

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	1
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	2
Dạng 2. Tính chẵn lẻ của hàm số	3
Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất	4
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	4
2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	8
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	8
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	10
Dạng 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản	10
Dạng 2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng	11
Dạng 3. Giải các phương trình lượng giác có điều kiện xác định	11
Dạng 4. Giải các phương trình lượng giác trên khoảng $(a; b)$ cho trước ...	11
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	12
3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP	15
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	15
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	16
Dạng 1. Giải phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác	16
Dạng 2. Giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác	17
Dạng 3. Giải phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$	17
Dạng 4. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$	18
Dạng 5. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$	19
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	20
4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PT LƯỢNG GIÁC	23
A PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	23
Dạng 1. Biến đổi đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai (ba) đối với một hàm số lượng giác	23
Dạng 2. Biến đổi $a \sin x + b \cos x$	24
Dạng 3. Biến đổi đưa về phương trình tích	24
Dạng 4. Một số bài toán biện luận theo tham số	25
B BÀI TẬP TỰ LUYỆN	26
5. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG	28
A Đề số 1	28
B Đề số 2	31
6. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ	34

CHƯƠNG

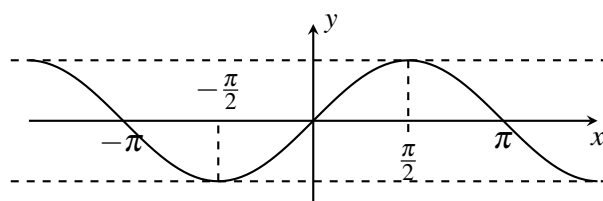
1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Hàm số $y = \sin x$

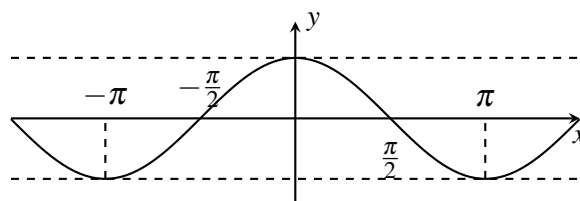
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.



Đồ thị hàm số $y = \sin x$

2 Hàm số $y = \cos x$

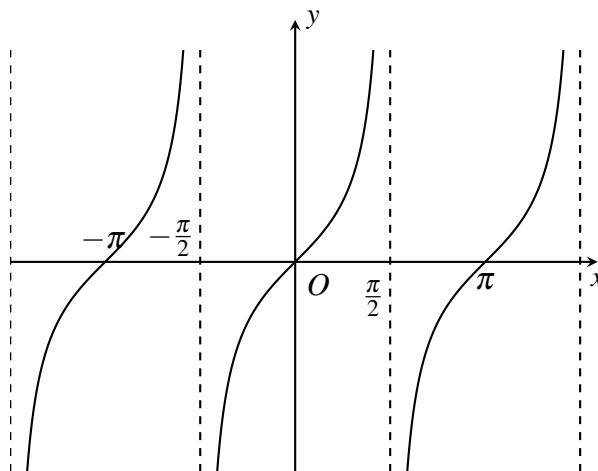
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.



Đồ thị hàm số $y = \cos x$

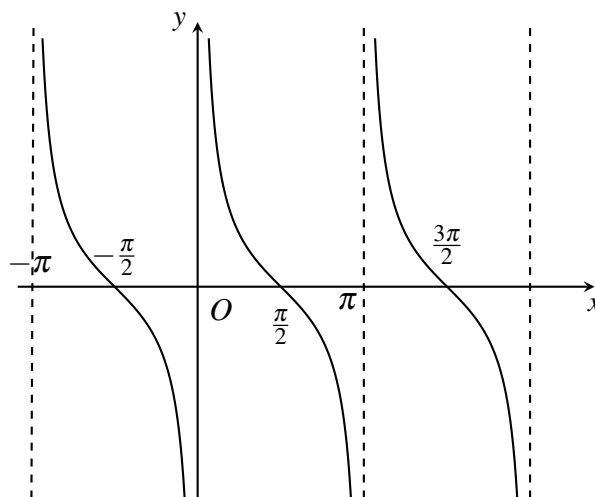
3 Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.



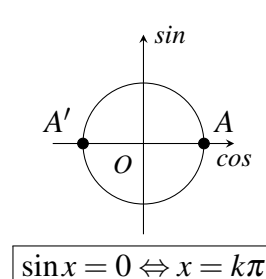
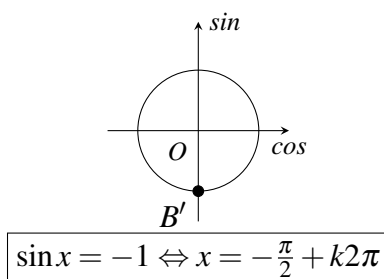
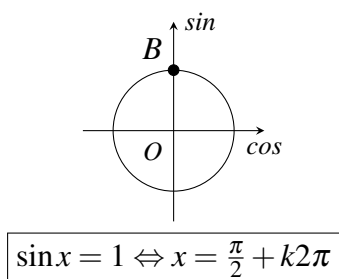
4 Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$,
nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.

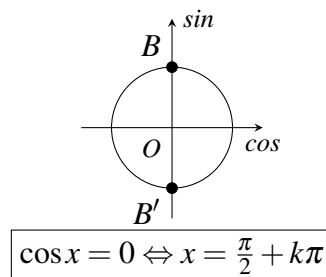
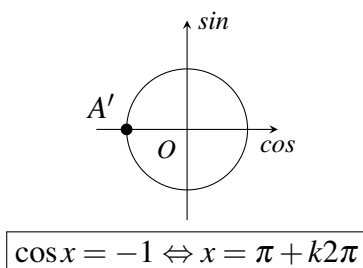
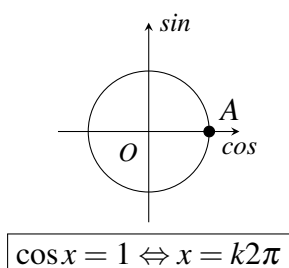


