2+nx+p}}$$

- Với $K = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{mx^2+nx+p} dx$: đổi biến dạng 2 hoặc dùng công thức (3) nói trên.

- Với $L = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2mx+n}{\sqrt{mx^2+nx+p}} dx$, dùng vi phân: $L = 2\sqrt{mx^2+nx+p} \Big|_{\alpha}^{\beta}$.

- Với $M = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{mx^2+nx+p}}$: xem [Bài toán 14](#) nói trên.

Ví dụ: $I = \int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = \int_0^1 \frac{-(-x^2+2x+3)+8}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$
 $= -\int_0^1 \sqrt{-x^2+2x+3} dx + \int_0^1 \frac{8}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx = -\int_0^1 \sqrt{4-(x-1)^2} dx + 8 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \dots$

IV. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. BÀI TẬP TỰ LUẬN MINH HỌA

Bài tập 1. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 - 4x + 3| dx$.

HD giải: Ta có: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	0	1	2
x^2-4x+3	+	0	-

Khi đó: $I = \int_0^1 |x^2 - 4x + 3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx$
 $= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 = 2$.

Bài tập 2. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x^2| dx$.

HD giải: Ta có: $|x^3 - x^2| = x^2 |x - 1|$.

Bảng xét dấu:

x	0	1	2	
x^3-x^2	0	-	0	+

Khi đó: $I = -\int_0^1 (x^3 - x^2) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$.

Bài tập 3. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$.

HD giải: Ta có: $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng xét dấu:

x	-1	0	1
$e^x - 1$	-	0	+

Khi đó:

$$I = -\int_{-1}^0 (e^x - 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = -(e^x - x) \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = \frac{1}{e} + e - 2.$$

Bài tập 4. Tính tích phân $I = \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$.

HD giải: $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}.$

Bài tập 5. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{8x^2 + 8}{(x-1)^2(x+3)} dx$.

HD giải: Đặt $\frac{8x^2 + 8}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}, \forall x \in [-1; 0]$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^2 + 8}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}, \forall x \in [-1; 0]$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 8 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2, \forall x \in [-1; 0] \quad (*)$$

Thay $x = 1$ vào (*) ta được: $16 = 4B \Leftrightarrow B = 4$.

Thay $x = -3$ vào (*) ta được: $80 = 16C \Leftrightarrow C = 5$

Thay $x = 0$ vào (*) ta được: $8 = -3A + 3B + C \Leftrightarrow A = \frac{3B + C - 8}{3} = 3$

Khi đó: $I = \int_{-1}^0 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{5}{x+3} \right) dx = \left[3 \ln |x-1| - \frac{4}{x-1} + 5 \ln |x+3| \right] \Big|_{-1}^0$

$$= 2 + 5 \ln 3 + 2 \ln 2.$$

Bài tập 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$

HD giải: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x - \tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan^2 x + 1) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\tan^2 x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

Bài tập 7. Tính tích phân $I = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$

$$\begin{aligned} \text{HD giải: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} \\ &= -\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan\frac{\pi}{4} = 1. \end{aligned}$$

Bài tập 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$

$$\begin{aligned} \text{HD giải: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = e^{\sin x} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Bài tập 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x + 2} dx$

$$\text{HD giải: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x + 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x + 2} dx$$

Đặt $t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x) dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=3, x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\sqrt{2}+2$.

$$\text{Lúc đó: } I = \int_3^{\sqrt{2}+2} \frac{t-2}{t} dt = \int_3^{\sqrt{2}+2} \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt = \left(t - 2 \ln|t|\right) \Bigg|_3^{\sqrt{2}+2} = \sqrt{2} - 1 + 2 \ln \frac{3}{\sqrt{2}+2}.$$

Bài tập 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\cos^2 x - \sin x \cos x} dx$

$$\text{HD giải: } I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\cos^2 x (1 - \tan x)} dx. \text{ Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{1-t} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-1 + \frac{1}{1-t}\right) dt = \left[-t - \ln|1-t|\right] \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

Bài tập 11. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}+x} dx$

HD giải: $I = \int_0^1 \frac{x^3 (\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)} dx = \int_0^1 x^3 (\sqrt{x^2+1} - x) dx = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx - \int_0^1 x^4 dx.$

• $I_1 = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+1} x dx.$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}.$

Khi đó: $I_1 = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^3 - t) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{15}.$

• $I_2 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{2\sqrt{2}+2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}.$

Bài tập 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{1+6x-3x^2} dx$

HD giải: $I = \int_0^1 \sqrt{4-3(x-1)^2} dx.$

Đặt $\sqrt{3}(x-1) = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt.$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}, x=1 \Rightarrow t=0.$

Khi đó: $I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos^2 t dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (1 + \cos 2t) dt.$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.$

Bài tập 13. Tính tích phân $I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$

HD giải: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{e^x+1}}.$

Đặt $t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow dt = \frac{e^x dx}{2\sqrt{e^x+1}}$ và $e^x = t^2 - 1$. Đổi cận: $x = \ln 3 \Rightarrow t = 2, x = \ln 8 \Rightarrow t = 3.$

Khi đó: $I = \int_2^3 \frac{2 dt}{t^2-1} = \int_2^3 \frac{2 dt}{(t+1)(t-1)} = \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2}.$

Bài tập 14. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x} + e^x} dx.$

$$\begin{aligned} \text{HD giải: } I &= \int_0^1 \frac{1}{e^x(e^x+1)} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x} - \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 (e^{-x} - 1) dx + \int_0^1 \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \left[-e^{-x} - x + \ln(e^x+1) \right]_0^1 = \ln \frac{e+1}{2} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Bài tập 15. Tính tích phân $I = \int_1^e \ln^2 x dx$

HD giải: Đặt $u = \ln^2 x$, $dv = dx$, ta có: $du = \frac{2}{x} \ln x dx$, chọn $v = x$.

Khi đó: $I = \left(x \cdot \ln^2 x \right) \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2K$, với $K = \int_1^e \ln x dx$.

Tính K : đặt $u = \ln x$, $dv = dx$, ta có: $du = \frac{1}{x} dx$, chọn $v = x$.

Khi đó: $K = \left(x \cdot \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$.

Vậy $I = e - 2$.

