

Ngày thi : Thứ Sáu 20/9/2024

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (5 điểm) Xét phương trình $e^x + x^n = 2$ (*), với n là số nguyên dương.

- a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình (*) có nghiệm dương duy nhất. Đặt x_n là nghiệm dương của phương trình (*) tương ứng với số nguyên dương n , tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
- b) Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx_n}}{2^n}$.

Bài 2. (5 điểm) Cho đa thức $P(x) = x^4 - ax^3 + 6x^2 - bx + c$ với a, b, c là các tham số thực. Biết rằng, $P(x)$ có 4 nghiệm thực không âm.

Chứng minh $3a \geq b + 8$.

Bài 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Lấy P là điểm thay đổi nằm trong tam giác ADC sao cho $\widehat{CDP} = \widehat{DAP}$. DP cắt AC tại điểm I.

- a) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC và PAI. Chứng minh PK đi qua một điểm cố định.
- b) Gọi H là giao điểm của AD và BC và (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BHP. Tiếp tuyến tại H của (ω) cắt AC, CD tương ứng tại các điểm N, M. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN tiếp xúc với (ω) và tiếp điểm thuộc một đường tròn cố định.

Bài 4. (5 điểm) Cho số nguyên tố p có dạng $4k + 3$, với k là số nguyên dương. Chứng minh rằng có ít nhất $\frac{p+1}{2}$ số nguyên dương a không vượt quá p , sao cho với mỗi số a tồn tại số nguyên dương m không vượt quá $p-1$ để

$$(a+1)(a^2+1)(a^3+1)\dots(a^m+1)-1 \text{ chia hết cho } p.$$

-----HẾT-----

Ngày thi : Thứ Bảy 21/9/2024

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (6 điểm) Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc $n \geq 1$. Biết rằng, $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.

- Chứng minh rằng đa thức $P(x) - P'(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.
- Với mỗi khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$m((a, b)) = \begin{cases} b - a; & \text{nếu } a, b \in \mathbb{R} \\ +\infty; & \text{nếu } a = -\infty \text{ hoặc } b = +\infty. \end{cases}$$

Chứng minh rằng tập nghiệm của bất phương trình $\frac{P'(x)}{P(x)} > 1$ có dạng $\bigcup_{i \in I} A_i$, trong đó

$I \subset \mathbb{Z}^+$ và các khoảng $A_i, (i \in I)$, là đôi một rời nhau. Tính $\sum_{i \in I} m(A_i)$.

Bài 2. (7 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Gọi H là trực tâm và M, N là các điểm không thuộc đường thẳng AH sao cho các tam giác ABM, ACN vuông tương ứng tại B, C và $\widehat{BAM} = \widehat{BAH}$, $\widehat{CAN} = \widehat{CAH}$.

- Chứng minh rằng M, N, H thẳng hàng.
- Gọi I là trung điểm AH. Lấy L thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $IL \parallel MN$; lấy P, Q tương ứng trên AB, AC sao cho $LP = LQ = LA$ và lấy K trên PQ sao cho $LK \perp BC$. Chứng minh AK, BQ và CP đồng qui.

Bài 3. (7 điểm) Cho hai số nguyên dương m, n. Chọn ra một số ô vuông đơn vị của một bảng hình chữ nhật với kích thước $m \times n$ sao cho không có hai ô vuông nào trong đó có đúng một đỉnh chung. Xác định số cách chọn được nhiều ô vuông đơn vị nhất có thể để thỏa mãn yêu cầu trên, trong các trường hợp sau:

- $m = 2024$ và $n = 2025$.
- $m = n = 2024$.

HẾT