5 Một số trường hợp đặc biệt

☑ Các trường hợp đặc biệt cho hàm $y = \sin x$



☑ Các trường hợp đặc biệt cho hàm $y = \cos x$



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

☐ DẠNG 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp giải. Ta chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{2 \sin x + 3}{\cos x}$

b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

c) $y = \frac{2 + 3 \cos 2x}{\sin x}$

d) $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$

e) $y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$

f) $y = \frac{2 \sin x + 3}{\cos x + 2}$

g) $y = \frac{2 \sin x + 3}{\sin x - 1}$

h) $y = \frac{2 \sin x - 3}{2 \sin x + 3}$

i) $y = \sin \frac{x-1}{x+2}$

j) $y = \sqrt{3 - 2 \cos x}$

k) $y = \frac{\sqrt{\cos x - 2}}{1 + \cos x}$

l) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = 2 \tan x + 3$

b) $y = 2 \tan 2x - 4 \sin x$

c) $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

a) $y = \sqrt{m - \cos x}$

b) $y = \sqrt{2 \sin x - m}$

c) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{\cos^2 x - (2 + m) \cos x + 2m}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

DẠNG 2. Tính chẵn lẻ của hàm số

Phương pháp giải. Ta thực hiện các bước sau:

1. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
2. Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
 - Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

CHÚ Ý

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| ① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. | ② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn. |
| ③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. | ④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ. |

Ví dụ 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $y = f(x) = \sin \left(2x + \frac{9\pi}{2} \right);$

b) $y = f(x) = \tan x + \cot x.$

Ví dụ 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

DẠNG 3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Phương pháp giải. Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☒ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

③ $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

④ $0 \leq |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

⑤ Cô - si:

⑥ Bunhiacopxki:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ với mọi } a, b \geq 0$$

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

☒ Sử dụng điều kiện có nghiệm

① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

③ $\sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

☒ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

 **Ví dụ 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 2 \sin x + 3$

b) $y = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{3}$

c) $y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$

d) $y = 4 \sin x \cos x + 1;$

e) $y = 4 - 3 \sin^2 2x.$

f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$

g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

h) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

 **Ví dụ 8.** Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

 **Ví dụ 9.** Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

 **Ví dụ 10.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

b) $y = \sin 2x - \cos 2x$

c) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

 **Ví dụ 11.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$

b) $y = 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2$

c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$

 **Ví dụ 12.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1$.

 **Ví dụ 13.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 3 \cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = -\tan x$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

A. $x \neq k2\pi$.

B. $x \neq k\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 5. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 6. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

A. $\mathbb{R}$.

B. $(-\infty; 0]$.

C. $[0; +\infty]$.

D. $[-1; 1]$.

Câu 7. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $[-2; 2]$.

B. $[0; 2]$.

C. $[-1; 1]$.

D. $[0; 1]$.

Câu 8. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 9. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

A. $y = \sin^2 x$.

B. $y = x \cos 2x$.

C. $y = x \sin x$.

D. $y = \cos x$.

Câu 10. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 12. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 13. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

A. $T = 2\pi$.

B. $T = \frac{\pi}{2}$.

C. $T = \pi$.

D. $T = 4\pi$.

Câu 14. Hàm số nào là hàm số chẵn?

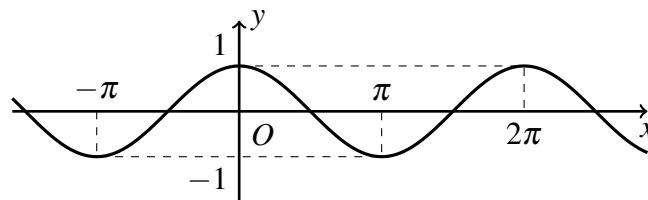
A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y = \sin 2x$.

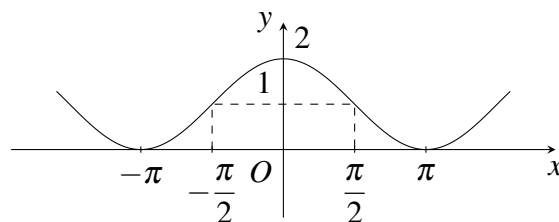
D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Câu 15. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = 1 + \sin x$. B. $y = 1 - \sin x$. C. $y = \sin x$. D. $y = \cos x$.

Câu 16. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



- A. $y = \cos x + 1$. B. $y = 2 - \sin x$. C. $y = 2 \cos x$. D. $y = \cos^2 x + 1$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + 2$.

- A. $\max y = 3$ và $\min y = 1$. B. $\max y = 3$ và $\min y = 2$.
C. $\max y = 3$ và $\min y = -2$. D. $\max y = 3$ và $\min y = -1$.

Câu 18. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$.

- A. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 1$. B. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2\sqrt{5}$.
C. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2$. D. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 3$.

Câu 19. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$.

- A. $\min y = -2$, $\max y = 4$. B. $\min y = 2$, $\max y = 4$.
C. $\min y = -2$, $\max y = 3$. D. $\min y = -1$, $\max y = 4$.

Câu 20. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$.

- A. $\min y = 1$, $\max y = 2$. B. $\min y = 1$, $\max y = 3$.
C. $\min y = 2$, $\max y = 3$. D. $\min y = -1$, $\max y = 3$.

Câu 21. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$.

- A. $\min y = 2$, $\max y = 1 + \sqrt{3}$. B. $\min y = 2$, $\max y = 2 + \sqrt{3}$.
C. $\min y = 1$, $\max y = 1 + \sqrt{3}$. D. $\min y = 1$, $\max y = 2$.

Câu 22. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$.

- A. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 4$. B. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 3$.
C. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 2$. D. $\min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 4$.

Câu 23. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \sin^2 x + \cos^2 2x$.

- A. $\max y = 4$, $\min y = \frac{3}{4}$. B. $\max y = 3$, $\min y = 2$.
C. $\max y = 4$, $\min y = 2$. D. $\max y = 3$, $\min y = \frac{3}{4}$.

Câu 24. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$.

- A. $\max y = 6$, $\min y = -2$. B. $\max y = 4$, $\min y = -4$.
C. $\max y = 6$, $\min y = -4$. D. $\max y = 6$, $\min y = -1$.

Câu 25. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$.

