

CHUYÊN ĐỀ

KHAI THÁC HAI TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY - NINH BÌNH**

Chương I. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN

Trong khuôn khổ sáng kiến, tôi chỉ đề cập đến một ứng dụng nhỏ của đạo hàm trong việc chứng minh bất đẳng thức, đó chính là *phương pháp tiếp tuyến*. Ý tưởng chính của phương pháp tiếp tuyến là sử dụng công thức phương trình tiếp tuyến của một đồ thị hàm số để tìm một biểu thức trung gian trong các đánh giá bất đẳng thức.

1.1 Kiến thức chuẩn bị

Trước hết ta nhắc lại một bài toán sau: Cho hàm số $f(t)$ liên tục và có đạo hàm trên D . Khi đó, nếu tiếp tuyến tại một điểm $t_0 \in D$ (giả sử có phương trình $y = a(t - t_0) + b$) luôn nằm trên (nằm dưới) đồ thị hàm số f trên một lân cận $D_0 \subset D$ nào đó của t_0 thì hiển nhiên ta có $f(t) \leq a(t - t_0) + b$ (hay $f(t) \geq a(t - t_0) + b$), $\forall t \in D_0$.

Từ tính chất này ta thấy với mọi $t_1, t_2, \dots, t_n \in D_0$ thì

$$f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n) \leq a(t_1 + t_2 + \dots + t_n - nt_0) + nb.$$

Như vậy, nếu một bất đẳng thức có dạng “tổng hàm” như ở vế trái của bất đẳng thức trên và có giả thiết $t_1 + t_2 + \dots + t_n = nt_0$ với đẳng thức xảy ra khi tất cả các biến t_i đều bằng nhau và bằng t_0 thì ta có thể thử chứng minh nó bằng phương pháp tiếp tuyến, nghĩa là ta sẽ tìm phương trình tiếp tuyến $y = a(t - t_0) + b$ tại điểm t_0 của đồ thị hàm số $y = f(t)$, rồi sau đó tiến hành kiểm chứng BĐT $f(t) \leq a(t - t_0) + b$ (hay $f(t) \geq a(t - t_0) + b$), $\forall t \in D_0$.

1.2 Một số ví dụ minh họa

★ **Ví dụ 1.** Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh

$$\frac{a}{5+3a^2} + \frac{b}{5+3b^2} + \frac{c}{5+3c^2} + \frac{d}{5+3d^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

+ Từ giả thiết suy ra $a, b, c, d \in [0; 4]$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t}{5+3t^2}$ tại điểm $M\left(1; \frac{1}{8}\right)$ là $y = \frac{1}{32}(t+3)$.

+ Ta có $\frac{t}{5+3t^2} - \frac{1}{32}(t+3) = \frac{-(t+5)(t-1)^2}{32(5+3t^2)} \leq 0, \forall t \in [0; 4]$ (*)

+ Thay a, b, c, d vào t trong bất đẳng thức (*), cộng vế theo vế ta có đpcm.

☞ **Nhận xét:**

- Khi xét hiệu $f(t) - (a(t - t_0) + b)$, ta thường tách được nghiệm kép $t = t_0$ (điểm dấu đẳng thức xảy ra).
- Khi trình bày lời giải, có thể ta không cần viết ra các giai đoạn tìm tiếp tuyến mà đưa ra luôn bất đẳng thức đặc trưng cho bài toán cần chứng minh.

Tương tự, ta yêu cầu học sinh lên trình bày Ví dụ 2 và Ví dụ 3.

★**Ví dụ 2.** Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+2}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+2}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+2}\right)^3 + \left(\frac{d}{d+2}\right)^3 \geq \frac{4}{27}.$$

Lời giải

+ Từ giả thiết suy ra $a, b, c, d \in (0; 4)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \left(\frac{t}{t+2}\right)^3$ tại điểm $M\left(1; \frac{1}{27}\right)$ là $y = \frac{2}{27}t - \frac{1}{27}$.

+ Ta chứng minh $\left(\frac{t}{t+2}\right)^3 \geq \frac{2t-1}{27}, \forall t \in (0; 4)$ (*) $\Leftrightarrow 2(t-1)^2(t^2 - 6t - 4) \leq 0 \forall t \in (0; 4)$

(luôn đúng vì $t^2 - 6t - 4 = t(t-4) - 2t - 4 < 0, \forall t \in (0; 4)$)

+ Thay a, b, c, d vào t trong bất đẳng thức (*), cộng vế theo vế ta có đpcm.

★**Ví dụ 3.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}.$$

Hướng dẫn

+ Xét hàm $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ trên $(0; 1)$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{10}\right)$ là $y = \frac{18}{25}t + \frac{3}{50}$.

+ Ta chứng minh $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{18}{25}t + \frac{3}{50}, \forall t \in (0; 1)$.

★**Ví dụ 4.** Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$

Lời giải

+ Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) \geq \frac{1}{8}.$$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = 6t^3 - t^2$ tại điểm $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{32}\right)$ là $y = \frac{5t-1}{8}$.

+ Ta có $(6t^3 - t^2) - \frac{5t-1}{8} = \frac{1}{8}(4t-1)^2(3t+1) \geq 0, \forall t \in (0;1) \Rightarrow f(t) \geq \frac{5t-1}{8}, \forall t \in (0;1) (*)$.

+ Thay a, b, c, d vào t trong bất đẳng thức (*), cộng vế theo vế ta có đpcm.

Qua Ví dụ 4, yêu cầu học sinh tương tự làm Ví dụ 5.