Bài tập 16. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cdot \cos 3x dx$

HD giải: Đặt $u = e^{-x}$, $dv = \cos 3x dx$, ta có: $du = -e^{-x} dx$, chọn $v = \frac{1}{3} \sin 3x$.

Khi đó: $I = \left(\frac{1}{3} e^{-x} \cdot \sin 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} K$, trong đó $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cdot \sin 3x dx$.

Tính K : đặt $u = e^{-x}$, $dv = \sin 3x dx$, ta có $du = -e^{-x} dx$, chọn $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$.

Khi đó: $K = \left(-\frac{1}{3} e^{-x} \cdot \cos 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} I$

Vậy $I = -\frac{1}{3} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} I \right)$, suy ra $I = \frac{1 - 3e^{-\frac{\pi}{2}}}{10}$.

Bài tập 17. Tính tích phân $I_1 = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$

HD giải: Đặt $u = 3 + \ln x$, $dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx$, ta có $du = \frac{1}{x} dx$, chọn $v = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1}$.

Lúc đó: $I_1 = \left(\frac{x(3 + \ln x)}{x+1} \right) \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x+1} dx = \frac{3+3\ln 3}{4} - \ln|x+1| \Big|_1^3 = \frac{3+3\ln 3}{4} - \ln 2$.

(Chú ý cách chọn $v = \int dv$ sao cho tích phân $\int_1^3 v du$ đơn giản. Ta nói $C=1$ là hệ số điều chỉnh trong tích phân từng phần).

Bài tập 18. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{(2^x + 1)\cos x}$.

HD giải: Đặt $t = -x$, ta có $dt = -dx$.

Đổi cận: $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$.

Khi đó: $I = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{(2^{-t} + 1)\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\left(\frac{1}{2^t} + 1\right)\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^t dt}{(1 + 2^t)\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^x dx}{(1 + 2^x)\cos x}$

Suy ra: $2I = I + I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{(2^x + 1)\cos x} + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2^x dx}{(2^x + 1)\cos x} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1 + 2^x) dx}{(2^x + 1)\cos x} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}$
 $= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$. Đổi cận: $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $2I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{(1+u)(1-u)} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\ln 3 - \ln \frac{1}{3} \right) = \ln 3$.

Vậy $I = \frac{1}{2} \ln 3$.

Bài tập 19. Tính tích phân $I = \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$.

HD giải: Đặt $u = \ln(x^2 + 1)$, $dv = dx$, ta có: $du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$, chọn $v = x$.

Khi đó: $I = \left[x \ln(x^2 + 1) \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = \ln 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Với $K = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$, đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Ta được: $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $I = \ln 2 - 2 + 2K = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 20. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

HD giải: Đặt $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $dv = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$, ta có: $du = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, chọn $v = \sqrt{x^2 + 1}$.

Khi đó: $I = \left[\sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} dx = 2 \ln(\sqrt{3} + 2) - \sqrt{3}$.

2. BÀI TẬP TỰ LUÂN TỰ LUYỆN

Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$

2) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - 4x + 3| dx$

4) $I = \int_1^2 \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2} dx$

5) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

6) $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} dx$

7) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx$

8) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$

9) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$

10) $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$

11) $I = \int_{-1}^0 \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$

12) $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

13) $I = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$

14) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}}$

15) $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$

16) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$

17) $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx$

18) $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$

19) $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}}$

20) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cdot \cos 3x dx$.

V. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM MINH HOA

Câu 1. Tích phân $I = \int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2| dx$ bằng

- A. $\frac{16}{3}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{19}{2}$. D. $\frac{55}{6}$.

HD giải: $|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{khi } x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \\ -(x^2 - 3x + 2), & \text{khi } x \in [1; 2] \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } I &= \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

Lựa chọn đáp án C.

Sử dụng máy tính cầm tay (MTCT):

Bước 1: Gán các giá trị kết quả ở các đáp án cho các biến A, B, C, D.

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} &\rightarrow A \\ \frac{19}{2} &\rightarrow C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} &\rightarrow B \\ \frac{55}{6} &\rightarrow D \end{aligned}$$

Bước 2: Nhập vào máy $\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX - X$? Lần lượt thay X bởi A, B, C, D. Nhận đáp án đúng khi màn hình máy tính hiện kết quả 0 hoặc *xấp xỉ* 0.

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX \rightarrow$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX - A$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX \rightarrow 4.166666667$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX - B$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX \rightarrow 8.666666667$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX - C$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX \rightarrow -3.128 \times 10^{-11}$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX - D$$

$$\int_{-1}^4 |X^2 - 3X + 2| dX \rightarrow 0.333333333$$

Lựa chọn đáp án C.

Lưu ý: Tổ hợp phím gán: $\frac{16}{3}$ **SHIFT** **RCL** **(←)** (gán cho A)

Câu 2. Với giá trị nào của tham số m thì tích phân $I = \int_0^m (x + \sin^2 x) dx$ bằng $\frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{32}$?

A. $m = 1$.

B. $m = \frac{\pi}{6}$.

C. $m = \frac{\pi}{3}$.

D. $m = \frac{\pi}{4}$.

HD giải:

$$I = \int_0^m (x + \sin^2 x) dx = \int_0^m \left(x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \int_0^m \left(\frac{1}{2} + x - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{2x + 2x^2 - \sin 2x}{4} \right) \Big|_0^m = \frac{2m^2 + 2m - \sin 2m}{4}.$$

Lần lượt thay các giá trị m ở các phương án A, B, C,

D ta thấy $m = \frac{\pi}{4}$ thỏa mãn. Lựa chọn đáp án D.

Sử dụng máy tính cầm tay (MTCT):

Bước 1: Nhập vào máy tính biểu thức $\int_0^Y (X + \sin^2 X) dX - \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{32}$. Nhấn **CALC**

Bước 2: Nhập vào lần lượt $Y = 1$, $Y = \frac{\pi}{6}$, $Y = \frac{\pi}{3}$, $Y = \frac{\pi}{4}$ (không nhập X khi máy hỏi) Đáp án nhận khi màn hình hiện 0 hoặc xấp xỉ 0.

Lựa chọn đáp án D.

Câu 3. Tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^n \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx = 1$ bằng

- A. 5. B. $\frac{5}{2}$. C. 2. D. 1.

HD giải: $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{|x^2 - 1|}{x^2} dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 - 1}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = -\left(x + \frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \left(x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = 1.$$

Lựa chọn đáp án D.