- A. $\min y = -6; \max y = 4$. B. $\min y = -6; \max y = 5$.
C. $\min y = -3; \max y = 4$. D. $\min y = -6; \max y = 6$.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$.

- A. $\max y = 4, \min y = -6$. B. $\max y = 6, \min y = -8$.
C. $\max y = 6, \min y = -4$. D. $\max y = 8, \min y = -6$.

Câu 27. Gọi T là tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{3}{4} \cos 2x + 3$. Tìm tổng các giá trị nguyên của T .

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 3.

Câu 28. Hàm số $y = \cos^2 x + \sin x + 1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt bằng

- A. 3; 1. B. 1; -1. C. $\frac{9}{4}; 0$. D. $\frac{9}{4}; 2$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$ là

- A. $6 + \sqrt{2}$. B. $6 - \sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2}$.

Câu 30. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

- A. $M = -2$. B. $M = -3$. C. $M = 3$. D. $M = 1$.

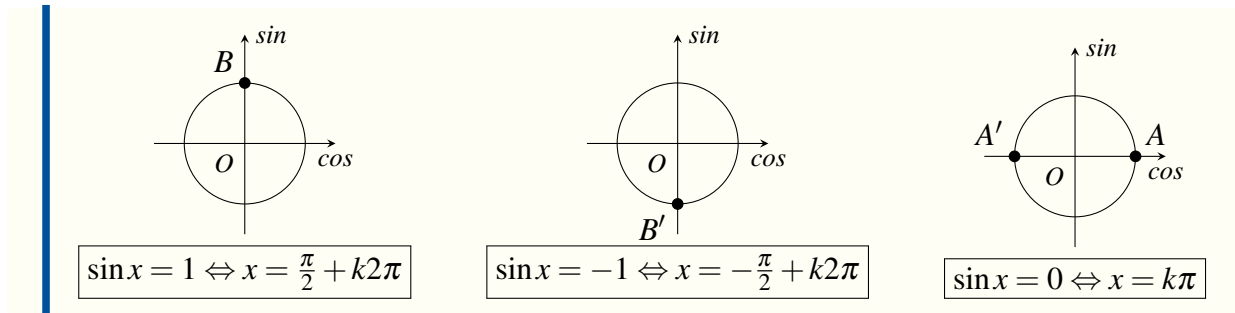
—HẾT—

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Phương trình $\sin x = a$.

☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



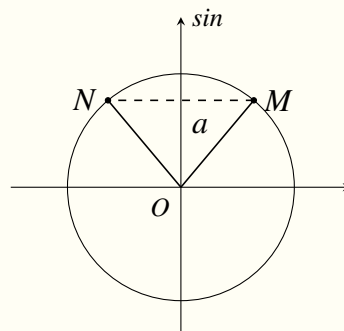
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

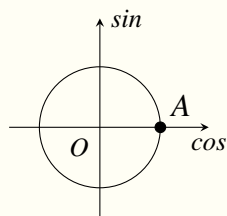
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

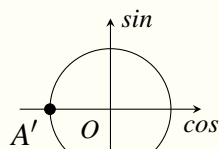
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2 Phương trình $\cos x = a$.

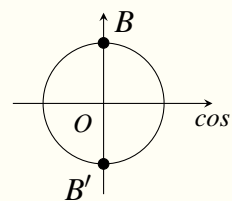
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

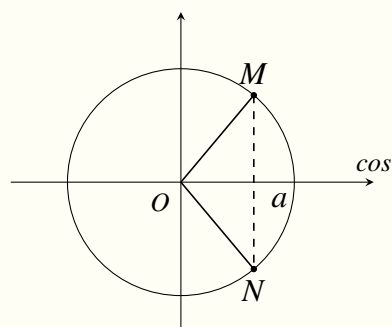
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3 Phương trình $\tan x = a$.

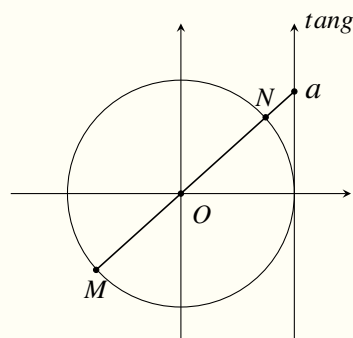
☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4 Phương trình $\cot x = a$.

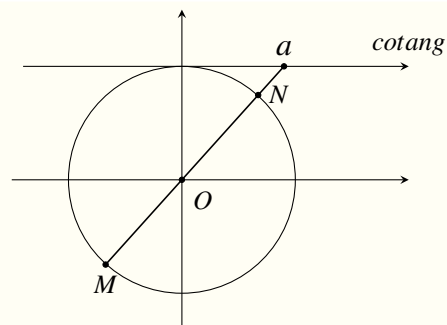
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** $\left[\frac{1}{a} \right]$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

☐ DẠNG 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp giải.

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

🧩 Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \sin \left(\frac{\pi}{5} - x \right) = 1$

c) $2 \sin (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$

e) $\sqrt{2} \cos 2x - 1 = 0$

f) $3 \cos x - 1 = 0.$

🧩 Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1$

c) $\tan (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

e) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$

f) $(\tan x - 2)(\cot x + 1) = 0.$

🧩 Ví dụ 3. (A.2014). Giải phương trình $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$

📌 DẠNG 2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng

Phương pháp giải.

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

$$\textcircled{1} \sin u = \sin v \quad \textcircled{2} \cos u = \cos v \quad \textcircled{3} \tan u = \tan v \quad \textcircled{4} \cot u = \cot v$$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

$$\textcircled{1} -\sin x = \sin(-x). \quad \textcircled{2} -\cos x = \cos(\pi - x).$$

$$\textcircled{3} \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \quad \textcircled{4} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

🧩 Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sin 3x = \sin 2x & \text{b) } \sin 2x - \sin x = 0 & \text{c) } \sin 5x + \sin x = 0 \\ \text{d) } \cos 2x - \cos x = 0 & \text{e) } \cos 8x + \cos x = 0 & \text{f) } \cos 4x - \sin x = 0 \end{array}$$

🧩 Ví dụ 5. (B.2013). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

📌 DẠNG 3. Giải các phương trình lượng giác có điều kiện xác định

Phương pháp giải.

