

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác	5
1	Các hàm số lượng giác	5
	A Một số dạng toán	5
	B Bài tập tự luận	10
	C Bài tập trắc nghiệm	11
2	Phương trình lượng giác cơ bản	17
	A Tóm tắt lí thuyết	17
	B Một số dạng toán.	18
	C Bài tập ôn luyện	20
	D Bài tập trắc nghiệm	20
3	Phương trình bậc hai, bậc ba đối với một hàm số lượng giác	26
	A Bài tập tự luận	26
	B Bài tập trắc nghiệm	26
4	Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$	30
	A Phương pháp giải	30
	B Bài tập tự luận	31
	C Bài tập trắc nghiệm	32
	D Phương trình dạng $a \sin x + b \cos x = c \sin u + d \cos u$, với $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$	35
5	Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$	36
	A Phương pháp giải toán	36
	B Bài tập tự luận	36
	C Bài tập trắc nghiệm	37

6	Sử dụng các công thức biến đổi để giải phương trình lượng giác	39
A	Công thức biến đổi tổng thành tích	39
B	Công thức biến đổi tích thành tổng	39
C	Công thức hạ bậc, nâng cung	40
D	Bài tập trắc nghiệm	40
7	Phương trình đưa về dạng tích	41
A	Bài tập tự luận	41
B	Bài tập trắc nghiệm	42
8	Một số phép đặt ẩn phụ thông dụng	44
A	Phép đặt ẩn phụ $u = \sin x + \cos x$, với điều kiện $ u \leq \sqrt{2}$.	44
B	Phép đặt ẩn phụ $u = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ (khi đó $ u \leq \frac{1}{2}$)	45
C	Phép đặt ẩn phụ $t = \tan x + \cot x$	46
D	Phép đặt ẩn phụ $t = \tan \frac{x}{2}$	46
E	Bài tập trắc nghiệm	47
9	Phương trình chứa ẩn ở mẫu và phương pháp kết hợp nghiệm	48
A	Bài tập tự luận	48
B	Bài tập trắc nghiệm	50
10	Một số bài toán sử dụng phương pháp đánh giá	52
A	Bài tập tự luận	52
B	Bài tập trắc nghiệm	52
11	Sử dụng lượng giác để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số	52
A	Dấu hiệu để lượng giác hóa bài toán	52
B	Bài tập tự luận	53
C	Bài tập trắc nghiệm	53

12	Bất phương trình lượng giác cơ bản	54
	Ôn tập chương	55
A	Bộ đề số 1	55
B	Bộ đề 2	58

CHƯƠNG 1

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Phương pháp.

- ☑ Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.
- ☑ Điều kiện $\frac{A}{B}$ có nghĩa là $B \neq 0$, điều kiện $\sqrt{A}$ có nghĩa là $A \geq 0$.
- ☑ Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- ☑ Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Hay nói cách khác, hàm số $y = \tan x$ xác định khi và chỉ khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.
Hay nói cách khác, hàm số $y = \cot x$ xác định khi và chỉ khi $x \neq k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý 1.

- | | |
|---|--|
| (1) $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi;$ | (2) $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi;$ |
| (3) $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;$ | (4) $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi;$ |
| (5) $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi;$ | (6) $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi.$ |

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số:

- | | |
|---|---|
| ① $y = \frac{9 - 2 \sin x}{\cos x};$ | ② $y = \cos 4x + \frac{1}{\sin x};$ |
| ③ $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2 + 2 \sin x}};$ | ④ $y = \sqrt{5 - 2 \cos 3x};$ |
| ⑤ $y = \frac{2008}{\sin x \cdot \cos x};$ | ⑥ $y = \frac{7 \tan 5x}{\cos 10x} - \frac{2}{\sin 5x}.$ |

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số:

- | | |
|---|--|
| ① $y = \tan \left(4x + \frac{\pi}{6} \right);$ | ② $y = \cot \left(\frac{\pi}{4} - 10x \right) + 2008x.$ |
|---|--|

Bài 3. Tìm m để các hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|--|
| ① $y = \sqrt{m - 5 \sin x};$ | ② $y = \sqrt{2m + \cos 2x};$ | ③ $y = \frac{2 - \sin 3x}{\sqrt{m \cos x + 1}}.$ |
|------------------------------|------------------------------|--|

Dạng 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác $y = f(x)$.**Phương pháp.****Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$.**Bước 2.** Với mọi $x \in D$:

☑ Nếu $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ thì $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

☑ Nếu $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ thì $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

Chú ý 2. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng, đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung (trục Oy) làm trục đối xứng.

Chú ý 3. Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad \cos(-x) &= \cos x, \forall x \in \mathbb{R}; & (2) \quad \sin(-x) &= -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}; \\ (3) \quad \tan(-x) &= -\tan x, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; & (4) \quad \cot(-x) &= -\cot x, \forall x \neq k\pi. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Bài 4. Xét tính chẵn-lẻ của mỗi hàm số sau:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| ① $y = -19 \cos x$; | ② $y = \sin x - 2 \sin^3 x$; |
| ③ $y = \sin^3 x \cos^8 x - 2 \cot x$; | ④ $y = \sin x - \cos x$; |
| ⑤ $y = \frac{\tan x - \cot 2x}{\sin x}$; | ⑥ $y = 8 \sin x + 5 \cos x - 2$. |

Bài 5. Xét tính chẵn-lẻ của các hàm số sau:

- | | |
|---|---|
| ① $y = \frac{\tan x + \cot x}{\sin x}$; | ② $y = \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$; |
| ③ $y = \sin x - \cos x - \sin x + \cos x $; | ④ $y = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}$. |

Bài 6. Xác định các giá trị của m sao cho hàm số

$$y = f(x) = 2m \sin 2008x + 5 \cos 3x$$

là hàm số chẵn

Dạng 3. Xét chiều biến thiên của hàm số lượng giác.**Phương pháp.****Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.**Bước 2.** Dựa vào chiều biến thiên của các hàm số lượng giác cơ bản:

- ☑ Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ (với $k \in \mathbb{Z}$).
- ☑ Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $((2k - 1)\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; (2k + 1)\pi)$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

☑ Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

☑ Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Lưu ý. Sử dụng đường tròn lượng giác, ta dễ dàng suy ra được chiều biến thiên của các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$.

Bài 7. Lập bảng biến thiên của:

a) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

b) Hàm số $y = \cos x - 1$ trên đoạn $[0; \pi]$.

c) Hàm số $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

d) Hàm số $y = -2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Dạng 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác.

Phương pháp.

☑ Dựa vào bảng biến thiên của hàm số lượng giác, dựa vào đường tròn lượng giác. Chú ý rằng:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}; \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

☑ Dựa vào bất đẳng thức Cô-si: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$); dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

☑ Dựa vào tính chất của hàm số bậc hai: hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là một Parabol với:

◦ Đỉnh $I \left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ hay $I \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

◦ Trục đối xứng là đường thẳng $\Delta : x = -\frac{b}{2a}$.

◦ Bề lõm hướng lên nếu $a > 0$, hướng xuống nếu $a < 0$.

◦ Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

Nhận xét 1. Khi kiểm tra xem giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đạt được khi nào ta thường sử dụng chú ý 1.

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) Hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

c) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$.

d) Hàm số $y = \tan 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

① $y = 5 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$; ② $y = \sqrt{1 - \cos(3x^2)} - 2$; ③ $y = 2008 \cos \sqrt{x-1}$.

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

① $y = \sin x + \cos x$; ② $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; ③ $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Bài 11. Cho trước hai số thực a, b không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = a \sin x + b \cos x$.

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x.$$

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$y = |\sin x| - \sqrt{\cos x}.$$

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 12 \sin^4 x + \sin^2 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 x.$$

Bài 15. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:

$$g(x) = \sin x + \cos x - 2 \sin 2x + 3.$$

Dạng 5. Phương pháp lượng giác hoá.

Phương pháp.

☑ Nếu gặp $-a \leq u \leq a$ thì đặt $u = a \sin \alpha$, với $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc đặt $u = a \cos \alpha$, với $0 \leq \alpha \leq \pi$.

☑ Nếu gặp $a^2 + u^2$ thì ta đặt $u = a \tan \alpha$, với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ hoặc đặt $u = a \cot \alpha$, với $0 < \alpha < \pi$.

☑ Nếu gặp $u^2 + v^2 = 1$ thì ta đặt $u = \cos \alpha$ và $v = \sin \alpha$, với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Bài 16. Cho $x^2 + y^2 = 1$, $u^2 + v^2 = 1$, $xu + yv = 0$. Chứng minh

$$x^2 + u^2 = 1, \quad y^2 + v^2 = 1, \quad xy + uv = 0.$$

Bài 17. Cho $|x| \geq |y|$. Chứng minh

$$|x + y| + |x - y| = \left| x + \sqrt{x^2 - y^2} \right| + \left| x - \sqrt{x^2 - y^2} \right|. \quad (1)$$

Bài 18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{3 + 8x^2 + 12x^4}{(1 + 2x^2)^2}.$$

Bài 19. Xét các số thực x, y không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2}$.

Bài 20 (ĐH-2008D). Xét hai số thực x, y không âm. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức: $P = \frac{(x - y)(1 - xy)}{(1 + x)^2(1 + y)^2}$.

Dạng 6. Xét tính tuần hoàn của hàm số lượng giác.

Phương pháp. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có

$$x + T \in \mathcal{D}, x - T \in \mathcal{D} \text{ và } f(x + T) = f(x).$$

Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T .

Chú ý 4. Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π . Hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Bài 21. Chứng minh rằng số T thỏa mãn $\sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ phải có dạng $T = k2\pi$, k là một số nguyên nào đó. Từ đó suy ra hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Bài 22. Cho hàm số $y = f(x) = A \sin(\omega x + \alpha)$ (A, ω, α là những hằng số; A và $\alpha \neq 0$). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k , ta có

$$f\left(x + k \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 23. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Bài 24. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \cos(2x - 1) + 3$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Bài 25. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \cos x + \cos \pi x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Bài 26. Hãy chỉ ra một hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$, không phải là hàm lượng giác nhưng thỏa mãn $f(x + 2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Dạng 7. Một số bài toán khác.

Bài 27. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y ta có

$$\cos x^2 + \cos y^2 - \cos(xy) < 3.$$

Bài 28. Tìm x để bất phương trình

$$x^2 + 2x(\sin y + \cos y) + 1 \geq 0. \quad (1)$$

đúng với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Bài 29. Cho các số thực x, y, z thoả mãn điều kiện

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (k, m, n \in \mathbb{Z}).$$

Chứng minh rằng

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z \Leftrightarrow x + y + z = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Bài 30. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực thoả mãn

$$-2 \leq a_i \leq 2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

Chứng minh rằng $|a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3| \leq 2n$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 31. Xét tính chẵn - lẻ của mỗi hàm số sau:

$$\textcircled{1} \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad \textcircled{2} \quad y = \tan|x|; \quad \textcircled{3} \quad y = \tan x - \sin 2x.$$

Bài 32 (Kosovo National Mathematical Olympiad 2011, Grade 11).

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 8 - 3\sin^2 3x + 6\sin 6x$.

Bài 33. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4.$$

Bài 34. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 5.$$

Bài 35. Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị hàm số $y = \sin x$ đều cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{10}$.

Bài 36. Từ tính chất hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π , hãy chứng minh rằng:

- a) Hàm số $y = A \sin(\alpha x + \beta) + B$ (A, B, α, β là những hằng số, $A\alpha \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|\alpha|}$.
- b) Hàm số $y = \cos(\alpha x + \beta) + B$ (A, B, α, β là những hằng số, $A\alpha \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|\alpha|}$.

Bài 37 (HSG Quốc gia năm học 1996-1997, bảng B).

Cho hàm số

$$f(x) = a \sin ux + b \cos vx$$

xác định trên tập số thực, trong đó a, b, u, v là các hằng số thực khác không. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{u}{v}$ là số hữu tỉ.