Câu 4. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$. B. $\ln 2 - \frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{4} + \ln 2$. D. $\ln 2$.

HD giải: $I = \int_0^1 \frac{x^4 \cdot x}{x^2 + 1} dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$.

Lựa chọn đáp án A.

Câu 5. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$ bằng

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{5}{24}$. C. $\frac{7}{12}$. D. $\frac{5}{12}$.

HD giải: Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) dx$.

Đặt $t = \sin 2x$, ta có $dt = 2 \cos 2x dx$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Do đó: $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} t^2 \right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{t^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$. Lựa chọn đáp án D.

Câu 6. Tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$ bằng

- A. -2. B. 2. C. $2\pi + 2$. D. 2π .

HD giải: Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi} 2t \sin t \, dt$. Đặt $u = 2t$, $dv = \sin t \, dt$, ta có $du = 2dt$, chọn $v = -\cos t$.

Ta có: $I = (-2t \cdot \cos t) \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \cos t \, dt = (-2t \cdot \cos t) \Big|_0^{\pi} + 2 \sin t \Big|_0^{\pi} = 2\pi$.

Lựa chọn đáp án D.

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

HD giải:

• $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. • $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

• $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. • $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Các khẳng định A, B, C đúng, khẳng định D sai.

Lựa chọn đáp án D.

Câu 8. Tập hợp các số thực a thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\int_0^a \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} \, dx = 1$ là

A. $\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$.

B. $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$.

C. $\left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$.

D. $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

HD giải: Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = a \Rightarrow t = \tan a$.

Khi đó: $\int_0^a \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\tan a} 2t \, dt = t^2 \Big|_0^{\tan a} = \tan^2 a$. Vì $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan^2 a = 1$ nên $a = \pm \frac{\pi}{4}$.

Lựa chọn đáp án B.

Câu 9. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \, dx$ bằng

A. π .

B. 0.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

HD giải: Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Khi đó: $I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx$.

$$\text{Suy ra: } 2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{4}$. Lựa chọn đáp án D.

Câu 10. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ bằng

- A. $\frac{-\ln 2}{3} + \ln \frac{4}{3}$. B. $\frac{-\ln 2}{3} + \frac{\ln 4}{3}$. C. $\frac{\ln 2 - \ln 4}{3}$. D. $-\frac{\ln 2}{3} + \ln \frac{3}{4}$.

HD giải: Đặt $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$, ta có $du = \frac{dx}{x}$, chọn $v = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1}$. Khi đó:

$$I = \frac{x \ln x}{x+1} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \frac{2 \ln 2}{3} - \ln|x+1| \Big|_1^2 = \frac{2 \ln 2}{3} - \ln 3 + \ln 2 = \frac{2 \ln 2}{3} + \ln \frac{2}{3}.$$

Lựa chọn đáp án B.

Câu 11. Tích phân $I = \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{81\pi}{16}$. C. $\frac{81\pi}{8}$. D. $\frac{81(\pi+4)}{16}$.

HD giải: Đặt $x = 3 \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = 3 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Ta có: $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3|\cos t| = 3 \cos t$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin^2 t \cdot 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = \frac{81}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{81}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{81}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{16}.$$

Lựa chọn đáp án B.

Câu 12. Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. 4. C. 1. D. $\frac{2}{5}$.

HD giải: Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

$$\text{Ta có: } \frac{x^4}{2^x + 1} = \frac{t^4}{2^{-t} + 1} = \frac{t^4}{\frac{1}{2^t} + 1} = \frac{t^4 \cdot 2^t}{1 + 2^t} \Rightarrow I = - \int_1^{-1} \frac{t^4 \cdot 2^t}{1 + 2^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{t^4 \cdot 2^t}{1 + 2^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{x^4 \cdot 2^x}{1 + 2^x} dx.$$

$$\text{Khi đó: } 2I = I + I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^4 \cdot 2^x}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^4 \cdot (1 + 2^x)}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} \Rightarrow I = \frac{1}{5}.$$

Lựa chọn đáp án A.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; a]$ thỏa mãn $\int_0^a f(x) dx = M \in \mathbb{R}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^0 f(x) dx = -M$.

B. $\int_0^a f(x) dx + \int_a^0 f(x) dx = 0$.

C. $\int_0^{2a} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{M}{2}$.

D. $\int_0^{3a} f\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3M$.

HD giải: Các khẳng định A, B đúng.

(C): Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 2a \Rightarrow t = a$.

Khi đó: $\int_0^{2a} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int_0^a f(t) dt = 2M$. Khẳng định C sai.

(D): Đổi biến với cách đặt $t = \frac{x}{3}$ ta được: $\int_0^{3a} f\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3M$. Khẳng định D đúng.

Lựa chọn đáp án C.

Câu 14. Đặt $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$ và $t = \sqrt{x^2 + 1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2) dt$.

B. $I = \int_0^1 (t^4 - t^2) dt$.

C. $I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^3 - t) dt$.

D. $I = \int_1^4 (t^4 - t^2) dt$.

HD giải: $I = \int_0^1 x^2 \cdot x \sqrt{x^2 + 1} dx$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow t dt = x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}, I = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) \cdot t \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2) dt$.

Lựa chọn đáp án A.

Câu 15. Với giá trị nào của tham số m thì tích phân $I = \int_2^4 \frac{2x+m}{x-1} dx$ bằng $4 - \ln 9$?

A. $m = 0$.

B. $m = -1$.

C. $m = -4$.

D. $m = -3$.

HD giải: $I = \int_2^4 \left[2 + \frac{2+m}{x-1} \right] dx = \left[2x + (2+m) \ln|x-1| \right] \Big|_2^4 = 4 + (2+m) \ln 3$.

$I = 4 - \ln 9 = 4 - 2 \ln 3$ khi và chỉ khi $2 + m = -2 \Leftrightarrow m = -4$.

Lựa chọn đáp án C.