🧩 Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0 & \text{b) } \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} - \sin x} = 0 & \text{c) } \tan x(1 - 2\sin^2 x) = 0 \end{array}$$

🧩 Ví dụ 7. Giải phương trình $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

- Đáp số $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

🧩 Ví dụ 8. Giải phương trình $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$.

- Đáp số $x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

🧩 Ví dụ 9. Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$

- Đáp số $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

📌 DẠNG 4. Giải các phương trình lượng giác trên khoảng $(a; b)$ cho trước

Phương pháp giải.

- ① Giải phương trình, tìm các họ nghiệm $x = \alpha + k\pi$
- ② Vì $x \in (a; b)$ nên $a < \alpha + k\pi < b$, chuyển về tìm khoảng "dao động" của k .
- ③ Kết hợp với $k \in \mathbb{Z}$, ta chọn các giá trị k nguyên nằm trong khoảng vừa tìm được.
- ④ Với mỗi giá trị k , ta thay vào tìm nghiệm tương ứng.

Ví dụ 10. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

- a) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$.
 b) $\sqrt{2}\sin(x - 1) = -1$ trên $(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
 c) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi)$.
 d) $\tan(3x + 2) - \sqrt{3} = 0$ trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $3 - \sqrt{3}\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

Ví dụ 13. Tìm $x \in (-\pi; \pi)$ sao cho $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Với $k \in \mathbb{Z}$ thì phương trình $2\sin(x + 60^\circ) = \sqrt{3}$ có nghiệm là

- A. $x = k.180^\circ; x = 60^\circ + k.180^\circ$.
 B. $x = k.360^\circ; x = -120^\circ + k.360^\circ$.
 C. $x = k.360^\circ; x = 60^\circ + k.360^\circ$.
 D. $x = -30^\circ + k.360^\circ; x = 90^\circ + k.360^\circ$.

Câu 2. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$?

- A. $\tan x = 0$.
 B. $\cos x = -1$.
 C. $\cot x = 1$.
 D. $\cos x = 1$.

Câu 3. Tìm m để phương trình $\cos 2x = 1 - m$ có nghiệm.

- A. $-1 \leq m \leq 3$.
 B. $0 \leq m \leq 2$.
 C. $m \leq 2$.
 D. $m \geq 0$.

Câu 4. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = \frac{1}{2}$.
 B. $\tan x = \sqrt{3}$.
 C. $\sin x = 3$.
 D. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 5. Phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > 1$.
 B. $m < -1$.
 C. $-1 \leq m \leq 1$.
 D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 B. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 D. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.

C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$.

D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 11. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

A. $-\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. π .

Câu 12. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 13. Phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có số nghiệm thuộc $(-\pi; \pi)$

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 14. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

A. $n = 8$.

B. $n = 5$.

C. $n = 6$.

D. $n = 2$.

Câu 15. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x - \cos x = 0$.

A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 16. Tìm số đo ba góc của một tam giác cân biết rằng số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

A. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}; \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$.

B. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}; \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$.

C. $\left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$.

D. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm: $\cos 2x = \frac{m}{2}$.

A. $m \leq 1$.

B. $-1 \leq m \leq 1$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 1$.

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 19. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 21. Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

A. 4.

B. 6.

C. 1.

D. 2.

Câu 22. Phương trình $\cos \frac{x}{2} = -1$ có tập nghiệm là

A. $\{2\pi + k4\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\{k4\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 23. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

A. $x = \pi + k2\pi$.

B. $x = k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0$.

A. $k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $k\frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 25. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$.

B. $S = \frac{4071315\pi}{4}$.

C. $S = \frac{8141621\pi}{2}$.

D. $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Câu 26. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 27. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

A. 16145.

B. 20181.

C. 20179.

D. 16144.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

—HẾT—

§ 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Dạng phương trình

$$\textcircled{1} \quad a \cdot \sin x + b = 0$$

$$\textcircled{2} \quad a \cdot \cos x + b = 0$$

$$\textcircled{3} \quad a \cdot \tan x + b = 0$$

$$\textcircled{4} \quad a \cdot \cot x + b = 0$$

Phương pháp giải: Chuyển vế, biến đổi về phương trình cơ bản.

$$\textcircled{1} \quad a \cdot \sin x + b = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{b}{a}$$

$$\textcircled{2} \quad a \cdot \cos x + b = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{b}{a}$$

$$\textcircled{3} \quad a \cdot \tan x + b = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$$

$$\textcircled{4} \quad a \cdot \cot x + b = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\frac{b}{a}$$

2 Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng phương trình

$$\bullet \quad a \sin x \pm b \cos x = c \quad (1).$$

$$\bullet \quad \text{Điều kiện có nghiệm } a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Phương pháp giải: Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \phi \cdot \sin x \pm \sin \phi \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x \pm \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2), \text{ với } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ và } \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Phương trình (2) là phương trình cơ bản đã xét ở bài trước.

Chú ý hai công thức sau:

$$\bullet \quad \sin a \cos b \pm \cos a \sin b = \sin(a \pm b).$$

$$\bullet \quad \cos a \cos b \pm \sin a \sin b = \cos(a \mp b).$$

3 Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng phương trình

$$\textcircled{1} \quad a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

$$\textcircled{2} \quad a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x + c = 0$$

$$\textcircled{3} \quad a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = 0$$

$$\textcircled{4} \quad a \cdot \cot^2 x + b \cdot \cot x + c = 0$$

 Phương pháp giải

- Đặt ẩn phụ t , chuyển phương trình về ẩn t .
- Bấm máy, tìm nghiệm t . Sau đó, giải tìm x .
- Chú ý với phương trình số ① và ② thì $-1 \leq t \leq 1$.