Bài 38. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}-2}{2} \leq \sqrt{3}x^2 + x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

Bài 39. Cho số thực a thỏa mãn $|a| \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{3}}{a} \right| \leq 2.$$

Bài 40. Cho $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0$. Chứng minh rằng:

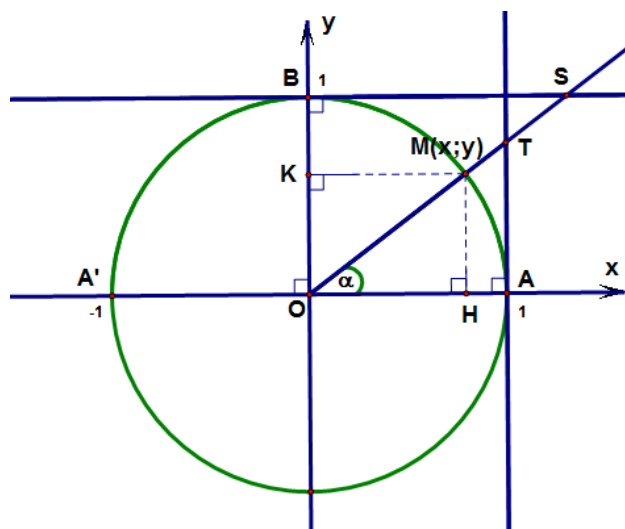
$$\left| a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab - 2(1+2\sqrt{3})a + (4-2\sqrt{3})b + 4\sqrt{3} - 3 \right| \leq 2.$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường tròn đơn vị (đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$). Với mỗi số thực α , ta xác định điểm $M(x;y)$ trên đường tròn đơn vị sao cho $(OA, OM) = \alpha$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin \alpha = OK$. B. $\cos \alpha = \overline{OH}$.
C. $\tan \alpha = \overline{AT}$. D. $\cot \alpha = \overline{BS}$.



Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của x để có đẳng thức $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$.

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. Không tồn tại x thỏa đẳng thức đã cho.

Câu 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. $y = \sin x + \cos x$. B. $y = \tan x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \cos x + \tan x$.

Câu 4. Hàm số $y = \tan x$ xác định khi và chỉ khi

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x \neq k\pi$. D. $x \neq \pi + k2\pi$.

Câu 5 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \cot \frac{x}{2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 6 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Xét trên tập xác định của hàm số thì khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. B. Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. D. Hàm số $y = \cot 2x$ là hàm số chẵn.

Câu 7 (Học kỳ 1 lớp 11, trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, 2019).

Tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ không phải là tập xác định của hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. B. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}$. C. $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$. D. $y = \frac{1 - \cos x}{2 \sin x}$.

Câu 8 (Học kỳ 1 lớp 11, trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, 2019).

Tập xác định của hàm số $y = \cot 2x$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 2 \cos x$.

- A. $T = [-2; 2]$. B. $T = [-1; 1]$. C. $T = \mathbb{R}$. D. $T = (-1; 1)$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{1 - \sin x}$ là

- A. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 11 (Học kỳ 1 lớp 11, trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, 2019).

Xét hàm số $y = \cos x$ với $x \in [-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên $(0; \pi)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên $(0; \pi)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Câu 12 (Học kỳ 1, lớp 11, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019).

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.
B. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
C. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Câu 13 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$. B. Hàm số là một hàm lẻ.
C. Hàm số có tập giá trị là $[-3; 3]$. D. Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

Câu 14 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Tập giá trị của hàm số $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. $(-1; 1)$. B. $[-1; 1]$. C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{7 - 7 \cos x}$.

- A. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R}$.
C. $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \pi + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 17. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2 \tan 3x}{\cos 6x} - \frac{8}{\sin 3x}$.

A. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + \frac{k\pi}{16}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 18 (Đề Thi HK1 T11, SGD Quảng Nam 2017).

Cho x thuộc khoảng $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $\sin x < 0, \cos x > 0$.

B. $\sin x > 0, \cos x > 0$.

C. $\sin x < 0, \cos x < 0$.

D. $\sin x < 0, \cos x < 0$.

Câu 19 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = x \sin x$.

B. $y = x + \tan x$.

C. $y = \sin^3 x$.

D. $y = x + \cos x$.

Câu 20 (Đề HKI-Chuyên Hưng Yên-2019).

Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng?

A. $y = \sin^2 x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cot^2 x$.

Câu 21 (Học kỳ 1 lớp 11, trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, 2019).

Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = -2 \sin x$.

B. $y = 3 \sin(-x)$.

C. $y = -2 \cos x$.

D. $y = \sin x - \cos x$.

Câu 22. Hàm số lượng giác nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin 2x$.

B. $y = \cos 2x$.

C. $y = 2 \sin x + 1$.

D. $y = \sin x + \cos x$.

Câu 23. Hàm số lượng giác nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y = \sin^2 x$.

B. $y = \sin x$.

C. $y = \cos 3x$.

D. $y = x \sin x$.

Câu 24. Xét trên tập xác định của hàm số thì khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $y = \sin 3x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = \cos(-3x)$ là hàm số chẵn.

C. Hàm số $y = \tan 3x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = \cot 3x$ là hàm số chẵn.

Câu 25 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

① Hàm số $y = x + \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

② Hàm số $y = x \cos x$ là hàm số lẻ.

③ Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 26. Hàm số $y = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x}$ xác định khi và chỉ khi

A. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 27. Xét trên tập xác định của hàm số thì khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ.

B. Hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = \cot 2x$ là hàm số lẻ.

D. Hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số lẻ.

Câu 28 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Cho 4 mệnh đề

① Hàm số $y = 2 \sin x - 1$ có tập giá trị là $[-2; 2]$.

- ② Đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.
- ③ Hàm số $y = \cos 2x$ có chu kỳ là 4π .
- ④ Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Số mệnh đề đúng là

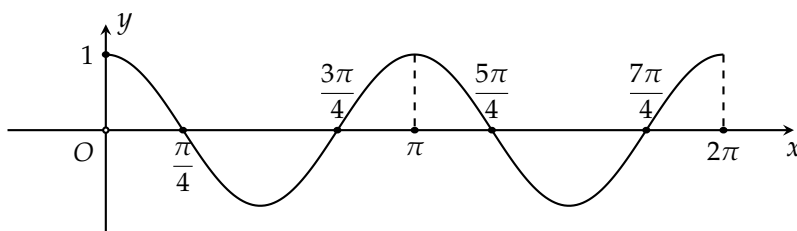
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 29. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào trong bốn hàm số bên dưới?

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	0	-1	0	1

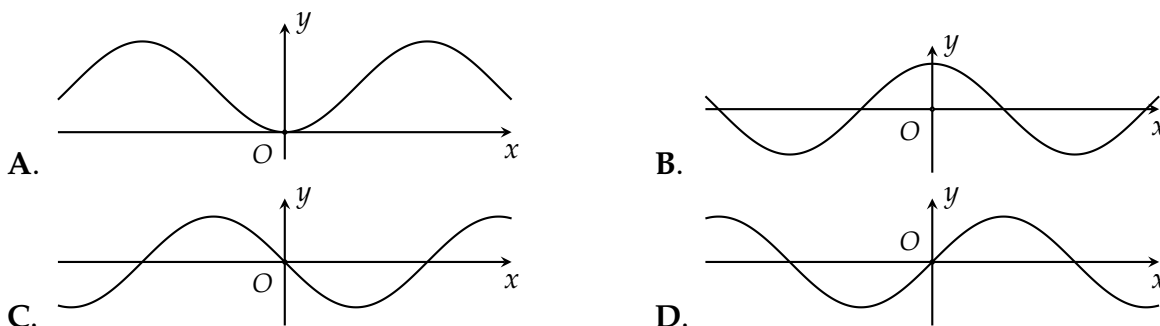
- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

Câu 30. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên tập $\mathcal{D} = [0; 2\pi]$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?



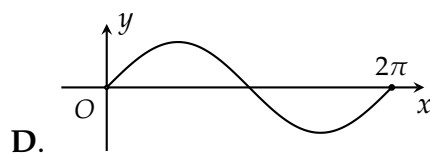
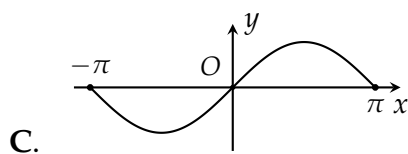
- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Câu 31. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \sin x$?

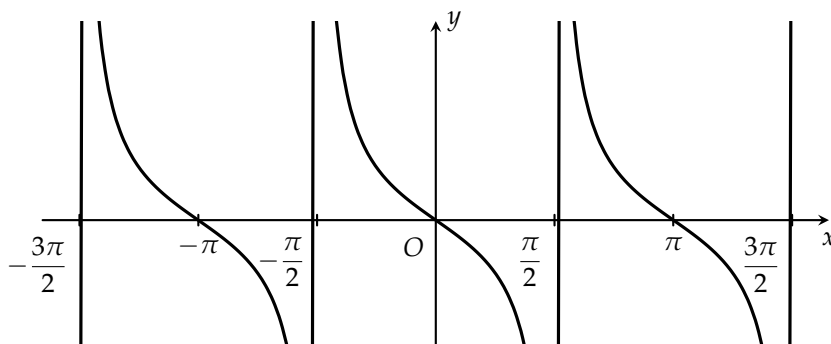


Câu 32. Xét hàm số $f(x) = \sin x$ trên tập hợp $\mathcal{D} = [0; 2\pi]$. Hình nào trong các hình sau là đồ thị của hàm số $f(x)$?



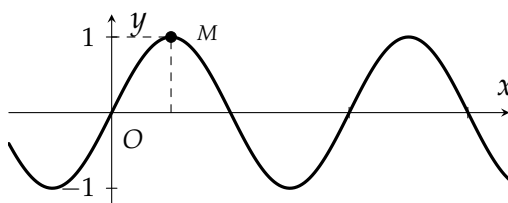


Câu 33. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị ở hình vẽ dưới đây?



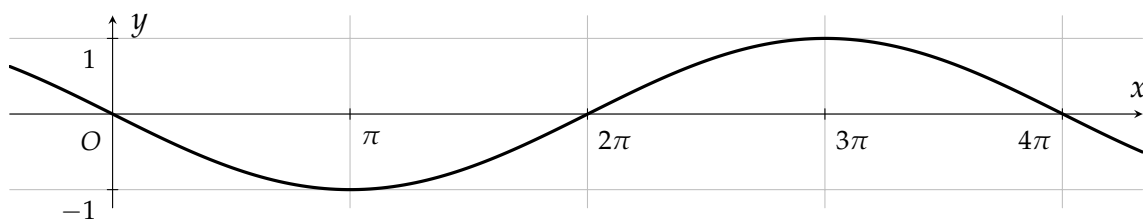
- A. $y = \tan x$. B. $y = -\cot x$. C. $y = \cot x$. D. $y = -\tan x$.

Câu 34. Cho hàm số $y = \sin 2x$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Tìm tọa độ điểm M.



- A. $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. B. $M(\pi; 1)$. C. $M\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$. D. $M\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$.

Câu 35. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



- A. $y = \sin \frac{x}{2}$. B. $y = \cos \frac{x}{2}$. C. $y = \sin x$. D. $y = -\sin \frac{x}{2}$.

Câu 36. Xét hàm số $y = |\sin x|$ trên khoảng $(0; 2\pi)$. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số này.

- A. $(\pi; 2\pi)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.
C. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $(0; \pi)$.

Câu 37. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \sin 3x$ cùng đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. C. $\left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right)$. D. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Câu 38. Hàm số nào sau đây vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = x \sin 3x$. B. $y = \cos 3x$. C. $y = \tan 3x$. D. $y = \cot 3x$.

Câu 39 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sqrt{2 - \cos x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$ B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 40 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x + 1.$ B. $y = \sin x \cdot \cos 2x.$
 C. $y = \sin x \cdot \sin 3x.$ D. $y = \sin 2x + \sin x.$

Câu 41 (HK1, THPT Chuyên ĐHS - HaNoi, 2019).

Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin 2x}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$ B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 42. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

- a) Hàm số $y = x + \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi.$
 b) Hàm số $y = x \cos x$ là hàm số lẻ.
 c) Hàm số $y = \tan 3x$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 43 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ

- A. $T = \pi.$ B. $T = \frac{\pi}{4}.$ C. $T = 4\pi.$ D. $T = 7\pi.$

Câu 44. Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \sin 2x + \cos x.$

- A. $T = \pi.$ B. $T = 2\pi.$ C. $T = 4\pi.$ D. $T = -2\pi.$

Câu 45. Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \sin 2x - \cos 8x.$

- A. $T = \pi.$ B. $T = 2\pi.$ C. $T = 4\pi.$ D. $T = \frac{\pi}{2}.$

Câu 46. Tìm chu kì tuần hoàn T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}.$

- A. $T = 2\pi.$ B. $T = 4\pi.$ C. $T = 6\pi.$ D. $T = 12\pi.$

Câu 47. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot \left(\frac{x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right).$

- A. $T = \pi.$ B. $T = 2\pi.$ C. $T = 3\pi.$ D. $T = 6\pi.$

Câu 48. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos^2 2x.$

- A. $T = \frac{\pi}{2}.$ B. $T = 2\pi.$ C. $T = \pi.$ D. $T = \frac{\pi}{4}.$

Câu 49. Hàm số nào dưới đây là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \frac{\sin x}{\cos x + x}.$ B. $y = \frac{1}{\sin^2 x + 1} + \frac{x}{\cos^2 x + 1}.$
 C. $y = x \tan x + \sin x.$ D. $y = \sin x + \frac{\tan x}{\cot^2 x + 1}.$

Câu 50 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x + \sin 2x$ là

- A. $2\sqrt{2}.$ B. $1 - \sqrt{2}.$ C. $1 + \sqrt{2}.$ D. 3.

Câu 51 (Đề HKI-THPT Chuyên Hưng Yên-2019).

Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x + \cos x - 2$. Tìm $M - m$

- A. $\frac{25}{8}$. B. 4. C. $\frac{21}{8}$. D. 2.

Câu 52. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 + \cos x}, \text{ với } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Tính $M + m$.

- A. $4 - \sqrt{2}$. B. $4 + 2\sqrt{2}$. C. $8 - 2\sqrt{2}$. D. $3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 53 (HK1, Lí Thái Tổ - BN, 2018). Cho hàm số $y = \frac{2018 \sin x - 2019}{\sqrt{2 \sin^2 x + (2m - 3) \cos x + (3m - 2)}}$, có bao nhiêu giá trị tham số m nguyên thuộc $(-2019; 2019)$ để hàm số xác định với mọi giá trị của x ?

- A. 2018. B. 2017. C. 2019. D. 4036.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	7 B	13 C	19 A	25 D	31 D	37 C	43 C	49 D
2 A	8 D	14 B	20 C	26 C	32 D	38 B	44 B	50 B
3 A	9 A	15 B	21 C	27 D	33 D	39 B	45 A	51 A
4 B	10 A	16 C	22 B	28 B	34 C	40 C	46 D	52 C
5 A	11 C	17 D	23 B	29 B	35 D	41 C	47 C	53 B
6 B	12 C	18 A	24 B	30 C	36 B	42 C	48 A	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản.

- $$\begin{aligned} (1) \quad \cos u = \cos v &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}; \\ (2) \quad \sin u = \sin v &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}; \\ (3) \quad \tan u = \tan v &\Leftrightarrow u = v + k\pi; \\ (4) \quad \cot u = \cot v &\Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

2. Trường hợp đặc biệt.

① $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi;$

② $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi;$

③ $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;$

④ $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi;$

⑤ $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi;$

⑥ $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

3. Điều kiện có nghiệm.

☑ Phương trình $\sin u = m$ có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \leq m \leq 1$.

☑ Phương trình $\cos u = m$ có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \leq m \leq 1$.

Chú ý 5. Với $-1 \leq m \leq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} \sin u = m &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin m + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \cos u = m &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arccos m + k2\pi \\ u = -\arccos m + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Với mọi $m \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\tan u = m \Leftrightarrow u = \arctan m + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cot u = m \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} m + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Chuyển đổi giữa sin và cosin, tang và cotang.

① $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$

② $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$

③ $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$

④ $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

5. Đổi dấu hàm số lượng giác.

① $-\sin x = \sin(-x);$

② $-\cos x = \cos(\pi - x);$

③ $-\tan x = \tan(-x);$

④ $-\cot x = \cot(-x).$

6. Các bước giải một phương trình lượng giác.

☑ **Bước 1.** Đặt điều kiện để phương trình xác định.

☑ **Bước 2.** Giải phương trình.

☑ **Bước 3.** Kết hợp với điều kiện để kết luận nghiệm.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN.**Dạng 8. Phương trình lượng giác cơ bản.**

Phương pháp. Xem lại phần tóm tắt lý thuyết.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

① $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

② $\cos 2x = \frac{1}{2};$

③ $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$

④ $\cot 5x = 1.$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

① $3 \sin 2x = -1;$

② $2 \cos(1 - 3x) = 3;$

③ $\tan 3x = 0;$

④ $\cot 2x = 7.$

Bài 3. Giải các phương trình sau

① $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x;$

② $\tan(2x + 45^\circ) \tan\left(180^\circ - \frac{x}{2}\right) = 1;$

③ $\cos 2x - \sin^2 x = 0;$

④ $5 \tan x - 2 \cot x = 3.$

Bài 4 (ĐH -2013B). Giải phương trình $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1.$

Bài 5. Giải các phương trình

① $\sin x - \cos x = 0;$

② $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 0;$

③ $\sin x - \cos x = \sqrt{2};$

④ $2 \sin x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0.$

Bài 6. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3} \sin 2x}{\cos 2x - 1} = 0.$

(1)

Bài 7. Giải phương trình $\tan 3x = \tan x.$

Dạng 9. Giải phương trình lượng giác thoả mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp. Chú ý rằng với mọi $u \in \mathbb{R}$ ta có:

$$-1 \leq \sin u \leq 1; -1 \leq \cos u \leq 1$$

và trong công thức nghiệm của phương trình lượng giác k là số nguyên.

Bài 8. Giải các phương trình sau với điều kiện đã chỉ ra:

① $2 \sin 2x = 1$ với $0 < x < 2\pi;$

② $\tan 3x = -\sqrt{3}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

Bài 9. Giải các phương trình sau:

① $\sin(\pi \cos x) = 1;$

② $\cos(8 \sin x) = 1;$

③ $\tan(\pi \sin x) = \sqrt{3};$

④ $\cot(\pi \cos x) = \sqrt{3}.$

Dạng 10. Rèn luyện kỹ năng biến đổi thành tích.

Bài tập 10 và chú ý 6 sau đây tuy đơn giản nhưng nó thường xuất hiện khi ta biến đổi một phương trình nào đó thành phương trình tích.

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x);$

b) $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x);$

c) $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x);$

d) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2;$

e) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2;$

f) $1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x};$

g) $1 + \cot x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x};$

h) $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x + \cos x;$

i) $1 + \cos 2x + \sin 2x = 2 \cos x(\sin x + \cos x);$

j) $1 - \cos 2x + \sin 2x = 2 \sin x(\sin x + \cos x).$

Chú ý 6. Sau đây là một số công thức rất hay gặp có liên quan đến số 1:

(1) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$

(2) $1 - \tan^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha};$

(3) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$

(4) $1 - \cot^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha};$

(5) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$

(6) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$

(7) $1 + \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2;$

(8) $1 - \sin \alpha = \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2.$

C. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1. Đề bài

Phương trình cơ bản và một số phương trình đưa về phương trình cơ bản.

Bài 11. Giải phương trình: $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{4} \tan 2x.$ (1)

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1. \end{cases}$

Bài 13 (China Girls Math Olympiad-2005).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 12 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 13 \left(z + \frac{1}{z} \right) & (1) \\ xy + yz + zx = 1. & (2) \end{cases}$$

2. Lời giải, hướng dẫn

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}.$

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 2. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos x = 1$.

A. $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x = 0$.

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x = \sqrt{2}$.

A. $S = \mathbb{R}.$

B. $S = \left\{ -\frac{1}{2} \arccos \sqrt{2} + k\pi; \frac{1}{2} \arccos \sqrt{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \emptyset.$

D. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}.$

Câu 5. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 6. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $S = \{120^\circ + k360^\circ; k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $S = \{120^\circ + k360^\circ; -180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $S = \{120^\circ + k180^\circ; k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $S = \{120^\circ + k180^\circ; -180^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 7. Giải phương trình: $\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$.

A. $\begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ x = 210^\circ + k360^\circ \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ x = 150^\circ + k360^\circ \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 210^\circ + k360^\circ \end{cases}.$

Câu 8. Giải phương trình $2 \sin 2x = -1$ với điều kiện $\cos x > 0$.

A. $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi.$

B. $x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi.$

C. $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi.$

D. $x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi.$

Câu 9. Giải phương trình $3 \cot 2x = -\sqrt{3}$ với điều kiện $\sin x > 0$.

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$

C. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

Câu 10 (Đề Thi HK1 T11, SGD Quảng Nam 2017).

Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ của phương trình $\sin x = \frac{1}{3}$

A. 0 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. 2 nghiệm.

Câu 11 (Đề kiểm tra HK1 lớp 11, chuyên Trần Hưng Đạo, năm 2018 - 2019).

Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$?

- A. $\cos x = 1$. B. $\tan x = 0$. C. $\cos x = -1$. D. $\cot x = 1$.

Câu 12 (Học kỳ 1 lớp 11, trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, 2019).

Phương trình $\sin 2x = -\sin \frac{\pi}{3}$ có nghiệm α, β với $-\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta < \frac{3\pi}{4}$. Giá trị của $\alpha \cdot \beta$ bằng

- A. $-\frac{\pi^2}{9}$. B. $-\frac{4\pi^2}{9}$. C. $\frac{\pi^2}{9}$. D. $-\frac{\pi}{9}$.

Câu 13. Cho phương trình $\cot x = m$. Nghiệm của phương trình này là

- A. $x = \arctan m + k\pi$.
 B. $x = \arctan \frac{1}{m} + k\pi$.
 C. $x = \arctan \frac{1}{m} + 2k\pi$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nếu $m = 0$ và $x = \arctan \frac{1}{m} + k\pi$ nếu $m \neq 0$.

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $3 \tan \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15 (Đề HKI-Chuyên Hưng Yên-2019).

Phương trình $\cos \left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 16 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Phương trình $\frac{\sin 5x}{\sin x} = 2 \cos x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 17 (HK1, THPT Chuyên ĐHS - HaNoi, 2019).

Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[0; 20\pi]$?

- A. 20. B. 21. C. 11. D. 10.

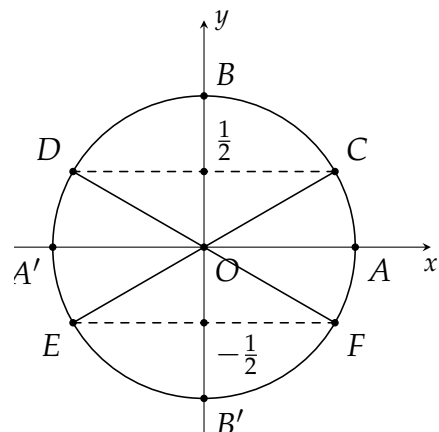
Câu 18. Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cot \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 19 (Đề kiểm tra HK1 lớp 11, chuyên Trần Hưng Đạo, năm 2018 - 2019).

Nghiệm của phương trình $2 \sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?

- A. Điểm E, điểm D. B. Điểm D, điểm C.
 C. Điểm C, điểm F. D. Điểm E, điểm F.



Câu 20 (Đề thi HK1, lớp 11, Chuyên Trần Hưng Đạo).

Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

- A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 21 (Học kỳ 1 lớp 11, trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, 2019).