Câu 16. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc v_0 thì bắt đầu hãm phanh và từ thời điểm đó nó chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -6 \text{ (m/s}^2\text{)}$, sau 2 giây nó đi được 20 mét. Vận tốc v_0 lúc bắt đầu hãm phanh và vận tốc sau khi hãm phanh 2 giây của ô tô lần lượt bằng

A. $6(m/s)$ và $18(m/s)$.

B. $32(m/s)$ và $20(m/s)$.

C. $18(m/s)$ và $6(m/s)$.

D. $16(m/s)$ và $4(m/s)$.

HD giải:

Gia tốc $a(t)$, vận tốc v và quãng đường đi $s(t)$ thỏa mãn $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t)$.

Vận tốc: $v(t) = \int a(t)dt = \int -6dt = -6t + C$. Với $t = 0$ thì $v_0 = v(0) = C$. Do đó

$$v(t) = -6t + v_0.$$

Quãng đường đi được sau 2 giây: $s = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (-6t + v_0)dt = \left(-3t^2 + v_0 t\right)\Big|_0^2 = 2v_0 - 12$.

Theo giả thiết: $s = 20 \Leftrightarrow 2v_0 - 12 = 20 \Leftrightarrow v_0 = 16(m/s)$. Do đó $v(t) = -6t + 16$.

Vận tốc tại thời điểm $t = 2$ giây là $v(2) = -6.2 + 16 = 4(m/s)$.

Lựa chọn đáp án D.

Câu 17. Một ô tô đang chuyển động trên đoạn đường phẳng với vận tốc $5m/s$ thì bắt đầu xuống dốc và từ thời điểm đó nó chuyển động nhanh dần đều, 5 giây sau đạt vận tốc $20m/s$. Đến hết đoạn dốc ô tô đạt vận tốc $32m/s$. Tính độ dài đoạn dốc nói trên.

A. $62,5 m$.

B. $160 m$.

C. $166,5 m$.

D. $162,5 m$.

HD giải:

Hàm vận tốc: $v(t) = at + b$ ($a > 0$); vì $v(0) = 5$, $v(5) = 20$ nên $a = 3$, $b = 5$, vậy $v(t) = 3t + 5$.

Cách khác: $v(t) = 5(1 + mt)$; vì $v(5) = 20$ nên $m = \frac{3}{5}$, vậy $v(t) = 3t + 5$.

Gọi T là thời gian ô tô đi hết đoạn dốc, ta có: $v(T) = 32 \Leftrightarrow T = 9(s)$.

Độ dài đoạn dốc: $s = \int_0^T v(t)dt = \int_0^9 (3t + 5)dt = \left(\frac{3t^2}{2} + 5t\right)\Big|_0^9 = 166,5(m)$.

Lựa chọn đáp án C.

Câu 18. Một túi nilon đựng một lượng nước có trọng lượng $5(N)$ được nâng từ mặt đất lên không trung với tốc độ cố định. Bao nilon thủng khi bắt đầu nâng và nước rỉ ra với tốc độ không đổi. Khi nâng đến độ cao 50 mét thì trong bao nilon không còn nước. Bỏ qua trọng lượng túi nilon, hỏi công sinh ra khi nâng bao nước từ mặt đất đến độ cao 50 mét bằng bao nhiêu?

A. $150(J)$.

B. $50(J)$.

C. $250(J)$.

D. $125(J)$.

HD giải:

Lực $F(x)$ dùng để nâng bao nước chính bằng trọng lượng của nước. Từ giả thiết suy ra $F(x)$ là hàm bậc nhất theo độ cao x của bao nước:

$$F(x) = 5\left(\frac{50-x}{50}\right) = 5 - \frac{x}{10} (N).$$

Công sinh ra: $A = \int_0^{50} F(x)dx = \int_0^{50} \left(5 - \frac{x}{10}\right)dx = \left(5x - \frac{x^2}{20}\right)\Big|_0^{50} = 125(N.m) = 125(J)$.

Lựa chọn đáp án D.

Câu 19. Khi thả một thanh kim loại, một mảnh kim loại từ mặt đất bay lên theo chiều thẳng đứng với vận tốc $v = 15(m/s)$. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8(m/s^2)$ và bỏ qua lực cản không khí, hỏi sau 1 giây mảnh kim loại đã di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu?

- A. $19,9(m)$. B. $5,2(m)$. C. $10,1(m)$. D. $15(m)$.

HD giải:

Mảnh kim loại chịu tác động của trọng lực (ngược chiều với hướng di chuyển) nên gia tốc của mảnh kim loại là $a = -g = -9,8(m/s^2)$. Do đó vận tốc của mảnh kim loại tại thời điểm t giây là:

$$v(t) = \int a dt = \int -9,8 dt = -9,8t + C.$$

Theo đề bài, với $t = 0$ thì $v = 15(m/s)$ nên $C = 15$. Suy ra: $v(t) = -9,8t + 15(m/s)$.

Quãng đường di chuyển của mảnh kim loại sau 1 giây:

$$s(t) = \int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 (-9,8t + 15) dt = \left(-4,9t^2 + 15t \right) \Big|_0^1 = 10,1(m).$$

Lựa chọn đáp án C.

Câu 20. Một lò xo có chiều dài tự nhiên $30cm$, để nén lò xo xuống còn $20cm$ ta cần dùng một lực $40(N)$. Nếu ta tiếp tục nén lò xo nói trên từ $20cm$ xuống còn $15cm$ thì công sinh ra bằng bao nhiêu?

- A. $2,5(J)$. B. $6,5(J)$. C. $2(J)$. D. $0,5(J)$.

HD giải: Độ nén của lò xo: $x = 0,3 - 0,2 = 0,1(m)$, $F = 40(N)$.

Vì $F = k.x$, với k là độ cứng của lò xo, suy ra $k = \frac{40}{0,1} = 400(N/m)$. Do đó lực nén là

$$F = 400x.$$

Tiếp tục nén lò xo, độ nén: $x_1 = 0,3 - 0,2 = 0,1m$ và $x_2 = 0,3 - 0,15 = 0,15m$.

Công sinh ra khi ta tiếp tục nén lò xo từ $20cm$ xuống còn $15cm$:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{0,1}^{0,15} 400x dx = 200x^2 \Big|_{0,1}^{0,15} = 2,5(N.m) = 2,5(J).$$

Lựa chọn đáp án A.

2. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x^3} dx$.

- A. $I = \ln 2$. B. $I = \ln 2 + \frac{11}{8}$. C. $I = \ln 2 - \frac{5}{8}$. D. $I = -1 + \ln 2$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_1^4 \frac{3\sqrt{x} + 2 - 5x}{x\sqrt{x}} dx$.