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giải phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| a) $2\sin x + 1 = 0;$ | b) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0;$ |
| c) $\tan x + \sqrt{3} = 0;$ | d) $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0.$ |

 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| a) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0.$ | b) $\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0.$ |
| c) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sqrt{3} = 0.$ | d) $\sqrt{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 0.$ |

 **Ví dụ 3.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

 **Ví dụ 4.** Giải phương trình $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Giải các phương trình sau

- | | |
|---|---|
| a) $2\cos 2x + \sqrt{3} = 0.$ | b) $2\sin 3x + 1 = 0$ |
| c) $2\cos 2x - \sqrt{2} = 0.$ | d) $3 - 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$ |
| e) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0.$ | f) $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{6}.$ |
| g) $3\sin(x - 1) + 2 = 0.$ | h) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 1 = 0.$ |
| i) $(\cos 2x + \sqrt{2})(\cot 3x - 1) = 0.$ | j) $2 - 2\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$ |

 **Bài 2.** Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

- | | |
|---|---|
| a) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi).$ | b) $\sqrt{2}\sin(x - 1) = -1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$ |
|---|---|

 **Bài 3.** Giải phương trình $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.

 **Bài 4.** Giải phương trình $(\cos x - \sin x)\sin x \cos x = \cos x \cos 2x$.

 **Bài 5.** Giải phương trình $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

DẠNG 2. Giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

a) $3\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0;$

b) $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0.$

c) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0;$

d) $\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x + \sqrt{3} = 0.$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0;$

b) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 14;$

c) $\cos 4x + 6 = 7\cos 2x;$

d) $7\tan x - 4\cot x = 12.$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

a) $1 - (2 + \sqrt{2})\sin x + \frac{2\sqrt{2}}{1 + \cot^2 x} = 0;$

b) $\tan^2 x - \frac{5}{\cos x} + 7 = 0.$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

a) $\frac{\cos 2x + 3\cot x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2;$

b) $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0;$

b) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0;$

c) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0;$

d) $3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 = 0.$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $2\tan x + \cot x - 3 = 0$

b) $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x;$

c) $2\cos 2x \cdot \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x;$

d) $\cos 2x + \cos x = 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

Bài 8. Tìm nghiệm $x \in (0; 10\pi)$ của phương trình

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right).$$

DẠNG 3. Giải phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Phương pháp giải.

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1;$

b) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2;$

c) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2;$

d) $3\sin x + \cos x = 2.$

- Tổng quát: $a\sin^2x + b\sin x \cos x + c\cos^2x = d$

 Phương pháp giải

- Trường hợp 1. Xét $\cos x = 0$, khi đó $\sin x = \pm 1$. Ta thay trực tiếp vào phương trình
 - ▶ Nếu thỏa mãn, suy ra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm và xét tiếp Trường hợp 2.
 - ▶ Nếu không thỏa mãn, ta bỏ qua và xét tiếp Trường hợp 2.
- Trường hợp 2. Xét $\cos x \neq 0$, chia 2 vế phương trình cho $\cos^2x$ ta đưa phương trình đang xét về dạng phương trình bậc hai theo $\tan x$.
- Tổng hợp nghiệm ở 2 trường hợp.

Chú ý công thức

① $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$

② $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

③ $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

 **Ví dụ 13.** Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2x - 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2x = 0$

b) $\sin^2x - \sin 2x - 3\cos^2x + 2 = 0$

c) $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2x = 4$

d) $4\cos^2x + \sin 2x - 3 = 0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 15.** Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2x = -1$

b) $\sin^2x + \sin 2x - 2\cos^2x = \frac{1}{2}$

c) $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2x = 4$

d) $\sin^2x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$

e) $2\sin^2x - 5\sin x \cos x - \cos^2x = -2$

f) $3\sin^2x + 8\sin x \cos x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2x = 0$

 DẠNG 5. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$

Phương pháp giải.

 Dạng phương trình

- $a(\sin x + \cos x) + b\sin x \cos x + c = 0.$
- $a(\sin x - \cos x) + b\sin x \cos x + c = 0.$

 Phương pháp giải:

- Đặt $t = \sin x \pm \cos x$

- Tính $t^2 = (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \cdot \cos x$. Từ đây ta tính được $\sin x \cdot \cos x$.
- Thay trở lại phương trình, chuyển phương trình về ẩn t . Giải tìm t , sau đó tìm x .

Chú ý

① Điều kiện của t là $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. ② $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 14. Giải các phương trình

- a) $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ b) $\sin x - \cos x + 4 \sin x \cos x + 1 = 0$
 c) $4\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 3 \sin 2x - 11 = 0$ d) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Giải các phương trình

- a) $\sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$ b) $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$
 c) $\sin x + \cos x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{10}{3}$ d) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ có các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 2. Cho phương trình $\sin x - (m+1) \cos x = 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

- A. $m \in [0; -2]$. B. $m \in (-\infty; -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. D. $m \in [-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}]$.

Câu 3. Giải phương trình $2 \cos x - 1 = 0$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\cot 3x = -1$ là

- A. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}.$

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$ C. $x = \frac{k\pi}{2}.$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 6. Điều kiện cần và đủ để phương trình $m \sin x - 3 \cos x = 5$ có nghiệm là $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b$.

- A. -4. B. 4. C. 0. D. 8.

Câu 7. Giải phương trình $\sin 2x = 1$.

- A. $x = \frac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Trong các phương trình sau phương trình nào vô nghiệm?

- A. $\tan x = \pi$. B. $\sin x = \frac{\pi}{4}$. C. $\sin x + \cos x = 2$. D. $\cos x = \frac{2017}{2018}$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \cos x$ là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} - k\pi; k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Tìm số điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ trên đường tròn lượng giác.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 11. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $x_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$. B. $x_0 \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$. C. $x_0 \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. D. $x_0 \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $2 \sin(4x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 13. Phương trình $2 \sin x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm $x \in (0; 2\pi)$?

- A. 1 nghiệm. B. 4 nghiệm. C. Vô số nghiệm. D. 2 nghiệm.

Câu 14. Giải phương trình $\cos 2x + 5 \sin x - 4 = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 15. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin x$.

- A. $\sin x = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$. B. $\sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$. C. $\sin x = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}$. D. $\sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$.

Câu 16. Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$. Khi đó, giá trị của $P = 3 + \sin 2x_0$ là

- A. $P = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = 3$.

Câu 17. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

- A. $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 18.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ với $0\leq x\leq 2\pi$.
 A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 19.** Phương trình $\cos x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$?
 A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.
- Câu 20.** Tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\cos 4x+\frac{1}{2}=0$ là
 A. $\frac{5\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{7\pi}{6}$.
- Câu 21.** Cho phương trình $\cos 2x+\cos x=2$. Khi đặt $t=\cos x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?
 A. $2t^2+t-3=0$. B. $2t^2-t-1=0$. C. $2t^2-t-3=0$. D. $2t^2+t-1=0$.
- Câu 22.** Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x+1}=0$ thuộc đoạn $[2\pi;4\pi]$ là
 A. 6. B. 2. C. 4. D. 5.
- Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos^2 x=m-1$ có nghiệm.
 A. $1\leq m\leq 2$. B. $m\leq 2$. C. $1<m<2$. D. $m\geq 1$.
- Câu 24.** Điều kiện của tham số thực m để phương trình $\sin x+(m+1)\cos x=\sqrt{2}$ vô nghiệm là
 A. $m>0$. B. $-2<m<0$. C. $\begin{cases} m\geq 0 \\ m\leq -2 \end{cases}$. D. $m<-2$.
- Câu 25.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $m\sin 2x-3\cos 2x=2m+1$ có nghiệm?
 A. 4. B. 2. C. 1. D. 10.
- Câu 26.** Tìm số đo góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x=-\frac{1}{2}$.
 A. $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}, \left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$. B. $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$.
 C. $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}, \left\{\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$. D. $\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$.
- Câu 27.** Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\sin \alpha+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sqrt{2}$. Tính $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.
 A. $-\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. B. $\frac{-9+4\sqrt{2}}{7}$. C. $\frac{9-4\sqrt{2}}{7}$. D. $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.
- Câu 28.** Tính tổng tất cả T các nghiệm thuộc đoạn $[0;200\pi]$ của phương trình $\cos 2x-3\cos x-4=0$.
 A. $T=10000\pi$. B. $T=5100\pi$. C. $T=5151\pi$. D. $T=10100\pi$.
- Câu 29.** Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ trên khoảng $(0;3\pi)$ bằng
 A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 30.** Số các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x-1)(2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m)=0$ có đúng 4 nghiệm thực thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là
 A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

—HẾT—

§ 4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PT LƯỢNG GIÁC

A PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Biến đổi đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai (ba) đối với một hàm số lượng giác

Phương pháp giải.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

b) $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = 0.$

c) $2\tan^2 x + \cos 4x = 1$

d) $2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x.$

Đáp số:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi.$

b) $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi.$

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = k\pi.$

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi.$

Ví dụ 2. Cho phương trình $\cos 5x \cos x = \cos 4x \cos 2x + 3\cos 2x + 1$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc $(-\pi; \pi)$

Đáp số:

• Nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$

• Do $x \in (-\pi; \pi)$ nên $x = \pm \frac{\pi}{6}; x = \pm \frac{5\pi}{6}.$

Ví dụ 3. Phương trình $\sin \left(2x + \frac{9\pi}{2} \right) - 3\cos \left(x - \frac{15\pi}{2} \right) = 1 + 2\sin x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$?

Đáp số:

• $x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

• Do $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ nên $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}.$

Ví dụ 4. (A-2002). Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} \right) = \cos 2x + 3.$$

Đáp số:

• Biến đổi phương trình về $5\cos x = 2\cos 2x + 3.$

• Nghiệm $x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}.$

□ DẠNG 2. Biến đổi $a\sin x + b\cos x$

Phương pháp giải.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

- a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. b) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$.
- c) $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ d) $\sin x + \cos x \cdot \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$.

Đáp số:

- a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$. b) $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.
- c) $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$. d) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$.

Ví dụ 6. (ĐB1-2008) Tìm nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$ của phương trình

$$4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Đáp số:

- Nghiệm $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi$
- Do $x \in (0; \pi)$ nên $x = \frac{5\pi}{18}; x = \frac{17\pi}{18}; x = \frac{5\pi}{6}$.

□ DẠNG 3. Biến đổi đưa về phương trình tích

Phương pháp giải.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

- a) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.
- c) $\sin x + \sin 2x + 4\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$ d) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

Đáp số:

- a) $\left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ b) $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- c) $x = \frac{k\pi}{3}$ d) $x = k\frac{\pi}{9}, x = k\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

- a) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$ b) $2\cos x - \sin 2x = 1 + \cos 2x$
- c) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$ d) $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$.

Đáp số:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. & \text{b) } x &= \frac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi. \\ \text{c) } x &= \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. & \text{d) } x &= k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right). \quad \text{b) } \sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot 2x$$

$$\text{c) } (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0 \quad \text{d) } \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$$

Đáp số:

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{5\pi}{8} + k\pi. & \text{b) } x &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. \\ \text{c) } x &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. & \text{d) } x &= \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{aligned}$$

DẠNG 4. Một số bài toán biện luận theo tham số

Phương pháp giải.

Ví dụ 10. Cho phương trình $\cos 2x + 5 \cos x + 5 - m = 0$. Xác định tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Đáp số:

- Biến đổi $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$.
- Kết quả $m > 1$.

Ví dụ 11. Biết rằng phương trình $\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x + m^2 - m = 0$ (với m là tham số) có nghiệm khi $m \in [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Đáp số:

- Sử dụng điều kiện có nghiệm.
- Kết quả $m \in [-1; 2]$. Vậy $P = 5$.

Ví dụ 12. Cho phương trình $(\sin x + 1)(\sin 2x - m \sin x) = m \cos^2 x$. Tìm tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

Đáp số:

- Phân tích nhân tử;
- Kết quả $0 < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 13. Tìm tập các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - m - 1 = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp số:

- Chia hai vế cho $\cos^2 x$.
- Kết quả $m \in (-\infty; -1)$.

Ví dụ 14. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4 \cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ là

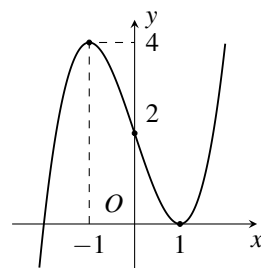
Đáp số:

- Phân tích nhân tử.
- Kết quả: $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2\}$

Ví dụ 15. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$.

Đáp số:

- Giao của đồ thị với đường nằm ngang.
- Kết quả 5 nghiệm.



B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng phương trình $\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{2}$$

❖ **Bài 2.** Giải phương trình $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right)$.

$$\text{Đáp số: } x = k2\pi$$

❖ **Bài 3.** Giải phương trình $\tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x) \sin 3x}{\cos^4 x}$

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

❖ **Bài 4.** Giải phương trình $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} = \frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{8 \sin 2x}$.

$$\text{Đáp số: } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

❖ **Bài 5.** Giải phương trình $\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$.

$$\text{Đáp số: } x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

❖ **Bài 6.** Giải phương trình $\cos 2x + \cos x (2 \tan^2 x - 1) = 2$

$$\text{Đáp số: } x = (2k+1)\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

❖ **Bài 7.** Giải phương trình $3 - \tan x (\tan x + 2 \sin x) + 6 \cos x = 0$

$$\text{Đáp số: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

❖ **Bài 8.** $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0.$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = k\pi.$

❖ **Bài 9.** Giải phương trình $\frac{(2 - \sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1.$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi.$

❖ **Bài 10.** Giải phương trình $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x).$

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi.$

❖ **Bài 11.** Giải phương trình $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Đáp số: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$

❖ **Bài 12.** Giải phương trình $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0.$

Đáp số: $x = k\frac{\pi}{2}$

❖ **Bài 13.** Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi,$

❖ **Bài 14.** Giải phương trình $\cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}.$

Đáp số: $x = \pm \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$

❖ **Bài 15.** Giải phương trình: $(1 + \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$

Đáp số: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k\pi.$

❖ **Bài 16.** $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$

Đáp số: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$

❖ **Bài 17.** Giải phương trình $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x.$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

❖ **Bài 18.** Giải phương trình $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x).$

Đáp số: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$

❖ **Bài 19.** Giải phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x.$

Đáp số: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

❖ **Bài 20.** Xác định m để phương trình $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x - m = 0(*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

Đáp số: $-\frac{10}{3} \leq m \leq -2.$

§ 5. ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

A ĐỀ SỐ 1

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = -\tan x$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

A. $\mathbb{R}$.

B. $(-\infty; 0]$.

C. $[0; +\infty]$.

D. $[-1; 1]$.

Câu 3. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $[-2; 2]$.

B. $[0; 2]$.

C. $[-1; 1]$.

D. $[0; 1]$.

Câu 4. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 5. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

A. $y = \sin^2 x$.

B. $y = x \cos 2x$.

C. $y = x \sin x$.

D. $y = \cos x$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2 \cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 7. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

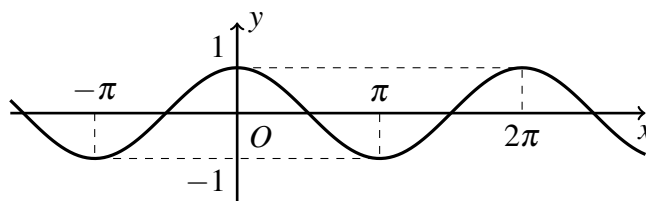
A. $T = 2\pi$.

B. $T = \frac{\pi}{2}$.

C. $T = \pi$.

D. $T = 4\pi$.

Câu 8. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = 1 + \sin x$.

B. $y = 1 - \sin x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \cos x$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + 2$.

A. $\max y = 3$ và $\min y = 1$.

B. $\max y = 3$ và $\min y = 2$.

C. $\max y = 3$ và $\min y = -2$.

D. $\max y = 3$ và $\min y = -1$.

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$.

A. $\max y = 4$, $\min y = -6$.

B. $\max y = 6$, $\min y = -8$.

C. $\max y = 6$, $\min y = -4$.

D. $\max y = 8$, $\min y = -6$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $2 \cos 2x + 1 = 0$ là

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k2\pi, -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

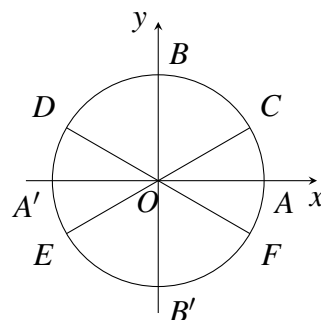
D. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12. Phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{x}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?

- A. Điểm F, điểm D.
B. Điểm C, điểm F.
C. Điểm C, điểm D, điểm E, điểm F.
D. Điểm E, điểm F.



Câu 14. Gọi S là tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $3\cos x - 1 = 0$. Tính S .

- A. $S = 0$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 3\pi$. D. $S = 2\pi$.

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ thuộc đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 16. Số nghiệm thực của phương trình $\sin 2x + 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là

- A. 12. B. 11. C. 20. D. 21.

Câu 17. Cho phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$. Tổng các nghiệm thuộc $[0; \pi]$ của phương trình đã cho là

- A. π . B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 18. Phương trình $\sin x = \cos x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 19. Phương trình $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[0; 2\pi]$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 20. Phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$. B. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $\left\{\frac{7\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$. D. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos^2 x = m - 1$ có nghiệm.

- A. $m \leq 2$. B. $1 < m < 2$. C. $m \geq 1$. D. $1 \leq m \leq 2$.

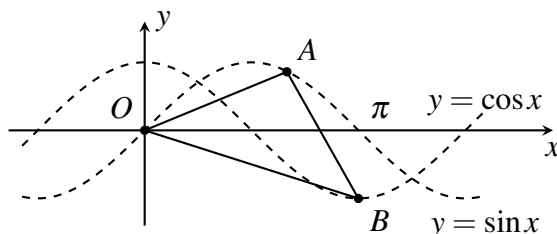
Câu 22. Điều kiện của tham số thực m để phương trình $\sin x + (m+1)\cos x = \sqrt{2}$ vô nghiệm là

- A. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $m < -2$. C. $-2 < m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 23. Số các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x - 1)(2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 24. Giả sử A, B là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ sao cho tam giác OAB nhận điểm $G\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ làm trọng tâm. Tính diện tích S của tam giác OAB , biết $x_A \in [0; 2\pi]$.