★ **Ví dụ 5.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\frac{a^2 + 9}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 5.$$

Hướng dẫn

+ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2 + 9}{2a^2 + (3-a)^2} + \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (3-b)^2} + \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (3-c)^2} \leq 5.$$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 9}{2t^2 + (3-t)^2}$ tại điểm $M\left(1; \frac{5}{3}\right)$ là $y = \frac{t+4}{3}$.

+ Ta đi chứng minh $\frac{t^2 + 9}{2t^2 + (3-t)^2} \leq \frac{t+4}{3}, \forall t \in (0;3)$

$$\text{Thật vậy } \frac{t^2 + 9}{2t^2 + (3-t)^2} = \frac{t^2 + 9}{3t^2 - 6t + 9} = \frac{1}{3} + \frac{2t+6}{3(t-1)^2 + 6} \leq \frac{1}{3} + \frac{2t+6}{6} = \frac{t+4}{3}.$$

☞ **Nhận xét:**

Qua các ví dụ trên ta thấy việc xác định dấu của biểu thức $f(t) - (a(t-t_0) + b)$ trên D có thể làm như sau:

- Dựa vào dấu của bất đẳng thức cần chứng minh.
- Dự đoán bằng cách thay một giá trị bất kì của $t \in D$ vào biểu thức $f(t) - (a(t-t_0) + b)$.
- Phân tích $f(t) - (a(t-t_0) + b) = (t-t_0)^2 \cdot h(t)$ và xác định dấu của $h(t)$ trên D .

Trong các ví dụ trên ta đều sử dụng cách 3. Tuy nhiên trong một số bài toán việc phân tích như trên gặp khó khăn vì bài toán chứa căn thức. Do đó, ta có thể gợi ý cho học sinh sử

dụng phương pháp hàm số, tận dụng luôn kết quả mà các em tính đạo hàm của hàm $f(t)$ khi lập phương trình tiếp tuyến và chú ý đạo hàm của hàm số $f(t) - (a(t-t_0) + b)$ vẫn có nghiệm $t = t_0$. Ta xét tiếp ví dụ sau:

★**Ví dụ 6.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}} \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Hướng dẫn

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ là $y = \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15x - 1)$.

+ Ta đi chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15x - 1), \forall x \in (0; 1)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}(15x - 1)$ trên $(0; 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Từ bảng biến thiên ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Hướng dẫn

+ Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}$ trên $(0; 1)$.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t)$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{82}}{3}\right)$ là $y = -\frac{40\sqrt{82}}{41}t + \frac{27\sqrt{82}}{41}$.

+ Ta chứng minh $\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \geq -\frac{40\sqrt{82}}{41}t + \frac{27\sqrt{82}}{41}, \forall t \in (0; 1)$ (sử dụng bảng biến thiên).

Các ví dụ trên đều cần có giả thiết $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\alpha$, để sử dụng phương pháp tiếp tuyến. Tuy nhiên trong các bài toán, có sự đồng bậc của tử và mẫu trong từng số hạng hoặc đồng bậc của hai vế bất đẳng thức cần chứng minh, ta vẫn có thể nghĩ đến phương pháp tiếp tuyến nhờ việc chuẩn hóa bài toán. Ta xét ví dụ sau:

★**Ví dụ 7.** Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Lời giải

+ Do mỗi số hạng có tử và mẫu là các biểu thức đẳng cấp nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=3$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \leq 24.$$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t^2+6t+9}{t^2-2t+3}$ tại điểm $M(1;8)$ là $y=4t+4$.

+ Ta đi chứng minh $\frac{t^2+6t+9}{t^2-2t+3} \leq 4t+4, \forall t \in (0;3)$.

★**Ví dụ 8.** Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $(a+b+c) \left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$.

Lời giải

+ Do mỗi số hạng có tử và mẫu là các biểu thức đẳng cấp nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=3$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t}{(3-t)^2}$ tại điểm $M\left(1; \frac{1}{4}\right)$ là $y = \frac{2t-1}{4}$.

+ Ta chứng minh $\frac{t}{(3-t)^2} \geq \frac{2t-1}{4}, \forall t \in (0;3) \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(9-2t)}{4(3-t)^2} \geq 0, \forall t \in (0;3)$ (luôn đúng).

★**Ví dụ 9.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right).$$

Lời giải

+ Vì vai trò của a, b, c như nhau và sự đồng bậc của hai vế nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=1$. Mặt khác, a, b, c là ba cạnh tam giác nên $a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Bất đẳng thức cần

chứng minh trở thành $\left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c}\right) \leq 9$.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{4}{1-t} - \frac{1}{t}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ là $y = 18t - 3$.

+ Ta có $\left(\frac{4}{1-t} - \frac{1}{t}\right) - (18t - 3) = (3t - 1)^2(2t - 1) \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ (*).

+ Thay a, b, c vào t trong bất đẳng thức (*), cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự:

1) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} \leq \frac{6}{5}$.

2) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}$

Hướng dẫn: Nếu đem các số hạng của vế trái bất đẳng thức trừ đi 1 thì ta có được các số hạng của bất đẳng thức ở bài 1.

3) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Bất đẳng thức trên có rất nhiều có cách chứng minh ngắn gọn. Tuy nhiên trong chuyên đề này chúng ta hướng dẫn học sinh sử dụng phương pháp tiếp tuyến. Không mất tính tổng quát ta chứng minh bất đẳng thức cho trường hợp $a + b + c = 3$. Khi đó, bất đẳng

thức cần chứng minh có dạng $\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$. Ta đi chứng minh

$$\frac{t}{3-t} \geq \frac{3t-1}{4}, t \in (0; 3).$$

Việc sử dụng tính chất của logarit $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ ($a, b, c > 0, a \neq 1$), ta có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến để chứng minh bài toán bất đẳng thức với giả thiết $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \alpha^n$ nhờ sử dụng ẩn phụ.