Số nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ trong $[0; 10\pi]$ là

- A. 10. B. 20. C. 21. D. 11.

Câu 22 (Đề kiểm tra HK1 lớp 11, chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận, năm 2018 - 2019).

Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

- A. Phương trình $\tan x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. Phương trình $\tan x = a$ và phương trình $\cot x = a$ có nghiệm với mọi số thực a .
 C. Phương trình $\cos x = a$ có nghiệm với mọi số thực a .
 D. Phương trình $\sin x = a$ có nghiệm với mọi số thực a .

Câu 23. Phương trình $1 + \tan x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 24. Phương trình $\tan 2x = 1$ có họ nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Cho phương trình $\tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} = 0$. Nghiệm của phương trình này là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{14} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $\cot x + \sqrt{3} = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 27. Phương trình $\tan (2x + 12^\circ) = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -6^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -6^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -12^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -6^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 28. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \tan \left(3x + \frac{3\pi}{5} \right) = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 29 (Học kỳ 1, lớp 11, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019).

Phương trình $\cos x = 1$ có nghiệm là

- A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 30 (Học kỳ 1, lớp 11, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019).

Số nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \cos 2x = -\cos^2 x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 5\pi \right]$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 31 (Đề HKI-Chuyên Hưng Yên-2019).

Làng Duyên Yên, xã Ngọc Thanh, Huyện Kim Động, Tỉnh Hưng Yên nổi tiếng với trò chơi dân gian đánh đu. Trong trò chơi này, khi người chơi nhún đều thì cây đu sẽ đưa người chơi dao động qua lại ở vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy rằng khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right)$, trong đó quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại. Tìm thời điểm đầu tiên sau 10 giây mà người chơi đu xa vị trí cân bằng nhất.

A. Giây thứ 13.

B. Giây thứ 12,5.

C. Giây thứ 10,5.

D. Giây thứ 11.

Câu 32 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 33 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Nghiệm của phương trình $2 \cos x + 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Sử dụng giả thiết sau để trả lời các câu hỏi 34, 35, 36: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40^0 bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{182}(t - 80)\right) + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365.$$

Câu 34. Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

A. Ngày thứ 80 và ngày thứ 261.

B. Ngày thứ 81 và ngày thứ 262.

C. Ngày thứ 263.

D. Ngày thứ 80 và ngày thứ 262.

Câu 35. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. Ngày thứ 353.

B. Ngày thứ 354.

C. Ngày thứ 355.

D. Ngày thứ 356.

Câu 36. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. Ngày thứ 170.

B. Ngày thứ 171.

C. Ngày thứ 172.

D. Ngày thứ 173.

Câu 37. Điều kiện để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm là

A. $|m| \leq 1.$

B. $m < 1.$

C. $m \leq 1.$

D. $-1 < m < 1.$

Câu 38. Điều kiện để phương trình $\sin 2x = m$ có nghiệm là

A. $|m| < 1.$

B. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$

C. $-2 \leq m \leq 2.$

D. $-1 \leq m \leq 1.$

Câu 39. Điều kiện để phương trình $\sin^2 x = m$ có nghiệm là

A. $|m| < 1.$

B. $0 \leq m \leq 1.$

C. $m \geq 0.$

D. $-1 \leq m \leq 1.$

Câu 40 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Tìm tất cả các giá trị của số thực m để phương trình $\sin 7x = \cos 2m$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}.$

B. $m \in [-1; 1].$

C. $m \in \left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right].$

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$

Câu 41. Điều kiện để phương trình $5 \cos^2 3x = m$ có nghiệm là

A. $0 \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$

B. $-\frac{1}{\sqrt{5}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$

C. $0 \leq m \leq \frac{1}{5}$.

D. $0 \leq m \leq 5$.

Câu 42. Tìm m để phương trình $2 \sin(7x + 33) = m - 3$ có nghiệm.

A. $1 \leq m \leq 5$.

B. $2 \leq m \leq 4$.

C. $1 < m \leq 5$.

D. $2 \leq m < 4$.

Câu 43. Tìm m để phương trình $(m - 2) \cos 5x = m$ có nghiệm.

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m < 0$.

Câu 44. Tìm điều kiện của m để phương trình $\sin^2 x + \cos 2x = m$ có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

A. $m < 1$.

B. $0 \leq m \leq 1$.

C. $\frac{1}{4} \leq m \leq 1$.

D. $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 45. Giải phương trình: $\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

A. $x = 4k^2$.

B. $x = 4k^2\pi$.

C. $x = 2k$.

D. $x = 2k\pi$.

Câu 46. Giải phương trình: $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k4\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k4\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 47. Giải phương trình $\sqrt{2} \sin x + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} + \tan x$ được nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k4\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k4\pi$.

Câu 48. Gọi a là nghiệm của phương trình

$$\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}. \quad (*)$$

Khi đó

A. $\cos 4a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos 4a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos 4a = \frac{1}{2}$.

D. $\cos 4a = 1$.

Câu 49. Giải phương trình $\sin 4x + \cos 4x = 4\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ ta được nghiệm là

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k3\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 50. Giả sử a là nghiệm của phương trình

$$\tan(\pi \cos x) = \cot(\pi \sin x).$$

Khi đó tập giá trị của $\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

B. $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

C. $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

D. $\left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 51. Giải phương trình $\sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2 \sin^3 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{2} + k4\pi$.

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k4\pi$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	7 A	13 D	19 D	25 C	31 D	37 A	43 B	49 C
2 A	8 B	14 B	20 B	26 B	32 B	38 D	44 C	
3 B	9 C	15 D	21 D	27 D	33 D	39 B	45 A	50 C
4 C	10 D	16 B	22 B	28 D	34 D	40 A	46 B	
5 A	11 B	17 A	23 C	29 D	35 A	41 D	47 B	
6 B	12 A	18 D	24 A	30 B	36 B	42 A	48 B	51 A

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI, BẬC BA ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương trình bậc hai, bậc ba đối với một hàm số lượng giác là những phương trình dạng:

$$at^2 + bt + c = 0, \quad at^3 + bt^2 + ct + d = 0,$$

với t là một hàm số lượng giác nào đó.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1 (THPT Quốc gia 2016). Giải phương trình:

$$2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0.$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$\textcircled{1} \cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0;$$

$$\textcircled{2} 2\cos^2 5x + \sin 5x - 2 = 0.$$

Bài 3 (ĐH cảnh sát nhân dân 1999).

Tìm các nghiệm của phương trình

$$1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$$

thỏa mãn điều kiện $\cos x \geq 0$.

Bài 4 (ĐH ngoại ngữ HN-2000). Giải phương trình

$$2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}. \quad (1)$$

Bài 5 (ĐH-2004B). Giải phương trình:

$$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x. \quad (1)$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Giải phương trình $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

$$\text{A. } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2. Giải phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\sqrt{3}$.

- A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Giải phương trình $|\sin x| = 1$.

- A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Giải phương trình $\sqrt{3}\tan x + \cot x - \sqrt{3} - 1 = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{4} + k3\pi, x = \frac{\pi}{6} + k3\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Cho phương trình $\cos 2x + \cos x = 2$. Khi đặt $t = \cos x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

- A. $2t^2 - t - 1 = 0$.
 B. $2t^2 + t - 3 = 0$.
 C. $2t^2 + t - 1 = 0$.
 D. $2t^2 - t - 3 = 0$.

Câu 6 (Đề HK1 T11, Đức Thọ, Hà Tĩnh 2018).

Phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = k2\pi$.
 B. $x = k\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 7 (Đề kiểm tra HK1 lớp 11, chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận, năm 2018 - 2019).

Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Số nghiệm của phương trình $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 \leq x < \pi$ là

- A. 2.
 B. 3.
 C. 4.
 D. 1.

Câu 9. Nghiệm dương bé nhất của phương trình $-2\cos^2 x + 5\sin x - 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{12}$.
 B. $x = \frac{5\pi}{6}$.
 C. $x = \frac{\pi}{6}$.
 D. $x = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 10 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin x = 0$ được biểu diễn bởi tất cả bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

- A. 1 điểm.
 B. 2 điểm.
 C. 3 điểm.
 D. 4 điểm.

Câu 11. Giải phương trình $2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12 (HK1, Liên trường thành phố Vinh, Nghệ An, năm học 2017-2018).

Số nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ trên $[0; 10\pi]$ là

- A. 10.
 B. 25.
 C. 15.
 D. 20.

Câu 13. Giải phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} + 3 \cot x + 1 = 0$

- A. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \operatorname{arccot}(-2) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
 B. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, x = \operatorname{arccot}(-2) + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \operatorname{arccot}(-2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \operatorname{arccot}(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 14. Giải phương trình $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = -\frac{\pi}{6} + k3\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k4\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 15 (HK1, THPT Đan Phượng Hà Nội, 2018).

Định m để phương trình có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \cos^2 2x + m \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{8}.$$

- A. $0 < m < 1.$ B. $0 < m < 2.$ C. $0 < m < \frac{3}{8}.$ D. $0 < m < \frac{1}{8}.$

Câu 16 (HK1, 2017 - 2018, Nguyễn Trung Ngạn, Hưng Yên).

Tất cả các nghiệm của phương trình $3 \sin x - \cos 2x + 1 = 0$ là

- A. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 17 (HK1, 2017 - 2018, Nguyễn Trung Ngạn, Hưng Yên).

Tất cả các nghiệm của phương trình $3 \cot x + \tan x - 2\sqrt{3} = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 18 (HK1, Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh, năm học 2017-2018).

Tìm các nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ trong khoảng $(0; \pi).$

- A. $x = \frac{\pi}{2}, x = 0, x = \pi.$ B. $x = \frac{\pi}{4}.$
 C. $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}.$ D. $x = \frac{\pi}{2}.$

Câu 19 (HK1, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, năm 2018).

Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2 \tan x + 3 \cot x + 5 = 0.$

- A. $-\frac{5\pi}{4}.$ B. $-\frac{\pi}{6}.$ C. $-\frac{\pi}{4}.$ D. $-\frac{\pi}{3}.$

Câu 20 (Đề TT-THPTQG, Chuyên Biên Hòa, Hà Nam năm học 2018-2019).

Số nghiệm của phương trình $2 \sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ trong $[0; 2018\pi]$ là

- A. 1008. B. 2018. C. 2017. D. 1009.

Câu 21 (HK1, Sở Giáo Dục và Đào Tạo Bà Rịa-Vũng Tàu, 2018).

Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $(7 - 2 \cos 2x) (\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(-\pi; \pi).$ Giá trị của S là

- A. $S = 0.$ B. $S = \frac{5\pi}{3}.$ C. $S = 2\pi.$ D. $S = 4\pi.$

Câu 22. Giải phương trình $\tan x + 2 \cot x - 3 = 0$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \arctan 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23. Giải phương trình $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 5$.

- A. $x = \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{1}{2} \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{1}{2} \arctan 5 + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \arctan \frac{5}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 24. Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 \tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$.

- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = -\frac{\pi}{4}$.
 D. $x = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 25. Cho phương trình: $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $-1 \leq m < 0$.
 B. $-1 \leq m \leq 0$.
 C. $-1 < m < 0$.
 D. $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 26 (Đề thi HK1, lớp 11, Chuyên Trần Hưng Đạo).

Cho phương trình $\cos 2x - (2m - 3) \cos x + m - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $1 \leq m < 2$.
 B. $m < 2$.
 C. $m \geq 1$.
 D. $m \leq 1$.

Câu 27. Phương trình $\frac{(3 + 2 \sin x) \cos x - (2 + \cos^2 x)}{\sin 2x} = 1$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 4\pi]$?

- A. 0.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 3.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + m = 0$$

có nghiệm.

- A. $m \leq \frac{1}{4}$.
 B. $m < \frac{1}{4}$.
 C. $-2 \leq m \leq 0$.
 D. $-2 < m < 0$.