A. $S = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

B. $S = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

C. $S = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

D. $S = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$.

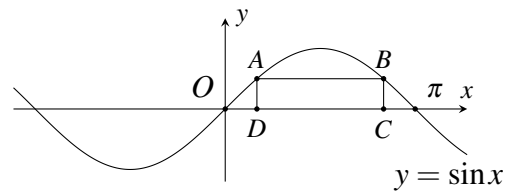
Câu 25. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

❖ **Bài 1.** Giải phương trình

a) $2 \sin x - 1 = 0$

b) $2 \cos^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$

c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 5x$

d) $\cos 3x + \cos x + \sin 2x = 0$

❖ **Bài 2.** Giải phương trình

a) $4 \sin x \cos x - 3 = 3(\sin x + \cos x)$

b) $\frac{4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2 \sin^2 x - 1}{1 - \cos 4x} = 0$

—HẾT—

B ĐỀ SỐ 2

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2x$.

- A. $T = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. B. $T = [-2; 2]$. C. $T = \mathbb{R}$. D. $T = [-1; 1]$.

Câu 2. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \tan 2x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

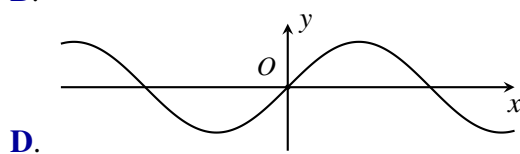
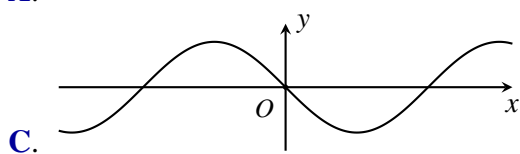
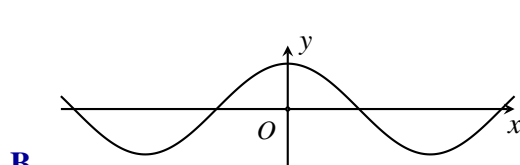
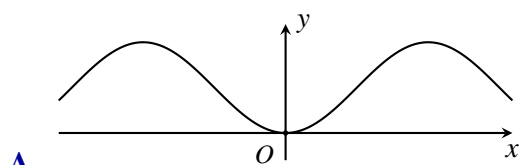
Câu 4. Chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos x$ là bao nhiêu?

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \pi$. C. $T = 3\pi$. D. $T = \frac{\pi}{2}$.

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 6. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \sin x$?



Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{2 \sin x - 1}{3}$.

- A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $m = -\frac{2}{3}$. C. $m = -3$. D. $m = -1$.

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2 - |\cos x|$.

- A. $M = 1$. B. $M = 3$. C. $M = 0$. D. $M = 2$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sin x - \cos x$.

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = 2$. D. $M = \sqrt{2}$.

Câu 10. Hỏi $x = \frac{\pi}{4}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x = 1$. B. $\cos x = 1$. C. $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$. D. $\sin 2x = 0$.

Câu 11. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$.

- A. $S = \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.
 B. $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x = \sqrt{2}$.

- A. $S = \mathbb{R}$.
 B. $S = \left\{ -\frac{1}{2} \arccos \sqrt{2} + k\pi; \frac{1}{2} \arccos \sqrt{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \emptyset$.
 D. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của số thực a để phương trình $\cos x = a^2$ có nghiệm.

- A. $a \in \mathbb{R}$.
 B. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 C. $a \in [0; 1]$.
 D. $a \in [-1; 1]$.

Câu 15. Phương trình $\tan 2x = 1$ có họ nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Họ nghiệm của phương trình $\cot x + \sqrt{3} = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Phương trình $\tan(2x + 12^\circ) = 0$ có họ nghiệm là

- A. $x = -6^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -6^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -12^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -6^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Cho phương trình $a \sin x + \cos x = b$. Tìm tất cả các giá trị thực của a, b để phương trình có nghiệm.

- A. $b^2 - a^2 \leq 1$.
 B. $b^2 - a^2 < 1$.
 C. $b^2 + a^2 \leq 1$.
 D. $b^2 + a^2 \geq 1$.

Câu 19. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -2$.

- A. $S = \emptyset$.
 B. $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 20. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\sin x + \sin 2x = 0$.

- A. 3.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 4.

Câu 21. Giải phương trình $2 \sin^2 x + 5 \sin x + 3 = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Giải phương trình $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{6} + k3\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k4\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23. Giải phương trình $\tan x + 2 \cot x - 3 = 0$.

A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cos x + \sin x = 1 - m$ có nghiệm.

A. $m \leq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \geq 0$.

D. $m < 1$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\cos 2x - \cos x + m = 0$ có nghiệm?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

🔗 **Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0;$

b) $\sin 3x - \cos 3x = -1;$

c) $\sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 1;$

d) $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1.$

🔗 **Bài 2.** Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 100]$ của phương trình

$$\frac{\cos^3 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \cos 2x + \tan^2 x.$$

—HẾT—

§ 6. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. A	2. B	3. D	4. A	5. D	6. D	7. C	8. B	9. B	10. C
11. D	12. B	13. C	14. A	15. D	16. A	17. B	18. A	19. A	20. B
21. A	22. A	23. D	24. C	25. A	26. A	27. C	28. C	29. A	30. D

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. C	2. A	3. B	4. C	5. D	6. D	7. B	8. A	9. A	10. D
11. D	12. B	13. C	14. C	15. B	16. B	17. C	18. C	19. D	20. D
21. A	22. A	23. D	24. C	25. A	26. B	27. A	28. B		

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. B	2. B	3. A	4. D	5. B	6. C	7. C	8. C	9. B	10. B
11. A	12. D	13. D	14. D	15. B	16. D	17. D	18. D	19. C	20. C
21. A	22. A	23. A	24. B	25. C	26. C	27. A	28. A	29. C	30. B

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ĐỀ SỐ 1

1. A	2. D	3. C	4. B	5. B	6. D	7. C	8. D	9. B	10. A
11. C	12. B	13. A	14. D	15. A	16. A	17. A	18. D	19. C	20. C
21. D	22. C	23. B	24. B	25. B					

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM ĐỀ SỐ 2

1. D	2. D	3. B	4. A	5. D	6. D	7. D	8. D	9. D	10. C
11. A	12. D	13. C	14. D	15. A	16. B	17. D	18. A	19. B	20. A
21. C	22. D	23. C	24. C	25. A					