- A. $I = -8 + 6\ln 2$. B. $I = 6\ln 2$. C. $I = 10\ln 2$. D. $I = 6\ln 2 + 8$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x + \frac{1}{x}} + 2 \, dx$.

- A. $I = \frac{8}{3}$. B. $I = \frac{20}{3}$. C. $I = \frac{14}{3}$. D. $I = 2$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{(x+1)^3} \, dx$.

- A. $I = \frac{24\sqrt{2}-4}{35}$. B. $I = \frac{24\sqrt{2}}{35}$. C. $I = \frac{4-24\sqrt{2}}{35}$. D. $I = \frac{4+24\sqrt{2}}{35}$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$.

- A. $I = -\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = -\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}$. D. $I = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3}$.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

- A. $I = \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$. B. $I = -\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}$. C. $I = -\frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$. D. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}$.

Câu 7. Tìm các số thực dương x thỏa mãn $\int_{\frac{1}{e}}^x \frac{1+\ln t}{t} dt = 18$

- A. $x = e^7, x = e^5$. B. $x = \frac{1}{e^5}, x = e^7$.
C. $x = \frac{1}{e^7}, x = e^5$. D. $x = e^{-7}, x = e^{-5}$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_2^3 f(x) dx$, biết rằng $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

- A. $I = -\frac{120}{8281}$. B. $I = \frac{120}{8281}$. C. $I = \ln \frac{13}{7}$. D. $I = \ln \frac{7}{13}$.

Câu 9. Tích phân $\int_1^e x \ln x \, dx$ bằng

- A. $\frac{e^2-1}{4}$. B. $\frac{e^2}{4}$. C. $\frac{e^2+1}{4}$. D. $\frac{e^2+2}{4}$.

Câu 10. Tích phân $\int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 2x) dx$ bằng

- A. $\frac{31}{4}$. B. 8. C. $\frac{33}{4}$. D. $\frac{34}{4}$.

Câu 11. Tích phân $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} \, dx$ bằng

- A. $\frac{\pi-2}{8}$. B. $\frac{\pi-1}{8}$. C. $\frac{\pi+1}{8}$. D. $\frac{\pi+2}{8}$.

Câu 12. Tích phân $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ bằng

- A. $2(\sqrt{3}-1)$. B. $2\sqrt{3}$. C. $2(\sqrt{3}+1)$. D. $2(\sqrt{3}+2)$.

Câu 13. Tích phân $\int_4^6 \frac{x^2-5x+6}{x-3} dx$ bằng

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 14. Cho $a < b < c$, $\int_a^b f(x) dx = 7$, $\int_a^c f(x) dx = 8$. Tính $\int_b^c f(x) dx$.

- A. $\int_b^c f(x) dx = 1$. B. $\int_b^c f(x) dx = 15$.
C. $\int_b^c f(x) dx = -1$. D. $\int_b^c f(x) dx = -15$.

Câu 15. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^3(x+1)}$.

- A. $I = 2\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. B. $I = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{8}$. C. $I = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{8}$. D. $I = -\ln\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$.

Câu 16. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2(2x-1)}$.

- A. $I = 2\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$. B. $I = \ln\frac{3}{2} + 1$. C. $I = -1 + \ln\frac{3}{2}$. D. $I = \ln\frac{3}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{2x^2-x+3}{x+2} dx$.

- A. $I = 13\ln\frac{3}{2} - 4$. B. $I = 3\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$. C. $I = -3\ln\frac{3}{2} + 4$. D. $I = \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.

Câu 18. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4} dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}\ln 2$. B. $I = \frac{1}{12} + \ln 2$. C. $I = \frac{1}{12}$. D. $I = \frac{1}{12} - \ln 2$.

Câu 19. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{2x-3}{x^2+4x+4} dx$.

- A. $I = \ln\frac{3}{2} - \frac{7}{3}$. B. $I = 2\ln\frac{3}{2} + \frac{7}{6}$. C. $I = 2\ln\frac{3}{2} + \frac{7}{3}$. D. $I = 2\ln\frac{3}{2} - \frac{7}{6}$.

Câu 20. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

- A. $I = -\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. B. $I = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. C. $I = \ln\frac{8}{5}$. D. $I = \frac{1}{2} + \ln\frac{8}{5}$.

Câu 21. Tính tích phân $I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dx}{x^4+2x}$.

A. $I = -\frac{1}{6} \ln \frac{3}{2}$. B. $I = 2 \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{6}$. C. $I = 2 \ln \frac{3}{2}$. D. $I = \frac{1}{6} \ln \frac{3}{2}$.

Câu 22. Biết rằng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^6 f(x) dx = 7$, tính tích phân $I = \int_{-4}^{12} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$.

A. $I = \frac{7}{2}$. B. $I = 7$. C. $I = 14$. D. $I = 28$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{4\pi} f'(x) dx = \frac{7\pi}{2}$. Tính $f(4\pi)$.

A. $f(4\pi) = \pi$. B. $f(4\pi) = 2\pi$. C. $f(4\pi) = \frac{5\pi}{2}$. D. $f(4\pi) = 5\pi$.

Câu 24. Xét tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$ và đặt $t = \sqrt{x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $dx = 2t dt$. B. $I = 2 \int_0^1 t^2 (t^2 + 1) dt$.
C. $I = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2) dt$. D. $I = \frac{4}{15} (\sqrt{2} + 1)$.

Câu 25. Xét tích phân $I = \int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{dx}{x^2 + 9}$ và đặt $x = 3 \tan t$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $dx = \frac{3}{\cos^2 t} dt$. B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{3} dt$.
C. $9 + x^2 = \frac{9}{\cos^2 t}$. D. $I = \frac{\pi}{9}$.

Câu 26. Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt[3]{3x+1}$ thì khẳng định nào trong các khẳng định sau là sai?

A. $dx = t^2 dt$. B. $I = \int_1^2 \frac{t^4 + 2t}{3} dt$.
C. $I = \int_1^2 \frac{(t^2 + 1)^2 - 2t^2 + 2t - 1}{3} dt$. D. $I = \frac{46}{5}$.