★**Ví dụ 10.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}} \leq a + b + c.$$

Lời giải

Ta có $abc = 1 \Rightarrow \ln a + \ln b + \ln c = 0$. Đặt $x = \ln a, y = \ln b, z = \ln c$. Khi đó ta có bài toán

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh

$$\left(\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{2}}-e^x\right)+\left(\sqrt{\frac{e^{2y}+1}{2}}-e^y\right)+\left(\sqrt{\frac{e^{2z}+1}{2}}-e^z\right)\leq 0.$$

+ Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\frac{e^{2t}+1}{2}}-e^t$ trên $\mathbb{R}$.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t)$ tại điểm $O(0;0)$ là $y=-\frac{1}{2}t$

+ Ta đi chứng minh $\sqrt{\frac{e^{2t}+1}{2}}-e^t\leq -\frac{1}{2}t, \forall t\in\mathbb{R}$.

Xét hàm $g(t)=\sqrt{\frac{e^{2t}+1}{2}}-e^t+\frac{1}{2}t\Rightarrow g'(t)=\frac{e^{2t}}{\sqrt{2(e^{2t}+1)}}-e^t+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow t=0$.

Bài tập tương tự:

1) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh $\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn

Đặt $x = \ln a, y = \ln b, z = \ln c$. Ta có bài toán

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

PTTT của đồ thị hàm số $f(t)=\frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ tại điểm $M\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là $y=\frac{3\sqrt{2}}{8}t+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta chứng minh $\frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{8}t + \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall t \in \mathbb{R}$

Xét hàm $g(t)=\frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}-\frac{3\sqrt{2}}{8}t$, lập bảng biến thiên suy ra đpcm.

2) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh $\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \geq 1$.

Trong một số bài toán việc xét hiệu $f(x)-[a(x-x_0)+b]$ mặc dù tách được nghiệm bội $x-x_0$, nhưng hiệu đó không giữ nguyên một dấu trên D . Trong trường hợp đó, ta có thể chia trường hợp để chứng minh. Ta xét một số ví dụ sau:

★**Ví dụ 11.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Lời giải

Nhận xét: Nếu xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2} - t^2$ trên $(0;3)$ thì phương trình tiếp tuyến tại điểm

$$M(1;0) \text{ là } y = -4t + 4$$

Khi đó $\frac{1}{t^2} - t^2 - (-4t + 4) = \frac{(t-1)^2(t+\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}-t)}{t^2}$ lúc âm, lúc dương trên $(0;3)$. Do đó

ta cần chia khoảng giá trị cho các biến a, b, c .

Lời giải

Cách 1.

+ Nếu $3 > a \geq 2,4$ thì $b+c \leq 0,6$. Khi đó, $VP = a^2 + b^2 + c^2 < (a+b+c)^2 = 9$.

$$VT = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3^2} + \frac{2}{bc} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{(0,3)^2} > 9.$$

+ Ta chỉ xét các số $a, b, c \in (0;2,4)$. Khi đó, sử dụng phương trình tiếp tuyến ta có

$$\frac{1}{t^2} - t^2 - (-4t + 4) = \frac{(t-1)^2(t+\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}-t)}{t^2} \geq 0, \forall t \in (0;2,4).$$

Cách 2.

Ta thấy nếu có một số trong ba số a, b, c nhỏ hơn $\frac{1}{3}$ khi đó

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 = (a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2, \text{ bất đẳng thức luôn đúng.}$$

Vậy ta chỉ xét $a, b, c \geq \frac{1}{3}$. Vì $a+b+c=3 \Rightarrow a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{t^2} - t^2 - (-4t + 4) = \frac{(t-1)^2[2-(t-1)^2]}{t^2} \geq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right].$$

★**Ví dụ 12.** Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2 + (a+c)^2} + \frac{c^2}{c^2 + (b+a)^2} \geq \frac{3}{5}$.

Hướng dẫn

+ Không mất tính tổng quát ta giả sử $a + b + c = 3$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có

$$\text{dạng } \frac{a^2}{2a^2 - 6a + 9} + \frac{b^2}{2b^2 - 6b + 9} + \frac{c^2}{2c^2 - 6c + 9} \geq \frac{3}{5}.$$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 - 6t + 9}$ tại điểm $M\left(1; \frac{1}{5}\right)$ là $y = \frac{12t - 7}{25}$

$$+ \text{ Xét } \frac{t^2}{2t^2 - 6t + 9} - \frac{12t - 7}{25} = \frac{3(t-1)^2(21-8t)}{25(2t^2 - 6t + 9)} \geq 0, \forall t \in \left(0; \frac{21}{8}\right) (*)$$

+ Vậy nếu $a, b, c \in \left(0; \frac{21}{8}\right)$ thì thay t lần lượt bởi a, b, c trong (*) và cộng các bất đẳng thức theo vế ta có điều cần chứng minh.

+ Nếu có 1 số nào đó trong ba số a, b, c lớn hơn hoặc bằng $\frac{21}{8}$. Giả sử $a \geq \frac{21}{8}$

$$\text{Ta có } \frac{a^2}{2a^2 - 6a + 9} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{a} - 1\right)^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{9}{21^2}} = \frac{49}{50} > \frac{3}{5}.$$

$$(\text{Vì } 3 > a \geq \frac{21}{8} \Rightarrow 1 < \frac{3}{a} \leq \frac{24}{21} \Rightarrow 0 < \frac{3}{a} - 1 \leq \frac{3}{21}).$$

Trong các bài toán trên dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại điểm các biến bằng nhau. Tuy nhiên có những bài toán dấu bằng còn xảy ra tại những điểm khác nữa hoặc có một dấu bằng nhưng không phải tại các biến bằng nhau, ta phải đánh giá như thế nào. Khi đó, phương pháp tiếp tuyến có giải quyết được không?