Câu 29. Cho phương trình $\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

- A. Phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 B. Phương trình có nghiệm trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.
 C. Mọi nghiệm x_0 của phương trình đều thỏa mãn $\sin 3x_0 = 1$.
 D. Một họ nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 30. Giải phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \frac{4 + 2 \sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2(\cot x + 1)$.

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
 B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.
 D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 31. Cho phương trình $\sin^2 4x + (m^2 - 3) \sin 4x + m^2 - 4 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

- A. $-2 < m < 2$. B. $-2 \leq m < 2$. C. $m = 2, m = -2$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 32 (TT Sở GD Bắc Ninh, 2018). Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0; 30\pi]$ của phương trình $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$. Khi đó giá trị của S bằng

- A. $S = \frac{1365}{2}\pi$. B. $S = \frac{1215}{2}\pi$. C. $S = 622\pi$. D. $S = \frac{1335}{2}\pi$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D	5 B	9 C	13 C	17 D	21 A	25 A	29 C
2 A	6 D	10 C	14 D	18 D	22 C	26 A	30 D
3 D	7 B	11 C	15 D	19 C	23 C	27 A	31 C
4 A	8 A	12 C	16 C	20 B	24 B	28 C	32 A

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SIN X VÀ COS X

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét phương trình $a \sin x + b \cos x = c$, với $a^2 + b^2 \neq 0$ (gọi là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$).

Cách giải.

- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ thì kết luận phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ thì ta làm như sau: biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \Leftrightarrow \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \left(\text{với } \cos \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ và } \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (phương trình đã biết cách giải).} \end{aligned}$$

Lưu ý.

- ☑ Nếu $|a| = |c|$ hoặc $|b| = |c|$ thì ta giải phương trình nhờ hằng đẳng thức lượng giác để đưa về phương trình tích (xem bài tập 2 ở trang 31).
- ☑ Ta thường dùng các công thức sau:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$\textcircled{1} 3 \sin x + \cos x = 2;$$

$$\textcircled{2} 2 \sin 3x + \sqrt{5} \cos 3x = -3;$$

$$\textcircled{3} \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2;$$

$$\textcircled{4} 5 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 13.$$

Lưu ý. Ta thường dùng các công thức sau:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$\textcircled{1} 3 \sin x - 2 \cos x = 2;$$

$$\textcircled{2} \sin x + 3 \cos x = 1.$$

Bài 3 (ĐH Kinh Tế Hà Nội-1997). Tìm các nghiệm $x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right)$ của phương trình:

$$\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}.$$

Bài 4. Giải phương trình: $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin x + 2 \cos x = 3.$

Bài 5 (ĐH-2007D). Giải phương trình

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2. \quad (*)$$

Bài 6 (ĐH - 2010B - Phần chung). Giải phương trình

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0. \quad (1)$$

Bài 7 (ĐH - 2010D - Phần chung). Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0.$$

Chú ý 7. Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$. Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ ta có thể tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một số biểu thức, chứng minh một số bất đẳng thức.

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$\textcircled{1} y = \frac{\sin x}{\cos x + 3};$$

$$\textcircled{2} y = \frac{4 \sin^2 x}{2 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a) y = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos^2 x + \cos 2x;$$

b) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x;$

c) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + \sin 4x.$

Bài 11. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{\cos 3x + a \sin 3x + 1}{2 + \cos 3x} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{2 + \cos x}$. Tìm m để $\min_{\mathbb{R}} y < -1$.

Bài 13 (ĐH-2008B). Xét hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = |3 \cos x + \sin x - 1| + \cos x + \sin x.$$

Bài 15. Xét các số thực x và y thỏa mãn điều kiện $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $P = y - 2x + 5$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Một nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2$ là

- A. $x = -\frac{5\pi}{6}$. B. $x = -\frac{\pi}{3}$. C. $x = -\frac{\pi}{2}$. D. $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Câu 2. Tìm m để phương trình $3 \sin 2x + m \cos 2x = m + 2$ nhận $x = \frac{\pi}{4}$ làm nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = -2$.

Câu 3 (HK1, Sở GD và ĐT Bà Rịa-Vũng Tàu, 2018).

Phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$. B. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$. C. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$. D. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Câu 4 (Đề TT-THPTQG, Trường THPT Chuyên Biên Hòa, Hà Nam 2018).

Phương trình $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. B. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$.
C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. D. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Câu 5 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Họ nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -2$.

- A. $S = \emptyset$.
 B. $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 7. Giải phương trình $\sin 3x - \cos 3x = -1$.

- A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$.
 B. $x = k\frac{2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$.
 C. $x = k\frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$.
 D. $x = k\frac{2\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$.

Câu 8. Giải phương trình $\sin(x + 32^\circ) + \sqrt{3} \cos(x + 32^\circ) = 1$.

- A. $x = -62^\circ + k2\pi, x = 58^\circ + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 B. $x = -62^\circ + k360^\circ, x = 58^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = 60^\circ + k360^\circ, x = -58^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 D. $x = -62^\circ + k180^\circ, x = 78^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 9 (Đề thi HK1, lớp 11, Chuyên Trần Hưng Đạo).

Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$ trên $[0; 2\pi]$.

- A. $\frac{3\pi}{2}$.
 B. $\frac{\pi}{6}$.
 C. $\frac{11\pi}{6}$.
 D. $\frac{5\pi}{3}$.

Câu 10 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m \sin x + \sqrt{3 - m} \cos x = m - 1$ có nghiệm là

- A. $-1 \leq m \leq 1$.
 B. $m \leq 3$.
 C. $-2 \leq m \leq 3$.
 D. $m \geq -2$.

Câu 11. Giải phương trình $\sin 2x + 2 \cos^2 x = 2$.

- A. $x = k\pi$.
 B. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 C. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.
 D. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 12. Phương trình $\cos 2x + \sin 2x = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 B. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 C. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
 D. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Câu 13 (Đề HK1 T11, THPT Đức Thọ, Hà Tĩnh năm 2018).

Tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ là

- A. $T = \frac{7\pi}{8}$.
 B. $T = \frac{21\pi}{8}$.
 C. $T = \frac{11\pi}{4}$.
 D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 14 (HK1, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, 2018).

Giải phương trình

$$\sin^4 x - \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x.$$

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15 (Chuyên Hà Nội Amsterdam 2018).

Tập giá trị của hàm số $y = 5 \sin x - 12 \cos x$ là

- A. $[-12; 5]$.
 B. $[-13; 13]$.
 C. $[-17; 17]$.
 D. $(-13; 13)$.

Câu 16. Tập hợp các giá trị m để phương trình $m \sin x + 5 \cos x = m + 1$ có nghiệm là

- A. $(-\infty; 12]$. B. $(-\infty; 24]$. C. $[3; +\infty)$. D. $(-\infty; 6]$.

Câu 17 (Đề kiểm tra HK1 lớp 11, chuyên Trần Hưng Đạo, năm 2018 - 2019).

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $5 \sin x - 12 \cos x = m$ có nghiệm?

- A. 13. B. 26. C. 27. D. Vô số.

Câu 18 (HK1 năm học 2017-2018, THPT Chuyên Hà Nội Amsterdam).

Cho hàm số

$$y = \frac{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}{\sin x + \cos x + 2}.$$

Giả sử hàm số có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là N . Khi đó, giá trị của $2M + N$ là

- A. $4\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cos x + \sin x = 1 - m$ có nghiệm.

- A. $m \leq 0$. B. $m < 0$. C. $m \geq 0$. D. $m < 1$.

Câu 20. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $m \sin 2x + (m - 1) \cos 2x = \sqrt{2}m$ vô nghiệm.

- A. $m \leq \frac{1}{2}$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m \geq \frac{1}{2}$. D. $m < 1$.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $2 \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 5$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. vô số.

Câu 22. Tìm m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = m + 1$ có nghiệm.

- A. $m \leq \frac{2}{3}$. B. $m \geq \frac{3}{2}$. C. $m \leq \frac{3}{2}$. D. $m \leq \frac{5}{2}$.

Câu 23. Tìm m để phương trình $5 \cos 3x + m \sin 3x = m - 2$ vô nghiệm.

- A. $m < \frac{21}{4}$. B. $m < -\frac{21}{4}$. C. $m < \frac{29}{4}$. D. $m > -\frac{21}{4}$.

Câu 24. Gọi x_1 là nghiệm không âm nhỏ nhất, x_2 là nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 2 \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0.$$

Khi đó tổng $S = x_1 + x_2$ bằng

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số

$$y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}.$$

- A. $M = \frac{5}{7}, m = -1$. B. $M = 1, m = -1$. C. $M = 1, m = -\frac{5}{7}$. D. $M = \frac{6}{7}, m = \frac{1}{7}$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y = \frac{m \sin x + \cos x + 1}{\cos x + 2}$$

có giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ sao cho $y_{\min} < 1$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq 0$.
C. $m \in [-1; 1]$. D. $m \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	4 A	7 D	10 C	13 C	16 A	19 C	22 C	25 A
2 A	5 A	8 B	11 B	14 B	17 C	20 B	23 B	
3 A	6 B	9 D	12 A	15 B	18 A	21 C	24 C	26 A

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

D. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $A \sin X + B \cos X = C \sin U + D \cos U$, VỚI $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$

Cách giải. Chia cả hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ để đưa về phương trình cơ bản.

Bài 16 (Đề thi Cao đẳng 2008ABD).

Giải phương trình

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x.$$

Bài 17. Giải các phương trình:

a) $\sin x - 5 \cos x = \sin 2x + 5 \cos 2x;$

b) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x;$

c) $\cos x + \sin 2x = \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \cos 2x.$

Bài 18 (Đề ĐH-2009A-Phần chung).

Giải phương trình

$$\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}. \quad (*)$$

Bài 19 (ĐH-2009B-Phần chung). Giải phương trình

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x). \quad (*)$$

Bài 20. Giải phương trình

$$2 \cos 6x + 2 \cos 4x - \sqrt{3} \cos 2x = \sin 2x + \sqrt{3}.$$

Bài 21 (ĐH-2012A). Giải phương trình

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1.$$

Bài 22. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin x \cos 4x + \cos^2 4x = \frac{3}{4}.$

Bài 23 (T6/489 Toán học & tuổi trẻ số 489, tháng 3 năm 2018).

Giải phương trình

$$(1 - \sqrt{2} \sin x)(\cos 2x + \sin 2x) = \frac{1}{2}.$$

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Xét phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$, với a, b, c, d là những hằng số và $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Khi $d = 0$, phương trình trên được gọi là phương trình thuần nhất (đẳng cấp) bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

Cách giải.

- ☑ Kiểm tra xem $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$) có thoả mãn phương trình hay không?
- ☑ Khi $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, đưa về phương trình bậc hai theo $\tan x$.

Chú ý 8. Phương trình đẳng cấp bậc 3 là phương trình có dạng như sau:

• **Dạng chính tắc:**

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0.$$

• **Dạng mở rộng (hay còn gọi là phương trình bậc 3-1):**

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x + (m \sin x + n \cos x) = 0.$$

Nhận xét 2. Tương tự, bạn đọc hãy đưa ra cách giải phương trình đẳng cấp bậc ba đối với $\sin x$ và $\cos x$. Còn đối với phương trình bậc 3 – 1, bằng cách thay

$$m = m(\sin^2 x + \cos^2 x), \quad n = n(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ta đưa về phương trình đẳng cấp bậc 3 (xem bài tập 3b).

Nhận xét 3. Ta còn có thể giải phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ bằng cách sử dụng các công thức:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

để đưa phương trình đã cho về phương trình bậc nhất theo $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 1 = 0;$

b) $3 \sin^2 3x - 4 \sin 3x \cos 3x + 2 \cos^2 3x = 3.$

Bài 2. Giải phương trình $(3 \sin 2x + \cos 2x)(\cos 2x - 2 \sin 2x) = 1.$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$ (Đề ĐH-2008B);

b) $\cos^3 x + \sin x - 3 \sin^2 x \cos x = 0$ (ĐH Huế 1998).