Câu 27. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2^x + 1} dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{2^x + 1} dx$. B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2^x + 1} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{2^x + 1} dx$.

$$C. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2^x + 1} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{2^x + 1} dx.$$

$$D. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2^x + 1} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos x}{2^x + 1} dx.$$

Câu 28. Đặt $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ và $x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $dx = -2 \cos t dt$.

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}$.

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

D. $I = \frac{\pi}{3}$.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{4x dx}{(2x+1)^3}$.

A. $I = \frac{13}{9}$.

B. $I = \frac{2}{9}$.

C. $I = \frac{1}{9}$.

D. $I = \frac{1}{3}$.

Câu 30. Tính tích phân $I = \int_1^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = -2$.

C. $I = -3$.

D. $I = 1$.

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{4x-9}{4x^2+4x+1} dx$.

A. $I = \frac{11}{3} - \ln 3$.

B. $I = \frac{11}{3} + \ln 3$.

C. $I = \frac{11}{3} - 2 \ln 3$.

D. $I = -\frac{11}{3} + \ln 3$.

Câu 32. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + 2x} dx$.

A. $I = \frac{1}{4} \ln 2$.

B. $I = \frac{1}{2} \ln 3$.

C. $I = \frac{1}{4} \ln 3$.

D. $I = \frac{1}{4} \ln \frac{2}{9}$.

Câu 33. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{2x^3 - x}$.

A. $I = \ln 2\sqrt{7}$.

B. $I = \frac{1}{2} \ln \sqrt{7}$.

C. $I = \ln \frac{\sqrt{7}}{2}$.

D. $I = \frac{1}{2} \ln \sqrt{7} - \ln 2$.

Câu 34. Cho các hàm số $f(x) = 3x^3 - x^2 - 4x + 1$ và $g(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 1$. Tính tích phân $I = \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = -\frac{5}{12}$.

D. $I = \frac{5}{12}$.

Câu 35. Tính tích phân $I = \int_2^3 \frac{2x-3}{x^3-3x+2} dx$.

A. $I = -\frac{1}{6} + \frac{7}{9} \ln \frac{8}{5}$.

B. $I = -\frac{1}{6} - \frac{7}{9} \ln \frac{4}{5}$.

C. $I = -\frac{1}{2} + \frac{7}{9} \ln \frac{4}{5}$.

D. $I = \frac{1}{2} + \frac{7}{9} \ln \frac{8}{5}$.

Câu 36. Đặt $f(t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^t (\sin x + \cos x) dx$, ($t \in \mathbb{R}$). Nghiệm của phương trình $f(t) = 0$ là

- A. $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 B. $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 D. $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37. Biết tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 10} \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x - 2}} dx = \frac{a}{b}$; trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $2a = 7b$.
 B. $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 4$.
 C. $a^2 + b^2 = 85$
 D. $a - b = 7$.

Câu 38. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)^n \sin 2x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- A. $I = \frac{1}{2n-1}$.
 B. $I = \frac{1}{2n}$.
 C. $I = \frac{1}{2n+1}$.
 D. $I = \frac{1}{2n+2}$.

Câu 39. Giá trị nào sau đây của n thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^{2n+1} x dx = \frac{1}{8}$?

- A. $n = 1$.
 B. $n = 2$.
 C. $n = 3$.
 D. $n = 4$.

Câu 40. Biết $\int_3^5 \frac{5}{x^2 - 1} dx = \frac{5}{2} \ln \frac{a}{b}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Hãy tính ab .

- A. $ab = 3$.
 B. $ab = 9$.
 C. $ab = 12$.
 D. $ab = 144$.

Câu 41. Cho $\int_3^7 \left(\frac{1}{2x-5} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{a}{b}$ trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\sqrt[3]{a} + b = 8$.
 B. $\frac{a}{3} - \frac{b}{5} = 10$.
 C. $a + b = 32$.
 D. $a^2 + b^2 = 754$.

Câu 42. Tính $I = \int_0^a x \sin x dx$ ($a > 0$) theo a .

- A. $I = -a \cos a + \sin a$.
 B. $I = a \cos a - \sin a$.
 C. $I = -\frac{a^2}{2} \cos a$.
 D. $I = \frac{a^2}{2} \cos a$.

Câu 43. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 (x^3 + 1)^2 dx$.

- A. $I = -\frac{7}{9}$.
 B. $I = \frac{7}{9}$.
 C. $I = \frac{8}{9}$.
 D. $I = 1$.

Câu 44. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} e^{2x} (e^x + 1)^3 dx$.

A. $I = \frac{519}{20}$.

B. $I = \frac{617}{20}$.

C. $I = \frac{142}{5}$.

D. $I = \frac{519}{5}$.

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5}{(x^3+1)^2} dx$.

A. $I = \frac{1}{3} \ln 2$.

B. $I = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{6}$.

C. $I = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$.

D. $I = \frac{1}{6} \ln 2$.

Câu 46. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$.

A. $I = \frac{7}{3}$.

B. $I = \frac{5}{3}$.

C. $I = \frac{10}{3}$.

D. $I = \frac{8}{3}$.

Câu 47. Tính tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

A. $I = \frac{1}{2 \ln 2}$.

B. $I = -\frac{1}{2 \ln 2}$.

C. $I = -\frac{3}{8}$.

D. $I = \frac{3}{8}$.

Câu 48. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln^2 x + 2 \ln x + 1)}$.

A. $I = \ln \sqrt{2}$.

B. $I = -\frac{1}{2} \ln 2$.

C. $I = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

D. $I = \frac{1}{2} + \ln 2$.

Câu 49. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $I = 2$.

B. $I = 1$.

C. $I = \sqrt{3}$.

D. $I = \sqrt{3} - 1$.

Câu 50. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị bằng tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, với n nguyên dương?

A. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

C. $-\int_0^{\pi} \sin^n x dx$.

D. $\int_0^{\pi} \sin^n x dx$.

Câu 51. Tính tích phân $I = \int_{e^a}^{e^b} \frac{dx}{x \ln x}$ ($b > a > 0$) theo a và b .

A. $I = \ln(ab)$.

B. $I = \ln(a+b)$.

C. $I = \ln \frac{b}{a}$.

D. $I = \ln(b-a)$.

Câu 52. Tính tích phân $I = \int_4^{12} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ được kết quả là $I = a \ln 6 + b \ln 2$. Giá trị của biểu thức $a^2 - 3ab + b^2$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 19.