Những bài toán như vậy thường là những bài toán khó, việc sử dụng tiếp tuyến tưởng như không thể. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ta vẫn có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến theo từng trường hợp đẳng thức. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

★**Ví dụ 13.** Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Lời giải

+ Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $\frac{a^2}{2a^2 - 2a + 3} + \frac{b^2}{2b^2 - 2b + 3} + \frac{c^2}{2c^2 - 2c + 3} \leq 1$

+ Ta thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ (cùng các hoán vị).

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 - 2t + 3}$ tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là $y = \frac{4t-1}{9}$.

+ Khi đó $\frac{t^2}{2t^2 - 2t + 3} - \frac{4t-1}{9} = \frac{(3-8t)(t-1)^2}{9(2t^2 - 2t + 3)}$

+ Nếu cả ba số $a, b, c \geq \frac{3}{8}$ thì ta có điều phải chứng minh.

+ Nếu có 1 số nhỏ hơn $\frac{3}{8}$. Giả sử $c < \frac{3}{8}$ thì điểm rơi của bài toán không còn là $a = b = c = 1$ và

$a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ mà chỉ còn $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$. Do đó, rất tự nhiên ta nghĩ đến lập phương trình

tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 - 2t + 3}$ tại điểm $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Phương trình đó là

$$y = \frac{4t+3}{18}.$$

+ Ta có $\frac{t^2}{2t^2 - 2t + 3} - \frac{4t+3}{18} = \frac{(-2t-1)(2t-3)^2}{18(2t^2 - 2t + 3)} \leq 0, \forall t \in (0; 3)$ (*)

+ Ta sử dụng (*) cho a, b ta có $\frac{a^2}{2a^2 - 2a + 3} + \frac{b^2}{2b^2 - 2b + 3} \leq \frac{(4a+3) + (4b+3)}{18} = 1 - \frac{2c}{9}$

+ Từ đây ta chỉ cần chứng minh $\frac{c^2}{2c^2 - 2c + 3} \leq \frac{2c}{9} \Leftrightarrow c(4c^2 - 13c + 6) \geq 0$. Bất đẳng thức này

hiển nhiên đúng với $c < \frac{3}{8}$.

Ta đã biết có nhiều bất đẳng thức liên quan đến tổng các số dương. Ví dụ như

$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ hoặc $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Do đó, trong một số bài toán giả thiết

có thể không cho dưới dạng tổng $a+b+c$ hay kết luận của bài toán các số hạng chứa đồng thời các biến (nghĩa là chưa xác định được hàm đặc trưng cho bất đẳng thức) ta vẫn có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến. Ta xét ví dụ sau:

★**Ví dụ 14.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a+b+c) \geq 2\sqrt{3}.$$

Lời giải

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{1}{t} - t$ tại điểm $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ là $y = -4t + 2\sqrt{3}$.

+ Ta có $\frac{1}{t} - t \geq -4t + 2\sqrt{3}, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}t-1)^2}{t} \geq 0, \forall t \in (0;1)$ (luôn đúng).

+ Do đó, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a+b+c) \geq -4(a+b+c) + 6\sqrt{3} \geq 2\sqrt{3}$

(Vì $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 3 \Rightarrow -(a+b+c) \geq -\sqrt{3}$).

★**Ví dụ 15.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$$

Lời giải

Nhận xét: Trong bài toán trên dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Tuy nhiên trong kết luận của bài toán ta chưa xác định được hàm đặc trưng.

+ Ta có $\frac{a}{1+bc} \geq \frac{a}{1+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} = \frac{a}{1+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2} = \frac{4a}{a^2-2a+5}$

+ Ta đi chứng minh $\frac{4a}{a^2-2a+5} + \frac{4b}{b^2-2b+5} + \frac{4c}{c^2-2c+5} \geq \frac{9}{10}$

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{4t}{t^2-2t+5}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{10}\right)$ là $y = \frac{99t-3}{100}$.

+ Ta có $\frac{4t}{t^2-2t+5} - \frac{99t-3}{100} = \frac{(3t-1)^2(15-11t)}{100(t^2-2t+5)} \geq 0, \forall t \in (0;1)$ (*).

+ Thay a, b, c bởi t trong (*) và cộng các bất đẳng thức theo vế ta có đpcm.

Bài tương tự: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}.$$

★**Ví dụ 16.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1.$$

Lời giải

+ Ta có $\frac{1}{4-ab} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)}$

+ Tương tự, ta có $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)} + \frac{2}{8-(b^2+c^2)} + \frac{2}{8-(c^2+a^2)}$

+ Để vận dụng giả thiết $a^4 + b^4 + c^4 = 3$, ta đặt $x = (a^2 + b^2)^2, y = (b^2 + c^2)^2, z = (c^2 + a^2)^2$.

Khi đó

$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = (a^2 + b^2)^2 + (b^2 + c^2)^2 + (c^2 + a^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4) + 2(b^4 + c^4) + 2(c^4 + a^4) = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y, z \in (0; 12)$

+ Ta đi chứng minh $\frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2}$

+ Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 4$.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \frac{1}{8-\sqrt{t}}$ tại điểm $M\left(4; \frac{1}{6}\right)$ là $y = \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$.

+ Ta có $\frac{1}{8-\sqrt{t}} \leq \left(\frac{1}{144}t + \frac{5}{36}\right), \forall t \in (0; 12)$ (*).