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2};$

b) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0;$

c) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$

Bài 5 (ĐH An Ninh-1998). Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x};$

② $4 \sin x + 6 \cos x = \frac{1}{\cos x}.$

Bài 6 (Dự bị ĐH-2005A). Giải phương trình

$$2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \cos x - \sin x = 0. \quad (1)$$

Bài 7. Giải các phương trình

① $\sqrt{2} \sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x;$

② $\sin^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x.$

Bài 8. Giải phương trình: $1 + 3 \tan x - 2 \sin 2x = 0.$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 0$, trên đoạn $[0; 2\pi]$ là.

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 2. Giải phương trình $2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \arctan 2 + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2 \cos^2 x = 2$.

A. $S = \emptyset.$

B. $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4 (Đề thi HK1, lớp 11, Chuyên Trần Hưng Đạo).

Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng.

A. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

B. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right).$

C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$

D. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right).$

Câu 5. Giải phương trình $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 4$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

C. Vô nghiệm.

D. Vô số nghiệm.

Câu 6. Cho phương trình $\sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2}$. Hãy tìm nghiệm dương nhỏ nhất.

A. $\arctan(-5)$. B. $\arctan(-5) + \pi$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 7 (Thi HK1, THPT Lương Thế Vinh Hà Nội, 2019).

Tìm tập nghiệm của phương trình $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

- A. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- C. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8 (Toán học và Tuổi trẻ lần 6, Số tháng 3-2018).

Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2$ có nghiệm?

- A. 2. B. $\frac{11}{3}$. C. 4. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 9. Cho phương trình $3 \sin^2 x + 4 \sin 2x + (8\sqrt{3} - 9) \cos^2 x = 0$. Hãy tìm nghiệm âm lớn nhất.

- A. $\arctan\left(-\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right)$. B. $-\frac{\pi}{3}$.
- C. $-\frac{4\pi}{3}$. D. $\arctan\left(-\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right) + \pi$.

Câu 10. Cho phương trình $\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 0$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Phương trình vô nghiệm. B. Phương trình có một nghiệm.
- C. Phương trình có hai nghiệm. D. Phương trình có vô số nghiệm.

Câu 11. Phương trình $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - \cos^2 x + 2 = 0$ có cùng tập nghiệm với phương trình nào trong số bốn phương trình sau?

- A. $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - \cos x = 0$. B. $4 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.
- C. $4 \tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$. D. $5 \sin 2x + 3 \cos 2x = 2$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\sin^3 x + 3 \cos^3 x + \sin x = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m.$$

- A. $-\sqrt{10} \leq m \leq \sqrt{10}$. B. $-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$.
- C. $m \leq \sqrt{10}$. D. $m \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

- 1 D 3 B 5 C 7 B 9 A 11 C 13 B
2 A 4 A 6 C 8 D 10 D 12 B

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 6. SỬ DỤNG CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Việc sử dụng các công thức biến đổi nhằm đưa phương trình đã cho về phương trình tích hoặc các phương trình đã biết cách giải.

A. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}; & \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}; \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}; & \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.\end{aligned}$$

Chú ý 9. Khi nhóm các số hạng chứa sin (hoặc cosin) của các góc với nhau, cần để ý đến những góc sao cho tổng hoặc hiệu các góc đó bằng nhau để làm xuất hiện nhân tử chung.

Bài 1. Giải phương trình

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Bài 2 (ĐH-2012D). Giải phương trình

$$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x. \quad (1)$$

Bài 3. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Bài 4 (ĐH Nông Lâm TP HCM-2001).

Giải phương trình

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Bài 5 (ĐH Đà Nẵng-Khối B-1997). Giải phương trình

$$\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0.$$

Bài 6 (ĐH 2007B). Giải phương trình

$$2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x. \quad (*)$$

B. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)]; \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos (a+b) - \cos (a-b)]; \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin (a+b) + \sin (a-b)]; \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin (a+b) - \sin (a-b)].\end{aligned}$$

Bài 7. Giải các phương trình

$$\textcircled{1} \cos 11x \cdot \cos 3x = \cos 17x \cdot \cos 9x; \quad \textcircled{2} \sin 18x \cdot \cos 13x = \cos 4x \cdot \sin 9x.$$

Bài 8 (ĐH-2005A). Giải phương trình $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$. (1)

Bài 9 (Đề ĐH-2009D-Phần chung). Giải phương trình

$$\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0.$$

C. CÔNG THỨC HẠ BẬC, NÂNG CUNG

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

Lưu ý. Sau khi dùng công thức hạ bậc, ta thường dùng công thức biến đổi tổng thành tích như ở mục a).

Bài 10 (ĐH-2002B). Giải phương trình: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Bài 11 (Dự bị ĐH-2008B). Giải phương trình:

$$3 \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}. \quad (1)$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Phương trình $\cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ có bao nhiêu nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{19\pi}{3}\right)$?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 2. Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

- A. $x = k2\pi$. B. $x = \frac{k2\pi}{3}$.
C. $x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = k\pi, x = \frac{k2\pi}{3}$.

Câu 3. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4. Giải phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 5. Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k3\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Câu 6. Tính tổng tất cả các nghiệm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình:

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0.$$

A. $\frac{3\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{5\pi}{4}$.

D. $\frac{3\pi}{2}$.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 C 2 D 3 C 4 A 5 A 6 C

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 7. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG TÍCH

Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm gần đây, đa số các bài toán về giải phương trình lượng giác đều rơi vào một trong hai dạng: Phương trình đưa về dạng tích hoặc phương trình chứa ẩn ở mẫu. Để đưa phương trình đã cho về phương trình tích điều quan trọng nhất vẫn là làm sao để phát hiện ra nhân tử chung nhanh nhất. Bạn đọc nên xem lại chú ý 6 ở trang 20 và bài tập 10 ở trang 19 để có định hướng tốt hơn trong quá trình giải bài tập.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1 (ĐH-2005B). Giải phương trình

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0. \quad (1)$$

Bài 2 (Dự bị ĐH-2006B). Giải phương trình

$$\cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0. \quad (1)$$

Bài 3 (Dự bị ĐH-2006B). Giải phương trình

$$(2 \sin^2 x - 1) \tan^2 2x + 3(2 \cos^2 x - 1) = 0. \quad (1)$$

Bài 4 (Dự bị thi ĐH-2006A). Giải phương trình

$$2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin x + 1 = 0. \quad (1)$$

Bài 5 (ĐH-2008D). Giải phương trình

$$2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x. \quad (1)$$

Bài 6 (Dự bị ĐH-2005D). Giải phương trình

$$\sin 2x + \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 2 = 0. \quad (1)$$

Bài 7. Giải phương trình: $4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = \tan x. \quad (1)$

Bài 8 (Dự bị ĐH-2007B). Giải phương trình

$$\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}. \quad (1)$$

Bài 9 (ĐH-2011B). Giải phương trình

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \cos x + \sin x. \quad (1)$$

Bài 10. Giải phương trình

$$\sin 3x - 3 \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

Bài 11. Giải phương trình

$$\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3} \cdot \cos^3 x - 3\sqrt{3} \cdot \cos 2x + 8(\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0.$$

Bài 12. Giải phương trình $(1 - 4\sin^2 x) \sin 3x = \frac{1}{2}. \quad (1)$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1 (Học kỳ 1 lớp 11, THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh, 2018-2019).

Tìm số điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ trên đường tròn lượng giác.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2 (THPT Đức Thọ, Hà Tĩnh 2018).

Phương trình $\cos x(2 \sin x + 1) = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}.$

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ là:

- A. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$ B. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$ D. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k4\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4 (HK1, Đức Thọ, Hà Tĩnh 2018).

Phương trình $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}.$ B. $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}.$ C. $x = \pi + k2\pi.$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 5 (TT lần 1 – chuyên Bắc Ninh - 2018).

Giải phương trình $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{12\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 6 (Sở GD & ĐT Bình Định năm học 2017-2018).

Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình: $\sin x - \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x$ là

A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{2\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $\cos x(1 - \cos 2x) - \sin^2 x = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là

A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.

Câu 8. Giải phương trình: $1 + \tan x = 2(\sin x + \cos x)$.

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 9. Giải phương trình: $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$.

A. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi.$ B. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$
C. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi.$ D. $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi.$

Câu 10. Giải phương trình: $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 11. Giải phương trình $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 3 \sin 2x + 6 \cos x = 0$.

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$ B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$
C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$ D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 12 (HK1, Lí Thái Tổ - BN, 2018). Cho phương trình

$$(2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + m) = 3 - 4 \cos^2 x.$$

Có bao nhiêu giá trị tham số m nguyên thuộc $(-7; 2)$ để phương trình có đúng hai nghiệm trên $[0; \pi]$?

A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 13 (HK1, Lí Thái Tổ - BN, 2018). Cho phương trình $\frac{\cos x(1 - 2 \sin x)}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên $[0; 101]$.

A. $\frac{808\pi}{3}$. B. $\frac{2019\pi}{2}$. C. $\frac{475\pi}{2}$. D. $\frac{2018\pi}{3}$.

Câu 14. Giải phương trình $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$ B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$
C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$ D. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 15. Giải phương trình:

$$\sin 3x + 2 \cos 2x = 3 + 4 \sin x + \cos x(1 + \sin x).$$

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi.$

B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi.$

C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi.$

D. $x = \frac{k\pi}{2}.$

Câu 16 (Thi thử THPTQG 2018, lần 2, Kinh Môn, Hải Dương).

Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2 \left(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x \right)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$.

A. $\left(\frac{1285}{4} \right)^2 \pi.$

B. $643^2 \pi.$

C. $642^2 \pi.$

D. $\left(\frac{1285}{2} \right)^2 \pi.$

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 D 3 A 5 A 7 B 9 A 11 B 13 A 15 C

2 D 4 B 6 C 8 B 10 C 12 C 14 D 16 D

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 8. MỘT SỐ PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ THÔNG DỤNG

A. PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ $u = \sin x + \cos x$, VỚI ĐIỀU KIỆN $|u| \leq \sqrt{2}$.

Một số biểu thức được tính theo u như sau:

$$(1) \sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}, \quad \sin 2x = u^2 - 1,$$

$$(2) \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) (1 - \sin x \cos x) = u \left(1 - \frac{u^2 - 1}{2} \right),$$

$$(3) \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{2u}{u^2 - 1},$$

$$(4) \tan x + \cot x = \frac{2}{u^2 - 1}.$$

Lưu ý. Hãy tương tự cho phép đặt ẩn phụ

$$u = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Bài 1 (ĐH Huế 2000-D). Giải phương trình:

$$\sin x \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x = 2.$$

Bài 2. Giải phương trình: $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$.

Bài 3. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin 2x = 1$. (*)

Bài 4 (Dự bị thi ĐH-2006D). Giải phương trình:

$$\sin^3 x + \cos^3 x + 2 \sin^2 x = 1. \quad (1)$$

Bài 5 (Đề ĐH-2007A). Giải phương trình:

$$(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x. \quad (1)$$

Bài 6. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2}} \cot x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

Bài 7. Giải phương trình $2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0$.

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x} = 1$.

Bài 9. Giải phương trình

$$2 + (2 + \sin 2x) \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \tan x + \cot x \right) = 0.$$

B. PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ $u = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ (KHI ĐÓ $|u| \leq \frac{1}{2}$)

Khi đó một số biểu thức sau được tính theo u :

$$(1) (\sin x + \cos x)^2 = 1 - 2u;$$

$$(2) \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2u^2;$$

$$(3) \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3u^2;$$

$$(4) \sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x = 1 - 4u^2 + 2u^4.$$

$$(5) \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - 4u^2;$$

$$(6) \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 8u^2;$$

$$(7) \cos 8x = 2 \cos^2 4x - 1 = 2(1 - 8u^2)^2 - 1.$$

Chú ý 10. Trong nhiều bài tập, để ngắn gọn hơn ta đặt

$$u = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Bài 10. Giải phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin 2x = 1$. (1)

Bài 11. Giải phương trình $\sin^8 x + \cos^8 x = \cos 8x$.

C. PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ $T = \tan x + \cot x$

Khi đó:

$$t = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

$$t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \geq 2\sqrt{\tan^2 x \cot^2 x} + 2 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow |t| \geq 2.$$

$$t^3 = \tan^3 x + \cot^3 x + 3 \tan x + 3 \cot x.$$

Bởi vậy:

$$\frac{2}{\sin 2x} = t.$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2.$$

$$\tan^3 x + \cot^3 x = t^3 - 3t.$$

$$\cot^2 2x = \frac{1}{\sin^2 2x} - 1 = \frac{t^2}{4} - 1.$$

Nhận xét 4. Hãy tương tự cho phép đặt ẩn phụ $t = \tan x - \cot x$.

Bài 12 (ĐH An ninh và Cảnh sát-1997).

Giải phương trình:

$$\tan x + \cot x = 4.$$

Bài 13. Giải phương trình:

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 3 \tan x + 3 \cot x + 4 = 0. \quad (1)$$

Bài 14. Giải phương trình: $\cot^2 2x + \cot^3 x + \tan^3 x = 2$.

Bài 15. Giải phương trình: $\sqrt{3 + \tan x} + \sqrt{3 + \cot x} = 4$.

Bài 16. Giải phương trình

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} (\tan x - \cot x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2.$$

Bài 17. Giải phương trình $|2 \tan x - 1| + |2 \cot x - 1| = 2$. (1)

D. PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ $T = \tan \frac{x}{2}$

Nếu $t = \tan \frac{x}{2}$ thì $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Với phép đặt này ta chuyển phương trình lượng giác thành phương trình đại số.

Bài 18. Chứng minh rằng nếu $t = \tan \frac{x}{2}$ thì

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Từ đó giải phương trình $2 \sin x + \cos x = 1 + \cot \frac{x}{2}$. (1)

Bài 19. Giải phương trình $4 \sin x + \cos x = 3 + \tan \frac{x}{2}$.

Nhận xét 5. Khi giải những phương trình có điều kiện thì đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ tiện lợi hơn cách khác.

Bài 20. Giải phương trình $3 \sin x + |2 \cos x - 1| = 1$. (1)

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Tìm m để phương trình $\sin 5x + \cos 5x = m - 1$ vô nghiệm.

- A. $\begin{cases} m \geq 1 + \sqrt{2} \\ m \leq 1 - \sqrt{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 1 + \sqrt{2} \\ m < 1 - \sqrt{2} \end{cases}$.
C. $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$. D. $\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

Câu 2 (Đề thi HK1, THPT Chuyên Thái Nguyên, 2019).

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ là

- A. $-\frac{3\pi}{2}$. B. -2π . C. $-\frac{\pi}{2}$. D. $-\pi$.

Câu 3 (Đề thi HK1, THPT Việt Đức, Hà Nội).

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$ thì $\sin 2x_0$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. $\frac{7\pi}{12}$. D. -1.

Câu 4. Tìm m để phương trình $\sin x + \cos x = m + \sin 2x$ có nghiệm.

- A. $m \leq \frac{5}{4}$. B. $m > \frac{5}{4}$.
C. $-\sqrt{2} + 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$. D. $-\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 5. Xét các số thực a sao cho $\sin a \geq 0,5$ và a là nghiệm của phương trình $3 \sin x + 2 \cos x = 1$.
Tính $\tan \frac{a}{2}$.

- A. $\tan \frac{a}{2} = 2 + \sqrt{3}$. B. $\tan \frac{a}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$. C. $\tan \frac{a}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$. D. $\tan \frac{a}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Giải phương trình $2 \sin x + |3 \cos x - 1| = 4$.

- A. $x = 2 \arctan \frac{3}{2} + 2m\pi \ (m \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \arctan \frac{3}{2} + m\pi \ (m \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \pi + k2\pi, x = \arctan \frac{3}{2} + m\pi \ (k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \pi + k2\pi, x = 2 \arctan \frac{3}{2} + 2m\pi \ (k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z})$.

Câu 7 (Đề KSCL Toán 12 lần 2 năm 2017 - 2018, Phan Chu Trinh, Đắk Lắk).

Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ bằng bao nhiêu?

- A. 2π . B. 4π . C. 3π . D. π .

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 B 2 A 3 A 4 D 5 D 6 D 7 C

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 9. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU VÀ PHƯƠNG PHÁP KẾT HỢP NGHIỆM

Với loại phương trình này khi giải nếu không cẩn thận rất dễ dẫn đến lấy thừa hoặc thiếu nghiệm. Điều quan trọng đầu tiên để giải dạng này là đặt điều kiện và kiểm tra điều kiện xác định. Thông thường ta hay dùng đường tròn lượng giác hoặc phương trình nghiệm nguyên để loại nghiệm. Một phương pháp rất hiệu quả là kết hợp điều kiện, loại nghiệm ngay trong từng bước biến đổi, bạn đọc hãy theo dõi phương pháp này thông qua lời giải của các bài tập 3, ??, 5, 7,...

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

Bài 2 (ĐH-2011D). Giải phương trình:

$$\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0. \quad (1)$$

Bài 3 (Dự bị ĐH-2008A). Giải phương trình:

$$\tan x = \cot x + 4 \cos^2 2x. \quad (1)$$

Bài 4. Giải phương trình: $\cos 2x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) + \tan x = 2 \sin x + 1$.

Bài 5 (Đề dự bị ĐH-2005D). Giải phương trình

$$\tan \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2. \quad (1)$$

Bài 6 (ĐH-2003A). Giải phương trình

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x. \quad (1)$$

Bài 7 (Đề dự bị ĐH-2007A). Giải phương trình:

$$\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot 2x. \quad (1)$$

Bài 8 (ĐH-2003B). Giải phương trình:

$$\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}. \quad (1)$$

Bài 9 (ĐH - 2011A, Phần chung). Giải phương trình

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x. \quad (1)$$

Bài 10. Giải phương trình $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin^2 x - \tan x$.

Bài 11 (ĐH-2003D). Giải phương trình:

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0. \quad (1)$$

Bài 12. Giải phương trình: $\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}.$

Bài 13. Giải phương trình $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x).$

Bài 14. Giải phương trình:

$$\frac{2}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin x \sin \left(3x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 + 8 \cos 2x.$$

Bài 15. Giải phương trình: $\frac{5 + \cos 2x}{3 + 2 \tan x} = 2 \cos x.$

Bài 16. Giải phương trình

$$\cot x = \tan x + \frac{2 \cos 4x}{\sin 2x}. \quad (1)$$

Khi kết hợp điều kiện bằng phương trình nghiệm nguyên (không sử dụng đường tròn lượng giác) để có được định hướng tốt, ta thường sử dụng các kết quả sau.

Định lý 1. Giả sử a, b, c là các số nguyên, $a \neq 0, b \neq 0$, d là ước chung lớn nhất của a và b . Khi đó phương trình (ẩn là $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$) $ax + by = c$ có nghiệm khi và chỉ khi d là ước của c .

Định lý 2. Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình

$$ax + by = c \text{ (với } a, b, c \text{ là các số nguyên, } a \neq 0, b \neq 0, (a, b) = 1)$$

thì mọi nghiệm nguyên của nó được xác định theo công thức:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Chứng minh. Vì cặp $(x_0; y_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ nên

$$ax_0 + by_0 = c. \quad (1)$$

Xét cặp số nguyên $(x_0 - bt; y_0 + at)$ ($t \in \mathbb{Z}$), ta có

$$a(x_0 - bt) + b(y_0 + at) = ax_0 + by_0 \stackrel{\text{theo (1)}}{=} c.$$

Suy ra $(x_0 - bt; y_0 + at)$ là nghiệm của $ax + by = c$, với mọi $t \in \mathbb{Z}$. Đảo lại, giả sử $(x_1; y_1)$ là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$, nghĩa là $ax_1 + by_1 = c$. Trừ đẳng thức này vào đẳng thức (1) ta được

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1). \quad (2)$$

Từ (2) có $a(x_1 - x_0) : b$, mà $(a, b) = 1$ nên $(x_1 - x_0) : b$, hay tồn tại số nguyên t sao cho

$$x_1 - x_0 = -tb.$$

Từ (2) ta có:

$$b(y_0 - y_1) = -tab \Rightarrow y_0 - y_1 = -ta.$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = x_0 - bt \\ y_1 = y_0 + at, \end{cases}$ ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý.

- ☑ Từ định lí 2, suy ra để giải phương trình Điôphăng bậc nhất, ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng $(x_0; y_0)$, khi đó mọi nghiệm đều có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (*)$$

- ☑ Để cho dễ nhớ hơn, ta để ý rằng

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

chính là phương trình tham số của đường thẳng $ax + by = c$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Bởi vậy (*) cho ta tất cả các nghiệm nguyên của phương trình Điôphăng bậc nhất $ax + by = c$.

Bài 17 (ĐH GTVT Hà Nội-96). Giải phương trình

$$\cos 3x \tan 5x = \sin 7x. \quad (1)$$

Bài 18. Giải phương trình: $\cos 3x \tan 7x = \sin 11x$. (1)

Bài 19. Giải phương trình: $\cos^2 5x - \cos^2 2x + 1 = 0$. (1)

Bài 20. Giải phương trình $\sin 3x \cos 5x = 1$.

Bài 21. Giải phương trình $\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$.

Bài 22. Giải phương trình $\sin 7x + \cos 2x = -2$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

Câu 1. Phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 2. Giải phương trình $\frac{4 \sin^2 2x + 6 \sin^2 x - 9 - 3 \cos 2x}{\cos x} = 0$.

- A. $\pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.
C. $-\frac{\pi}{3} + k3\pi$. D. $\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin x \cos x \cos 2x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[-3\pi; 3\pi]$ là

- A. 21. B. 23. C. 25. D. 20.

Câu 4. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x + \cos x - \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)}{2 \sin 2x - \sqrt{3}} = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 5. Phương trình $\tan 3x \tan 2x = 1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.

Câu 6. Tính số nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $\cos 3x \tan 7x = \sin 11x$.

- A. 9. B. 20. C. 27. D. 29.

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A 2 A 3 A 4 A 5 B 6 C

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 10. MỘT SỐ BÀI TOÁN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài 1. Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^7 x = 1$.Bài 2. Giải phương trình: $\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + 4 \sin 4x = 10$. (1)Bài 3. Giải phương trình $\cos x + 3 \cos 3x \cos 5x = 4$.Bài 4. Giải phương trình $(\sin x + \cos x)^4 = 5 - \sin^2 2x$.Bài 5. Giải phương trình $\sin^2 x \sin 5x - \cos^2 x \cos 5x = 1$. (1)Bài 6. Giải phương trình: $3\sin^4 x + 2\cos^2 3x + \cos 3x = 3\cos^4 x - \cos x + 1$.**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

1. Đề bài

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 11. SỬ DỤNG LƯỢNG GIÁC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ**A. DẤU HIỆU ĐỂ LƯỢNG GIÁC HÓA BÀI TOÁN**

☑ Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$, hay điều kiện $-1 \leq \frac{x}{|a|} \leq 1$, ta có thể đặt $x = |a| \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = |a| \cos t$ với $0 \leq t \leq \pi$.

☑ Nếu bài toán chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$, hay điều kiện $-1 \leq \frac{|a|}{x} \leq 1$, ta có thể đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{|a|}{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

☑ Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$ có thể đặt $x = |a| \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = |a| \cot t$ với $t \in (0; \pi)$.

☑ Nếu bài toán chứa $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ có thể đặt $x = a \cos 2t$.

☑ Nếu bài toán chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ có thể đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$.

Lợi thế của phương pháp lượng giác hóa là đưa phương trình ban đầu về một phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải như phương trình đẳng cấp, đối xứng... và điều kiện nhận hoặc loại nghiệm cũng dễ dàng hơn rất nhiều. Vì lượng giác là hàm tuần hoàn nên ta chú ý đặt điều kiện các biểu thức lượng giác sao cho khi khai căn không có dấu trị tuyệt đối, có nghĩa là luôn dương.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{1 - x^2} = \frac{x}{4x^2 - 1}$.