D. 29.

Câu 53. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ theo a .

A. $I = a$.

B. $I = \ln \frac{e^a + e^{-a}}{4}$.

C. $I = \ln \frac{e^a + e^{-a}}{2}$.

D. $I = \ln(e^a + e^{-a})$.

Câu 54. Để tính tích phân $I = \int_0^5 |x^2 - 9| dx$, một học sinh làm như sau:

Bước 1: $I = \int_0^3 |x^2 - 9| dx + \int_3^5 |x^2 - 9| dx.$

Bước 2: $I = \int_0^3 (x^2 - 9) dx - \int_3^5 (x^2 - 9) dx.$

Bước 3: $I = \left(\frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_0^3 - \left(\frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_3^5 = -18 - 0 - \left(-\frac{10}{3} + 18 \right) = -\frac{98}{3}.$

Hỏi lời giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Lời giải đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Câu 55. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_0^\pi f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$

B. $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$

C. $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$

D. $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$

Câu 56. Tìm số thực n biết $\int_0^n (3x + 5) dx = 16.$

A. $n = -\frac{16}{3}; n = -2.$

B. $n = \frac{16}{3}; n = \frac{4}{3}.$

C. $n = -\frac{16}{3}; n = 2; n = -1.$

D. $n = -\frac{16}{3}; n = 2.$

Câu 57. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 3} e^x \sqrt{e^x + 1} dx.$

A. $I = \frac{2}{3} (8 - 2\sqrt{2}).$

B. $I = \frac{4}{3}.$

C. $I = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{3}.$

D. $I = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{3}.$

Câu 58. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}.$

A. $I = \frac{1}{4} \ln 2.$

B. $I = \frac{1}{4} \ln 3.$

C. $I = \frac{1}{2} \ln 4.$

D. $I = 2 \ln 2.$

Câu 59. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} + 3}.$

A. $I = 2 \ln \frac{3}{4}.$

B. $I = 2 \ln \frac{3}{2}.$

C. $I = \ln \frac{9}{8}.$

D. $I = \ln \frac{3}{4}.$

Câu 60. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$

A. $I = \frac{1}{2}.$

B. $I = \frac{3}{4}.$

C. $I = \frac{5}{6}.$

D. $I = \frac{1}{6}.$

Câu 61. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sin x} dx$.

- A. $I = 4\sqrt{2} + 5$. B. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. C. $I = \frac{4\sqrt{2} + 2}{3}$. D. $I = \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}$.

Câu 62. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$. B. $I = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{192}$. C. $I = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$. D. $I = \frac{\pi + 1}{64}$.

Câu 63. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{1}{3}$. C. $I = 1$. D. $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 64. Cho $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = 7$. Khi đó tích phân $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} [2f(x) + 3 \cos x] dx$ bằng

- A. 11. B. $14 + \frac{9\pi}{2}$. C. 23. D. $14 - \frac{9\pi}{2}$.

Câu 65. Đặt $f(t) = \int_0^t \sin 2x dx$, ($t \in \mathbb{R}$). Nghiệm của phương trình $f(t) = 0$ là

- A. $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
C. $t = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D. $t = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 8$. Khi đó tích phân $\int_0^3 f(2x) dx$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 16.

Câu 67. Nếu $I = \int_{-2}^0 \left(4 - e^{-\frac{x}{2}} \right) dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

- A. 11. B. 9. C. $\frac{25}{2}$. D. 10.

Câu 68. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. B. $\int_a^b k dx = k(b-a)$; $\forall k \in \mathbb{R}$.
C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$; ($c \in [a; b]$). D. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$.

Câu 69. Giả sử $\int_1^5 \frac{1}{2x-1} dx = \ln A$, giá trị của A là

- A. 3. B. 9. C. 81. D. 8.

Câu 70. Giá trị của tích phân $\int_0^3 |x^2 - x - 2| dx$ là

- A. 4. B. 5. C. 3. D. $\frac{31}{6}$.

Câu 71. Giả sử $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_1^4 f(x) dx = 3$; $\int_0^4 g(x) dx = 4$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\int_0^4 f(x) dx < \int_0^4 g(x) dx$. B. $\int_0^4 [f(x) - g(x)] dx = 1$.
C. $\int_0^4 [f(x) + g(x)] dx = 9$. D. $\int_0^4 f(x) dx > \int_0^4 g(x) dx$.

Câu 72. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
B. Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
C. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$, với mọi $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$.
D. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \frac{1}{a} [F(ax_2+b) - F(ax_1+b)]$, $a \neq 0$.

Câu 73. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\int_{-3}^3 x^2 dx = 0$. B. $\int_{-3}^3 (x^2 + 1) dx = 0$.
C. $\int_{-3}^3 x^3 dx = 0$. D. $\int_{-3}^3 (x^2 + x) dx = 0$.

Câu 74. Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và không đổi dấu trên $[a; b]$ thì đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a |f(x)| dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a |f(x)| dx$.
C. $\int_a^b f(x) dx = \pm \int_b^a |f(x)| dx$. D. $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_b^a f(x) dx \right|$.

Câu 75. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4}$ bằng

- A. $\frac{31}{5}$. B. $-\frac{31}{5}$. C. $\frac{7}{24}$. D. $-\frac{7}{24}$.

Câu 76. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = 0$. B. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = 0$.

C. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \, dx = 0.$

D. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \, dx = 0.$

Câu 77. Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều xác định, liên tục và cùng không đổi dấu trên $[a; b]$ thì đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] \, dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) \, dx \right).$

B. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \, dx = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}.$

C. $\int_a^b |f(x) + g(x)| \, dx = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \, dx \right|.$

D. $\int_a^b |f(x) + g(x)| \, dx = \left| \int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx \right|.$

Câu 78. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ bằng

A. $\sqrt{2} - 2.$

B. $2 - \sqrt{2}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

D. $\sqrt{2}.$

Câu 79. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx.$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx.$

Câu 80. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} \, dx = m$ thì m thỏa mãn phương trình

A. $\ln x = 1.$

B. $\ln(x-1) = 0.$

C. $\ln(x+1) = 0.$

D. $\ln(x+1) = 1.$

Câu 81. Giả sử $\int_0^5 f(x) \, dx = 5$, $\int_0^6 f(x) \, dx = 8$. Khi đó $\int_5^6 f(x) \, dx$ bằng

A. 3.

B. -3.

C. 13.

D. -13.

Câu 82. Tập hợp các giá trị của số thực b sao cho $\int_0^b (2x-4) \, dx = 5$ là

A. $\{5\}.$

B. $\{5; -1\}.$

C. $\{4\}.$

D. $\{4; -1\}.$

Câu 83. Nếu $\int_1^5 f(x) \, dx = a$, $\int_4^5 f(x) \, dx = b$ thì $\int_1^4 f(x) \, dx$ bằng

A. $a-b.$

B. $b-a.$

C. $a+b.$

D. $a-4b.$

Câu 84. Cho $\int_0^a f(x)dx = 5$ và $f(x)$ là hàm số chẵn. Khi đó $\int_0^{-a} f(x)dx$ bằng

- A. 0. B. 5. C. -5. D. 10.

Câu 85. Cho tích phân $I = \int_{3\sqrt{2}}^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ và đặt $x = \frac{3}{\cos t}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $dx = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt$. B. $I = \frac{\pi}{36}$.
C. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t dt}{3 \cos t \tan t}$. D. $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sin t dt}{3 \tan t}$.

Câu 86. Cho tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ và đặt $u = x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $du = 2x dx$. B. $I = 2\sqrt{3}$. C. $I = \int_0^2 \sqrt{u} du$. D. $I = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$.

Câu 87. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^m x \cos x dx = \frac{1}{64}$. Khi đó m bằng

- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 88. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $\int_0^{\pi} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| dx$.
B. $\int_0^{\pi} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = \int_0^{\pi} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$.
C. $\int_0^{\pi} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$.
D. $\int_0^{\pi} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$.

Câu 89. Giá trị $\int_0^1 x e^{1-x} dx$ bằng

- A. $1-e$. B. $e-2$. C. $e-1$. D. $2-e$.

Câu 90. Giải phương trình ẩn t sau đây $\int_0^t \cos x dx = 0$ ($t \in \mathbb{R}$).

- A. $t = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. B. $t = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $t = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 91. Dựa vào ý nghĩa hình học của tích phân, hãy tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{x-1}{e-1} dx.$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx.$

C. $\int_0^1 e^{-x} dx > \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 dx.$

D. $\int_0^1 e^{-x^2} dx > \int_0^1 e^{-x^3} dx.$

Câu 92. Tính tích phân $I = \int_{-a}^0 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - ax}}$, với a là số thực dương.

A. $I = \sqrt{2} a.$

B. $I = (-2 + 2\sqrt{2})a.$

C. $I = -2 + 2\sqrt{2}.$

D. $I = 2 - \sqrt{2}.$

Câu 93. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^n \sin x dx.$

A. $I = \frac{1}{2n}.$

B. $I = \frac{1}{n+1}.$

C. $I = \frac{1}{n-1}.$

D. $I = \frac{1}{2n-1}.$

Câu 94. Tích phân nào dưới đây có kết quả bằng $\frac{\pi}{4}$?

A. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{2+x^2}.$

B. $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}.$

C. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}.$

Câu 95. Cho $I = \int_0^1 (tx - e^x) dx, (t \in \mathbb{R})$. Tất cả các giá trị t để $I < 1 + e$ là

A. $t < 4e.$

B. $t < 4e + 1.$

C. $t < 2e.$

D. $t < 2e + 2.$

Câu 96. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển được tính từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm vật dừng lại bằng

A. 1280 (m).

B. 640 (m).

C. 3840 (m).

D. 2560 (m).

Câu 97. Một vật đang di chuyển với vận tốc 10m/s thì bắt đầu tăng tốc chuyển động nhanh dần đều và 3 giây sau nó đạt vận tốc 16m/s. Tính quãng đường vật di chuyển tính từ lúc vật bắt đầu tăng tốc đến khi nó đạt vận tốc 24m/s.

A. 119 (m).

B. 21 (m).

C. 168 (m).

D. 94,5 (m).

Câu 98. Một túi nước có trọng lượng 10 (N) được nâng từ mặt đất lên không trung với tốc độ cố định. Nước trong túi bị rỉ ra ngoài với tốc độ rỉ nước không đổi. Khi nâng đến độ cao 20 mét thì trong túi không còn nước. Bỏ qua trọng lượng túi, tính công sinh ra khi nâng túi nước nói trên từ độ cao 5 mét đến độ cao 10 mét.

- A. 18,75 (J). B. 75 (J). C. 31,25 (J). D. 25 (J).

Câu 99. Phóng một vật từ mặt đất lên cao theo chiều thẳng đứng với vận tốc $v = 49(m/s)$. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8(m/s^2)$ và bỏ qua lực cản không khí, tính độ cao của vật nói trên khi vật dừng lại trên không trung.

- A. 245 (m). B. 122,5 (m). C. 102,9 (m). D. 147 (m).

Câu 100. Một lò xo có chiều dài tự nhiên 10cm, để nén lò xo xuống còn 8cm ta cần dùng một lực 20(N). Tính công sinh ra khi nén lò xo nói trên từ chiều dài tự nhiên xuống còn 7cm.

- A. 0,2(J). B. 10 (J). C. 0,05 (J). D. 0,45 (J).

..... **HẾT**

3. ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án										
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án										
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án										
Câu	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Đáp án										
Câu	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Đáp án										
Câu	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Đáp án										
Câu	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Đáp án										
Câu	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Đáp án										
Câu	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Đáp án										
Câu	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Đáp án										

Trong phần câu hỏi trắc nghiệm tự luyện, tác giả có sử dụng một số câu hỏi của Thầy Lê Bá Bảo, Cô Nguyễn Thu Hà (CLB Giáo viên trẻ TP Huế) và sách trắc nghiệm 2007. Dù biên soạn rất kỹ, song chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Mong bạn đọc phản hồi để cùng tác giả hoàn thiện nội dung trên. Xin cảm ơn! Xin tặng các Thầy Cô và các em học sinh chuyên đề này!

Tác giả: PHẠM THANH PHƯƠNG_THPT KHAI TRÍ_ĐÀ NẴNG

Địa chỉ: (đường Nam Cao) HÒA KHÁNH – ĐÀ NẴNG

Facebook: baalphadanang

Page: CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