+ Thay x, y, z bởi t trong (*) và cộng các bất đẳng thức theo về ta có đpcm.

Tuy nhiên trong bài toán sau (nhìn tương tự như Ví dụ 14) thì phương pháp tiếp tuyến không giải quyết được.

★ **Ví dụ 17.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Nhận xét: Ta thấy, phương pháp tiếp tuyến cũng chỉ là trường hợp riêng của bài toán sau:

Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ thỏa mãn điều kiện $g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_n) = ng(\alpha)$ với $\alpha \in D$. Chứng minh $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\alpha)$ ($\leq nf(\alpha)$)

Để giải bài toán trên ta thường nghĩ đến một phương án là biểu diễn $f(a_i)$ qua $g(a_i)$, nên ta xét hàm số $h(t) = f(t) - m.g(t)$ với $t \in D$. Ở đây, m là số được xác định sao cho α là điểm cực tiểu (cực đại) của hàm số đồng thời $h(\alpha)$ là giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của hàm số trên D .

Vì α là điểm cực tiểu (cực đại) của hàm số nên $h(\alpha) = 0 \Rightarrow m = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Vì $h(\alpha)$ là giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của hàm số trên D nên

$$h(t) = f(t) - m \cdot g(t) \geq h(\alpha) (\leq h(\alpha)), \forall t \in D \quad (*)$$

Khi đó thay $a_1, a_2, \dots, a_n$ vào t trong $(*)$ và cộng theo vế các bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Ta giải bài toán theo phương pháp trên

+ Xét hàm $g(t) = t^2$, $f(t) = \frac{1}{2-t}$. Chọn $m = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{1}{2}$.

+ Xét hàm số $h(t) = \frac{1}{2-t} - \frac{1}{2}t^2$ trên $(0; \sqrt{3})$.

+ Từ bảng biến thiên ta thấy $h(t) \geq \frac{1}{2}, \forall t \in (0; \sqrt{3}) \quad (*)$.

+ Thay a, b, c vào t trong bất đẳng thức $(*)$, cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Yêu cầu học sinh thử giải lại các ví dụ theo phương pháp trên.

Không chỉ trong các bất đẳng thức đại số, mà ngay cả trong một số bất đẳng thức lượng giác, phương pháp tiếp tuyến còn có nhiều áp dụng. Ta xét ví dụ sau:

★ **Ví dụ 18.** Chứng minh rằng

$$1) \quad \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall \Delta ABC.$$

$$2) \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC.$$

$$3) \quad \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}, \forall \Delta ABC \text{ nhọn.}$$

Lời giải

1)

Nhận xét: Đây là một trong những bất đẳng thức cơ bản của tam giác. Học sinh hoàn toàn có thể giải quyết theo kiến thức lớp 11 nhờ sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in (0; \pi).$$

Khi đó, ta có

$$(\sin A + \sin B) + \left(\sin C + \sin \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \sin \frac{A+B}{2} + 2 \sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \leq 4 \sin \frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4} = 4 \sin \frac{\pi}{3}$$

Vậy $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall \Delta ABC.$

Tuy nhiên, trong phương pháp trên học sinh cần nhớ được bất đẳng phụ. Do đó, phương pháp tiếp tuyến ta thấy tương đối dễ vận dụng đối với học sinh:

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \sin t, t \in (0; \pi)$ tại điểm $M\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ là $y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

+ Xét hàm số $g(t) = \sin t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên $(0; \pi).$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow g(t) \leq g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \forall t \in (0; \pi) \Rightarrow \sin t \leq \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall t \in (0; \pi) (*)$.

+ Thay A, B, C bởi t trong $(*)$ và cộng các BĐT theo vế ta có đpcm.

2)

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \cos t, t \in (0; \pi)$ tại $M\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$ là $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}.$

+ Xét hàm số $g(t) = \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ trên $(0; \pi).$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow g(t) \leq g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \forall t \in (0; \pi)$

$\Rightarrow \cos t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}, \forall t \in (0; \pi) (*)$.

+ Thay A, B, C bởi t trong $(*)$ và cộng các BĐT theo vế ta có đpcm.

3)

Cách 1.

+ PTTT của đồ thị hàm số $f(t) = \tan t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ tại $M\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ là $y = 4\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}.$

+ Xét hàm số $g(t) = \tan t - 4\left(t - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow g(t) \geq g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan t \geq 4\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}, \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) (*)$.

+ Thay A, B, C bởi t trong (*) và cộng các BĐT theo vế ta có đpcm.

Cách 2.

Áp dụng đẳng thức trong tam giác ta có

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C, \forall \Delta ABC \text{ nhọn.}$$

Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \Rightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

★ **Ví dụ 19.** Chứng minh $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}, \forall \Delta ABC$.

Lời giải

Cách 1.

+ Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $\ln \sin \frac{A}{2} + \ln \sin \frac{B}{2} + \ln \sin \frac{C}{2} \leq 3 \ln \frac{1}{2}$.

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(t) = \ln \sin \frac{t}{2}, t \in (0; \pi)$ tại điểm $M\left(\frac{\pi}{3}; \ln \frac{1}{2}\right)$ là

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \ln \frac{1}{2}.$$

+ Xét hàm $g(t) = \ln \sin \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{\pi}{3}\right) - \ln \frac{1}{2}$ trên $(0; \pi)$.

+ Từ bảng biến thiên $\Rightarrow g(t) \leq g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \forall t \in (0; \pi)$ (đpcm).

Cách 2.

+ Áp dụng đẳng thức cơ bản trong tam giác

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

+ Theo chứng minh ở **Ví dụ 18**, ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

1.3 Bài tập tự luyện

1) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5$.

2) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

3) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

4) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1.$$

5) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$.

6) Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d \leq 4$. Chứng minh

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

7) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh $10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$.

8) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{(b+c-3a)^2}{(b+c)^2 + 2a^2} + \frac{(c+a-3b)^2}{(c+a)^2 + 2b^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{(a+b)^2 + 2c^2} \geq \frac{1}{2}$.

9) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$.

10) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}(a+b+c)$.

11) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$.

Chương II
KHAI THÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $Y = AX + B$
TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2.1 Kiến thức chuẩn bị

Cho hàm số $y = f(x) = ax + b$. Nếu xét trên đoạn $[\alpha; \beta]$ thì đồ thị của nó là một đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm $A(\alpha; f(\alpha))$ và $B(\beta; f(\beta))$. Do đó,

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}.$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases}.$$

$$\min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min \{f(\alpha); f(\beta)\}.$$

$$\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max \{f(\alpha); f(\beta)\}.$$

2.2 Một số ví dụ minh họa

★ **Ví dụ 1.** Cho $a, b, c \in [0; 2]$. Chứng minh $2(a + b + c) - (ab + bc + ca) \leq 4$.

Lời giải

$$+ \text{Ycbt} \Leftrightarrow f(a) = (2 - b - c)a + 2(b + c) - bc - 4 \leq 0, \forall a \in [0; 2], \forall b, c \in [0; 2].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}, \forall b, c \in [0; 2].$$

$$+ \text{Mà } f(0) = -(2 - b)(2 - c) \leq 0; f(2) = -bc \leq 0, \forall b, c \in [0; 2].$$

Do đó, $f(a) \leq 0, \forall a, b, c \in [0; 2]$ (đpcm).

★ **Ví dụ 2.** Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$.

Lời giải

Bài toán trên đã xuất hiện nhiều trong các tài liệu và đều được giải theo phương pháp ứng dụng đạo hàm.

Vì vai trò bình đẳng nhau của các biến a, b, c nên việc chọn phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) có thể làm cho giả thiết của bài toán được sáng tỏ thêm hay như được cho thêm giả

thiết. Tuy nhiên, việc đánh giá để qui về một biến cũng không hề đơn giản. Ta xem lại cách giải sau:

Cách 1.

+ Vì vai trò của a, b, c bình đẳng nên ta luôn có thể giả sử $a = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{3}$.

+ Ta có $VT = (ab + ca) + (bc - 2abc) = a(b + c) + bc(1 - 2a)$

$$\leq a(1 - a) + \left(\frac{b + c}{2}\right)^2 (1 - 2a) \quad (\text{vì } 1 - 2a < 0)$$

$$= a(1 - a) + \left(\frac{1 - a}{2}\right)^2 (1 - 2a)$$

+ Xét hàm $f(a) = a(1 - a) + \left(\frac{1 - a}{2}\right)^2 (1 - 2a)$, với $a \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. Lập bảng biến thiên, tìm GTLN

của hàm $f(a)$ trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2.

+ Ycbt $\Leftrightarrow f(a) = (b + c - 2bc)a + bc - \frac{7}{27} \leq 0, \forall a \in [0; 1], \forall b, c \geq 0, a + b + c = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = bc - \frac{7}{27}, \forall b, c \geq 0, b + c = 1 \\ f(1) = b + c - bc - \frac{7}{27} \leq 0, \forall b, c \geq 0, b + c = 0 \end{cases}.$$

+ $\forall b, c \geq 0, b + c = 1, f(0) = bc - \frac{7}{27} \leq \left(\frac{b + c}{2}\right)^2 - \frac{7}{27} = \frac{1}{4} - \frac{7}{27} < 0$

+ $\forall b, c \geq 0, b + c = 0 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{7}{27} < 0$.

Ta có điều phải chứng minh.

Trong cách giải trên, khi quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy có thể qui về hàm số bậc cao nhất là 1, với biến a , tham số b, c . Khi đó, bài toán có hai tham số, mà việc khai thác điều kiện cho hai tham số trong từng trường hợp tại $a = 0$, hoặc tại $a = 1$ không phải học sinh nào cũng phát hiện được. Do đó, ta có thể hướng dẫn học sinh sử dụng những biến đổi đại số cơ bản để đưa về hàm số chỉ còn chứa một tham số như **Cách 3** sau đây:

Cách 3.

+ Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$a(b+c)+bc(1-2a)-\frac{7}{27}\leq 0 \Leftrightarrow a(1-a)+bc(1-2a)-\frac{7}{27}\leq 0.$$

$$+ \text{Ycbt} \Leftrightarrow f(u)=a(1-a)+u(1-2a)-\frac{7}{27}\leq 0 \text{ với } 0\leq u=bc\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{(1-a)^2}{4},$$

$$\forall a\in[0;1].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)\leq 0 \\ f\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right)\leq 0, \forall a\in[0;1]. \end{cases}$$

$$+ \text{Ta có } f(0)=a(1-a)-\frac{7}{27}\leq\left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2-\frac{7}{27}=\frac{1}{4}-\frac{7}{27}<0, \forall a\in[0;1]$$

$$f\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right)\leq 0, \forall a\in[0;1].$$

Ví dụ 3. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh $a^2+b^2+c^2+abc \geq 4$.

Lời giải

Cách 1.

+ Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$.

+ Khi đó, $a^2+b^2+c^2+abc = a^2+(b+c)^2+bc(a-2)$

$$\geq a^2+(3-a)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2(a-2) \text{ (vì } a-2 < 0)$$

$$= a^2+(3-a)^2+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2(2-a)$$

+ Ta đi tìm GTNN của hàm số $f(a)=a^2+(3-a)^2+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2(2-a)$ trên $[0;1]$

Cách 2.

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$a^2+b^2+c^2+abc \geq 4 \Leftrightarrow a^2+(b+c)^2-2bc+abc \geq 4 \Leftrightarrow a^2+(3-a)^2+bc(a-2)-4 \geq 0$$

+ Ycbt $\Leftrightarrow f(u)=(a-2)u+2a^2-6a+5 \geq 0$ với $0 \leq u=bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(3-a)^2, \forall a \in [0;3]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f\left(\frac{1}{4}(3-a)^2\right) \geq 0, \forall a \in [0;3]. \end{cases}$$

+ Mà $f(0) = 2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{5} > 0$; $f\left(\frac{1}{4}(3-a)^2\right) = \frac{1}{4}(a-1)^2(a+2) \geq 0, \forall a \in [0;3]$.

Do đó, $f(u) \geq 0, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(3-a)^2\right]$ điều phải chứng minh.

★ **Ví dụ 4.** Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Cách 1.

+ Vì vai trò của a, b, c bình đẳng nên ta luôn có thể giả sử $a = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

+ Khi đó, $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c) + 6abc$

$$= a^3 + (1-a)^3 + 3bc(3a-1)$$

$$\geq a^3 + (1-a)^3 + 3 \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 (3a-1) \quad (\text{vì } 3a-1 \leq 0)$$

$$= a^3 + (1-a)^3 + 3\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 (3a-1)$$

+ Xét hàm số $f(a) = a^3 + (1-a)^3 + 3\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 (3a-1)$, với $a \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. Tìm GTNN của hàm

$f(a)$ trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ ta có điều phải chứng minh.

Cách 2.

+ Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng $(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1-c)^3 - 3ab(1-c) + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow ab(9c-3) + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0$$

+ Ycbt $\Leftrightarrow f(u) = (9c-3)u + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0$, với $0 \leq u = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-c)^2}{4}, \forall c \in [0;1]$

+ Ta có $f(0) = 3\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$; $f\left(\frac{(1-c)^2}{4}\right) = \frac{3}{4}c(3c^2 - 3c + 1) > 0, \forall c \in [0;1] \Rightarrow \text{đpcm.}$

★**Ví dụ 5.** Cho $a, b, c, d \in [0;1]$. Chứng minh $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1$.

Lời giải

+ Ycbt

$$\Leftrightarrow f(a) = [1 - (1-b)(1-c)(1-d)]a + (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d - 1 \geq 0, \forall a \in [0;1],$$

$$b, c, d \in [0;1].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}, \forall b, c, d \in [0;1].$$

+ Mà $f(1) = b + c + d \geq 0, \forall b, c, d \in [0;1]$.

+ Ta cần chứng minh $f(0) = (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d - 1 \geq 0, \forall b, c, d \in [0;1]$.

+ Ta xét bài toán: Chứng minh $(1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d - 1 \geq 0, \forall b, c, d \in [0;1]$ (1).

Ta thấy bài toán (1) tương tự bài toán ban đầu, tuy nhiên đã giảm bớt đi một biến. Do đó, tiếp tục cách làm trên ta có thể giải quyết triệt để được bài toán ban đầu.

$$\text{Ycbt (1)} \Leftrightarrow g(b) = [1 - (1-c)(1-d)]b + (1-c)(1-d) + c + d - 1 \geq 0, \forall b \in [0;1], \forall c, d \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases}, \forall c, d \in [0;1].$$

+ Mà $g(1) = c + d \geq 0; g(0) = (1-c)(1-d) + c + d - 1 = cd \geq 0 \Rightarrow g(b) \geq 0 \forall b, c, d \in [0;1]$

Ta có điều phải chứng minh.

Một số bài toán, không phải lúc nào cũng có sẵn dạng hàm số $y = ax + b$. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, nhờ những biến đổi, đánh giá bất đẳng thức đại số thích hợp ta có thể áp dụng tính chất hàm số $y = ax + b$ trong chứng minh. Ta xét các ví dụ sau:

★**Ví dụ 6.** Chứng minh $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1, \forall a, b, c \in [0;1]$

Lời giải

+ Không mất tính tổng quát ta giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó

$$VT \leq \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

+ Ta chứng minh $f(a) = \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) - 1 \leq 0, \forall a \in [0;1], \forall b, c \in [0;1]$.

+ $\forall b, c \in [0;1]$, ta có

$$f(0) = \frac{b+c}{b+c+1} + bc - (b+c) = \frac{bc(b+c) - (b^2+c^2) - bc}{b+c+1} \leq \frac{(b^2+c^2)\left(\frac{b+c}{2} - 1\right) - bc}{b+c+1} \leq 0$$

$$f(1) = 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

★**Ví dụ 7.** Cho $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

Lời giải

+ Biến đổi bất đẳng thức về dạng $(b-1)a^2 + c^2a + b^2c + 1 - b^2 - c^2 \geq 0$

+ Vì $a \in [0;1]$ nên $a \geq a^2$, suy ra

$$(b-1)a^2 + c^2a + b^2c + 1 - b^2 - c^2 \geq (b-1)a^2 + c^2a^2 + b^2c + 1 - b^2 - c^2.$$

+ Ta đi chứng minh $(b-1)a^2 + c^2a^2 + b^2c + 1 - b^2 - c^2 \geq 0, \forall a, b, c \in [0;1]$.

$$\Leftrightarrow f(u) = (b+c^2-1)u + b^2c + 1 - b^2 - c^2 \geq 0, \text{ với } 0 \leq u = a^2 \leq 1, \forall b, c \in [0;1].$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}, \forall b, c \in [0;1].$$

+ Ta có $f(0) = b^2c + 1 - b^2 - c^2 = (1-c)[c + (1-b^2)] \geq 0 \forall b, c \in [0;1]$

$$f(1) = b^2c + (b-b^2) \geq 0 \forall b, c \in [0;1]$$

Vậy $f(u) \geq 0, \forall u \in [0;1]$ (đpcm).

★**Ví dụ 8.** Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$.

Lời giải

+ Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x; y; z\} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

$$\text{Khi đó, } x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{1}{3}xy + y^2z + z^2x = \left(\frac{1}{3}y + z^2\right)x + y^2z$$

+ Ycbt $\Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3}y + z^2\right)x + y^2z \leq \frac{4}{27}, \forall x \in \left[0; \frac{1}{3}\right], \forall y, z \geq 0, x + y + z = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq \frac{4}{27}, \forall y, z \geq 0, y + z = 1 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{4}{27}, \forall y, z \geq 0, y + z = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$+ \text{Ta có } f(0) = y^2 z = \frac{1}{2} y \cdot y \cdot 2z \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2y+2z}{3} \right)^3 = \frac{4}{27} (y+z)^3 = \frac{4}{27}, \forall y, z \geq 0, y+z=1.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} y + z^2 \right) + y^2 z.$$

$$\text{Vì } x = \frac{1}{3} \text{ thì } y+z = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3} - y \text{ nên}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -y^3 + y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{4}{27} = -y \left(y^2 - y + \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{27} \leq \frac{4}{27}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ta đã biết, bất đẳng thức xuất hiện rất nhiều trong các bài toán (có thể trực tiếp hoặc gián tiếp), và ở một số trường hợp nhất định việc khai thác tính chất của hàm số $y = ax + b$ để chứng minh bất đẳng thức vẫn còn hiệu quả trong việc giải quyết lớp bài toán đó. Ta xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 9.

- 1) Tìm m để hàm số $y = (4m-5)\cos x + (2m-3)x + m^2 - 3m + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- 2) Tìm m để hàm số $y = x + m \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

1)

$$+ \text{Ycbt} \Leftrightarrow y' = (5-4m)\sin x + (2m-3) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(u) = (5-4m)u + (2m-3) \leq 0, \forall u \in [-1; 1]$$

$$+ \text{Do đồ thị hàm số } y = g(u), u \in [-1; 1] \text{ là một đoạn thẳng nên ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}.$$

2) Học sinh trình bày tương tự.

Ví dụ 10. Tìm x để bất phương trình $x^2 + 2x(\sin y + \cos y) + 1 \geq 0$ đúng với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Lời giải

$$+ \text{Đặt } u = \sin y + \cos y \Rightarrow u \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$+ \text{Ycbt} \Leftrightarrow \text{Tìm } x \text{ để } f(u) = 2xu + x^2 + 1 \geq 0, \forall u \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-\sqrt{2}) \geq 0 \\ f(\sqrt{2}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 11. Chứng minh với mọi $m \leq -2$ thì $x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 \leq 0$, với mọi $x \in [-4; 1]$.

Lời giải

+ Ycbt $\Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 \leq 0, \forall x \in [-4; 1], \forall m \in (-\infty; -2]$.

$$\Leftrightarrow f(m) = (-2x+3)m + x^2 - x + 2 \leq 0, \forall m \in (-\infty; -2], \forall x \in [-4; 1] \quad (1).$$

+ Vì $f(m)$ là hàm bậc nhất với hệ số góc $-2x+3 > 0, \forall x \in [-4; 1]$ nên

(1) $\Leftrightarrow f(-2) \leq 0, \forall x \in [-4; 1] \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0, \forall x \in [-4; 1]$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

2.3 Bài tập tự luyện

- 1) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.
- 2) Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh $7(xy + yz + xz) \leq 2 + 9xyz$.
- 3) Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh $5(x^2 + y^2 + z^2) \leq 6(x^3 + y^3 + z^3) + 1$.
- 4) Cho $1 \leq x, y, z \leq 3$ thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \leq 14$.
- 5) Cho $0 \leq x, y, z \leq 2$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 \leq 9$.
- 6) Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1$.
- 7) Chứng minh rằng với mọi $m \leq 1$ thì $x^2 - 2(3m-1)x + m + 3 \geq 0$, với mọi $x \geq 1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đoàn Quỳnh (Chủ biên), *Tài liệu chuyên toán Giải tích 12*, NXBGD.
- [2] Đoàn Quỳnh (Chủ biên), *Tài liệu chuyên toán Bài tập Giải tích 12*, NXBGD.
- [3] Trần Lưu Cường, *Toán Olympic cho sinh viên*, NXBGD 1998.
- [4] Trần Phương, *Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học*, NXB Tri Thức.
- [5] Trần Phương, *Tuyển chọn các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán Hàm số*, NXBĐHQGHN.
- [6] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri Thức.
- [7] Tạp chí THPT, số 408, tháng 6/2011.
- [8] Tuyển tập 30 năm tạp chí THPT, NXBGD 1998.
- [9] Tuyển tập đề thi Olympic 30/4, lần XV, NXBGD 2009.
- [10] Tuyển tập đề thi Olympic 30/4, lần XVI, NXBGD 2010.
- [11] Tuyển tập đề thi Olympic 30/4, lần XVII, NXBGD 2011.
- [12] Tuyển tập đề thi Olympic 30/4, lần XVIII, NXBGD 2012.
- [13] Tài liệu trên mạng Internet.