Bài 3 (Đề thi chính thức Olympic 30/04/2011).

Giải phương trình sau trên tập số thực

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - x^2}. \quad (1)$$

Bài 4. Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{1 - x} + 2x\sqrt{1 - x^2} = 1$. (1)

Bài 5. Giải phương trình $2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 + \sqrt{1 - x^2}$.

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}$.

Bài 7 (Đề nghị Olympic 30/04/2003-toán 10).

Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{1 - y^2} = 0,25 \\ y\sqrt{1 - x^2} = 0,25. \end{cases}$

Bài 9. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a :

$$\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = a. \quad (1)$$

Bài 10. Tìm những giá trị của tham số a để bất phương trình sau đây có nghiệm:

$$\sqrt{a - x} + \sqrt{a + x} > a. \quad (1)$$

Bài 11. Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi $x \in [-1; 8]$

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{8 - x} - \sqrt{8 + 7x - x^2} \leq m. \quad (1)$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề bài

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BÀI 12. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Trong bài này ta sẽ giải các bất phương trình lượng giác cơ bản, đó là

$$\begin{aligned}\sin x &\geq a, \cos x \geq a, \tan x \geq a, \cot x \geq a, \\ \sin x &\leq a, \cos x \leq a, \tan x \leq a, \cot x \leq a\end{aligned}$$

(trong đó a là một hằng số thực). Phương pháp giải được trình bày thông qua các bài toán cụ thể.

Bài 1. Giải bất phương trình $\sin x > 0,5$.

Bài 2. Giải bất phương trình $\cos x > \frac{1}{2}$.

Bài 3. Giải bất phương trình $\tan x < 1$.

Bài 4. Giải bất phương trình $\cos(2x + 1) \geq \frac{1}{2}$

Bài 5. Giải bất phương trình $\sin(3 - 5x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 6. Giải bất phương trình $\cot x \geq \sqrt{3}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG

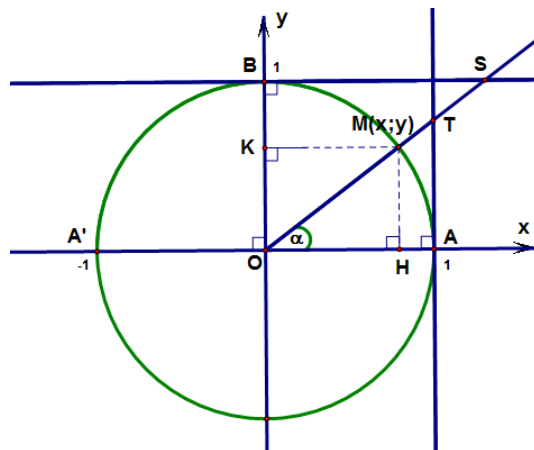
A. BỘ ĐỀ SỐ 1

1. Đề bài

Câu 1.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường tròn đơn vị (đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$). Với mỗi số thực α , ta xác định điểm $M(x;y)$ trên đường tròn đơn vị sao cho $(OA, OM) = \alpha$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin \alpha = \overline{OK}$.
 B. $\cos \alpha = \overline{OH}$.
 C. $\tan \alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OK}} \ (K \neq O)$.
 D. $\cot \alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OK}} \ (K \neq O)$.



Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{1}{x} + 2x$.

- A. $D = [-2; 2]$.
 B. $D = [-1; 1] \setminus \{0\}$.
 C. $D = \mathbb{R}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = 2 \cot x + \sin 3x$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cos \sqrt{x}$.

- A. $D = [0; 2\pi]$.
 B. $D = [0; +\infty)$.
 C. $D = \mathbb{R}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 5. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2x$.

- A. $T = [-2; 2]$.
 B. $T = [-1; 1]$.
 C. $T = \mathbb{R}$.
 D. $T = (-1; 1)$.

Câu 6. Trong các hàm số $y = \sin 2x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ và $y = \cot x$ có bao nhiêu hàm số tuần hoàn?

- A. 1.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 4.

Câu 7. Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin x$ là bao nhiêu?

- A. π .
 B. 2π .
 C. 4π .
 D. $k2\pi$.

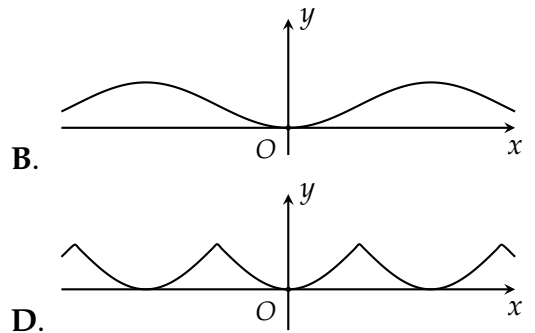
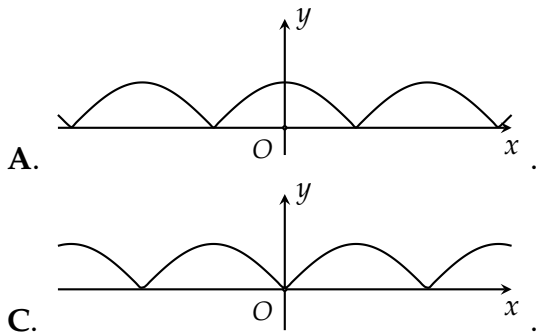
Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = x^2 \tan x$.
 B. $y = x^2 \cot 2x$.
 C. $y = \frac{\cos 2x}{x}$.
 D. $y = |\sin 3x|$.

Câu 9. Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Câu 10. Hình nào dưới đây có thể là đồ thị hàm số $y = |\sin x|$?



Câu 11. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- A. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k2\pi; \frac{3\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- C. $S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k2\pi; \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của phương trình

$$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \{1; 3\}$.
- C. $S = \{1 + k\pi; 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; 1,25 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 13. Cho phương trình $2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 1$. Họ nào sau đây là một họ nghiệm của phương trình?

- A. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}$ thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 16. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị $M + m$.

- A. 0. B. $\frac{3}{2}$. C. 6. D. 2.

Câu 17. Giải phương trình $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1$.

- A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 18. Giải phương trình $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 1 - \sqrt{2} = 0$.

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C.
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

A. $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$

B. $m \in (-\infty; 1] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

C. $m \in (-\infty; 1].$

D. $\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$

Câu 20. Tính tổng T tất cả các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình

$$8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

A. $T = \frac{3\pi}{2}.$

B. $T = \frac{\pi}{6}.$

C. $T = \frac{7\pi}{12}.$

D. $T = \frac{\pi}{12}.$

Câu 21. Tính tổng T của nghiệm lớn nhất và nghiệm bé nhất của phương trình

$$\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$$

trên đoạn $[0; 14]$.

A. $T = 3\pi.$

B. $T = 4\pi.$

C. $T = 5\pi.$

D. $T = 6\pi.$

Câu 22. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right).$

A. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 23. Biết tập hợp các giá trị của m để phương trình

$$m \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3m \cos^2 x = 2$$

có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 3b$.

A. $T = \frac{8}{3}.$

B. $T = 8.$

C. $T = \frac{4}{3}.$

D. $T = \frac{8}{9}.$

Câu 24. Tìm m để bất phương trình $\sin x + \cos x \leq m + \sin 2x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m \geq \frac{5}{4}.$

B. $m > \frac{5}{4}.$

C. $m \geq -\sqrt{2} - 1.$

D. $m \geq \sqrt{2} - 1.$

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 C	4 B	7 B	10 C	13 B	16 A	19 D	22 B
2 D	5 B	8 D	11 A	14 D	17 D	20 C	23 B
3 B	6 D	9 B	12 A	15 A	18 A	21 B	24 A

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

B. BỘ ĐỀ 2

1. Đề bài

Câu 1. Phương trình $\sin 2x = \frac{1}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 2 (Chuyên Long An, 2018). Xác định nghiệm của phương trình $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3 (THPT Chuyên Long An, năm học 2017-2018).

Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan 2x$.

- A. $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + \sqrt{3} \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ là

- A. 1. B. $1 + \sqrt{3}$. C. $1 - \sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 5. Tính tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \sin 3x$.

- A. $\frac{4}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 6. Tập nghiệm của phương trình $2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$ là

- A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k3\pi, \frac{7\pi}{6} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 7. Giải phương trình $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- A. $x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = 60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = 60^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = 30^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Giải phương trình $\sin 3x = \sin x$.

- A. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9 (THPT Chuyên Long An, 2017-2018).

Nghiệm của phương trình $\cot x = 0$.

- A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10 (Chuyên Long An, 2017-2018).

Nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

- A. $x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11 (THPT Chuyên Long An, 2018).

Xác định chu kỳ của hàm số $y = \sin x$.

- A. 2π .
 B. $\frac{3\pi}{2}$.
 C. $\frac{\pi}{2}$.
 D. π .

Câu 12. Giải phương trình $2 \cos 2x \cos x = 1 + 2 \sin 2x \sin x$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$.
 B. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi$.
 D. $x = \pm \frac{\pi}{9} + k2\pi$.

Câu 13 (Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh, 2018).

Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 14. Giải phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15 (THPT Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh, 2018).

Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$.

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2} \sin 3x - \sqrt{2} \cos 3x = -1$ là

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $S = \left\{ \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}, \frac{17\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{17\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 17. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 3x$.
 B. $y = x \cos x$.
 C. $y = \cos x \tan 2x$.
 D. $y = \tan x \sin x$.

Câu 18. Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

- A. $\sqrt{3} \sin x = 2$.
 B. $\frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{2}$.
 C. $2 \sin x + 3 \cos x = 1$.
 D. $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$.

Câu 19. Cho các phương trình:

$$(1) \quad \cos x = \sqrt{5} - \sqrt{3}; \quad (2) \quad \sin x = 1 - \sqrt{2}; \quad (3) \quad \sin x + \cos x = 2.$$

Những phương trình vô nghiệm là

- A. (1).
 B. (2).
 C. (3).
 D. (1) và (2).

Câu 20. Họ nghiệm của phương trình $\sin 2x - 3 \cos 2x = 3$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}), \text{ với } \tan \alpha = 3.$
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}), \text{ với } \tan \alpha = 3.$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}), \text{ với } \tan \alpha = 3.$

Câu 21. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $3 \cot x + \sqrt{3} \tan x - 3 - \sqrt{3} = 0$ trên đường tròn lượng giác là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 0.

Câu 22. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ là

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{24} + k2\pi, \frac{7\pi}{24} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\cos \frac{4x}{3} = \cos^2 x$ là

A. $S = \left\{ k6\pi, \pm \frac{\pi}{2} + k6\pi, \pm \frac{5\pi}{2} + k6\pi \right\}.$

B. $S = \left\{ k2\pi, \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}.$

C. $S = \left\{ k3\pi, \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}.$

D. $S = \left\{ k3\pi, \pm \frac{\pi}{4} + k3\pi, \pm \frac{5\pi}{4} + k3\pi \right\}.$

Câu 24. Tập giá trị của hàm số $y = 3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - \cos^2 x + 1$ là

A. $[0; 2].$

B. $[-\sqrt{2}-1; \sqrt{2}-1].$

C. $[-2\sqrt{2}+2; 2\sqrt{2}+2].$

D. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}+1].$

Câu 25. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin^4 x + \cos 4x$ lần lượt là

A. 4 và $-\frac{5}{11}.$

B. 3 và $-\frac{5}{11}.$

C. 3 và $-5.$

D. 4 và $-5.$

2. Đáp án và lời giải

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1 A	4 A	7 A	10 D	13 A	16 C	19 C	22 B	25 A
2 C	5 B	8 A	11 A	14 B	17 D	20 D	23 D	
3 D	6 B	9 C	12 A	15 A	18 C	21 C	24 C	

LỜI GIẢI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM