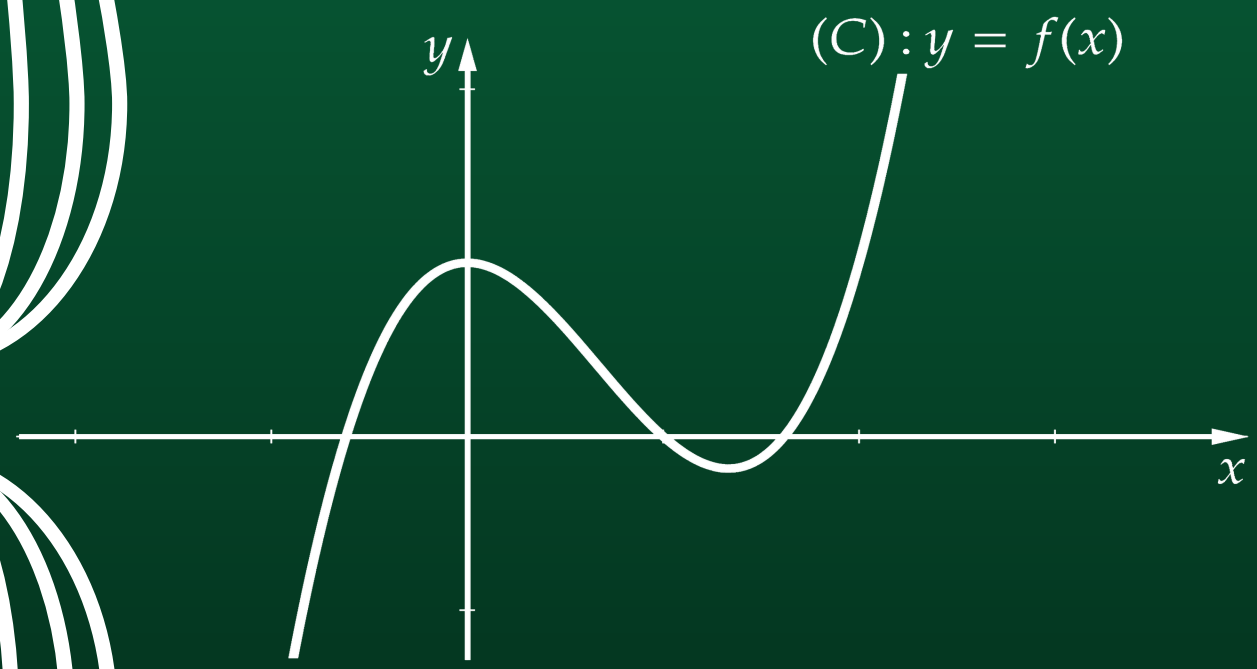
FULL LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP GIẢI TÍCH 10 - 11 - 12



sách dạy nấu ăn hàm số

GIÚP BẠN CẢI THIỆN ĐIỂM SỐ TRONG KÌ THI CÁC KÌ THI ĐGNL 2027

Bùi Quang Chiến (@brave._.9)

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu này ra đời từ chính những trải nghiệm thực tế của bản thân mình. Xuất phát điểm chỉ là một học sinh trường thường tại THPT Tùng Thiện và hiện đang là sinh viên năm 4 của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN (VNU-HUS), mình viết cuốn sách này với mục tiêu rất rõ ràng: mang đến cho các bạn một tài liệu ôn thi môn Toán thực sự gần gũi, trực quan và dễ tiếp cận cho các kì thi như THPTQG, HSA hay V-SAT.

Lý do mình bắt tay vào viết tập tài liệu này đến từ chính những khó khăn thời bản thân còn tự ôn thi. Là học sinh trường thường tự học, mình hiểu rất rõ cảm giác bế tắc khi bơi giữa một biển tài liệu trôi nổi trên mạng: nhiều nguồn viết quá nặng tính hàn lâm, toàn chữ và công thức khô khan, thiếu hình vẽ minh hoạ, hoặc lời giải tắt nhiều bước khiến người đọc không hiểu được bản chất. Việc tự học vì thế mất rất nhiều thời gian mà kết quả lại không như ý. Do đó, mình quyết định dành thời gian hệ thống lại kiến thức, tự tay vẽ chi tiết từng đồ thị, bảng biến thiên và phân tích cặn kẽ từng dạng bài để các bạn nhìn vào là hiểu được ngay mạch tư duy.

Một tập tài liệu dày hàng trăm trang do một mình mình tự biên soạn, tự thiết kế từng hình vẽ và gõ từng dòng lệnh LaTeX chắc chắn khó tránh khỏi những hạt sạn hay sơ suất nhỏ. Mình rất mong nhận được sự thông cảm từ quý thầy cô và các bạn học sinh. Mọi ý kiến đóng góp, phản hồi hay phát hiện lỗi sai xin vui lòng gửi về thông tin liên hệ đính kèm; mình luôn trân trọng đón nhận để hoàn thiện tài liệu tốt hơn trong các lần cập nhật tiếp theo.

Về vấn đề bản quyền: Mình chia sẻ tài liệu này hoàn toàn miễn phí để sử dụng. Các bạn học sinh và thầy cô có thể thoải mái in ấn, chia sẻ để phục vụ việc học tập và giảng dạy phi thương mại. Tuy nhiên, xin vui lòng không tự ý xoá tên tác giả, gắn đè logo cá nhân hay trung tâm lên để nhận là của mình. Hàng giờ ngồi gõ từng dòng mã, tự tay trau chuốt từng nét vẽ đồ thị là công sức nghiêm túc của mình, và sự tôn trọng chất xám của nhau là điều tối thiểu mình mong nhận lại.

Hy vọng cuốn sách sẽ là người bạn đồng hành tin cậy, giúp các bạn bớt đi phần nào áp lực và đạt kết quả thật tốt trong kì thi quan trọng sắp tới.

Hà Nội, Tháng 9 năm 2026

Bùi Quang Chiến

Mục lục

I ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH CƠ BẢN

1 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Đại cương về phương trình . . . 8
Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn . . . 10
Hàm số bậc hai . . . 16
Dấu của tam thức bậc hai . . . 18
Một số phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai . . . 20
Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 21
Phương trình đường thẳng trong mặt phẳng . . . 22
Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . . 27

2 GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Giới hạn của dãy số . . . 33
Giới hạn của hàm số . . . 41
Hàm số liên tục và điểm gián đoạn . . . 54

3 ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Đạo hàm của hàm số tại một điểm . . . 59
Các công thức đạo hàm đáng nhớ . . . 63
Các quy tắc tính đạo hàm . . . 64

BÙI QUANG CHIẾN

Vi phân . . . 68
Đạo hàm cấp hai và ý nghĩa cơ học . . . 70

4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Giá trị lượng giác của góc lượng giác . . . 73
Công thức lượng giác . . . 78
Hàm số lượng giác . . . 79
Phương trình lượng giác cơ bản . . . 82

5 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Lũy thừa với số mũ thực . . . 85
Logarit . . . 87
Hàm số mũ và hàm số logarit . . . 89
Phương trình, bất phương trình mũ và logarit . . . 92

II KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

6 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm . . . 95
Xét tính đơn điệu qua bảng biến thiên và đồ thị . . . 100
Xét tính đơn điệu bằng dấu đạo hàm . . . 103

7 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa và quy tắc tìm cực trị . . . 115
Xét cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên và đồ thị . . . 122
Cực trị của các hàm số cơ bản . . . 126
Bài toán cực trị chứa tham số . . . 130

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

8 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Định nghĩa và quy tắc tìm GTLN và GTNN . . . 153
Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay (Casio fx-580VN X) tìm GTLN, GTNN 155
Xét GTLN và GTNN thông qua bảng biến thiên và đồ thị . . . 156
GTLN và GTNN của hàm số không chứa tham số . . . 158
Bài toán GTLN và GTNN chứa tham số . . . 161
Ứng dụng của GTLN và GTNN vào phương trình và bất phương trình chứa tham số . . . 163
Các dạng toán liên quan khác . . . 180

9 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đường tiệm cận của đồ thị hàm số . . . 193
Xác định tiệm cận qua bảng biến thiên và đồ thị . . . 203
Biện luận số đường tiệm cận chứa tham số . . . 204

10 BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số . . . 207
Biện luận số nghiệm phương trình chứa tham số m . . . 209

11 TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Định nghĩa tiếp tuyến . . . 226
Các dạng viết phương trình tiếp tuyến . . . 227
Sự tiếp xúc của hai đồ thị hàm số . . . 231

III CÁC DẠNG TOÁN VÀ CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9

12 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ VÀ ĐỒ THỊ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Các phép biến đổi đồ thị cơ bản . . . 234
Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối . . . 242
Tính đơn điệu của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối . . . 246
Cực trị của hàm số chứa dấu trị tuyệt đối . . . 259
GTLN và GTNN của hàm số chứa dấu trị tuyệt đối . . . 270
Tương giao chứa dấu giá trị tuyệt đối . . . 281

13 Hàm hợp và các dạng toán nâng cao

Tính đơn điệu của hàm hợp . . . 285
Cực trị của hàm hợp . . . 292
Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của hàm hợp . . . 295
Phương pháp ghép trục . . . 301
Dạng bài toán truy ngược hàm . . . 305

IV BÀI TẬP TỔNG HỢP

14 BÀI TẬP GIỚI HẠN

15 BÀI TẬP ĐẠO HÀM

16 BÀI TẬP VỀ CHỦ ĐỀ MŨ VÀ LOGARIT

17 BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

18 BÀI TẬP CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

19 BÀI TẬP ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Tính đơn điệu của hàm số . . . 386
Cực trị của hàm số . . . 405
Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số . . . 415
Đường tiệm cận . . . 430
Tương giao đồ thị . . . 430
Tiếp tuyến . . . 430
Biến đổi đồ thị và trị tuyệt đối . . . 430

Tài liệu tham khảo

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

Phần I

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH CƠ BẢN

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._.9

Chương 1

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1.1 Đại cương về phương trình

1.1.1 Phương trình một ẩn

Định nghĩa: Phương trình một ẩn

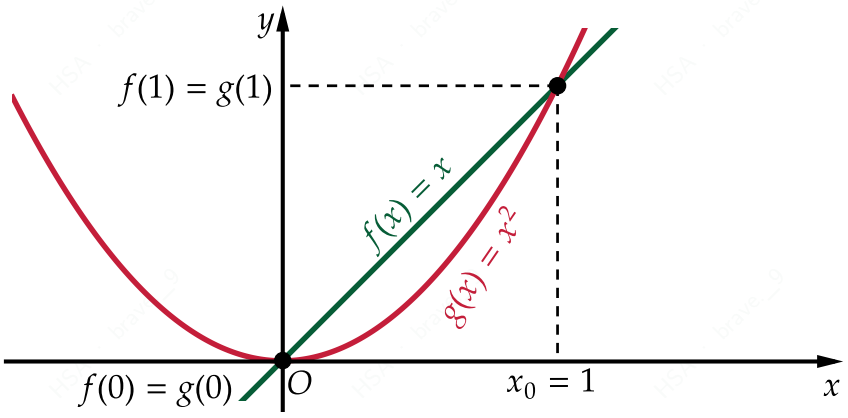
Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x. Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một **nghiệm** của phương trình (1). Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm). Nếu phương trình không có nghiệm nào thì ta nói phương trình **vô nghiệm** (hoặc tập nghiệm là rỗng).

BÙI QUANG CHIẾN @brave_9



Chú ý: Điều kiện xác định của phương trình

Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa (tức là mọi phép toán đều thực hiện được). Ta gọi đó là **điều kiện xác định** của phương trình.

1.1.2 Phương trình tương đương

Định nghĩa: Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là **tương đương** khi chúng có cùng tập nghiệm. Kí hiệu là $\Leftrightarrow$.

Định lý: Phép biến đổi tương đương

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

- Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức.
- Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

1.1.3 Phương trình hệ quả

Định nghĩa: Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình ban đầu. Kí hiệu:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Khi giải phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta

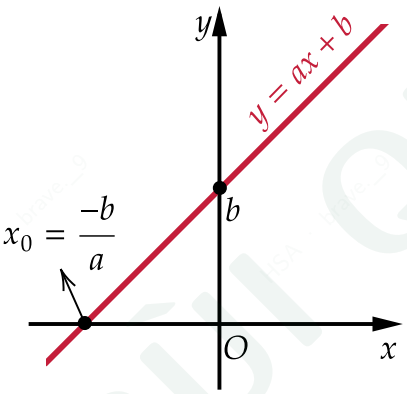
gọi đó là **nghiệm ngoại lai** (cần thử lại để loại trừ).

1.2 Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn

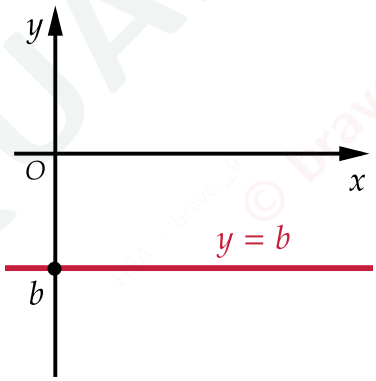
1.2.1 Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

Xét phương trình dạng $ax + b = 0$ (với a, b là các hằng số đã cho). Khi $a \neq 0$, phương trình được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn. Kết quả giải và biện luận được tóm tắt trong bảng sau:

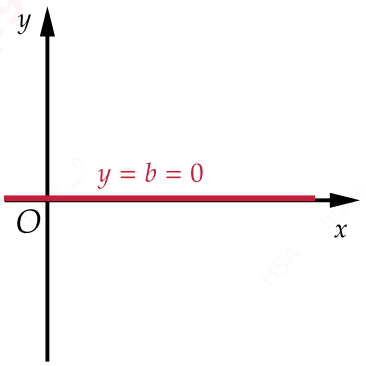
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	Phương trình vô nghiệm
	$b = 0$	Phương trình vô số nghiệm (đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$)



$a \neq 0$



$a = 0, b \neq 0$



$a = 0, b = 0$

Ví dụ

Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m:

$$m^2x + 2 = x + 2m.$$

Lời giải

Ta biến đổi tương đương phương trình đã cho về dạng $ax + b = 0$:

$$m^2x - x + 2 - 2m = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x - 2(m - 1) = 0 \quad (*)$$

Xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

  Phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{2(m-1)}{m^2-1} = \frac{2(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{2}{m+1}.$$

- **Trường hợp 2:** $m = 1$.

  Phương trình $(*)$ trở thành $0x + 0 = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- **Trường hợp 3:** $m = -1$.

  Phương trình $(*)$ trở thành $0x + 4 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

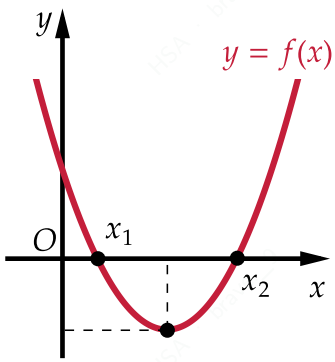
Kết luận:

- Nếu $m = -1$: Phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$: Phương trình có vô số nghiệm ($x \in \mathbb{R}$).
- Nếu $m \neq \pm 1$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{m+1}$.

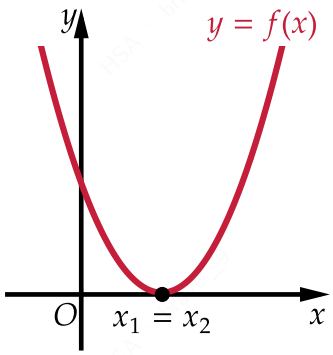
1.2.2 Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Phương trình bậc hai một ẩn có dạng tổng quát là $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Biệt thức của phương trình là $\Delta = b^2 - 4ac$. Kết quả giải và biện luận được tóm tắt trong bảng sau:

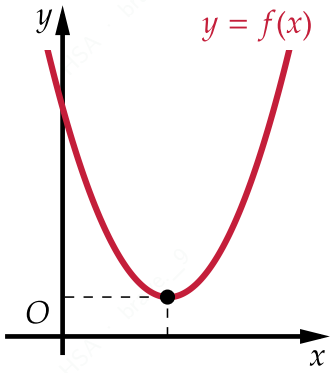
Trường hợp $a = 0$	Trở về giải phương trình bậc nhất $bx + c = 0$.
Trường hợp $a \neq 0$	$\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
	$\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép:$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
	$\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.



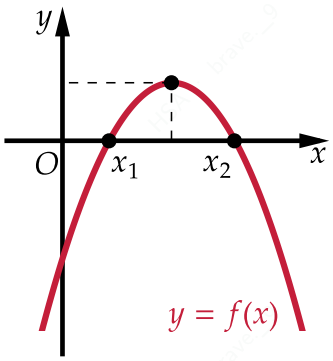
$\Delta > 0$



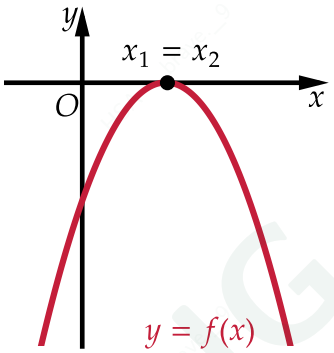
$\Delta = 0$



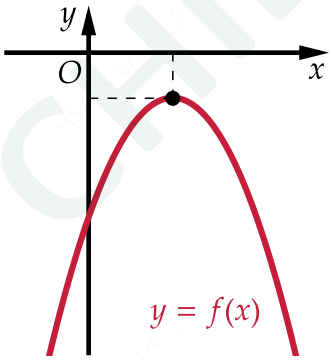
$\Delta < 0$



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

1.2.3 Định lí Vi-ét và các tính chất nghiệm

Định lý: Định lí Vi-ét

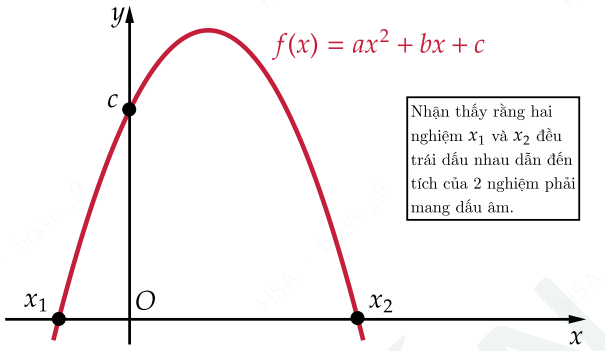
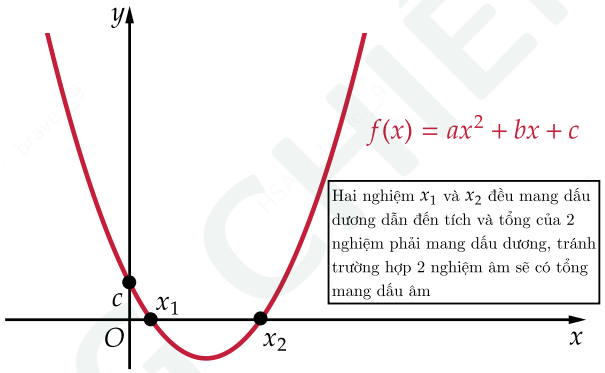
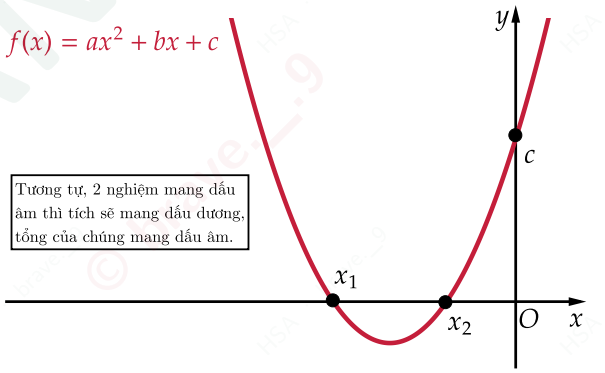
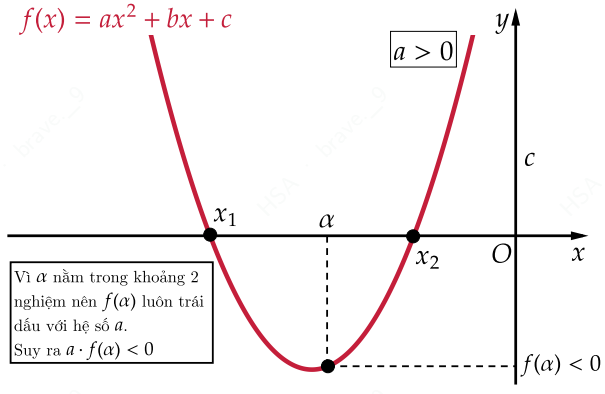
Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

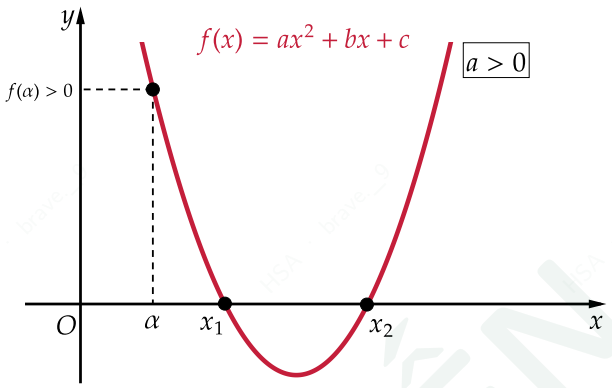
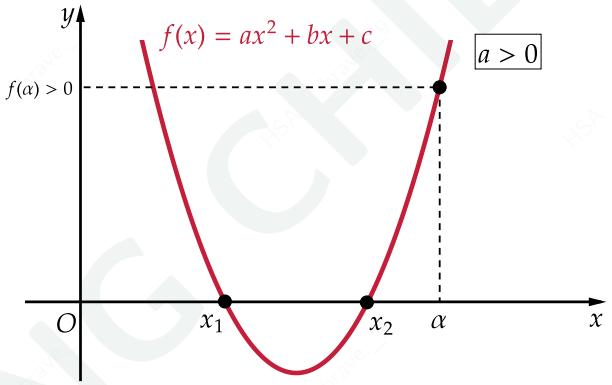
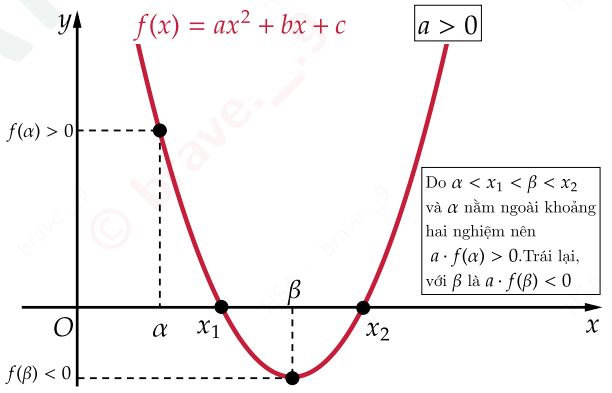
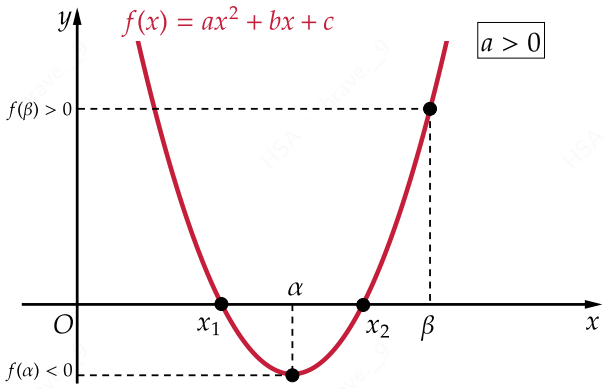
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là hai nghiệm của phương trình:

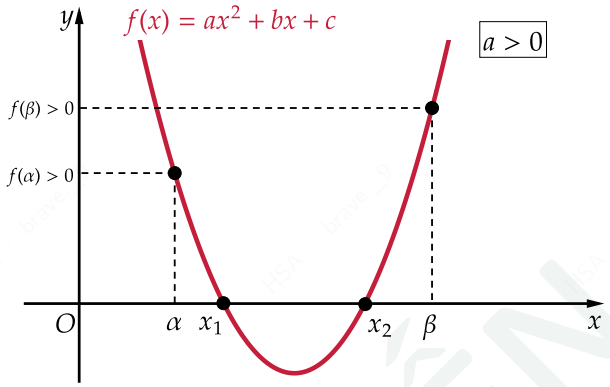
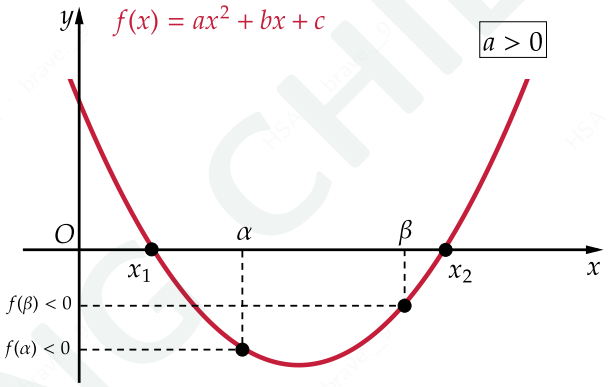
$$x^2 - Sx + P = 0.$$

(Điều kiện để tồn tại hai số u, v là $S^2 - 4P \geq 0$).

Tính chất nghiệm và điều kiện tương đương	Đồ thị minh hoạ
Hai nghiệm trái dấu $(x_1 < 0 < x_2)$: $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} < 0$	
Hai nghiệm dương phân biệt $(0 < x_1 < x_2)$: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$	
Hai nghiệm âm phân biệt $(x_1 < x_2 < 0)$: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$	
α **nằm giữa hai nghiệm** $(x_1 < \alpha < x_2)$: $a \cdot f(\alpha) < 0$	

Tính chất nghiệm và điều kiện tương đương	Đồ thị minh hoạ
Hai nghiệm lớn hơn α $(\alpha < x_1 < x_2)$: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} > \alpha \end{cases}$	
Hai nghiệm nhỏ hơn α $(x_1 < x_2 < \alpha)$: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \alpha \end{cases}$	
Trường hợp $\alpha < x_1 < \beta < x_2$: $\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$	
Trường hợp $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$: $\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$	

BÙI QUANG CHIẾN

Tính chất nghiệm và điều kiện tương đương	Đồ thị minh hoạ
Trường hợp $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$	
Trường hợp $x_1 < \alpha < \beta < x_2$: $\begin{cases} a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$	

1.3 Hàm số bậc hai

BÙI QUANG CHIẾN © brave_9

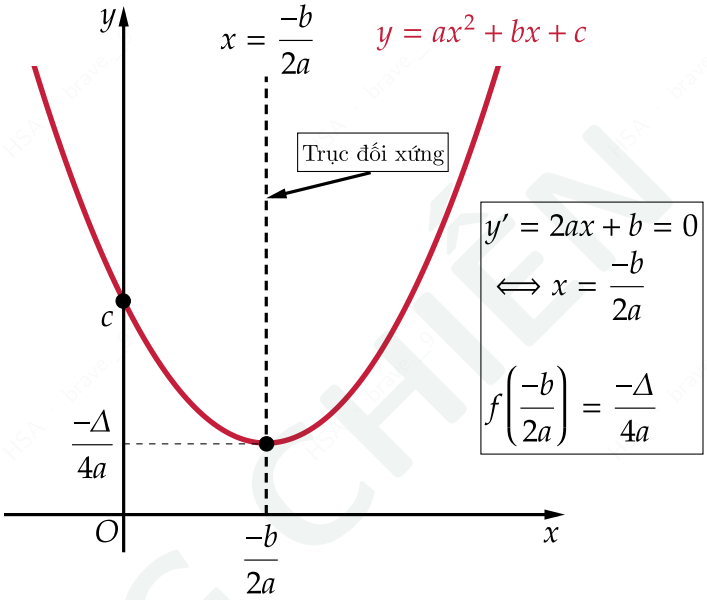
1.3.1 Phương trình dạng tổng quát

Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức:

$$y = ax^2 + bx + c$$

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.



1.3.2 Sự biến thiên và đồ thị hàm số

- **Tập xác định:** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- **Đỉnh:** $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

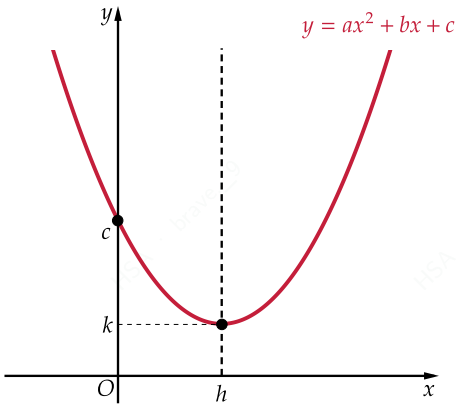
1.3.3 Phương trình dạng đỉnh

Nếu parabol có đỉnh là điểm $I(h; k)$, phương trình của nó có thể được viết dưới dạng:

$$y = a(x - h)^2 + k \quad (a \neq 0)$$

Trong đó tọa độ đỉnh được xác định thông qua các hệ số của phương trình tổng quát:

- $h = -\dfrac{b}{2a}$ là hoành độ đỉnh.
- $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$ là tung độ đỉnh.

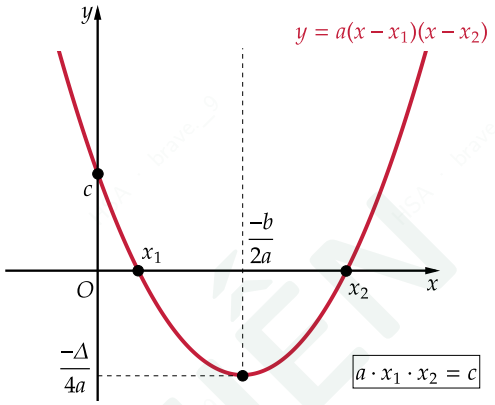


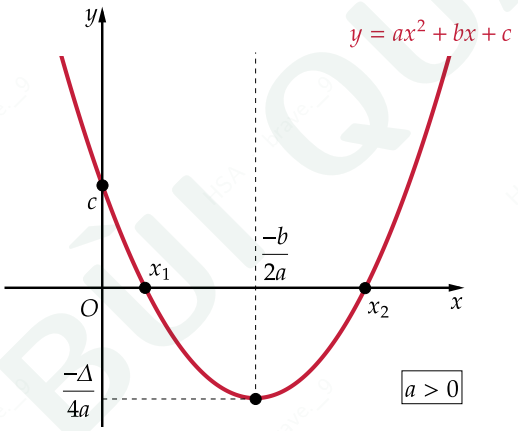
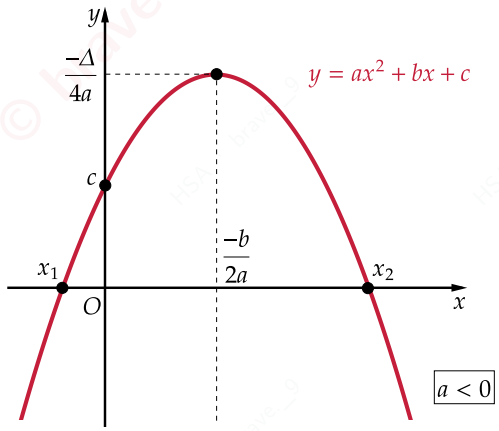
1.3.4 Phương trình dạng nghiệm

Nếu parabol cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2, phương trình có thể được viết dưới dạng:

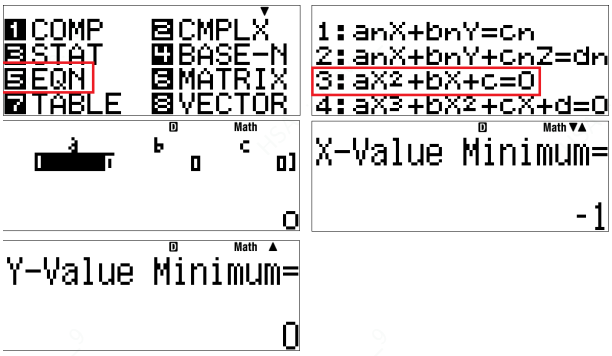
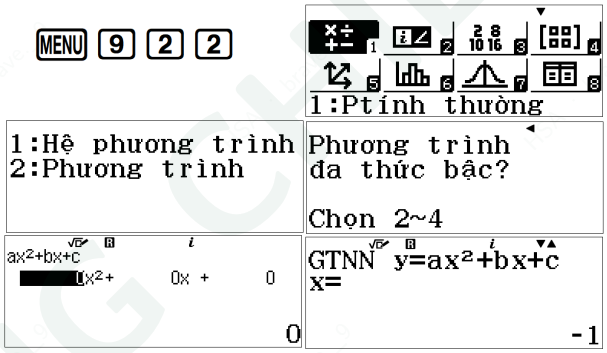
$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0)$$

Dạng này được suy ra trực tiếp từ việc phân tích đa thức thành nhân tử khi phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.



Trường hợp $a > 0$	Trường hợp $a < 0$
Bảng biến thiên x: $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$ y: $+\infty$ ↘ $-\frac{\Delta}{4a}$ ↗ $+\infty$	**Bảng biến thiên** x: $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$ y: $-\infty$ ↗ $-\frac{\Delta}{4a}$ ↘ $-\infty$
Đồ thị hàm số 	**Đồ thị hàm số** 
Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. $\min y = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.	Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. $\max y = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

1.3.5 Cách tìm đỉnh của parabol bằng máy tính Casio

Máy tính 570VN	Máy tính 580
▪ **Bước 1:** Ấn MODE 5 3. ▪ **Bước 2:** Nhập hệ số của phương trình parabol. ▪ **Bước 3:** Ấn = đọc kết quả.	▪ **Bước 1:** Ấn MENU 9 2 2. ▪ **Bước 2:** Nhập hệ số của phương trình parabol. ▪ **Bước 3:** Ấn = đọc kết quả.
Đọc giá trị `X-Value Minimum` và `Y-Value Minimum` (hoặc Maximum) để suy ra tọa độ đỉnh I.	Đọc giá trị `GTNN` hoặc `GTLN` của $y = ax^2 + bx + c$ để suy ra tọa độ đỉnh I.
	

1.4 Dấu của tam thức bậc hai

1.4.1 Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm $(\Delta < 0)$ thì bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ $(\Delta = 0)$ thì bảng xét dấu của $f(x)$:

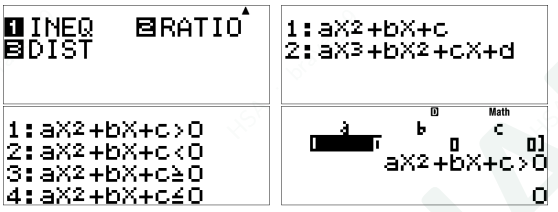
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	0	cùng dấu a

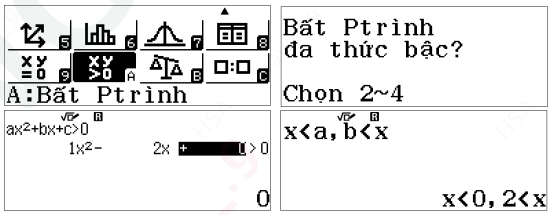
- Nếu phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thì bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	0	trái dấu a	0 cùng dấu a

1.4.2 Cách giải bất phương trình bậc hai bằng máy tính Casio

Máy tính 570VN	Máy tính 580
Bước 1: Ấn MODE ↓, chọn 1 1.	**Bước 1:** Ấn MENU, chọn A 2.
Bước 2: Chọn loại bất phương trình cần giải.	**Bước 2:** Chọn loại bất phương trình cần giải.
Bước 3: Nhập hệ số a, b, c.	**Bước 3:** Nhập hệ số a, b, c.





1.4.3 Một số điều kiện về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ với $\Delta=b^2-4ac$.

- $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$
- $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$
- $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$
- $f(x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

1.5 Một số phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai

1.5.1 Phương trình chứa ẩn dưới dấu giá trị tuyệt đối

Dạng cơ bản thường gặp:

- Dạng $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$.
- Dạng $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$

1.5.2 Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế để đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn.

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

1.5.3 Một số dạng phương trình đặc biệt khác

Dạng phương trình	Phương pháp
$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$	Đặt $t = x^2 \geq 0$
$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$	Đặt $t = x + \dfrac{a + b}{2}$
$x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (với $b = 8 - 2a$)	Đặt $t = x - 1$
$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) = m$	Đặt $t = ax^2 + bx$

Dạng phương trình	Phương pháp
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ (với $a+d=b+c$)	Tính $(x+a)(x+d)$ và $(x+b)(x+c)$, đưa về dạng trên
$x^4+ax^3+bx^2+akx+k^2=0$	Chia hai vế cho x^2, đặt $t=x+\dfrac{k}{x}$
$ax^4-bx^3+cx^2-bx+a=0$	Chia hai vế cho x^2, đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$
$(ax^2+bx+c)(ax^2+dx+c)=mx^2$	Chia hai vế cho x^2, sau đó đặt ẩn phụ thích hợp

1.6 Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad (I)$$

Trong đó x, y là ẩn số; các hệ số a, b, c, a', b', c' là những số cho trước (với $a^2+b^2\neq 0$ và $a'^2+b'^2\neq 0$).

Định lý: Giải và biện luận hệ phương trình bằng định thức cấp hai

Ta lập các định thức (định thức cấp hai) như sau:

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$$

$$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b, \quad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

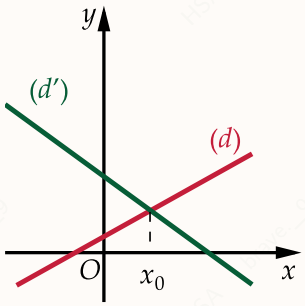
Kết quả biện luận hệ (I) dựa vào các định thức trên:

- Nếu $D\neq 0$: Hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{D_x}{D};\dfrac{D_y}{D}\right)$.
- Nếu $D=0$ và ($D_x\neq 0$ hoặc $D_y\neq 0$): Hệ (I) vô nghiệm.
- Nếu $D=D_x=D_y=0$: Hệ (I) có vô số nghiệm. (Tập nghiệm của hệ lúc này trùng với tập nghiệm của phương trình $ax+by=c$).

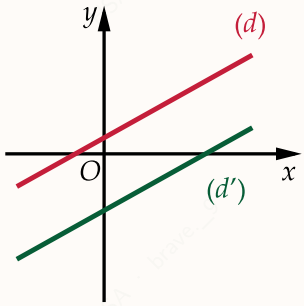
Nhận xét: Ý nghĩa hình học

Mỗi phương trình trong hệ (I) là phương trình của một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ. Giả sử (d) là đường thẳng $ax + by = c$ và (d') là đường thẳng $a'x + b'y = c'$. Khi đó:

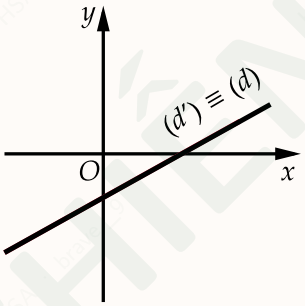
- Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Hai đường thẳng cắt nhau.
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Hai đường thẳng song song với nhau.
- Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ Hai đường thẳng trùng nhau.



Hệ có nghiệm duy nhất



Hệ vô nghiệm



Hệ có vô số nghiệm

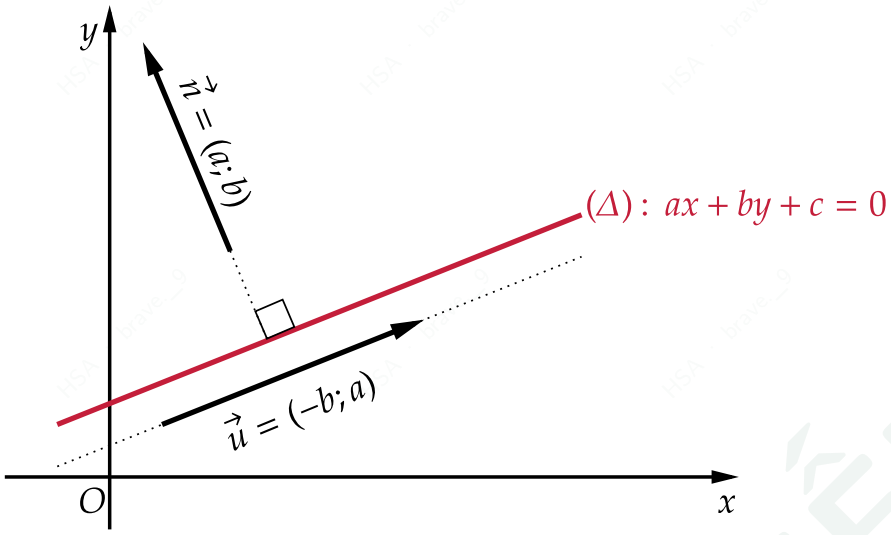
1.7 Phương trình đường thẳng trong mặt phẳng

1.7.1 Phương trình dạng tổng quát

Định nghĩa: Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi đường thẳng đều có phương trình dạng $ax + by + c = 0$, trong đó a và b không đồng thời bằng 0 (tức là $a^2 + b^2 \neq 0$). Phương trình này được gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng.

Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ đều là phương trình tổng quát của một đường thẳng xác định. Đối với đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$, ta có:



- $\vec{n} = (a;\, b)$ là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng (vectơ có giá vuông góc với Δ).
- $\vec{u} = (-b;\, a)$ là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng (vectơ có giá song song hoặc trùng với Δ).

Chú ý: Các trường hợp đặc biệt

Xét phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$:

- Nếu $b = 0$, phương trình trở thành $x = -\dfrac{c}{a}$. Đây là đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $(-\dfrac{c}{a};\, 0)$.
- Nếu $a = 0$, phương trình trở thành $y = -\dfrac{c}{b}$. Đây là đường thẳng vuông góc với trục Oy tại điểm $(0;\, -\dfrac{c}{b})$.
- Nếu $c = 0$, phương trình có dạng $ax + by = 0$. Đường thẳng này đi qua gốc tọa độ $O(0;\, 0)$.

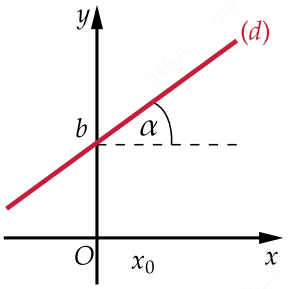
1.7.2 Phương trình đường thẳng theo hệ số góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng Δ không song song và không trùng với trục Oy luôn có phương trình dạng:

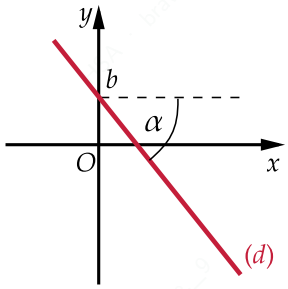
$$y = kx + b$$

Trong đó, đại lượng k được gọi là **hệ số góc** của đường thẳng. Nếu α là góc tạo bởi Δ và chiều dương của trục Ox $(\alpha \neq 90^\circ)$ thì $k = \tan\alpha$. Đại lượng b là tung độ giao điểm của đường thẳng với trục Oy.

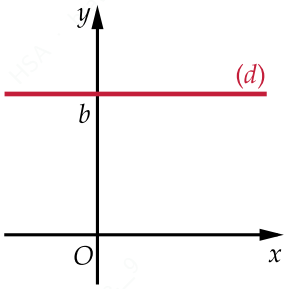
- $k > 0$: Góc α nhọn, đường thẳng đi lên từ trái sang phải.
- $k < 0$: Góc α tù, đường thẳng đi xuống từ trái sang phải.
- $k = 0$: Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox, có phương trình $y = b$.



Hệ số góc $k > 0$



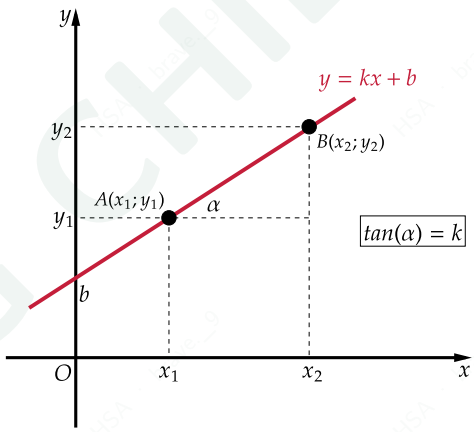
Hệ số góc $k < 0$



Hệ số góc $k = 0$

1.7.3 Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Cho hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Phương trình đường thẳng đi qua A và B được xác định như sau:



- Nếu $x_1 \neq x_2$, đường thẳng có hệ số góc $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Khi đó phương trình là:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

hoặc viết dưới dạng tương đương:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

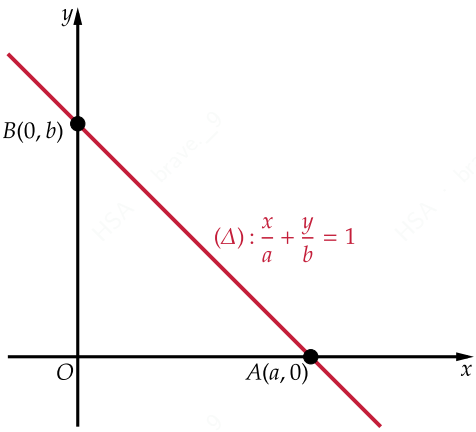
- Nếu $x_1 = x_2$, đường thẳng vuông góc với trục Ox và có phương trình là $x = x_1$.

1.7.4 Phương trình đường thẳng dạng đoạn chắn

Đường thẳng Δ cắt các trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ (với $a \neq 0$ và $b \neq 0$) có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Phương trình này được gọi là phương trình đường thẳng theo **đoạn chắn**. Trong đó a và b lần lượt là đoạn chắn của đường thẳng trên trục Ox và Oy.



Chú ý

Phương trình theo đoạn chắn không áp dụng được cho các đường thẳng đi qua gốc tọa độ O hoặc vuông góc với một trong hai trục tọa độ.

1.7.5 Phương trình đường thẳng dạng tham số và chính tắc

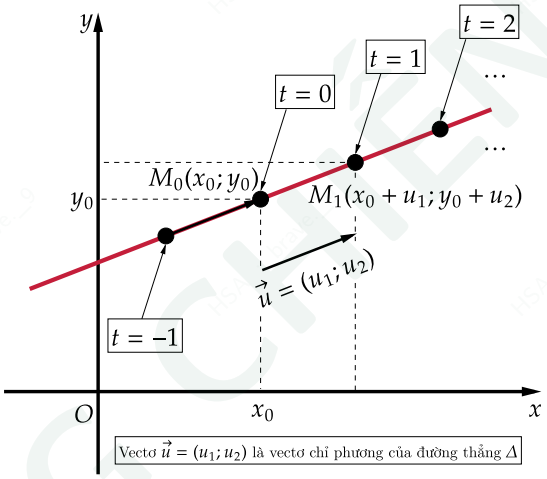
Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;\, y_0)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (u_1;\, u_2)$ (với $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$) làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Khi tham số t thay đổi trên tập $\mathbb{R}$, điểm $M(x;\, y)$ sẽ di chuyển quét qua toàn bộ đường thẳng Δ.

Trong trường hợp $u_1 \neq 0$ và $u_2 \neq 0$, nếu ta khử tham số t thì nhận được phương trình dạng chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$



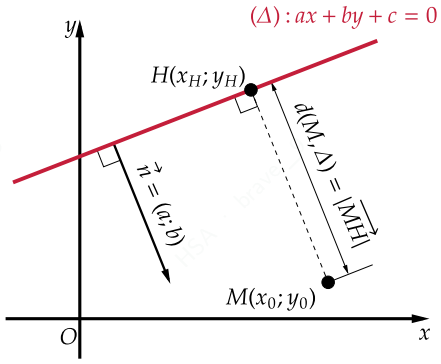
1.7.6 Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ một điểm $M(x_0;\, y_0)$ đến đường thẳng $\Delta\colon ax + by + c = 0$ được tính theo công thức:

$$\boxed{d(M,\, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Đặc biệt, khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;\, 0)$ đến Δ là:

$$d(O,\, \Delta) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Ta hoàn toàn có thể chứng minh công thức khoảng cách trên:
1. $\overrightarrow{MH} = t \cdot \vec{n}$
2. Thay toạ độ H (theo ẩn t) vào phương trình Δ để tìm t
3. Tính độ lớn vectơ $|\overrightarrow{MH}| = |t| \cdot |\vec{n}|$ và thế giá trị t vừa tìm được.

1.7.7 Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng

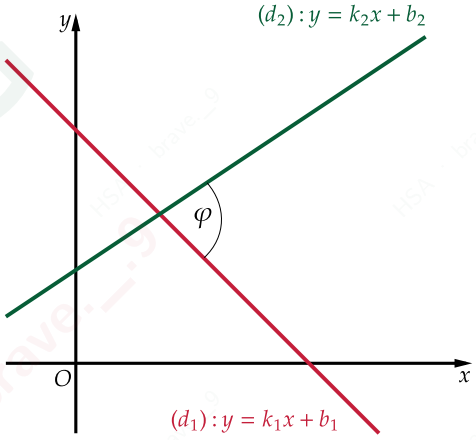
Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng $d_1\colon a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2\colon a_2x+b_2y+c_2=0$. Vị trí tương đối của chúng được xét thông qua tỉ lệ các hệ số như sau:

Vị trí tương đối	Điều kiện hệ số
Cắt nhau	$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$
Song song	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$
Trùng nhau	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$
Vuông góc	$a_1a_2+b_1b_2=0$

Góc φ ($0^\circ\leq\varphi\leq 90^\circ$) giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có hệ số góc lần lượt là k_1 và k_2 được tính bởi:

$$\tan\varphi=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$$

(Áp dụng khi điều kiện $1+k_1k_2\neq 0$ được thỏa mãn). Nếu xảy ra trường hợp $1+k_1k_2=0$, hai đường thẳng vuông góc với nhau ($\varphi=90^\circ$).



Chú ý: Điều kiện vuông góc

Học sinh cần phân biệt rõ hai điều kiện tương đương khi chứng minh hai đường thẳng vuông góc:

- Dùng **hệ số góc**: $k_1\cdot k_2=-1$.
- Dùng **vectơ pháp tuyến/chỉ phương**: Tích vô hướng bằng 0, tức là $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ hoặc $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$ (hay $a_1a_2+b_1b_2=0$).

BUI QUANG CHIẾN

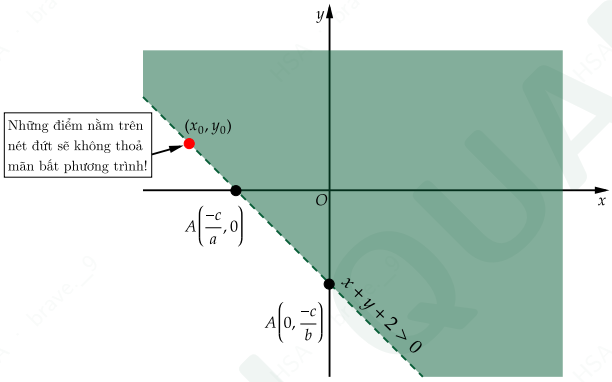
1.8 Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

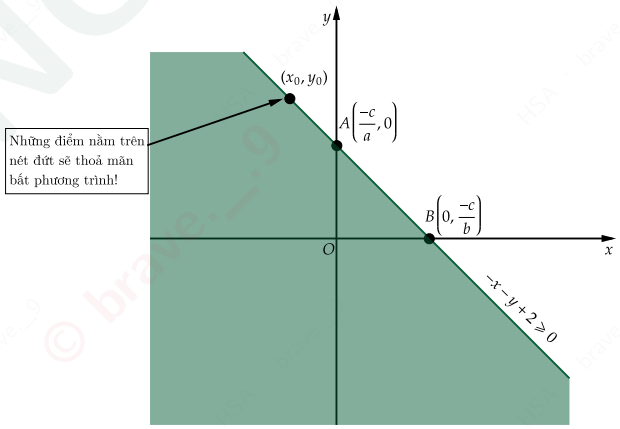
1.8.1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng là $ax+by \le c$ ($ax+by \ge c$, $ax+by < c$, $ax+by > c$), trong đó a, b, c là những số thực, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

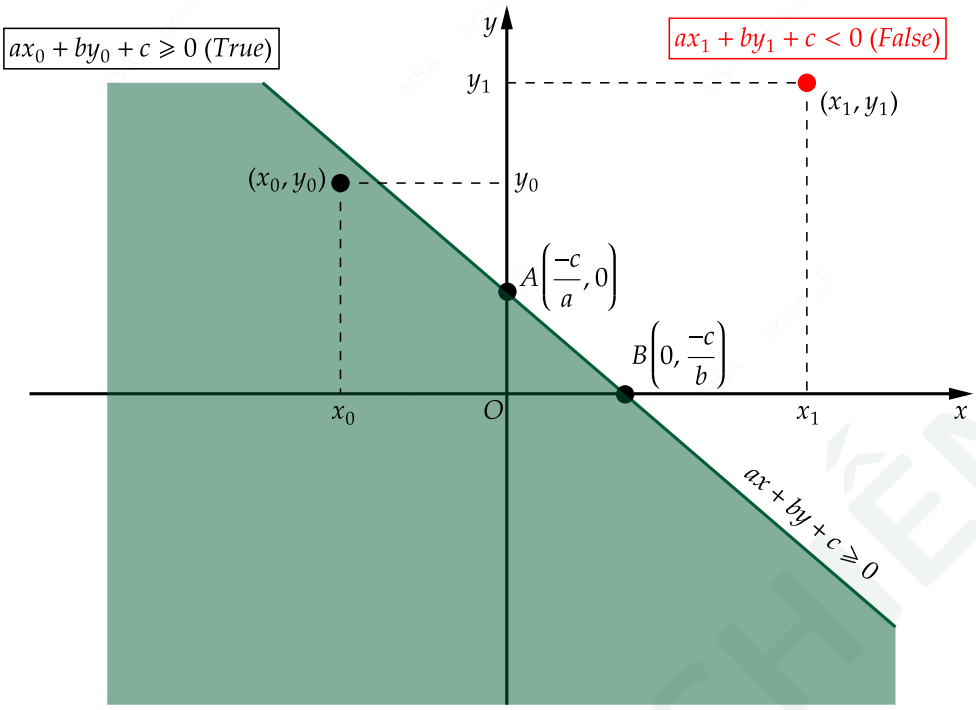
- Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \le c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \le c$ đúng.
- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.





Định nghĩa: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình

- Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \le c$ gọi là miền nghiệm của bất phương trình.
- Đường thẳng d: $ax + by = c$ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d:
  - Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.
  - Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.



Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$

- **Bước 1:** Vẽ đường thẳng $d\colon ax + by = c$ trên mặt phẳng Oxy.
- **Bước 2:** Lấy điểm $M_0(x_0; y_0)$ (thường là gốc tọa độ O) không thuộc d.
- **Bước 3:** Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.
- **Bước 4:** Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

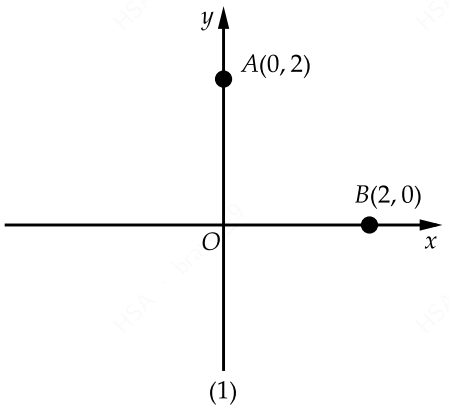
Chú ý

Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.

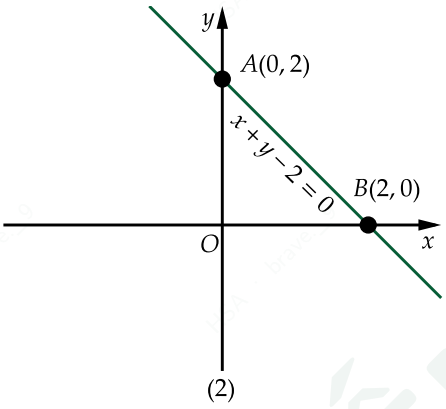
Ví dụ

Hãy vẽ miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \leq 0$

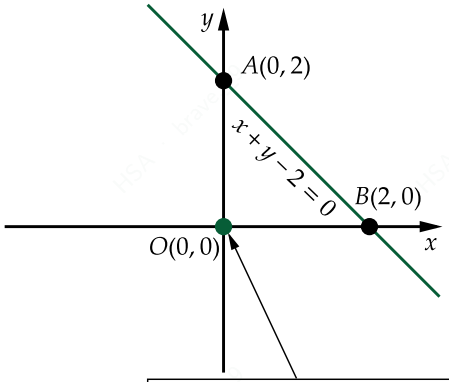
Lời giải



(1)



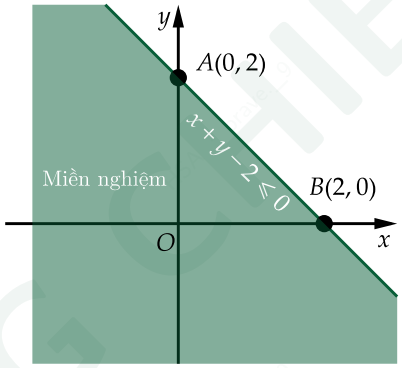
(2)



$1 \cdot (0) + 1 \cdot (0) - 2 = -2 \leqslant 0$

Ta chọn một điểm ngẫu nhiên trên đồ thị để kiểm tra. Để thuận tiện nhất thì nên lấy điểm $O(0, 0)$. Và ta thấy nó thoả mãn yêu cầu của bất phương trình.

(3)



(4)

1.8.2 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ.

Định nghĩa: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

- Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

- Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

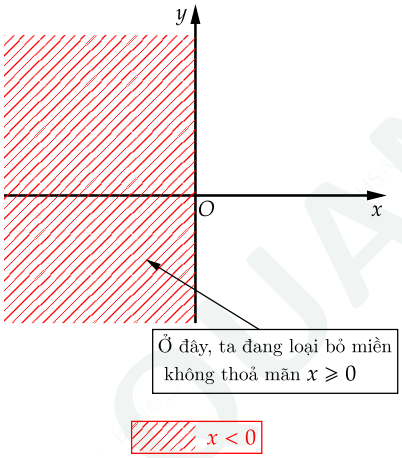
Cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- **Bước 1:** Trên cùng mặt phẳng Oxy, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- **Bước 2:** Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

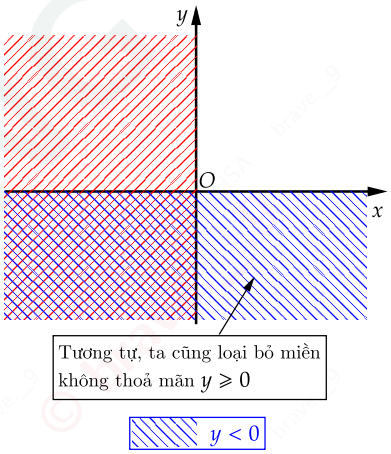
Ví dụ

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

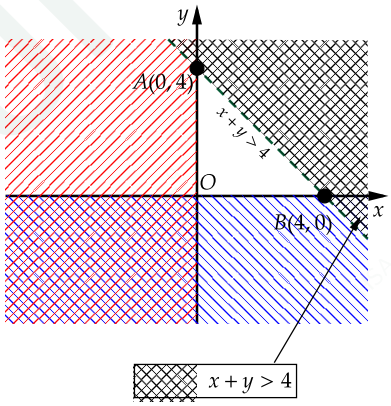
Lời giải



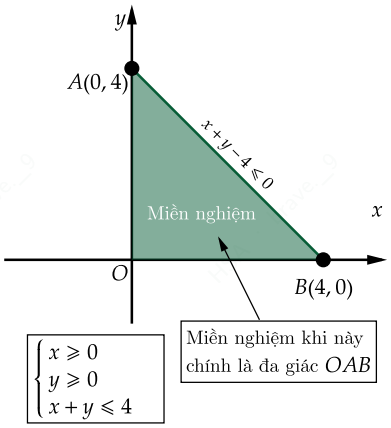
(1)



(2)



(3)



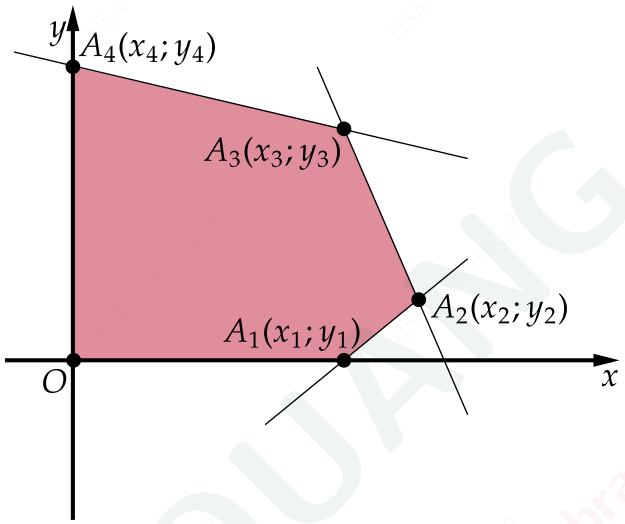
(4)

1.8.3 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

Chú ý

Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x;y)=ax+by$, với $(x;y)$ là các nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Giả sử đó là miền đa giác $A_1A_2\ldots A_n$.
- **Bước 2:** Tính giá trị của biểu thức $F(x;y)$ tại các đỉnh $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, ..., $A_n(x_n;y_n)$ của đa giác trên.
- **Bước 3:** So sánh các giá trị thu được, ta được giá trị lớn nhất F_{max} (hoặc nhỏ nhất F_{min}) cần tìm.



$F_0=F(0;0)$
$F_1=F(x_1;y_1)$
$F_2=F(x_2;y_2)$
$F_3=F(x_3;y_3)$
$\cdots$
$F_n=F(x_n;y_n)$

$\boxed{F_{max}=max\{F_0;F_1;\ \cdots F_n\}}$ $\boxed{F_{min}=min\{F_0;F_1;\ \cdots F_n\}}$

Ví dụ

Trích đề thi THPTQG 2025 - Phần III - Câu 3 - Mã đề 0101

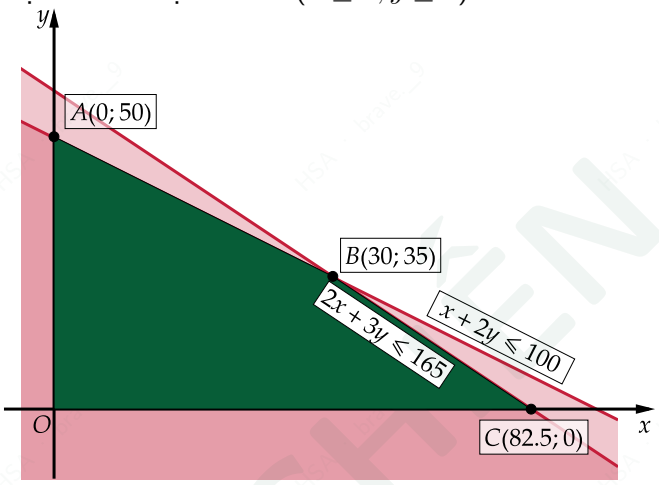
Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trường THPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 30 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 50 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số lượng thực đơn 1 và thực đơn 2 được bán ra ($x \geq 0, y \geq 0$).

Số cốc nước chanh sử dụng là $2x+3y$. Số túi khoai chiên sử dụng là $x+2y$. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 165 \\ x+2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Hàm mục tiêu (số tiền thu được tính theo nghìn đồng): $F = 30x + 50y$, cần tìm $\max F$.

Giao điểm của $x+2y=100$ và trục tung: $A(0;50)$.

Giao điểm của $2x+3y=165$ và $x+2y=100$: giải hệ ta được $x=30$, $y=35 \Rightarrow B(30;35)$.

Giao điểm của $2x+3y=165$ và trục hoành: $x=165/2$, $y=0 \Rightarrow C(82{,}5;0)$.

Các đỉnh của miền đa giác: $O(0;0)$, $A(0;50)$, $B(30;35)$, $C(82{,}5;0)$.

$$F(0;0) = 30\cdot 0 + 50\cdot 0 = 0, \qquad F(0;50) = 2500,$$
$$F(30;35) = 900 + 1750 = 2650, \quad F(82{,}5;0) = 2475.$$

$F_{\max} = 2650$ nghìn đồng, đạt được khi bán 30 thực đơn 1 và 35 thực đơn 2.

Chương 2

GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

2.1 Giới hạn của dãy số

2.1.1 Dãy số có giới hạn 0

Định nghĩa: Giới hạn 0

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim u_n = 0 \quad \text{hoặc} \quad u_n \to 0.$$

(Kí hiệu "$\lim u_n = 0$"còn được viết "$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$", đọc là dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến vô cực).

Nhận xét

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0. Chẳng hạn, ta có $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ vì $\dfrac{1}{n} = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|$ và $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9

Định lý: Một số dãy số có giới hạn 0

Dựa vào định nghĩa, người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0; \quad \lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

b) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0.$

Định lý: Định lí kẹp

Cho ba dãy số $(u_n), (v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ với mọi n (kể từ một số hạng nào đó trở đi) và

$$\lim u_n = \lim w_n = L$$

thì

$$\lim v_n = L.$$

Trường hợp đặc biệt (Giới hạn 0): Nếu $|u_n| \leq v_n$ (tức là $-v_n \leq u_n \leq v_n$) và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0.$

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$

Lời giải

Hàm số lượng giác $\sin n$ luôn dao động nhưng bị chặn trong đoạn $[-1; 1]$. Lợi dụng tính chất này, ta có thể dùng Định lý kẹp để ép giới hạn của toàn bộ phân thức.

Vì $|\sin n| \leq 1$ với mọi n, ta có:

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Mặt khác, theo định lí về một số dãy số có giới hạn 0, ta có $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Do đó, áp dụng định lí kẹp, ta suy ra:

$$\lim \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Ví dụ

Cho k là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0.$

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{n^k} \le \dfrac{1}{n}$ với mọi $n \ge 1$. Từ đó thiết lập được bất đẳng thức:

$$0 \le \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}$$

Vì $\lim 0 = 0$ và $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, nên theo định lí kẹp ta suy ra $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.

Ví dụ

Tính các giới hạn sau: a) $\lim \dfrac{1}{2^n}$ b) $\lim \dfrac{(-2)^n}{3^n}$

Lời giải

a) $\lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$;

b) $\lim \dfrac{(-2)^n}{3^n} = \lim \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n = 0$.

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim \dfrac{\cos \dfrac{n\pi}{5}}{4^n} = 0$.

Lời giải

Ta có

$$\left|\frac{\cos \dfrac{n\pi}{5}}{4^n}\right| \le \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Vì $\lim \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ nên $\lim \dfrac{\cos \dfrac{n\pi}{5}}{4^n} = 0$.

BÙI QUANG CHIẾN

2.1.2 Dãy số có giới hạn hữu hạn

Định nghĩa: Giới hạn hữu hạn

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim u_n = L \quad \text{hoặc} \quad u_n \to L.$$

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là **dãy số có giới hạn hữu hạn**.

Nhận xét

Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$ (c là hằng số) có giới hạn là c vì

$$\lim(u_n - c) = \lim(c - c) = \lim 0 = 0.$$

Ví dụ

Chứng minh rằng $\lim\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 1\right) = -1$.

Lời giải

Đặt $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 1$.

Vì $\lim(u_n - (-1)) = \lim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ nên $\lim u_n = -1$.

Ví dụ

Chứng minh rằng:

a) $\lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right) = 1$; b) $\lim\left(\frac{2-5n}{2n}\right) = -\frac{5}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $\lim\left(\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right) - 1\right) = \lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \implies \lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right) = 1$.

b) Ta có $\lim\left(\frac{2-5n}{2n} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \lim\left(\frac{1}{n} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) = \lim\frac{1}{n} = 0 \implies \lim\left(\frac{2-5n}{2n}\right) = -\frac{5}{2}$.

Nhận xét

1) Từ định nghĩa vừa nêu, suy ra rằng $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ từ điểm u_n đến điểm L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn; nói một cách trực quan, khi n tăng, các điểm u_n ngày càng tiến gần đến điểm L.
2) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn. Chẳng hạn dãy số $((-1)^n)$, tức là dãy số

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

không có giới hạn hữu hạn.

2.1.3 Một số định lí quan trọng

Định lý

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

1. $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$;
2. Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Ví dụ

Tính giới hạn $\lim \sqrt{9 + \dfrac{\cos 2n}{n}}$.

Lời giải

Vì $\lim \left(9 + \dfrac{\cos 2n}{n}\right) = 9$ nên $\lim \sqrt{9 + \dfrac{\cos 2n}{n}} = \sqrt{9} = 3$.

Ví dụ

Tìm $\lim \sqrt[3]{\dfrac{27n^2 - n}{n^2}}$.

Lời giải

Ta có $\lim \dfrac{27n^2 - n}{n^2} = \lim \left(27 - \dfrac{1}{n}\right) = 27$. Do đó

$$\lim \sqrt[3]{\frac{27n^2 - n}{n^2}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

BÙI QUANG CHIẾN © brave_9

Định lý

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

$$\lim(u_n + v_n) = L + M \qquad \lim(u_n \cdot v_n) = L \cdot M$$

$$\lim(u_n - v_n) = L - M \qquad \lim(c \cdot u_n) = c \cdot L$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M} \quad (\text{nếu } M \neq 0).$$

Ví dụ

Tìm $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{3n^2 + 4n - 7}{n^2}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\lim u_n &= \lim\left(3 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^2}\right) = \lim 3 + \lim \frac{4}{n} - \lim \frac{7}{n^2} \\ &= \lim 3 + 4 \lim \frac{1}{n} - 7 \lim \frac{1}{n^2} = 3 + 4 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 3.\end{aligned}$$

Ví dụ

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$.

Lời giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$u_n = \frac{2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}}.$$

Vì

$$\lim\left(2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right) = \lim 2 - \lim \frac{4}{n} + \lim \frac{3}{n^2} + \lim \frac{3}{n^3} = 2$$

và

$$\lim\left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right) = 1 \neq 0$$

nên

$$\lim \frac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ví dụ

Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho n^3, ta được

$$u_n = \frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{1 + \dfrac{2}{n^2}}.$$

Vì $\lim\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}\right) = 0$ và $\lim\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) = 1 \neq 0$ nên $\lim u_n = \dfrac{0}{1} = 0$.

2.1.4 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Xét cấp số nhân vô hạn

$$u_1, u_1q, u_1q^2, \ldots, u_1q^n, \ldots$$

có công bội q với $|q| < 1$ (gọi là một *cấp số nhân lùi vô hạn*).

Ta biết rằng tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là

$$S_n = u_1 + u_1q + \cdots + u_1q^{n-1} = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}q^n.$$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$. Do đó

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ta gọi giới hạn đó là **tổng của cấp số nhân** đã cho và viết

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \cdots = \frac{u_1}{1-q}.$$

2.1.5 Giới hạn vô cực

Định nghĩa: Giới hạn vô cực

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
  Kí hiệu:
  $$\lim(u_n) = +\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim u_n = +\infty \quad \text{hoặc} \quad u_n \to +\infty.$$
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.
  Kí hiệu:
  $$\lim(u_n) = -\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim u_n = -\infty \quad \text{hoặc} \quad u_n \to -\infty.$$

Nhận xét

Dãy số có giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là **dãy số có giới hạn vô cực**.

Định lý: Một số liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực

a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n < 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = -\infty$.

Nhận xét: Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương.
- $\lim q^n = +\infty$ với $q > 1$.

Ví dụ

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim (n^3 - 2n + 1)$ b) $\lim \dfrac{2n^2 + 1}{n - 3}$

Lời giải

a) Ta có
$$\lim (n^3 - 2n + 1) = \lim n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right).$$

Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = 1 > 0$ nên $\lim\left(n^3 - 2n + 1\right) = +\infty$.

b) Ta có

$$\lim \frac{2n^2+1}{n-3} = \lim \frac{n^2\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)} = \lim n \cdot \frac{2 + \dfrac{1}{n^2}}{1 - \dfrac{3}{n}}.$$

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \dfrac{2 + \dfrac{1}{n^2}}{1 - \dfrac{3}{n}} = 2 > 0$ nên $\lim \dfrac{2n^2+1}{n-3} = +\infty$.

2.2 Giới hạn của hàm số

2.2.1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Xét bài toán sau:

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ và một dãy bất kì $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ những số thực khác 2 (tức là $x_n \neq 2$ với mọi n) sao cho $\lim x_n = 2$. (1)

Hãy xác định dãy các giá trị tương ứng $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ của hàm số và tìm $\lim f(x_n)$.

Vì $x_n \neq 2$ nên

$$f(x_n) = \frac{2(x_n^2 - 4)}{x_n - 2} = 2(x_n + 2) \text{ với mọi } n.$$

Do đó

$$f(x_1) = 2(x_1 + 2),\ f(x_2) = 2(x_2 + 2),\ \ldots,\ f(x_n) = 2(x_n + 2),\ \ldots$$

Từ (1) suy ra

$$\lim f(x_n) = \lim 2(x_n + 2) = 2(\lim x_n + 2) = 2(2 + 2) = 8.$$

Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là 8 khi x dần đến 2.

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa: Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$ (tức là $x_n\in(a;b)$ và $x_n\neq x_0$ với mọi n) mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

Khi đó ta viết

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \text{hoặc} \quad f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0.$$

Ví dụ

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$. Với mọi dãy số (x_n) thỏa mãn $x_n\neq 0,\forall n$ và $\lim x_n=0$, ta có:

$$|f(x_n)|=|x_n|\left|\cos\frac{1}{x_n}\right|\leq|x_n|$$

Vì $\lim|x_n|=0$ nên $\lim f(x_n)=0$. Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

Ví dụ

Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$.

Lời giải

Thay $x=1$ vào biểu thức, nhận thấy giới hạn có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

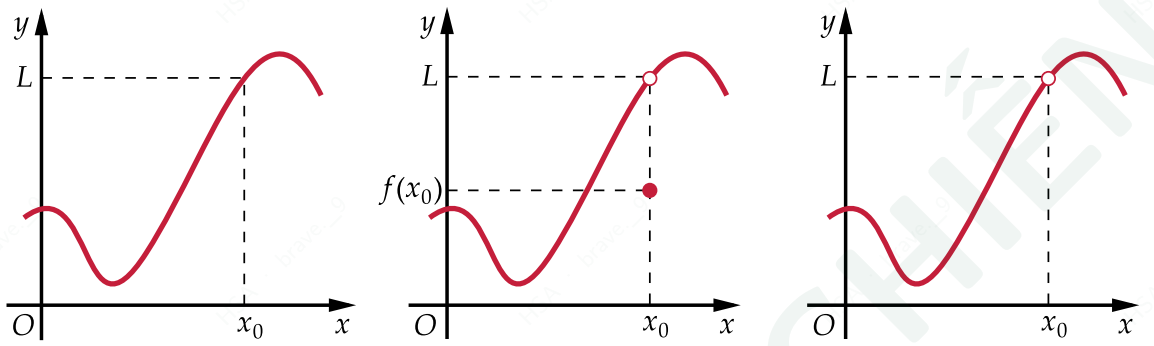
Áp dụng quy tắc L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2x}=\frac{0}{2}=0.$$

Chú ý

Cụm từ "$x_n \neq x_0$"hay tập xác định $(a;b)\setminus\{x_0\}$ trong định nghĩa mang ý nghĩa rất quan trọng: Khi tìm giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến x_0, ta **không quan tâm** đến giá trị của hàm số tại chính điểm x_0.

Thực chất, hàm số $f(x)$ thậm chí có thể không xác định tại x_0, hoặc có xác định nhưng $f(x_0) \neq L$. Điều duy nhất quyết định giới hạn là hình dáng của hàm số ở **vùng lân cận** (rất gần) điểm x_0.



Hình 2.1. Cả ba trường hợp hàm số đều có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ bất chấp giá trị tại $f(x_0)$.

Nhận xét

Áp dụng định nghĩa, dễ dàng chứng minh được rằng:

a) Nếu $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (c là một hằng số), thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0} c = c.$$

b) Nếu $g(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$,

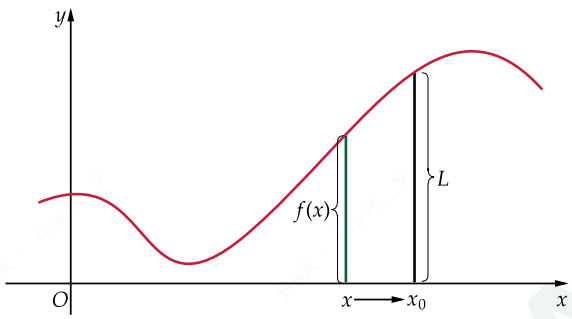
$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

2.2.2 Giới hạn một bên

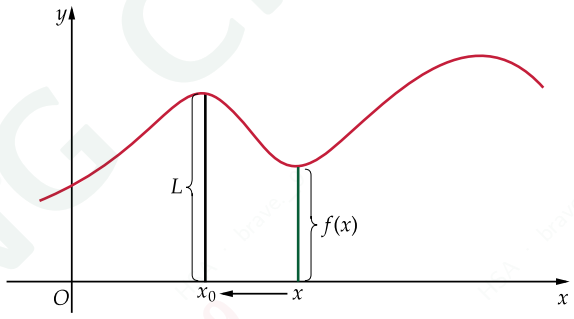
Trong định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ta xét các giá trị của x tiến gần đến x_0 từ cả hai phía. Tuy nhiên, khái niệm giới hạn một bên xuất hiện khi ta chỉ xét các giá trị của hàm số với $x > x_0$ hoặc chỉ xét với $x < x_0$. Điều này cực kỳ hữu ích đối với các hàm số có đồ thị bị gián đoạn tại điểm nào đó hoặc hàm số cho bởi nhiều công thức.

Định nghĩa: Giới hạn bên trái và bên phải

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên trái** là số thực L khi x dần đến x_0 nếu ta có thể làm cho các giá trị của $f(x)$ tiến gần đến L tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0 và $x<x_0$.
  Khi đó ta viết
  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \quad \text{hoặc} \quad f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0^-.$$
- Tương tự, giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b)$. Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên phải** là số thực L khi x dần đến x_0 nếu ta có thể làm cho các giá trị của $f(x)$ tiến gần đến L tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0 và $x>x_0$.
  Khi đó ta viết
  $$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \quad \text{hoặc} \quad f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0^+.$$



Hình 2.2. (a) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$



Hình 2.3. (b) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

Bằng cách so sánh định nghĩa giới hạn tại một điểm và giới hạn một bên, ta có định lý vô cùng quan trọng:

Định lý: Sự tồn tại của giới hạn

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x\to x_0$ khi và chỉ khi giới hạn bên trái và giới hạn bên phải của nó tại x_0 cùng tồn tại và bằng nhau. Ký hiệu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \quad \text{và} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

2.2.3 Giới hạn vô cực tại một điểm

Ví dụ

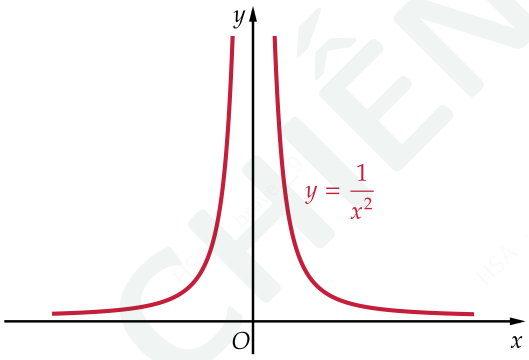
Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ nếu nó tồn tại.

Lời giải

Khi x tiến gần tới 0, x^2 cũng tiến gần tới 0, và phân thức $\dfrac{1}{x^2}$ trở nên rất lớn. Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị, giá trị của $f(x)$ có thể lớn tùy ý khi x tiến đủ gần 0.

Vậy giá trị của $f(x)$ không tiến tới một số thực hữu hạn nào. Ta dùng kí hiệu sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$



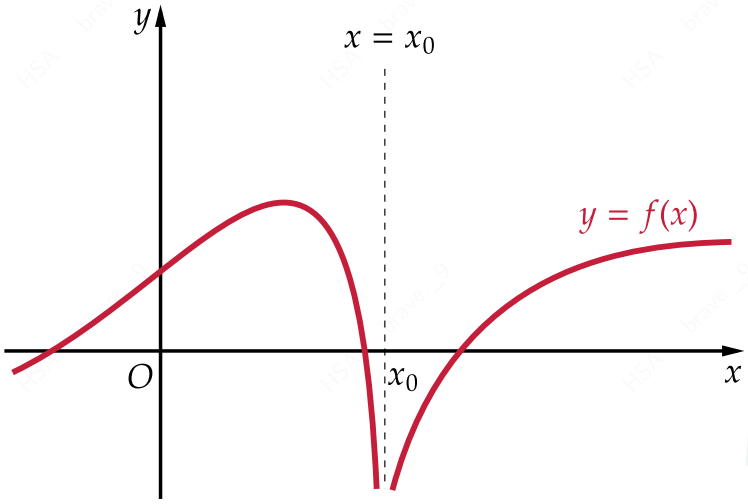
Chú ý

Kí hiệu ∞ không phải là một số thực. Viết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ không có nghĩa là giới hạn này tồn tại, mà nó biểu thị một cách thức đặc biệt mà tại đó giới hạn không tồn tại (giá trị hàm số tăng không có giới hạn).

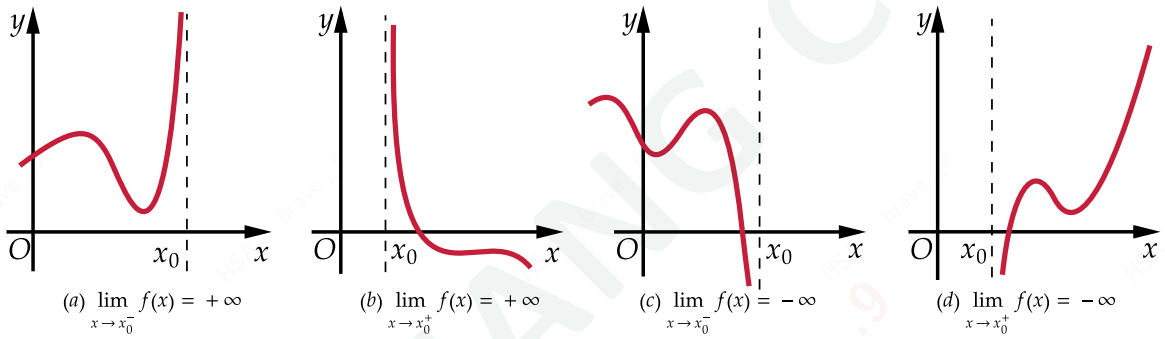
Định nghĩa: Giới hạn vô cực

Cho f là hàm số xác định ở cả hai phía của x_0, ngoại trừ có thể tại chính x_0.

- Ta viết $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ nghĩa là giá trị của $f(x)$ có thể được làm lớn tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0, nhưng không bằng x_0.
- Tương tự, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ nghĩa là giá trị của $f(x)$ có thể làm âm lớn tùy ý (giảm không giới hạn) bằng cách chọn x đủ gần x_0.



Các định nghĩa tương tự hoàn toàn có thể được đưa ra cho **giới hạn vô cực một bên**. Dưới đây là bốn trường hợp minh họa trực quan:



(a) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (c) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

Ví dụ

Tìm $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$.

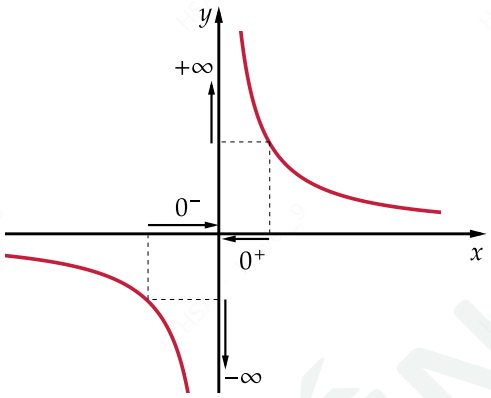
Lời giải

a) Xét giới hạn của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$:

Ta có:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

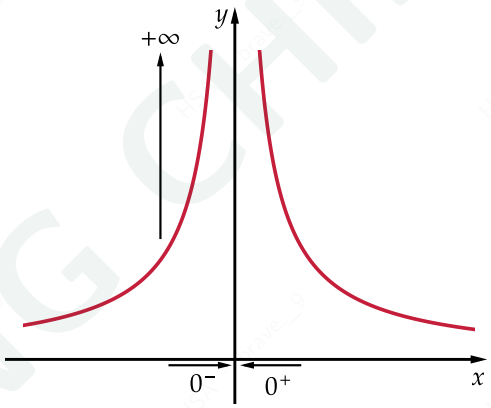
Vì $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$.



b) Xét giới hạn của hàm số $y=\dfrac{1}{|x|}$:

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$. Do đó:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{|x|}=+\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x|}=+\infty.$$

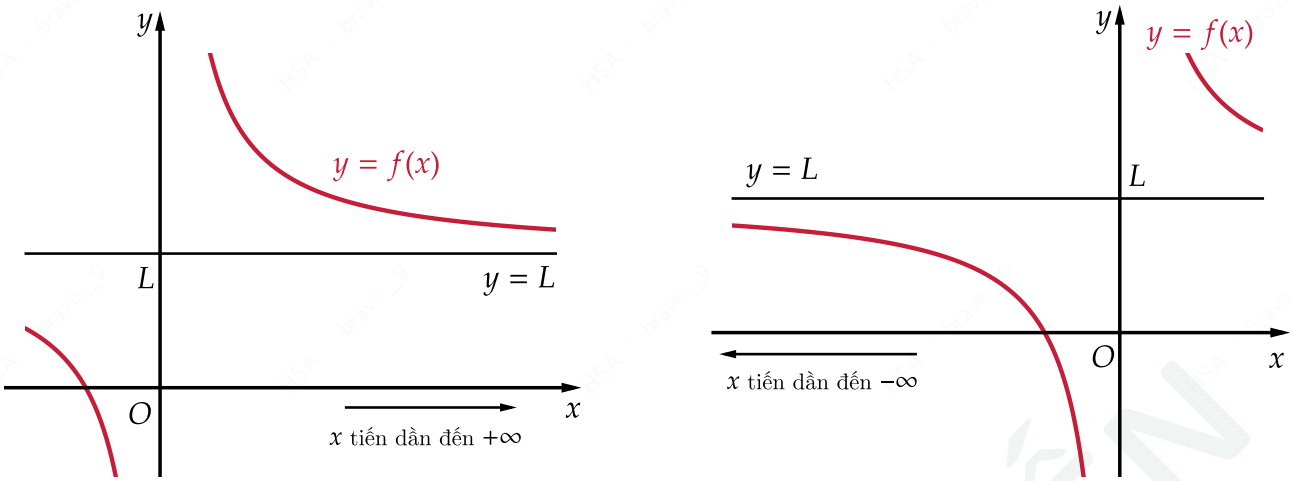


2.2.4 Giới hạn của hàm số tại vô cực

Khái niệm này xét giá trị của hàm số khi biến x trở nên rất lớn về giá trị dương (tiến tới $+\infty$) hoặc rất lớn về giá trị âm (tiến tới $-\infty$).

Định nghĩa

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ (tức là $x_n>a$ với mọi n) mà $\lim x_n=+\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$.
  Khi đó ta viết
  $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \quad \text{hoặc} \quad f(x)\to L \text{ khi } x\to+\infty.$$
- Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.



Hình 2.4. Minh hoạ giới hạn của hàm số $f(x)$ tại vô cực

Nhận xét

Áp dụng định nghĩa, ta chứng minh được rằng với mọi số nguyên dương k, ta có:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$

2.2.5 Một số định lí về giới hạn hữu hạn

Áp dụng các định lí về giới hạn của dãy số, có thể chứng minh được các định lí sau đây về giới hạn của hàm số.

Định lý

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = LM$; (Đặc biệt, nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0} [cf(x)] = cL$).

c) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Các định lí trên vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ hoặc giới hạn một bên.

Nhận xét

Nếu k là một số nguyên dương và x_0 là một hằng số thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} ax^k = ax_0^k.$$

Ví dụ

Tìm giới hạn: a) $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 5x^2 + 7)$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2}$.

Lời giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 5x^2 + 7) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2}(5x^2) + \lim\limits_{x \to 2} 7 = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = -5$.

b) Giới hạn này có dạng vô định $0/0$ và sẽ được giải quyết ở mục sau.

Định lý

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là lân cận chứa x_0, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ

Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}}$

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7} = 2$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}} = \sqrt{2}$.

2.2.6 Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Trong mục này, ta giới thiệu các quy tắc tìm giới hạn vô cực. Các quy tắc này áp dụng cho mọi trường hợp: $x \to x_0$, $x \to x_0^{\pm}$, $x \to \pm\infty$.

Định lý

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

Dễ dàng suy ra định lí trên từ định nghĩa giới hạn.

Quy tắc 1: Tìm giới hạn của tích $f(x)g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L\neq 0$ thì giới hạn của tích tuân theo quy tắc nhân dấu:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Ví dụ

Tìm a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+3x-5)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x^3-x^2+3x-5}$.

Lời giải

a) Ta có

$$2x^3-x^2+3x-5=x^3\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right) \text{ với mọi } x\neq 0.$$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)=2>0$ nên

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+3x-5)=-\infty.$$

b) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+3x-5)=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x^3-x^2+3x-5}=0.$

Ví dụ

Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-5x}$

Lời giải

Với $x < 0$, ta có

$$\sqrt{3x^2 - 5x} = \sqrt{x^2\left(3 - \frac{5}{x}\right)} = |x|\sqrt{3 - \frac{5}{x}}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3 - \frac{5}{x}} = \sqrt{3} > 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2 - 5x} = +\infty$.

Định lý: Định lí kẹp đối với hàm số

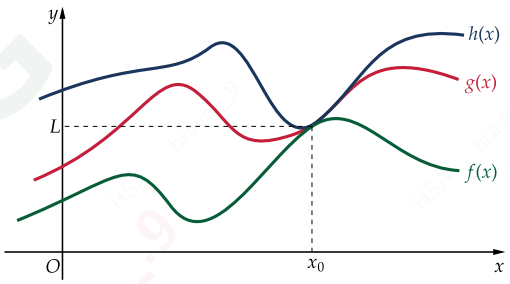
Giả sử $f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi x nằm trong một khoảng chứa x_0 (có thể ngoại trừ tại chính điểm x_0). Nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

thì

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Định lí kẹp (đôi khi còn được gọi là định lí bánh sandwich - Sandwich Theorem) phát biểu rằng: Nếu đồ thị của một hàm số $g(x)$ luôn bị "kẹp"giữa hai đồ thị của hàm số $f(x)$ và $h(x)$ khi x ở gần x_0, và hai hàm số bao ngoài này cùng có giới hạn là L khi $x \to x_0$, thì hàm số ở giữa buộc phải có cùng giới hạn L tại đó.



Ví dụ

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.

Lời giải

Đầu tiên, ta nhận thấy không thể dùng quy tắc giới hạn của tích trực tiếp vì $\lim\limits_{x\to0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Tuy nhiên, hàm $\sin$ luôn bị chặn:

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \text{với mọi } x \ne 0$$

Nhân các vế của bất đẳng thức trên với $x^2 > 0$, chiều bất đẳng thức không đổi, ta được:

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

Ta biết rằng giới hạn của hai hàm bao ngoài khi $x \to 0$ là:

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Do đó, theo định lí kẹp, hàm số bị kẹp ở giữa cũng phải có giới hạn bằng 0:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

Quy tắc 2: Tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x)$ mang dấu không đổi trên lân cận của x_0 thì giới hạn của thương tuân theo quy tắc chia dấu:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

2.2.7 Các dạng vô định và quy tắc L'Hôpital

Khi giải các bài toán về giới hạn, ta thường gặp các dạng vô định không thể tính trực tiếp bằng các định lí cơ bản như $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$. Việc khử các dạng vô định này sẽ trở nên cực kỳ gọn nhẹ nếu ta sử dụng công cụ đạo hàm.

Định lý: Quy tắc L'Hôpital

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm trên một khoảng chứa x_0 (có thể trừ điểm x_0). Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ và giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại, thì:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Quy tắc này vẫn đúng khi $x \to \pm\infty$ hoặc tính giới hạn một bên).

Ví dụ

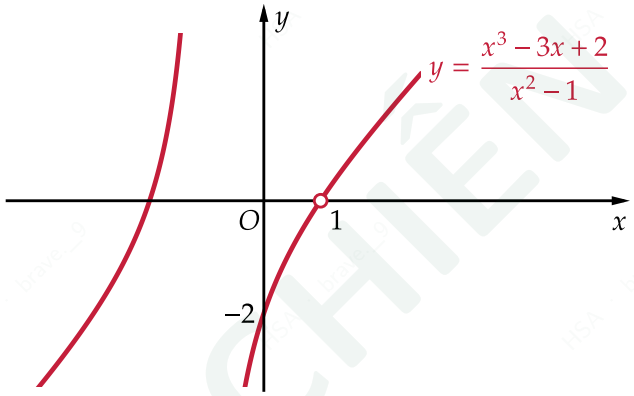
Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Lời giải

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$.

Thay $x=1$ vào tử và mẫu, ta thấy giới hạn có dạng $\dfrac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc L'Hôpital, ta lấy đạo hàm cả tử và mẫu:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^2-1)'}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2x}=\frac{0}{2}=0.$$



Ví dụ

Khử dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ và $0\cdot\infty$

Lời giải

a) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Giới hạn có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

b) Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.

Giới hạn có dạng $0\cdot(-\infty)$. Ta biến đổi về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ bằng cách nghịch đảo một biểu thức: $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

2.3 Hàm số liên tục và điểm gián đoạn

Tuy giới hạn của hàm số tại điểm x_0 không phụ thuộc vào giá trị $f(x_0)$, nhưng với những hàm đa thức, phân thức hữu tỉ, lượng giác thường gặp, giới hạn và giá trị của hàm số tại điểm xác định là bằng nhau. Các hàm số này được gọi là các *hàm số liên tục*.

2.3.1 Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số f được gọi là **liên tục** tại điểm x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm x_0.

Ví dụ

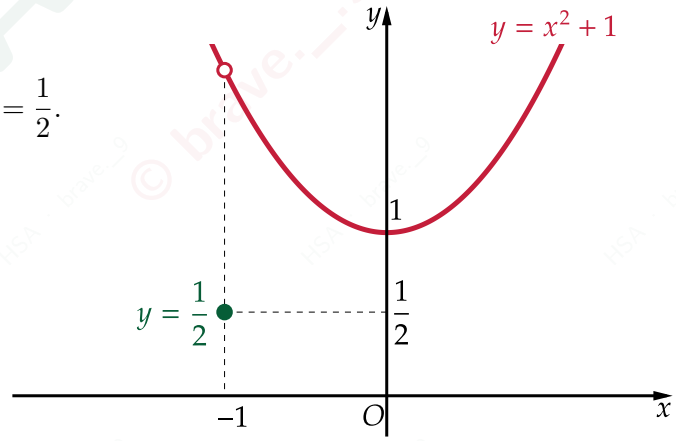
Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{với } x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{với } x = -1 \end{cases}$ tại điểm $x = -1$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x^2+1) = 2 \quad \text{và} \quad f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$ nên hàm số f gián đoạn tại điểm $x = -1$.



2.3.2 Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa

a) Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp J. Ta nói rằng **hàm số f liên tục trên J** nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.

b) Hàm số f xác định trên đoạn $[a;b]$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Ví dụ

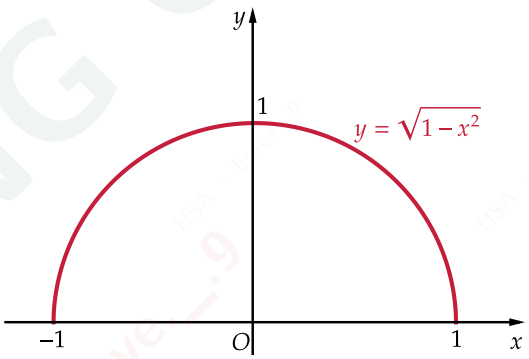
Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1;1]$. Vì với mọi $x_0 \in (-1;1)$ ta có

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0),$$

nên hàm số f liên tục trên khoảng $(-1;1)$. Ngoài ra:



$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 0 = f(-1) \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1).$$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Chú ý

Tính liên tục của hàm số trên các nửa khoảng $[a;b)$, $(a;b]$, $[a;+\infty)$ và $(-\infty;b]$ được định nghĩa tương tự như trên một đoạn.

Nhận xét

1) Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (mẫu số phải khác 0).

2) Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng (tức là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định).

BUI QUANG CHIẾN © bravee_9

Định lý

Các hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.

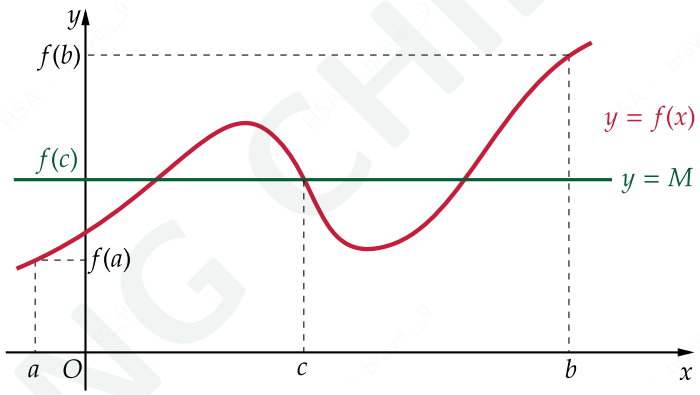
2.3.3 Tính chất của hàm số liên tục

Định lý: Định lí giá trị trung gian

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = M$.

Định lí giá trị trung gian khẳng định rằng một hàm số liên tục sẽ nhận mọi giá trị trung gian nằm giữa các giá trị của hàm số tại hai đầu mút $f(a)$ và $f(b)$. Lưu ý rằng giá trị M có thể đạt được một lần hoặc nhiều lần trên khoảng $(a;b)$.

Điều kiện hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ là bắt buộc; định lí nói chung không còn đúng nếu hàm số bị gián đoạn.

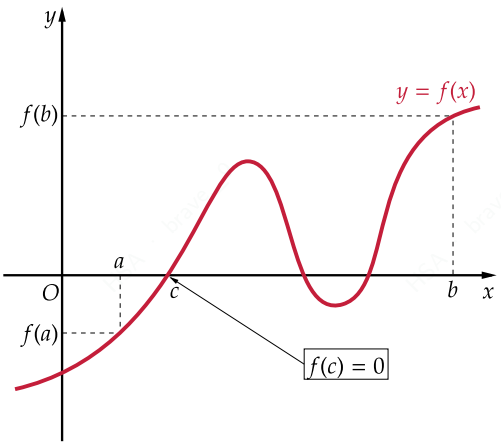


Hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả: Điều kiện $f(a)f(b) < 0$ chỉ ra rằng hai đầu mút của đồ thị nằm về hai phía đối diện nhau đối với trục hoành Ox.

Vì đồ thị là một đường cong liên tục, liền mạch nối từ phía này sang phía kia, nên nó bắt buộc phải cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$. Điểm này tương ứng với nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.



Ví dụ

Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$ b) $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$

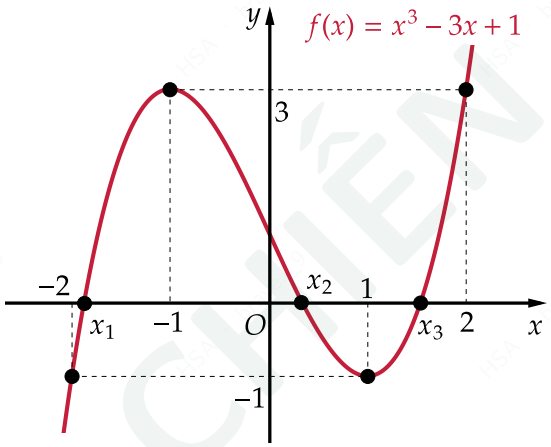
Lời giải

a) Dễ thấy hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-2) = -1$ và $f(-1) = 3 \implies f(-2)f(-1) < 0$. Tồn tại $x_1 \in (-2;-1)$ sao cho $f(x_1) = 0$.

$f(0) = 1$ và $f(1) = -1 \implies f(0)f(1) < 0$. Tồn tại $x_2 \in (0;1)$ sao cho $f(x_2) = 0$.

$f(1) = -1$ và $f(2) = 3 \implies f(1)f(2) < 0$. Tồn tại $x_3 \in (1;2)$ sao cho $f(x_3) = 0$.



Do ba khoảng $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ đôi một không giao nhau nên phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt. Mà phương trình bậc 3 chỉ có tối đa 3 nghiệm, nên phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt.

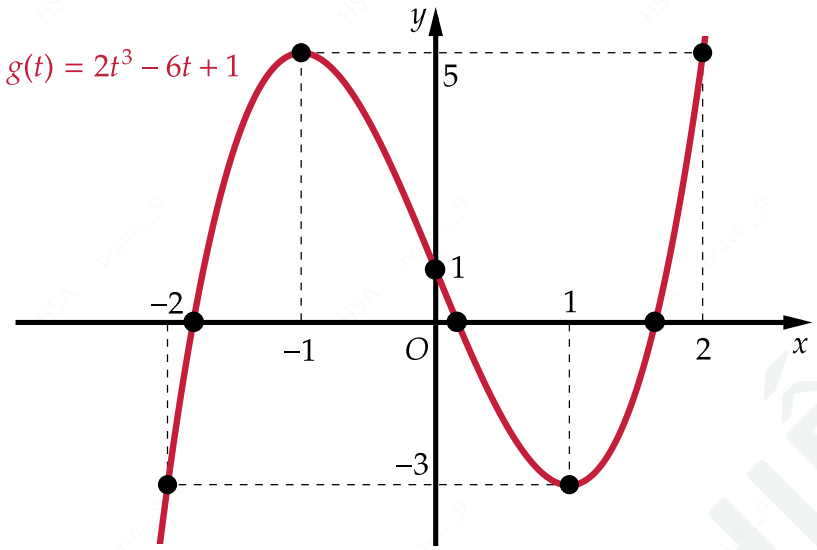
b) Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \iff x = 1 - t^3$. Phương trình trở thành:

$$2(1-t^3) + 6t = 3 \iff 2t^3 - 6t + 1 = 0.$$

Xét hàm số $g(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g(-2) = -3$; $g(-1) = 5$; $g(0) = 1$; $g(1) = -3$; $g(2) = 5$. Từ đó suy ra $g(-2)g(-1) < 0$; $g(0)g(1) < 0$; $g(1)g(2) < 0$.

Tồn tại 3 số t_1, t_2, t_3 lần lượt thuộc 3 khoảng không giao nhau là $(-2;-1)$, $(0;1)$ và $(1;2)$ sao cho $g(t_1) = g(t_2) = g(t_3) = 0$. Vì đây là phương trình bậc 3 nên $g(t) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



Ứng với mỗi giá trị t_1, t_2, t_3, ta tìm được duy nhất một giá trị x thoả mãn $x = 1 - t^3$ và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau. Vậy phương trình ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Chương 3

ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

3.1 Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là **đạo hàm** của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là

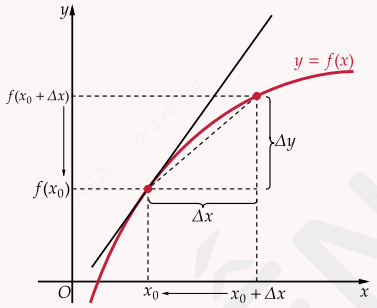
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

BÙI QUANG CHIẾN

Chú ý

Trong định nghĩa trên, nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



1) Số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là *số gia của biến số* tại điểm x_0; số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là *số gia của hàm số* ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

2) Số Δx không nhất thiết chỉ mang dấu dương.

3) Δx và Δy là những kí hiệu, không nên nhầm lẫn rằng: Δx là tích của Δ với x, Δy là tích của Δ với y.

Tính chất: Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Muốn tính đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta thực hiện hai bước sau:

- **Bước 1:** Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0.
- **Bước 2:** Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ví dụ

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2$, ta thực hiện quy tắc trên như sau:

Bước 1: Tính Δy

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = \Delta x(4 + \Delta x).$$

Bước 2: Tìm giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

Vậy $f'(2) = 4$.

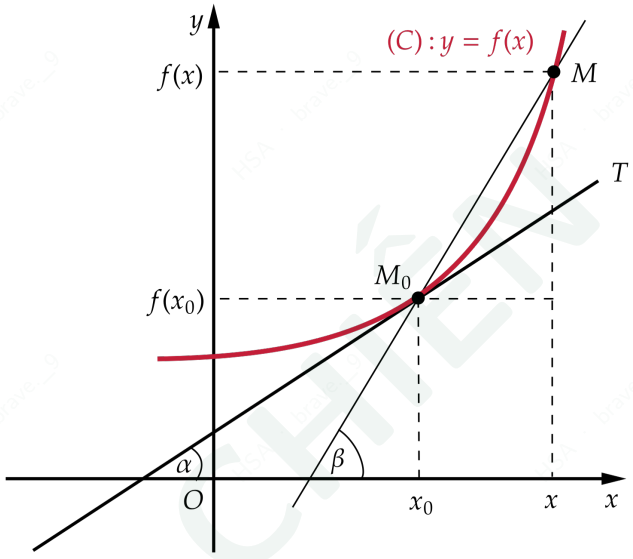
3.1.1 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, ta kí hiệu x_M là hoành độ của nó và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn

$$k_0 = \lim_{x_M \to x_0} k_M.$$

Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc k_0 là *vị trí giới hạn* của cát tuyến M_0M khi M di chuyển dọc theo (C) dần đến M_0.

Đường thẳng M_0T được gọi là **tiếp tuyến** của (C) tại điểm M_0, còn M_0 gọi là **tiếp điểm**.



Định lý: Ý nghĩa hình học

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ có phương trình là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ví dụ

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Lời giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại $x_0 = -1$.

Tương tự quy tắc 2 bước, ta tính được $f'(-1) = 3$.

Ngoài ra, ta có $f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 = -1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = 3(x + 1) - 1, \quad \text{hay} \quad y = 3x + 2.$$

3.1.2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét sự chuyển động của một chất điểm. Giả sử quãng đường s đi được của nó là một hàm số $s = s(t)$ của thời gian t ($s = s(t)$ còn gọi là phương trình chuyển động của chất điểm).

Tương tự như ví dụ mở đầu, khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì tỉ số

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

càng phản ánh chính xác độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0. Giới hạn hữu hạn này được gọi là

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

(nếu có) là *vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t_0.

Từ đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm như sau:

Định lý

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Ví dụ

Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (đơn vị: m, s). Tìm gia tốc tại thời điểm $t = 2$ s.

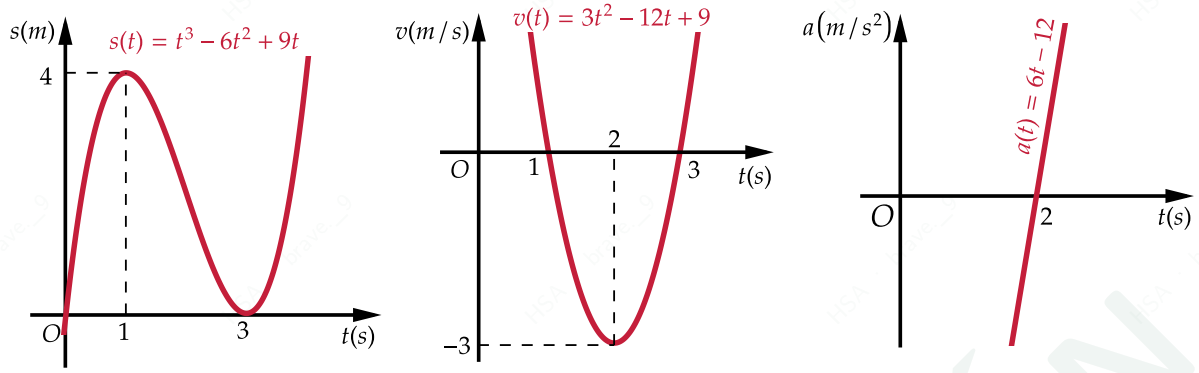
Lời giải

Vận tốc: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

Gia tốc: $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 12$.

Tại $t = 2$: $a(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0$ (m/s^2).

BUI QUANG CHIEN © bravee_9



Vậy gia tốc tại thời điểm $t = 2$ s bằng 0 m/s^2 (vật đang đổi chiều gia tốc).

3.2 Các công thức đạo hàm đáng nhớ

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp (với $u = u(x)$)
$(C)' = 0$ (với C là hằng số)	
$(x)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	
$\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

BÙI QUANG CHIẾN

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp (với $u = u(x)$)
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

3.3 Các quy tắc tính đạo hàm

Nói chung, việc tính đạo hàm bằng định nghĩa thường rất phức tạp. Bài này sẽ cung cấp cho chúng ta những quy tắc tính đạo hàm, nhờ đó việc tính đạo hàm của một hàm số phức tạp sẽ được quy về tính đạo hàm của những hàm số đơn giản hơn.

Để tiện cho việc diễn đạt, kể từ bài này, ta sẽ sử dụng kí hiệu J để chỉ tập con của $\mathbb{R}$ gồm một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng.

3.3.1 Đạo hàm của tổng hay hiệu hai hàm số

Định lý

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u(x)+v(x)$ và $y = u(x)-v(x)$ cũng có đạo hàm trên J, và

a) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$;

b) $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Nhận xét

Các công thức trên có thể viết gọn là

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{và} \quad (u - v)' = u' - v'$$

3.3.2 Đạo hàm của tích hai hàm số

Định lý

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u(x)v(x)$ cũng có đạo hàm trên J, và

$$[u(x)v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

Đặc biệt, nếu k là hằng số thì $[ku(x)]' = ku'(x)$.

Nhận xét

Các công thức trên có thể viết gọn là

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{và} \quad (ku)' = ku'.$$

3.3.3 Đạo hàm của thương hai hàm số

Sử dụng định nghĩa, ta cũng chứng minh được định lí sau

Định lý

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J và $v(x) \neq 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm trên J, và

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Nhận xét

Công thức trên có thể viết gọn là

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Hệ quả

a) Trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ta có

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

b) Nếu hàm số $v = v(x)$ có đạo hàm trên J và $v(x) \neq 0$ với mọi x thuộc J thì trên J ta có

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Nhận xét

Công thức thứ hai trong hệ quả trên có thể viết gọn là

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3.3.4 Đạo hàm của hàm số hợp

a) Khái niệm hàm số hợp

Ví dụ

Cho $f(u) = u^3$ và $u(x) = x^2 + 3x + 1$. Hàm số hợp $g(x) = f(u(x))$ là gì?

Lời giải

Nếu trong $f(u)$, ta thay thế biến số u bởi $u(x)$ thì được $f(u(x)) = (x^2 + 3x + 1)^3$. Đặt

$g(x) = f(u(x)) = (x^2 + 3x + 1)^3$. Ta gọi g là *hàm số hợp* của hàm số f qua hàm số trung gian u.

Một cách tổng quát, ta có khái niệm hàm số hợp như sau (ở đây ta chỉ xét các hàm số được cho bởi biểu thức).

Định nghĩa

Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Thay thế biến u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$, ta được biểu thức $f(u(x))$ với biến x. Khi đó, hàm số $y = g(x)$ với $g(x) = f[u(x)]$ được gọi là **hàm số hợp** của hai hàm số f và u; hàm số u gọi là **hàm số trung gian**.

Trong định nghĩa trên, tập xác định của hàm số hợp $y = g(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f(u(x))$ có nghĩa.

b) Cách tính đạo hàm của hàm số hợp

Định lý

a) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm tại điểm x_0, và

$$g'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

b) Nếu giả thiết trong phần a) được thoả mãn đối với mọi điểm x thuộc J thì hàm số hợp $y = g(x)$ có đạo hàm trên J, và

$$g'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x).$$

Ví dụ

Đối với hàm số $g(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$, tính đạo hàm bằng quy tắc hàm hợp.

Lời giải

Ta có $f'(u) = (u^3)' = 3u^2$. Do $u(x) = x^2 + 3x + 1$ nên

$$f'[u(x)] = 3(x^2 + 3x + 1)^2 \quad \text{và} \quad u'(x) = (x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3.$$

Vậy $g'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x) = 3(x^2 + 3x + 1)^2(2x + 3)$.

Tổng quát ta xét hàm số $y = (u(x))^n$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$). Có thể xem hàm số này là hàm số hợp của

hàm số $f(u) = u^n$ và hàm số trung gian $u = u(x)$. Do đó, nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì ta áp dụng định lí 4 để tính đạo hàm của hàm số hợp $y = (u(x))^n$ (còn viết là $y = u^n(x)$) như sau:

$$f(u) = u^n \Rightarrow f'(u) = n \cdot u^{n-1} \Rightarrow f'[u(x)] = n \cdot (u(x))^{n-1};$$
$$[u^n(x)]' = f'[u(x)] \cdot u'(x) = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x).$$

Vậy ta có

Hệ quả

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u^n(x)$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) có đạo hàm trên J, và

$$[u^n(x)]' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x).$$

Nhận xét

Công thức nêu trong hệ quả 1 được viết gọn là

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

3.4 Vi phân

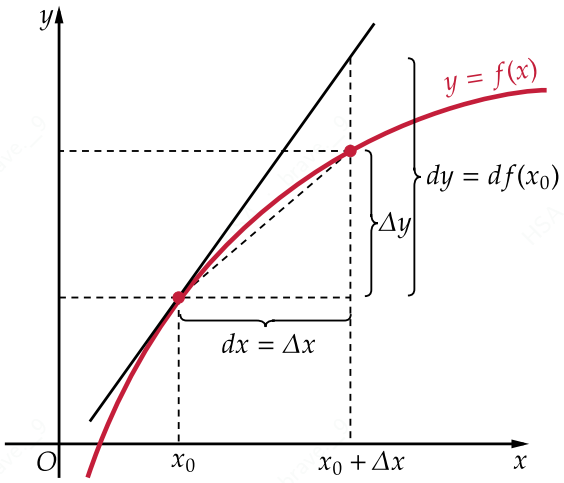
3.4.1 Vi phân của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đẳng thức trên cho thấy : Nếu $|\Delta x|$ khá nhỏ thì tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rất gần với $f'(x_0)$, do đó ta có thể coi rằng $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, hay

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$



Ta có khái niệm vi phân của hàm số tại một điểm như sau:

Định nghĩa

Tích $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) và được kí hiệu là $\mathrm{d}f(x_0)$, tức là

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ

Vi phân của hàm số $f(x)=\sin x$ tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Vi phân của hàm số $f(x)=\sin x$ tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ là

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\Delta x=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\Delta x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta x.$$

3.4.2 Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Từ (1) và định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm, ta thấy :

Khi $|\Delta x|$ khá nhỏ thì số gia của hàm số tại điểm x_0 ứng với số gia Δx xấp xỉ bằng vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx đó, tức là

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

Từ đó ta có

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2}$$

Công thức (2) cho phép ta tính xấp xỉ giá trị của hàm số f tại điểm $x_0+\Delta x$ khi việc tính các giá trị $f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là khá đơn giản.

Ví dụ

Tính giá trị của $\sin 30^\circ 30'$ (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

Lời giải

Do $30^\circ 30'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$ nên ta sẽ xét hàm số $f(x)=\sin x$ tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ với số gia $\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$.

Áp dụng công thức (2), ta được

$$f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{360}, \text{ hay}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0,5076.$$

Vậy $\sin 30^\circ 30' = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \approx 0,5076.$

Nhận xét

Nếu dùng máy tính bỏ túi, ta tính được $\sin 30^\circ 30' \approx 0,5075$. So sánh với kết quả trên, ta thấy việc áp dụng công thức (2) cho ta kết quả khá chính xác.

3.4.3 Vi phân của hàm số

Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$, kí hiệu là

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x. \tag{3}$$

Đặc biệt với hàm số $y=x$, ta có $\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$. Do đó ta có thể viết (3) dưới dạng

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x \quad \text{hay} \quad \mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x.$$

3.5 Đạo hàm cấp hai và ý nghĩa cơ học

3.5.1 Đạo hàm cấp hai

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+1$. Hàm số này có đạo hàm $f'(x)=3x^2-2x$. Hiển nhiên, $y'=f'(x)$ cũng là một hàm số có đạo hàm và đạo hàm của nó là

$$[f'(x)]'=(3x^2-2x)'=6x-2.$$

Ta gọi đó là *đạo hàm cấp hai* của hàm số ban đầu. Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau đây

Định nghĩa

Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là **đạo hàm cấp hai** của hàm f và kí hiệu là f'', tức là

$$f'' = (f')'.$$

f' còn gọi là *đạo hàm cấp một* của hàm số f. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là y''.

3.5.2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Nếu một chất điểm chuyển động có phương trình $s = s(t)$ thì vận tốc tại thời điểm t_0 của chất điểm đó là $v(t_0) = s'(t_0)$.

Bây giờ nếu t_0 nhận một số gia Δt thì $v(t_0)$ nhận một số gia là $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$. Khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì Δv càng phản ánh chính xác sự biến thiên vận tốc của chất điểm tại thời điểm t_0.

Trong cơ học, giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ khi Δt dần đến 0 được gọi là *gia tốc tức thời tại thời điểm* t_0 (hay gia tốc tại thời điểm t_0) của chất điểm đó, và được kí hiệu là $a(t_0)$. Vậy

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Do đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai như sau:

Định lý

Gia tốc (tức thời) $a(t_0)$ tại thời điểm t_0 của một chất điểm chuyển động cho bởi phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm cấp hai của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là

$$a(t_0) = s''(t_0).$$

Gia tốc tại thời điểm t_0 đặc trưng cho sự biến đổi vận tốc của chuyển động tại thời điểm đó.

Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(Phương trình này gọi là phương trình *dao động điều hoà*). Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$v(t) = S'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t là

$$a(t) = S''(t) = v'(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

3.5.3 Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp một f' và đạo hàm cấp hai f'' của hàm số f còn được kí hiệu lần lượt là $f^{(1)}$ và $f^{(2)}$. Nếu $f^{(2)}$ là một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó gọi là đạo hàm cấp ba của hàm số f, kí hiệu là $f^{(3)}$. Tương tự, đạo hàm cấp n của một hàm số được định nghĩa bằng quy nạp như sau:

Định nghĩa

Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n-1$ (với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là **đạo hàm cấp n** của hàm số f và kí hiệu là $f^{(n)}$. Nói cách khác,

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là $y^{(n)}$.

BÙI QUANG CHIẾN © brave_9

Chương

4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

4.1 Giá trị lượng giác của góc lượng giác

4.1.1 Góc lượng giác

Định nghĩa

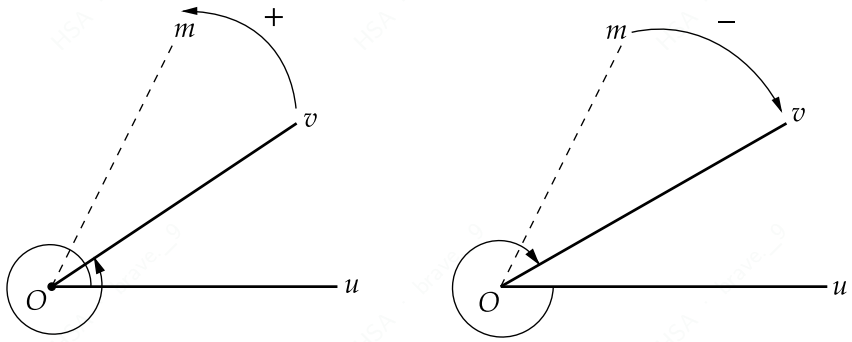
Cho hai tia Ou và Ov. Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí Ou và dừng ở vị trí Ov thì ta nói tia Om quét một góc lượng giác có tia đầu Ou, tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov).

Chú ý: Quy ước

Chiều quay ngược với chiều kim đồng hồ là chiều dương, cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

- Khi tia Om quay một góc a°, ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng a°. Kí hiệu $(Ou, Ov) = a^\circ$.

BÙI QUANG CHIẾN



- Có vô số góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov. Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối sai khác nhau một bội nguyên của 360°, nghĩa là $(Ou, Ov) = a^\circ + k360^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$, với a° là số đo của một góc lượng giác có tia đầu Ou và tia cuối Ov.

Định lý

Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k360^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

4.1.2 Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

Định nghĩa

Trên đường tròn, lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó có số đo 1 radian, 1 radian còn viết tắt là 1 rad.

- **Mối liên hệ giữa độ và radian**

$$a^\circ = a \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad \alpha \text{ rad} = \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Chú ý

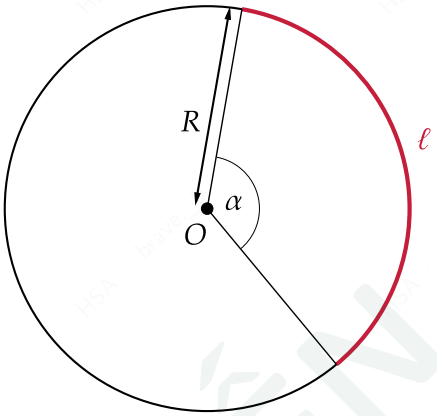
Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường **không** viết chữ rad sau số đo.

Bảng chuyển đổi các góc đặc biệt

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Định lý

Một cung của đường tròn bán kính R và có số



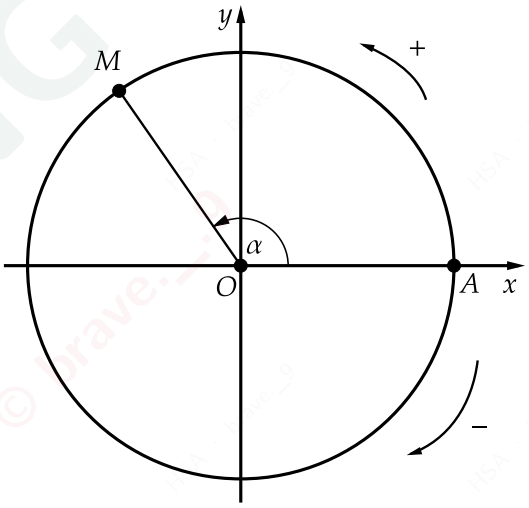
4.1.3 Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Đường tròn lượng giác

$\ell = R\alpha$

Định nghĩa

- **Đường tròn lượng giác** là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- **Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn** góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác đó sao cho $(OA, OM) = \alpha$.

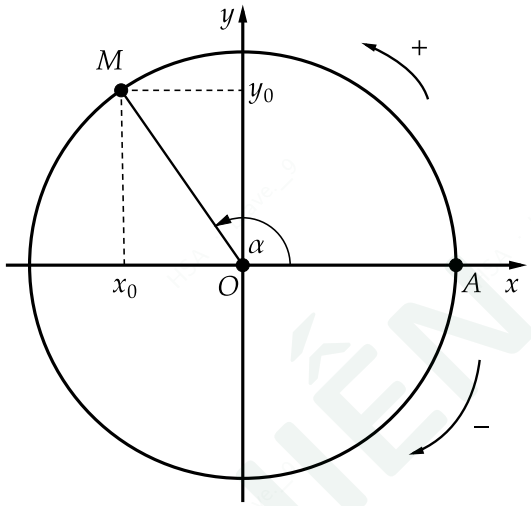


Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Định nghĩa

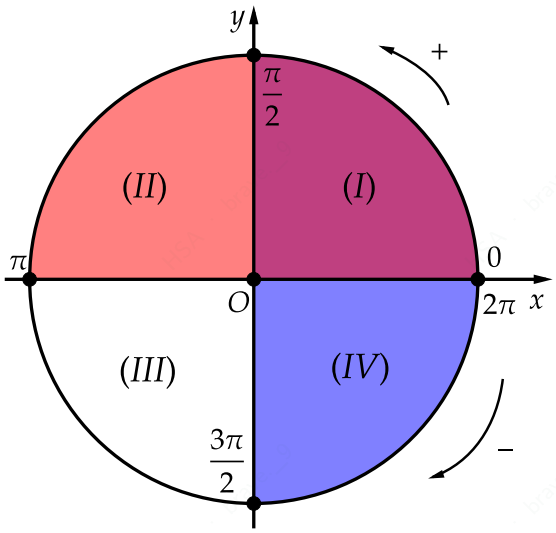
Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α. Khi đó

- Hoành độ x_0 của M được gọi là **côsin** của α, kí hiệu là $\cos\alpha$.
- Tung độ y_0 của M được gọi là **sin** của α, kí hiệu là $\sin\alpha$.
- Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ được gọi là **tang** của α, kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ được gọi là **côtang** của α, kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



- Với mọi giá trị của α, ta có
  - $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.
  - $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
  - $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \ (k \in \mathbb{Z})$.
  - $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- Dấu của các giá trị lượng giác

	(I)	(II)	(III)	(IV)
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
cos	$+$	$-$	$-$	$+$
tan	$+$	$-$	$+$	$-$
cot	$+$	$-$	$+$	$-$



Mẹo nhớ: Hình Pacman khá giống với giá trị dương của sin và cos. Từ đây ta hoàn toàn có thể suy ra được dấu của các giá trị lượng giác còn lại.

Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$	$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Hai cung đối nhau	Hai cung bù nhau
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
Hai cung hơn kém nhau π	**Hai cung phụ nhau**
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Chú ý

Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k, ta có

$$\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha. \qquad \cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha.$$
$$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha. \qquad \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha.$$

4.2 Công thức lượng giác

4.2.1 Công thức cộng

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$	$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

4.2.2 Công thức nhân đôi

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

4.2.3 Công thức hạ bậc

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

4.2.4 Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

BÙI QUANG CHIẾN

4.2.5 Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

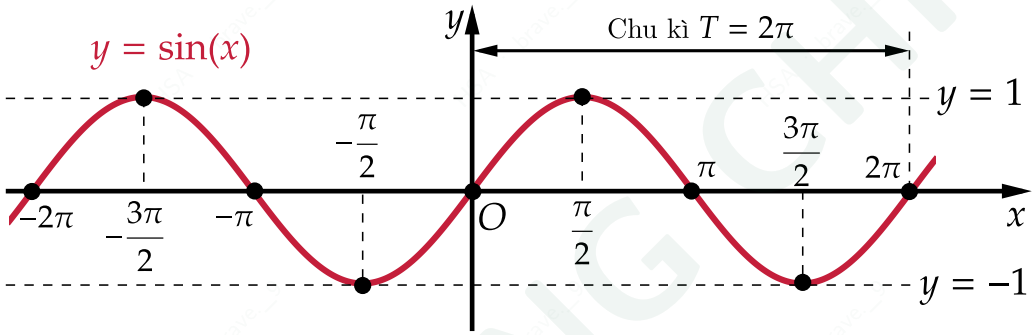
4.3 Hàm số lượng giác

4.3.1 Sự biến thiên của hàm số lượng giác

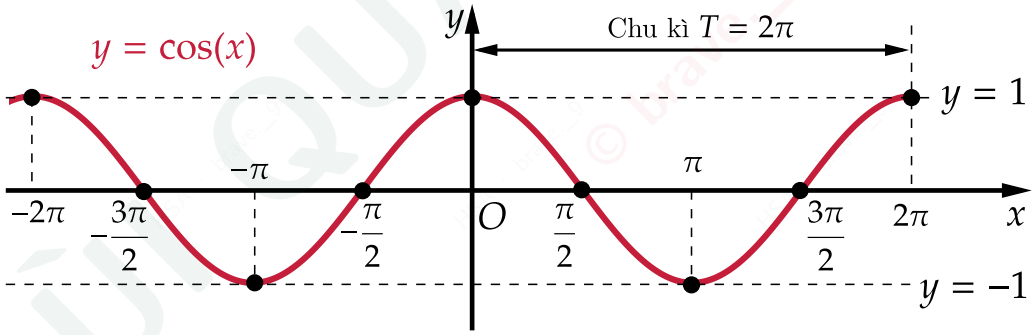
	Hàm số $y=\sin x$	Hàm số $y=\cos x$
Tập xác định	$\mathscr{D}=\mathbb{R}$	$\mathscr{D}=\mathbb{R}$
Tập giá trị	$T=[-1;1]$	$T=[-1;1]$
Tính chẵn lẻ	Là hàm số lẻ	Là hàm số chẵn
Tính tuần hoàn	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$. Hàm số $y=\sin(ax+b)$ có chu kì tuần hoàn $T=\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$.	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$. Hàm số $y=\cos(ax+b)$ có chu kì tuần hoàn $T=\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$.
Sự biến thiên	Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.	Hàm số đồng biến trên $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$. Hàm số nghịch biến trên $(k2\pi;\pi+k2\pi)$.
	Hàm số $y=\tan x$	**Hàm số $y=\cot x$**
Tập xác định	$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\middle\vert k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\vert k\in\mathbb{Z}\}$
Tập giá trị	$T=\mathbb{R}$	$T=\mathbb{R}$

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
Tính chẵn lẻ	Là hàm số lẻ	Là hàm số lẻ
Tính tuần hoàn	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$. Hàm số $y = \tan(ax + b)$ có chu kì tuần hoàn $T = \dfrac{\pi}{\lvert a \rvert}$.	Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$. Hàm số $y = \cot(ax + b)$ có chu kì tuần hoàn $T = \dfrac{\pi}{\lvert a \rvert}$.
Sự biến thiên	Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.	Hàm số nghịch biến trên $(k\pi; \pi + k\pi)$.

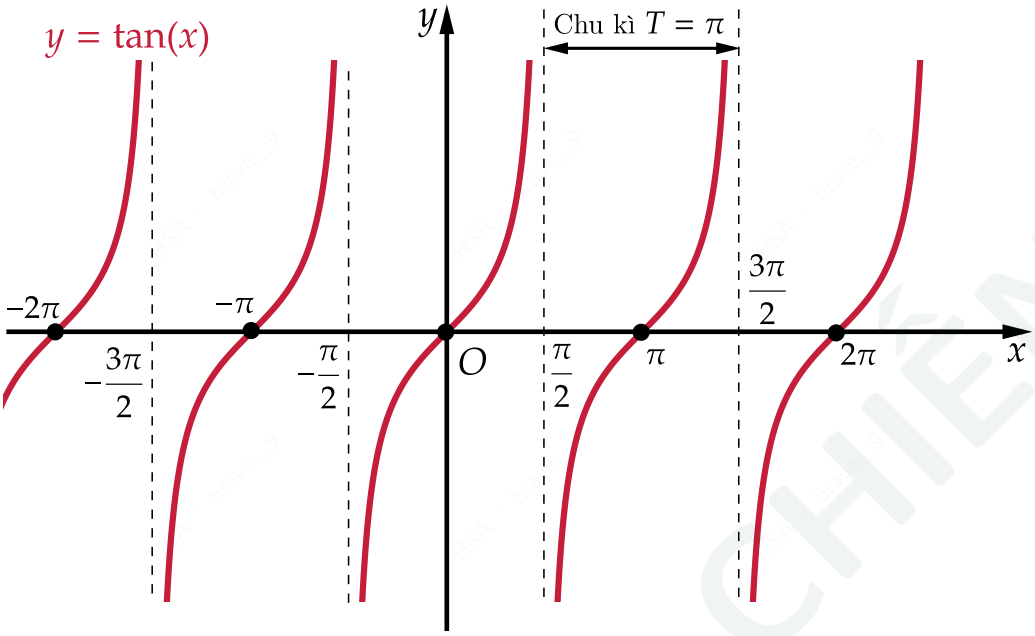
4.3.2 Đồ thị hàm số $y = \sin x$



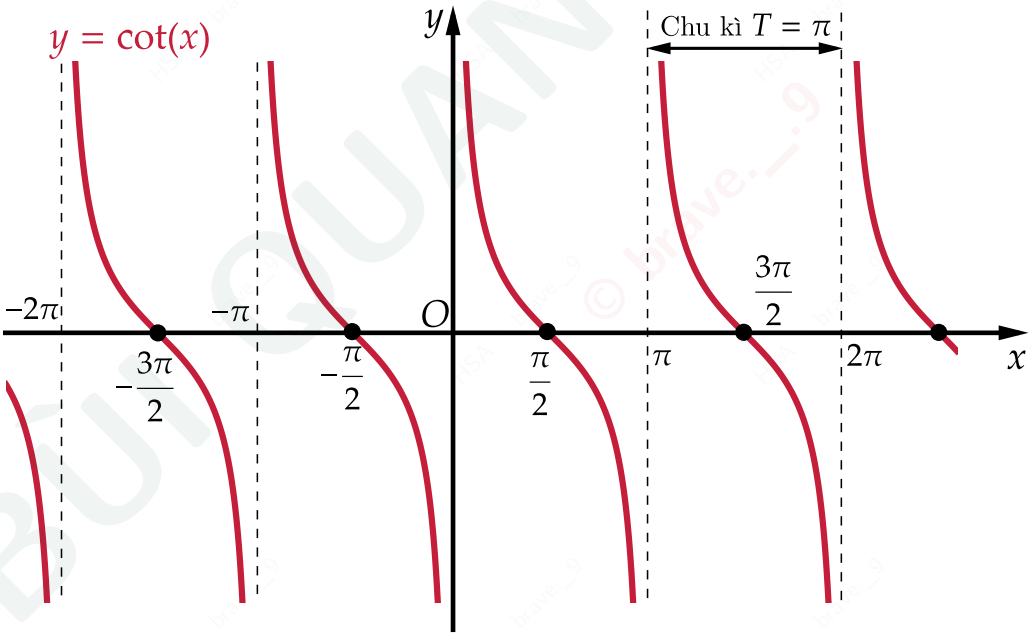
4.3.3 Đồ thị hàm số $y = \cos x$



4.3.4 Đồ thị hàm số $y = \tan x$



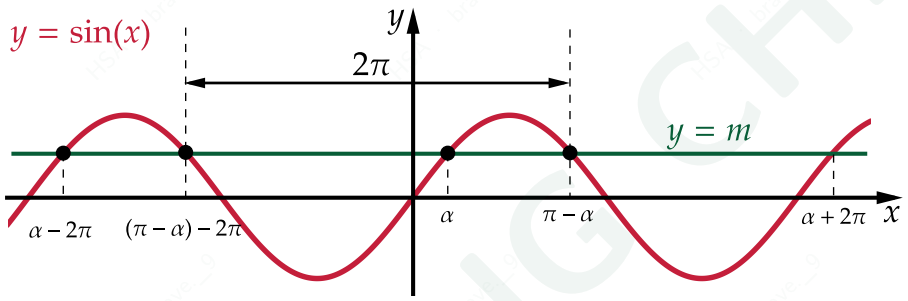
4.3.5 Đồ thị hàm số $y = \cot x$



4.4 Phương trình lượng giác cơ bản

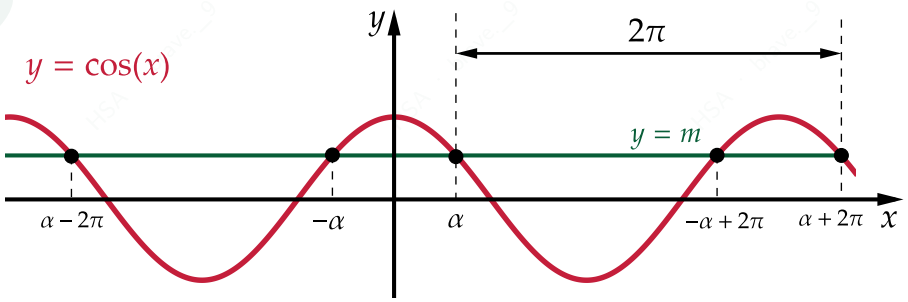
4.4.1 Phương trình $\sin x = m$

- **Điều kiện có nghiệm** $-1 \le m \le 1$.
- **Điều kiện xác định** $x \in \mathbb{R}$.
- **Công thức nghiệm**
  - $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$
  - $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$
- **Một số trường hợp đặc biệt**
  - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.
  - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.
  - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.



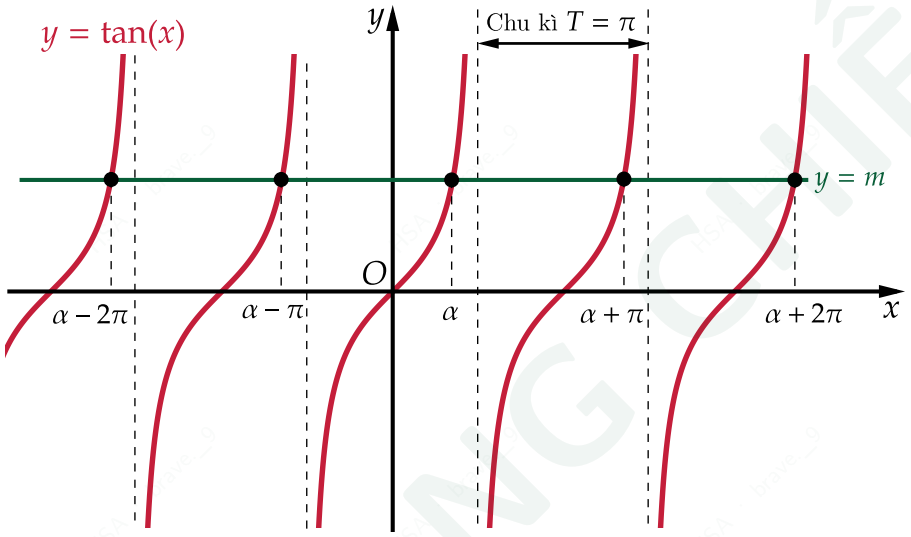
4.4.2 Phương trình $\cos x = m$

- **Điều kiện có nghiệm** $-1 \le m \le 1$.
- **Điều kiện xác định** $x \in \mathbb{R}$.
- **Công thức nghiệm**
  - $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$
  - $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$
- **Một số trường hợp đặc biệt**
  - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
  - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.
  - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$.



4.4.3 Phương trình $\tan x = m$

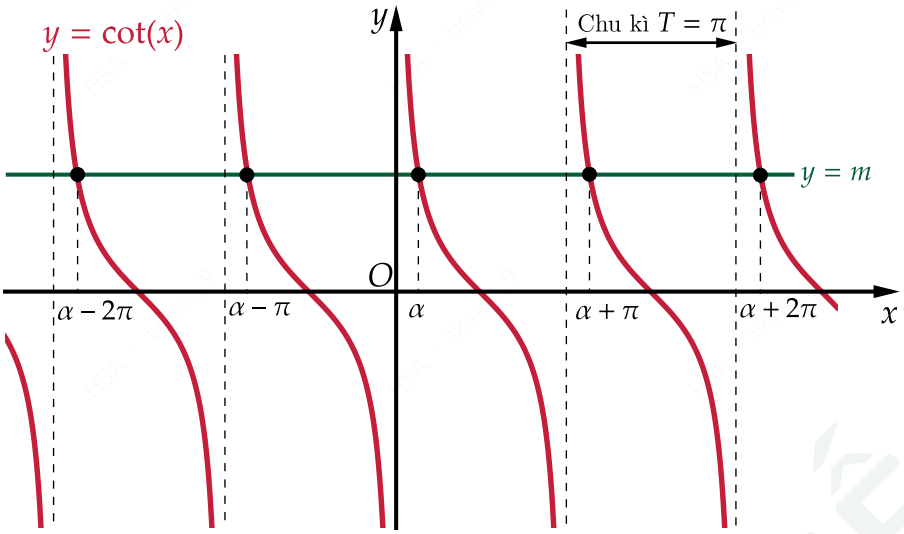
- **Điều kiện có nghiệm** $m \in \mathbb{R}$.
- **Điều kiện xác định** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
- **Công thức nghiệm**
  - $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$.
  - $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ$.
- **Một số trường hợp đặc biệt**
  - $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.
  - $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
  - $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.



4.4.4 Phương trình $\cot x = m$

- **Điều kiện có nghiệm** $m \in \mathbb{R}$.
- **Điều kiện xác định** $x \neq k\pi$.
- **Công thức nghiệm**
  - $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$.
  - $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ$.
- **Một số trường hợp đặc biệt**
  - $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
  - $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
  - $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

BÙI QUANG CHIẾN



BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Chương 5

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

5.1 Lũy thừa với số mũ thực

5.1.1 Định nghĩa

Lũy thừa với số mũ nguyên

Định nghĩa: Định nghĩa 6.1

Cho n là số nguyên dương.

- Với a tùy ý, ta có $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}}$, với a là cơ số và n là số mũ.
- Với a là số thực khác 0, ta có $\boxed{a^0 = 1}$ và $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.

Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Định nghĩa: Định nghĩa 6.2

Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là **căn bậc** n của số a nếu $\boxed{b^n = a}$.

BUI QUANG CHIẾN

Chú ý

- Nếu n là số lẻ thì mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a.
- Nếu n là số chẵn thì mỗi số thực **dương** a có hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

Định nghĩa: Định nghĩa 6.3

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi công thức $\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$.

Lũy thừa với số mũ thực

Định nghĩa: Định nghĩa 6.4

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là **lũy thừa của a với số mũ α**, kí hiệu a^α, nghĩa là $\boxed{a^\alpha = \lim a^{r_n}}$.

5.1.2 Tính chất

Tính chất của lũy thừa

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$(ab)^m = a^m \cdot b^m$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

$0 < a < b \overset{n>0}{\iff} a^n < b^n$	$0 < a < b \overset{n<0}{\iff} a^n > b^n$
$a^m > a^n \overset{a>1}{\iff} m > n$	$a^m > a^n \overset{0<a<1}{\iff} m < n$
$\begin{cases} a > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow a^m > 1$	$\begin{cases} a > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow a^m < 1$
$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow a^m < 1$	$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow a^m > 1$

BUI QUANG CHIEN

Tính chất của căn bậc n

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a, & \text{khi } n \text{ lẻ}\\ \lvert a\rvert, & \text{khi } n \text{ chẵn}\end{cases}$		$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$
$\begin{cases}n \text{ tự nhiên lẻ}\\ a<b\end{cases}\Rightarrow\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$		$\begin{cases}n \text{ tự nhiên chẵn}\\ 0\le a<b\end{cases}\Rightarrow\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

5.2 Logarit

5.2.1 Khái niệm logarit

Định nghĩa: Định nghĩa 6.5

Cho $a,b>0$ và $a\neq 1$. Số thực α để $a^\alpha=b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.
Nghĩa là $\boxed{\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^\alpha=b}$.

BÙI QUANG CHIẾN
© bravee_9

5.2.2 Các quy tắc tính logarit

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$a^{\log_a b} = b$	$\log_a(a^\alpha) = \alpha$
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$		$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	
$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$		$\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$	
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$		$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	
$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$		$\log_a b \cdot \log_b a = 1$	
$\log_a b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{array}\right.$		$\log_a b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 < b \\ 0 < b < 1 < a \end{array}\right.$	
$\log_a b > \log_a c \overset{a>1}{\Longleftrightarrow} b > c > 0$		$\log_a b > \log_a c \overset{0<a<1}{\Longleftrightarrow} 0 < b < c$	

5.2.3 Logarit thập phân và logarit tự nhiên

Logarit thập phân

- Logarit cơ số 10 của một số dương a gọi là logarit thập phân của a, kí hiệu là $\log a$ hoặc $\lg a$. Nghĩa là $\boxed{\log a = \log_{10} a}$.

Logarit tự nhiên

- Logarit cơ số e của số dương a gọi là logarit tự nhiên của a, kí hiệu là $\ln a$. Nghĩa là $\boxed{\ln a = \log_{\mathrm{e}} a}$.

  Trong đó $\mathrm{e} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}7183$.

5.3 Hàm số mũ và hàm số logarit

5.3.1 Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

Định lý

Hàm số mũ và hàm số logarit có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u = u(x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Hệ quả

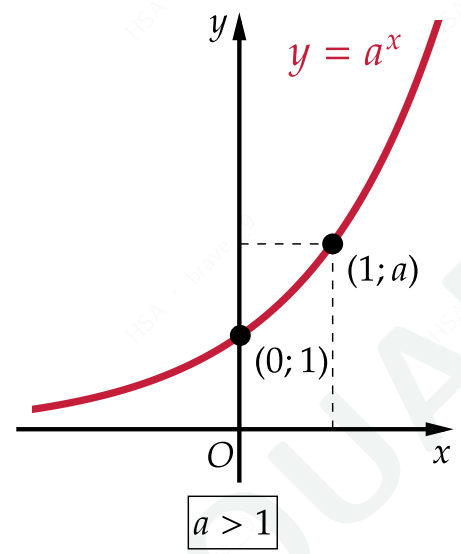
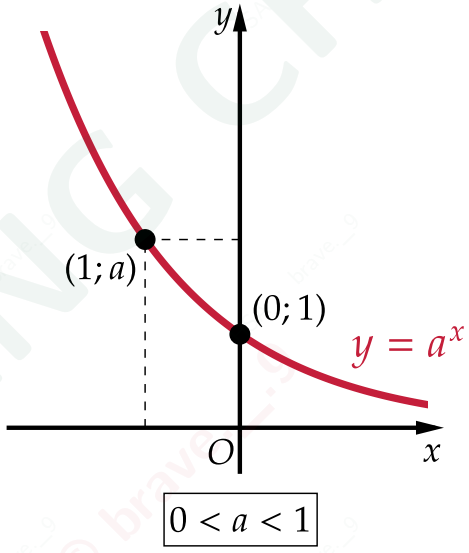
Đạo hàm của hàm logarit chứa trị tuyệt đối:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ (với } x \neq 0); \qquad (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \text{ (với } u(x) \neq 0).$$

BÙI QUANG CHIẾN © brave_9

5.3.2 Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$

- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Đạo hàm: $y' = a^x \ln a$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

$a > 1$	$0 < a < 1$
Đồng biến trên $\mathbb{R}$	Nghịch biến trên $\mathbb{R}$
	
$a > 1$	$0 < a < 1$

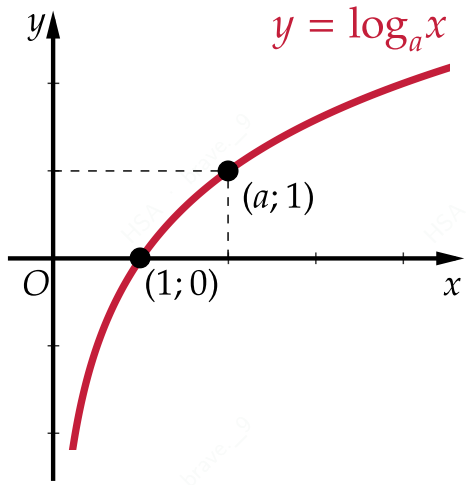
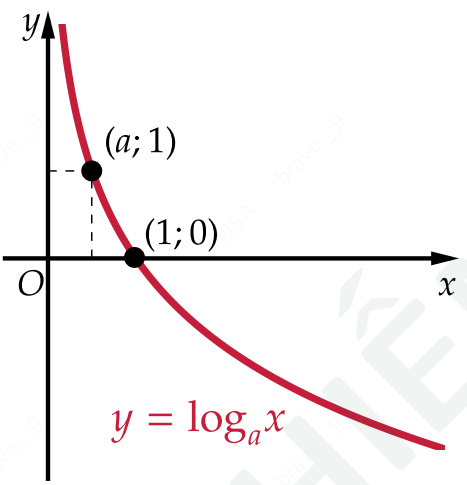
5.3.3 Khảo sát hàm số logarit $y = \log_a x$

– Tập xác định: $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

– **Tập giá trị:** $T = \mathbb{R}$.

– Đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Hàm số liên tục trên $\mathscr{D}$.

– Sự biến thiên:

$a > 1$	$0 < a < 1$
Đồng biến trên $(0; +\infty)$	Nghịch biến trên $(0; +\infty)$
	
$a > 1$	$0 < a < 1$

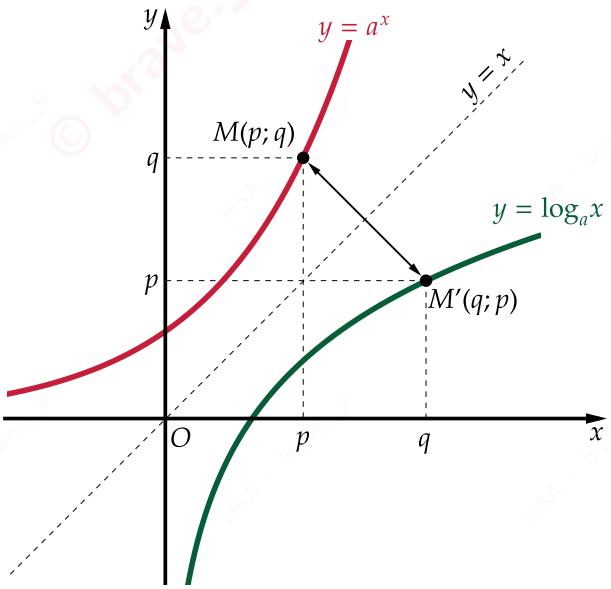
– Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ (nếu $a > 1$) và $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ (nếu $0 < a < 1$). Đồ thị nhận trục tung ($x = 0$) làm tiệm cận đứng.

– Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$ và nằm hoàn toàn ở bên phải trục tung.

Nhận xét

– Về bản chất, phương trình $y = \log_a x$ hoàn toàn tương đương với $x = a^y$. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ chính là tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ và ngược lại.

– Nếu gọi (G_1) là đồ thị của hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ thì (G_1) và (G_2) **đối xứng với nhau** qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (đường thẳng $y = x$).



Thật vậy, xét điểm $M(p; q)$ bất kì, điểm đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$ là $M'(q; p)$, ta có:

$$M(p; q) \in (G_1) \Leftrightarrow q = a^p \Leftrightarrow p = \log_a q \Leftrightarrow M'(q; p) \in (G_2).$$

5.4 Phương trình, bất phương trình mũ và logarit

5.4.1 Phương trình và bất phương trình mũ

Phương trình mũ

- **Phương trình mũ cơ bản:** $\boxed{a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b}$.
- **Phương pháp đưa về cùng cơ số:** $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$.

Bất phương trình mũ

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$	$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Chú ý

- Phương pháp giải bất phương trình mũ tương tự phương pháp giải phương trình mũ.
- Bất phương trình $a^x > 0$ có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

5.4.2 Phương trình và bất phương trình logarit

Phương trình logarit

- **Phương trình logarit cơ bản:** $\boxed{\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}}$.

– **Phương pháp đưa về cùng cơ số:** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Bất phương trình logarit

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b$	$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

Chú ý

– Khi giải phương trình và bất phương trình logarit **phải tìm điều kiện xác định**.

– Phương pháp giải bất phương trình logarit tương tự phương pháp giải phương trình logarit.

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

Phần II

KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Chương

6 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

6.1 Định nghĩa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và f là hàm số xác định trên K.

Định nghĩa: Tính đơn điệu của hàm số

Hàm số f được gọi là *đồng biến* trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

Hàm số f được gọi là *nghịch biến* trên K nếu

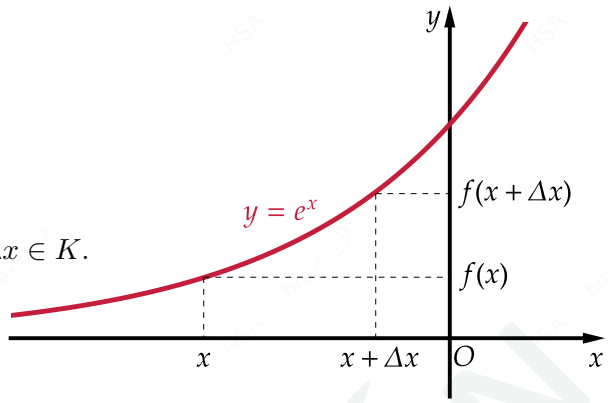
$$\forall x_1, x_2 \in K, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9

Nói một cách khác, nếu hàm số f xác định trên K thì

Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc K, ta có

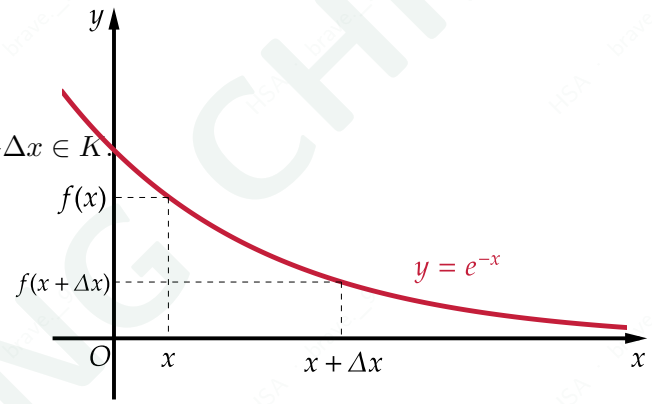
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0 \text{ với mọi } \Delta x\neq 0 \text{ mà } x+\Delta x\in K.$$



Đồ thị hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc K, ta có

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0 \text{ với mọi } \Delta x\neq 0 \text{ mà } x+\Delta x\in K.$$



Đồ thị hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Từ định nghĩa, ta có mối liên hệ giữa sự biến thiên của hàm số và dấu của đạo hàm như sau:

Định lý: Điều kiện cần

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu f đồng biến trên K thì $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in K$.
- Nếu f nghịch biến trên K thì $f'(x)\leq 0$ với mọi $x\in K$.

Ngược lại, ta có định lí quan trọng làm điều kiện đủ để xét tính đơn điệu:

Định lý: Điều kiện đủ

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số f không đổi trên K.

BUI QUANG CHIEN © bravee_9

Mở rộng của Định lý 6.1 Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Định lý 6.1 cho ta một điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng.

Khoảng K trong Định lý 6.1 có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn:

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

Người ta thường diễn đạt khẳng định này qua bảng biến thiên như sau:

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	↗	$f(b)$

Chú ý

Không dùng ký hiệu hợp ($\cup$) để nối các khoảng khi kết luận về tính đơn điệu. Khái niệm này chỉ được xét trên từng khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn riêng biệt.

Ví dụ

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$, nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$. Chứng minh rằng kết luận hàm số nghịch biến trên tập $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ là sai.

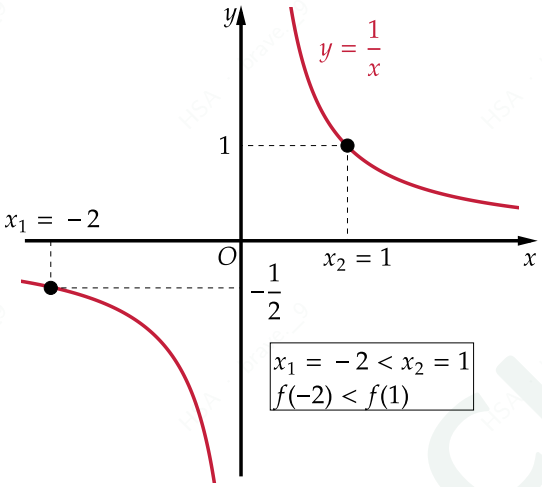
Lời giải

Thật vậy, nếu hàm số nghịch biến trên tập K, thì với mọi $x_1, x_2 \in K$, ta phải có:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Tuy nhiên, chọn $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$ cùng thuộc tập $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, ta có $x_1 < x_2$ nhưng:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \quad \text{và} \quad f(1) = 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$



Đồ thị minh họa cho thấy khi x tăng từ -2 sang 1, giá trị hàm số thực chất đã tăng lên. Điều này vi phạm nghiêm trọng định nghĩa hàm nghịch biến.

6.1.1 Kĩ năng sử dụng máy tính cầm tay CASIO

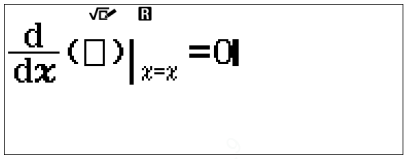
Sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\Big|_{x=x_0}$ để giải phương trình $f'(x) = 0$, từ đó dự đoán hoành độ các điểm cực trị và xét chiều biến thiên của hàm số.

Phương pháp 1: Tìm nghiệm của đạo hàm bằng lệnh SOLVE

1. Phím tắt

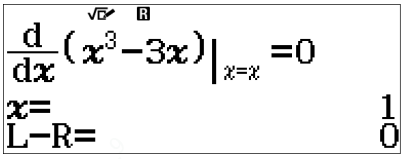
SHIFT ∫ ▶ x ▶ ALPHA CALC 0

2. Màn hình nhập liệu



Nhập biểu thức đạo hàm của hàm số $f(x)$ cần tìm nghiệm vào máy.

3. Kiểm tra kết quả



Sử dụng lệnh **SOLVE** và nhập giá trị x khởi tạo. Máy tính sẽ trả về hoành độ điểm cực trị gần nhất với x khởi tạo đó.

Chú ý: Hạn chế của phương pháp SHIFT SOLVE

Phương pháp này yêu cầu thử nhiều giá trị x khởi tạo khác nhau để tránh bỏ sót nghiệm. Đồng thời, không thể kết luận trực tiếp nghiệm vừa tìm được là điểm cực đại hay điểm cực tiểu.

Phương pháp 2: Xét dấu đạo hàm bằng Bảng giá trị (TABLE)

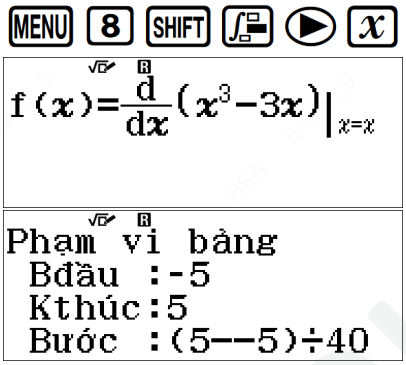
Thiết lập các thông số *Bắt đầu* (Start), *Kết thúc* (End) và *Bước nhảy* (Step) phù hợp với tập xác định cần khảo sát.

Chú ý: Thiết lập máy tính

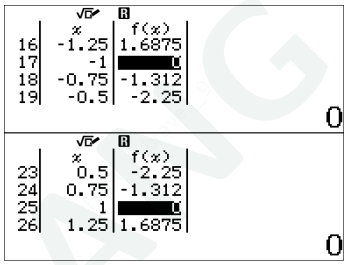
Nên tắt hiển thị hàm $g(x)$ để máy tính có thể tính toán được nhiều giá trị x hơn, giúp thu hẹp khoảng cách xấp xỉ, phản ánh chính xác hơn sự biến thiên.



1. Nhập đạo hàm



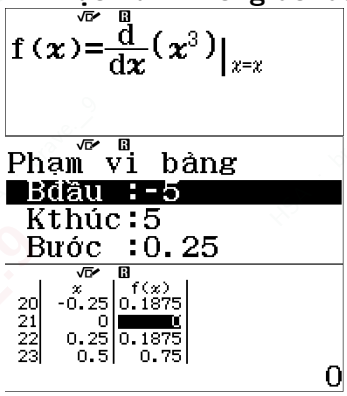
TH1: Đạo hàm đổi dấu



Giá trị đạo hàm đổi dấu.

$\Rightarrow$ **Dự đoán** hàm số có thể đổi chiều biến thiên tại lân cận.

TH2: Đạo hàm không đổi dấu



Đạo hàm luôn giữ dấu $(+)$ hoặc $(-)$.

$\Rightarrow$ **Dự đoán** hàm số đơn điệu trên khoảng khảo sát.

Chú ý: Cảnh báo nguy biện logic khi dùng TABLE

Việc dùng Bảng giá trị (TABLE) chỉ xét trên các điểm rời rạc. Nếu bước nhảy (Step) quá lớn, máy tính có thể bỏ qua các điểm nghiệm của đạo hàm nằm giữa hai bước tính. Do đó, đây chỉ là công cụ **dự đoán trắc nghiệm**, không thể thay thế chứng minh bằng toán học tự luận định lí.

6.2 Xét tính đơn điệu qua bảng biến thiên và đồ thị

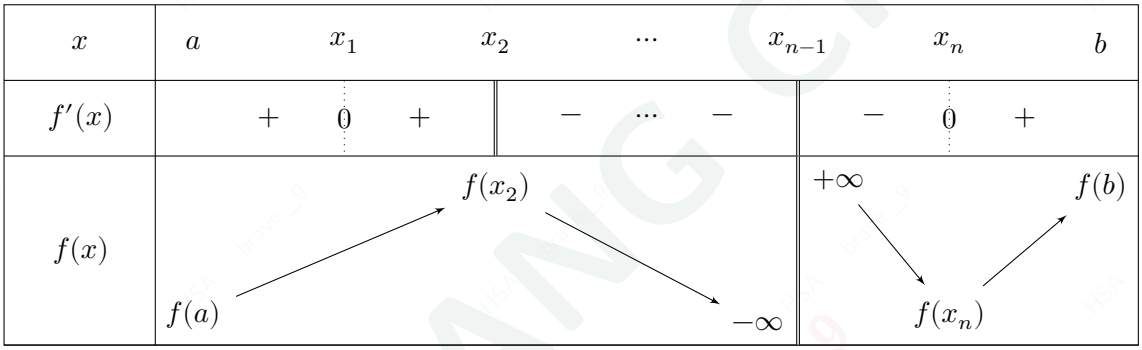
6.2.1 Dựa vào bảng biến thiên

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $D \subset (a;b)$. Các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a;b)$ là các điểm tại đó đạo hàm $f'(x) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định.

Phương pháp: Quan sát dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên từng khoảng con liên tục để kết luận về tính đơn điệu theo đúng định lí:

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_i; x_{i+1})$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_i; x_{i+1})$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Xét hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên tổng quát như sau:



Dựa vào bảng biến thiên tổng quát, ta phân tích:

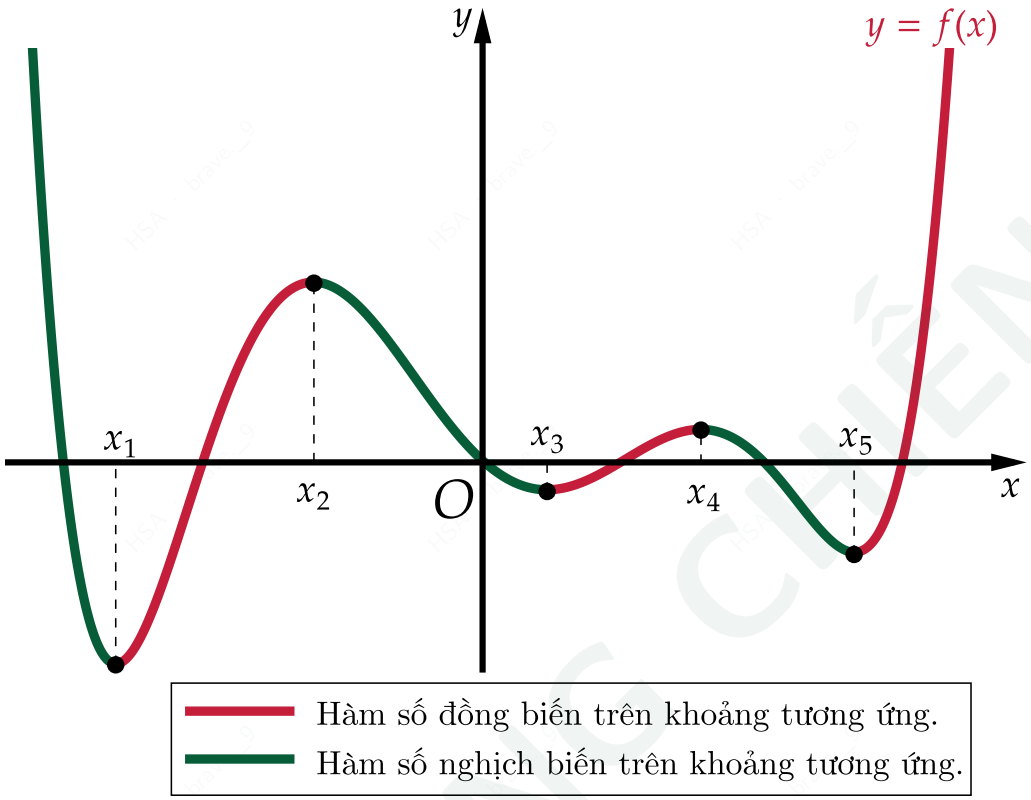
- Trên các khoảng $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$ và $(x_n;b)$ hàm số $f(x)$ đồng biến do $f'(x) \geq 0$. Đặc biệt, dù $f'(x_1) = 0$ nhưng đạo hàm không đổi dấu nên theo hệ quả mở rộng, hàm số đồng biến trên hẳn khoảng $(a;x_2)$.
- Trên các khoảng $(x_2;x_{n-1})$ và $(x_{n-1};x_n)$ hàm số $f(x)$ nghịch biến do $f'(x) < 0$.
- Tại x_{n-1}, cả hàm số và đạo hàm đều không xác định (kí hiệu hai gạch song song kéo dài). Tập xác định bị chia cắt. Tuyệt đối phải kết luận hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(x_2;x_{n-1})$ và $(x_{n-1};x_n)$ riêng biệt.

6.2.2 Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$

Bản chất của định nghĩa đơn điệu biểu diễn trên hệ toạ độ chính là sự tăng hoặc giảm của tung độ khi hoành độ di chuyển từ trái sang phải:

– Hàm số đồng biến trên các khoảng mà đồ thị có hướng đi lên (từ trái sang phải).

– Hàm số nghịch biến trên các khoảng mà đồ thị có hướng đi xuống (từ trái sang phải).



Từ đồ thị, ta có:

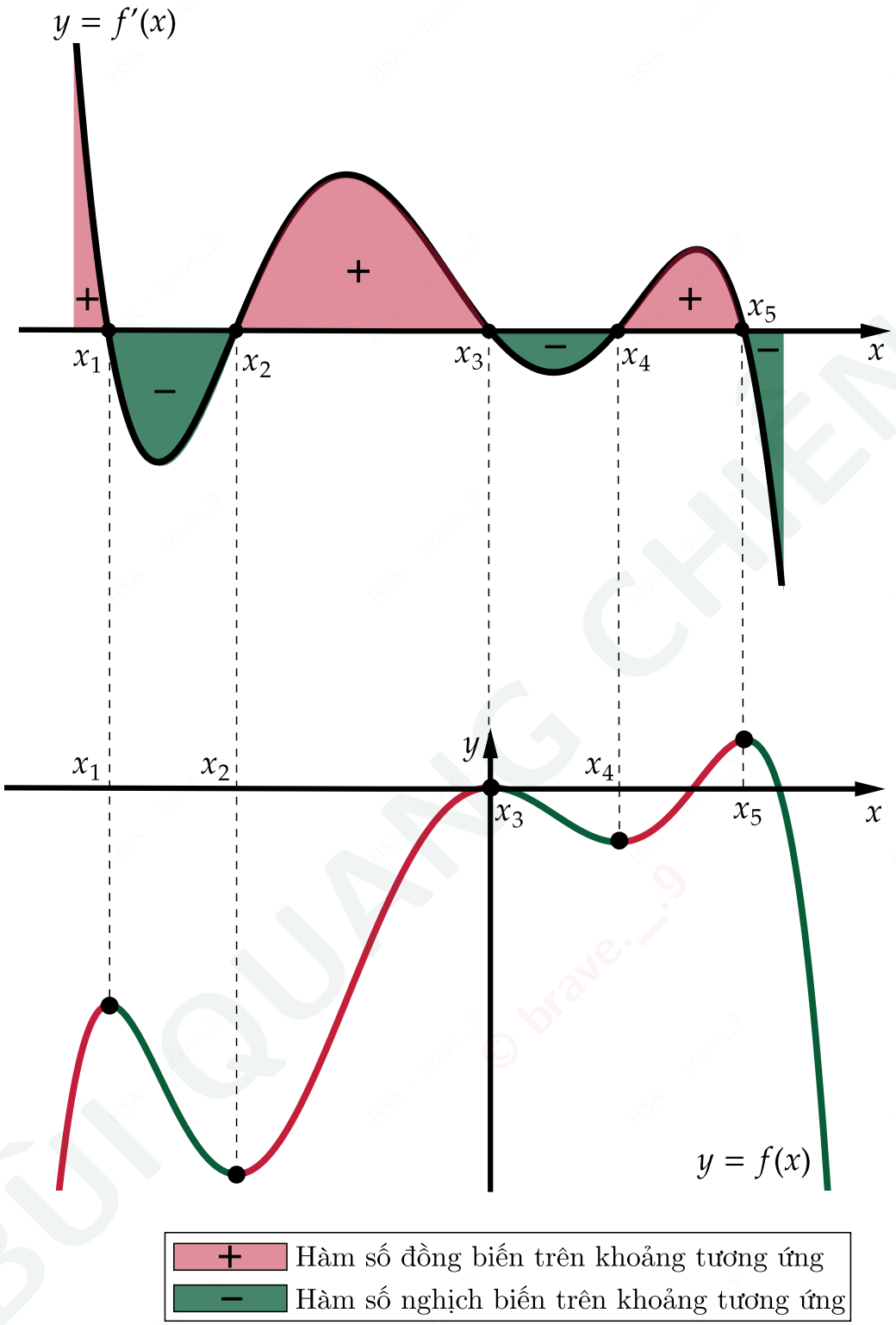
– Hàm số đồng biến trên: $(x_1;x_2)$, $(x_3;x_4)$ và $(x_5;+\infty)$.

– Hàm số nghịch biến trên: $(-\infty;x_1)$, $(x_2;x_3)$ và $(x_4;x_5)$.

6.2.3 Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$

– Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng mà phần đồ thị $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành ($f'(x)>0$).

– Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng mà phần đồ thị $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành ($f'(x)<0$).



6.3 Xét tính đơn điệu bằng dấu đạo hàm

6.3.1 Hàm số bậc ba không chứa tham số

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a \neq 0$).

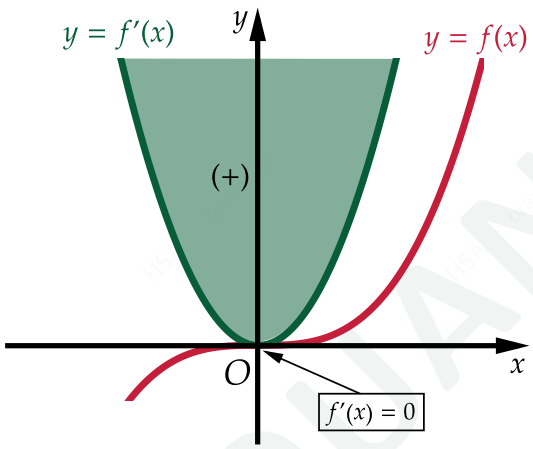
Đạo hàm của hàm số là tam thức bậc hai: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Gọi $\Delta_{y'}$ là biệt thức của tam thức y':

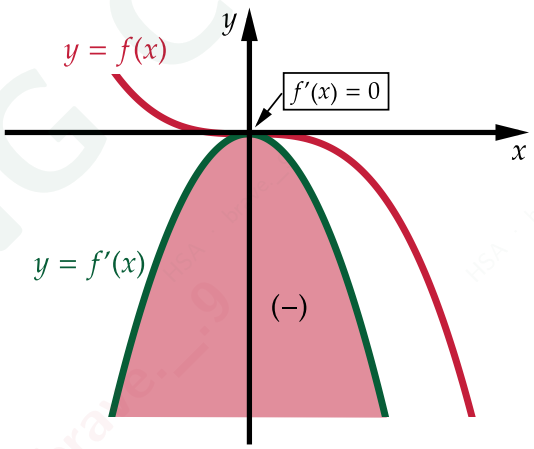
$$\Delta_{y'} = (2b)^2 - 4 \cdot 3ac = 4(b^2 - 3ac).$$

Tùy thuộc vào dấu của $\Delta_{y'}$, dựa theo định lí về dấu tam thức:

– Khi $\Delta_{y'} < 0$: y' luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$.



$a > 0, \Delta_{f'} \leqslant 0$

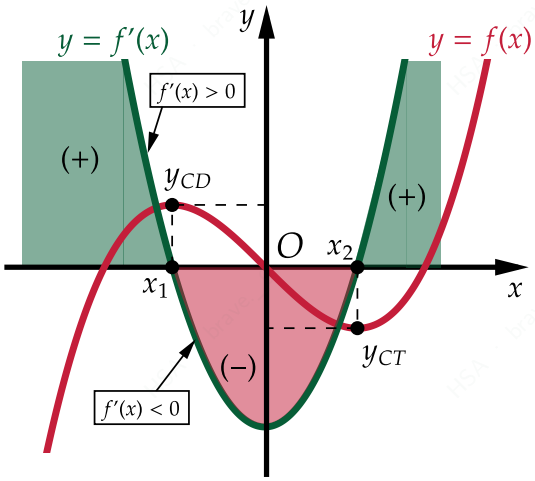


$a < 0, \Delta_{f'} \leqslant 0$

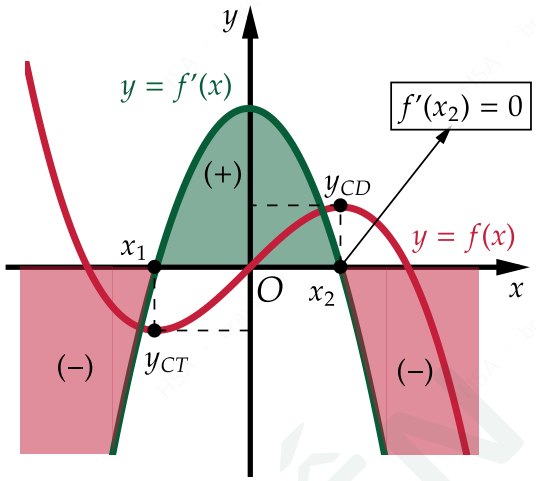
– Khi $\Delta_{y'} = 0$: $y' = 0$ có nghiệm kép. y' không đổi dấu (vẫn cùng dấu với a). Áp dụng hệ quả mở rộng (chỉ bằng 0 tại 1 điểm), hàm số tiếp tục đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

– Khi $\Delta_{y'} > 0$: $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó y' đan dấu ("trong trái, ngoài cùng"), làm cho hàm số đổi chiều biến thiên khi đi qua các điểm x_1 và x_2.

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9



$a > 0, \Delta_{f'} > 0$



$a < 0, \Delta_{f'} > 0$

6.3.2 Hàm số bậc ba chứa tham số

Xét hàm số $f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$, m là tham số). Ta có $f'(x;m) = 3ax^2 + 2bx + c$ và $\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$. Khi xét tính đơn điệu của hàm số bậc 3, ta thường gặp 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Cô lập được tham số

Nếu bất phương trình $y' \geq 0$ (hoặc $y' \leq 0$) biến đổi được về dạng $m \geq g(x)$ hoặc $m \leq g(x)$ trên K:

- f đồng biến trên $K \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{K} g(x)$ (hoặc $\min\limits_{K} g(x)$ tùy chiều bpt).
- f nghịch biến trên $K \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{K} g(x)$ (hoặc $\max\limits_{K} g(x)$ tùy chiều bpt).

Lưu ý: Nếu không tồn tại $\max / \min$ trên khoảng mở K, ta tính giới hạn của $g(x)$ tại biên để làm cơ sở chặn giá trị cho m.

Nhận xét: Tổng quát phương pháp cô lập tham số trên (α, β)

Đối với các bài toán có thể cô lập được tham số m, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Lập bất phương trình từ điều kiện đạo hàm:
   - Đồng biến trên (α, β): $y' \geq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.
   - Nghịch biến trên (α, β): $y' \leq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.
2. Đưa bất phương trình về dạng tách biệt:

$$m \geq g(x)\ \forall x \in (\alpha, \beta) \quad \text{hoặc} \quad m \leq g(x)\ \forall x \in (\alpha, \beta).$$

3. Khảo sát hàm phụ $g(x)$ trên (α, β) để lấy cận:

$$m \geq \max_{(\alpha,\beta)} g(x) \quad \text{hoặc} \quad m \leq \min_{(\alpha,\beta)} g(x).$$

Trường hợp 2: Không cô lập được tham số

Ta áp dụng định lí về vị trí nghiệm của tam thức bậc hai. Phương trình $y' = 0$ có thể có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Gọi $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ là hoành độ đỉnh của parabol y'. Việc ép một khoảng (α, β) nằm ngoài hay nằm trong khoảng 2 nghiệm (x_1, x_2) được tổng quát chặt chẽ như sau:

Yêu cầu đơn điệu	Điều kiện tương đương
Trường hợp $a > 0$	
f đồng biến trên $\mathbb{R}$	$\Delta_{y'} \leq 0$
f đồng biến trên $(-\infty, \alpha)$	$\left[\begin{array}{l} \Delta_{y'} \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ x_0 \geq \alpha \\ y'(\alpha) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
f đồng biến trên $(\alpha, +\infty)$	$\left[\begin{array}{l} \Delta_{y'} \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ x_0 \leq \alpha \\ y'(\alpha) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
f đồng biến trên (α, β)	$\left[\begin{array}{l} \Delta_{y'} \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ x_0 \leq \alpha \\ y'(\alpha) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ x_0 \geq \beta \\ y'(\beta) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
f nghịch biến trên (α, β)	$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y'(\alpha) \leq 0 \\ y'(\beta) \leq 0 \end{cases}$

Yêu cầu đơn điệu	Điều kiện tương đương
f nghịch biến trên $\mathbb{R}$, $(-\infty,\alpha)$, $(\alpha,+\infty)$	Không tồn tại
Trường hợp $a<0$	
f nghịch biến trên $\mathbb{R}$	$\Delta_{y'}\le 0$
f nghịch biến trên $(-\infty,\alpha)$	$\left[\begin{array}{l}\Delta_{y'}\le 0\\ \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ x_0\ge\alpha\\ y'(\alpha)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$
f nghịch biến trên $(\alpha,+\infty)$	$\left[\begin{array}{l}\Delta_{y'}\le 0\\ \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ x_0\le\alpha\\ y'(\alpha)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$
f nghịch biến trên (α,β)	$\left[\begin{array}{l}\Delta_{y'}\le 0\\ \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ x_0\le\alpha\\ y'(\alpha)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ x_0\ge\beta\\ y'(\beta)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$
f đồng biến trên (α,β)	$\begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ y'(\alpha)\ge 0\\ y'(\beta)\ge 0\end{cases}$
f đồng biến trên $\mathbb{R}$, $(-\infty,\alpha)$, $(\alpha,+\infty)$	Không tồn tại

Ví dụ

Tìm các giá trị nguyên âm của m để hàm số $f(x)=x^3+3mx+1$ đồng biến trên $(3,7)$.

Lời giải

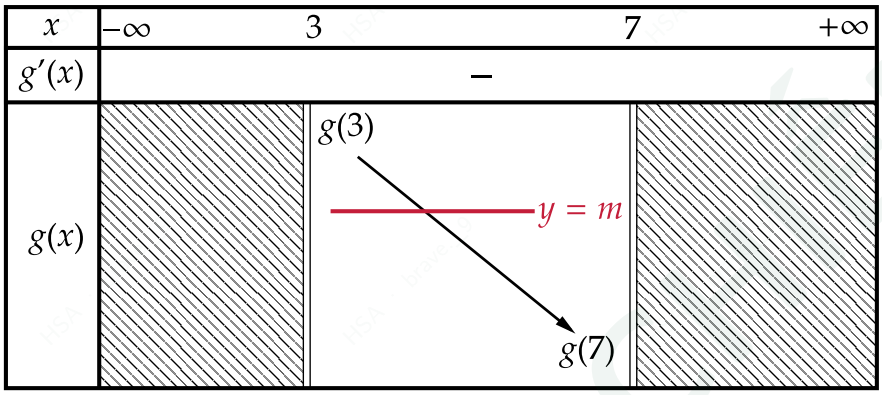
Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3,7)$, điều kiện cần và đủ là:

$$y'=3x^2+3m\ge 0,\quad \forall x\in(3,7).$$

Ta tiến hành cô lập tham số m để đưa về hàm phụ:

$$3m \geq -3x^2 \Longleftrightarrow m \geq -x^2, \quad \forall x \in (3,7).$$

Xét hàm số phụ $g(x) = -x^2$ trên khoảng $(3,7)$. Ta có đạo hàm $g'(x) = -2x < 0, \quad \forall x \in (3,7)$.
Suy ra hàm số $g(x)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $(3,7)$.



Từ bảng biến thiên (đồ thị) trên, ta thấy tập giá trị của $g(x)$ là:

$$-49 < g(x) < -9, \quad \forall x \in (3,7).$$

Để bất phương trình $m \geq g(x)$ luôn đúng với mọi $x \in (3,7)$ thì m phải lớn hơn hoặc bằng cận trên của hàm $g(x)$. Suy ra:

$$m \geq -9.$$

Kết hợp với điều kiện bài toán là $m \in \mathbb{Z}^-$, ta được:

$$m \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}.$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$$

đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có đạo hàm:

$$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1.$$

Đây là tam thức bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, hoành độ đỉnh $x_0 = m$ và biệt thức phẩy $\Delta' = m^2 - (m^2 - m + 1) = m - 1$.

Vì m xuất hiện dưới dạng bậc hai trong y' nên ta không thể cô lập m.

Trường hợp 1: $\Delta' \le 0$

$$\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 \Leftrightarrow m \le 1.$$

Khi đó $y' \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó chắc chắn đồng biến trên khoảng $(1;3)$. (Trường hợp này nhận $m \le 1$).

Trường hợp 2: $\Delta' > 0$

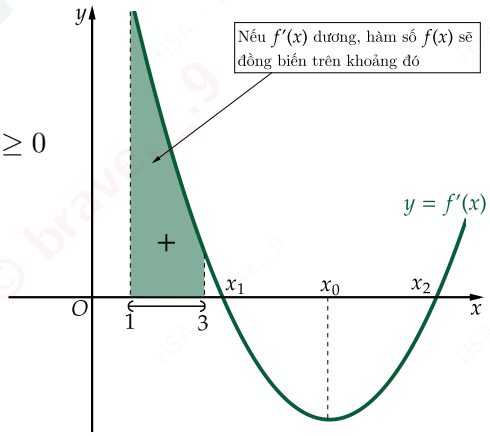
$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$, khoảng này phải nằm ngoài vùng âm của đạo hàm, tức là xảy ra một trong hai trường hợp:

– **Trường hợp 1:** $(1;3)$ nằm bên trái nghiệm x_1 (x_0 nằm bên phải số 3).

$$\begin{cases} x_0 \ge 3 \\ y'(3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 3 \\ 3^2 - 2m \cdot 3 + m^2 - m + 1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 3 \\ m^2 - 7m + 10 \ge 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m \ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 5. \quad (\text{Thỏa mãn } m > 1).$$

– **Trường hợp 2:** $(1;3)$ nằm bên phải nghiệm x_2 (x_0 nằm bên trái số 1)

$$\begin{cases} x_0 \le 1 \\ y'(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ 1^2 - 2m \cdot 1 + m^2 - m + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ m^2 - 3m + 2 \ge 0 \end{cases}$$

Tuy nhiên, trường hợp này yêu cầu $m \le 1$, mâu thuẫn hoàn toàn với điều kiện đang xét là

$\Delta' > 0$ ($m > 1$). Do đó trường hợp này loại.

Kết luận: Hợp các trường hợp lại, ta được các giá trị cần tìm của m là:

$$m \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty).$$

6.3.3 Hàm số trùng phương

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$.

Tính đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

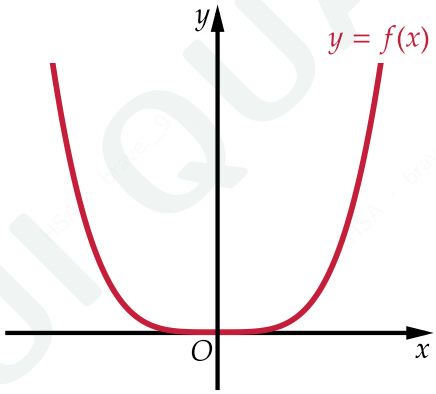
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$.

Sự biến thiên của hàm số phụ thuộc vào dấu của tích ab:

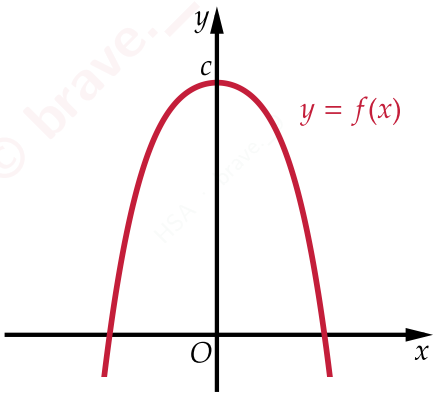
– **Trường hợp** $ab \geq 0$**:** Phương trình $y' = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 0$. Hàm số đổi chiều biến thiên đúng một lần.

  * Nếu $a > 0$: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

  * Nếu $a < 0$: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.



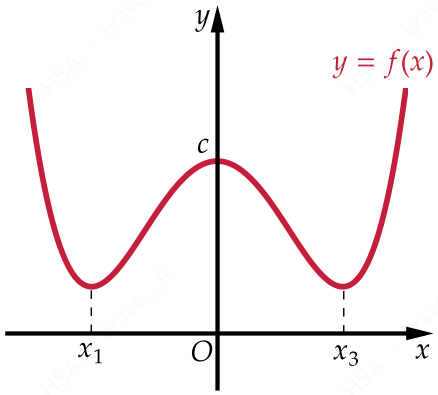
$a > 0,\ b \geqslant 0$



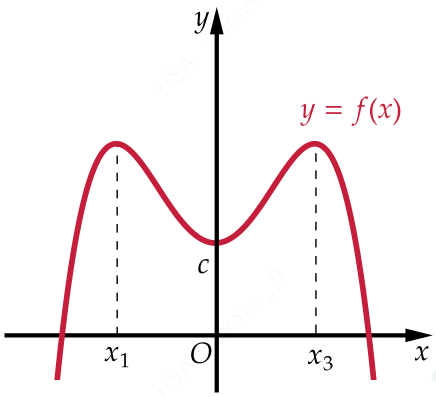
$a < 0,\ b \leqslant 0$

– **Trường hợp** $ab < 0$**:** Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt: $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Đồ thị hàm số có hình dáng chữ W (nếu $a > 0$) hoặc chữ M (nếu $a < 0$), các khoảng đồng biến và nghịch biến đan xen nhau qua 3 mốc nghiệm này.



$a > 0,\ b < 0$



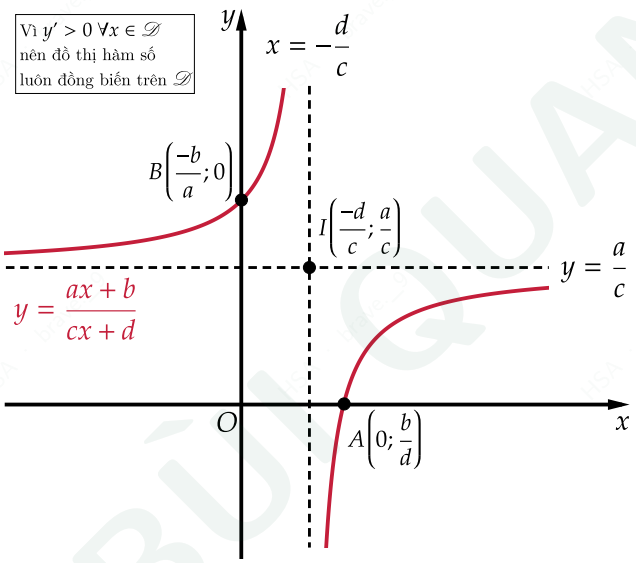
$a < 0,\ b > 0$

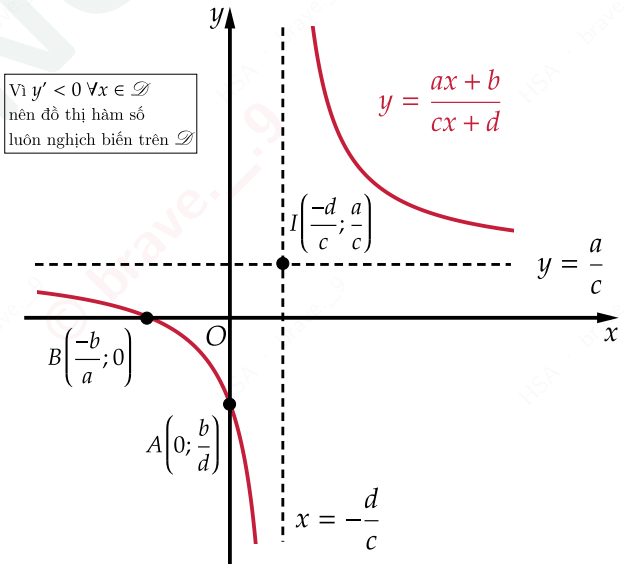
6.3.4 Hàm phân thức bậc nhất (bậc nhất/bậc nhất)

Xét hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Đạo hàm của hàm số: $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.





Tính chất: Sự biến thiên của hàm nhất biến

Dấu của y' không đổi trên mỗi khoảng xác định. Do đó, hàm số luôn đơn điệu trên từng khoảng $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}, +\infty\right)$.

- Nếu $ad - bc > 0$: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng.
- Nếu $ad - bc < 0$: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng.

6.3.5 Đường tiệm cận và tâm đối xứng của hàm nhất biến

Tính chất: Các yếu tố hình học cơ bản

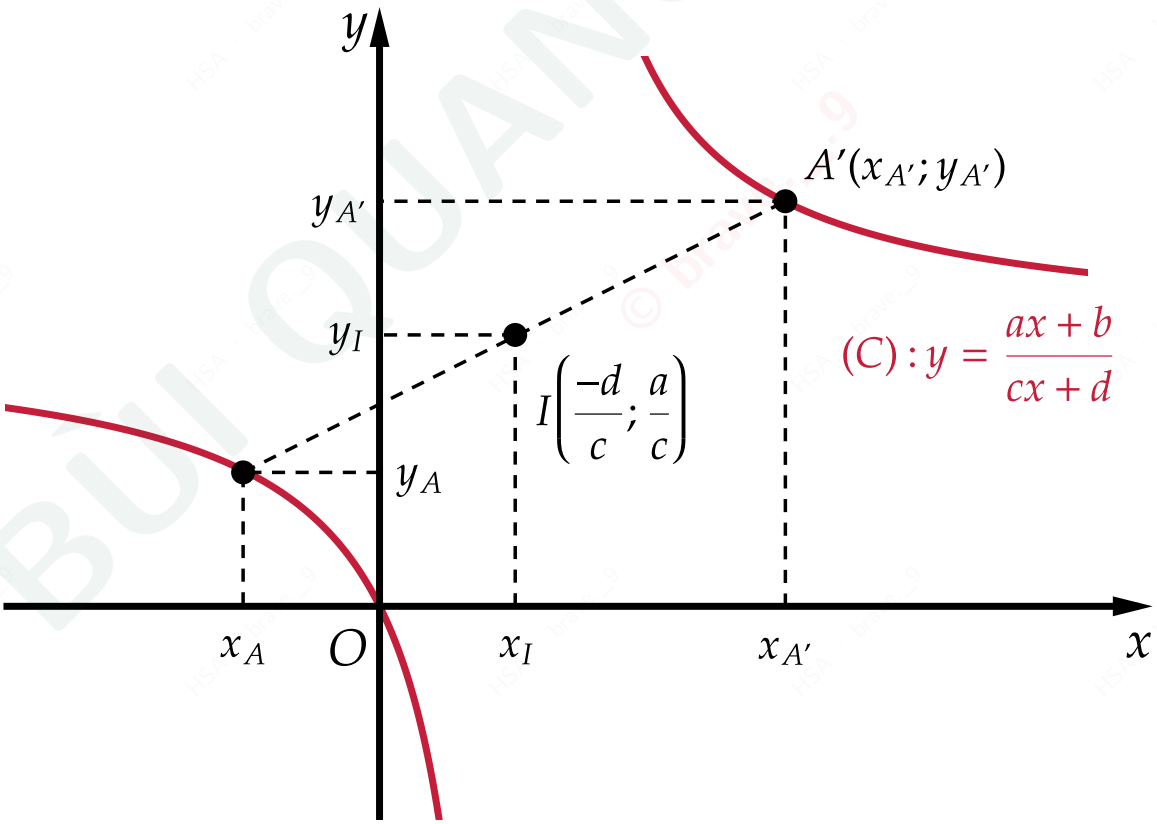
Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad-bc \neq 0)$. Ta luôn có:

- Đường tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c}$.
- Đường tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{c}$.
- Tâm đối xứng I (là giao điểm của hai đường tiệm cận):

$$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right).$$

Tính chất đối xứng: Với mọi điểm $A(x_A; y_A) \in (C)$, luôn tồn tại điểm $A'(x_{A'}; y_{A'}) \in (C)$ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AA'. Tọa độ thỏa mãn hệ thức:

$$\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_I \\ y_A + y_{A'} = 2y_I \end{cases}$$



6.3.6 Hàm phân thức có tham số m

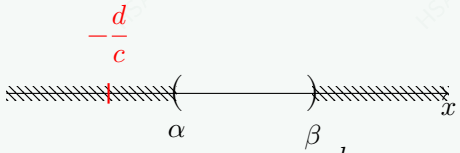
Tính chất: Điều kiện cần và đủ để hàm phân thức đơn điệu

Xét hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad-bc \neq 0$, các hệ số có chứa tham số m).

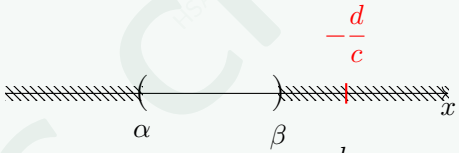
Để hàm số đơn điệu trên khoảng K cho trước, ta cần thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0 \Leftrightarrow ad-bc > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0 \Leftrightarrow ad-bc < 0$.

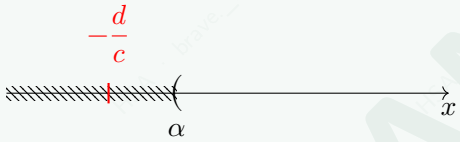
Điểm gián đoạn $x = -\dfrac{d}{c}$ là nơi đồ thị bị gián đoạn. Do đó, để hàm số liên tục trên khoảng K, khoảng K không được phép chứa điểm $-\dfrac{d}{c}$.



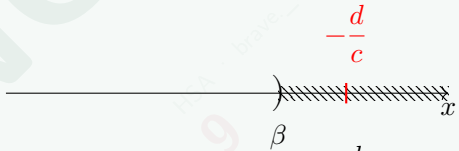
TH1: $K = (\alpha;\beta)$ **và** $-\dfrac{d}{c} \leq \alpha$



TH2: $K = (\alpha;\beta)$ **và** $-\dfrac{d}{c} \geq \beta$



TH3: $K = (\alpha;+\infty)$ **và** $-\dfrac{d}{c} \leq \alpha$



TH4: $K = (-\infty;\beta)$ **và** $-\dfrac{d}{c} \geq \beta$

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2x+m}{x-m+1}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m-1\}$.

Đạo hàm của hàm số:

$$y' = \frac{2(-m+1)-m}{(x-m+1)^2} = \frac{-3m+2}{(x-m+1)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -3m+2>0 \\ m-1 \notin (2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m-1\geq 3 \\ m-1\leq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 4 \\ m\leq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{2}{3}.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m<\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ

Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{2\sin x-m-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

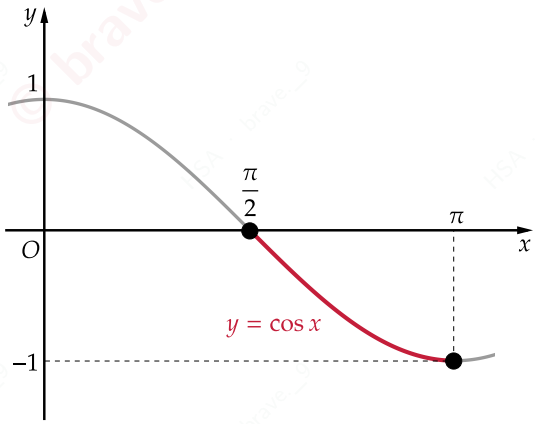
Lời giải

Đạo hàm của hàm số:

$$y'=\frac{1(-m-1)-2m}{(2\sin x-m-1)^2}\cdot(\sin x)'=\frac{-3m-1}{(2\sin x-m-1)^2}\cos x.$$

Xét trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$:

- Đặt $u=\sin x$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $u\in(0;1)$.
- $\cos x<0$ với mọi $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.



Để hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $y'>0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Vì $\cos x<0$, ta cần:

$$\begin{cases} -3m-1<0 \\ \dfrac{m+1}{2}\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{2}\leq 0 \\ \dfrac{m+1}{2}\geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1.$$

Vậy $m \geq 1$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

Lời giải

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx - m - 1}{(x - m)^2}$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; -3) \Leftrightarrow m \notin (-\infty; -3) \Leftrightarrow m \geq -3$.

Khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ thì $y' \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -3)$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq m(2x + 1) \text{ với } \forall x \in (-\infty; -3).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \leq m \text{ với } \forall x \in (-\infty; -3).$$

Đặt $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$ ta có $g'(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 2}{(2x + 1)^2} > 0$ với $\forall x \in (-\infty; -3)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{8}{5}$

Vậy $m \geq -\dfrac{8}{5}$ (Thỏa mãn điều kiện $m \geq -3$).

Chương 7

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

7.1 Định nghĩa và quy tắc tìm cực trị

7.1.1 Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathscr{D}$.

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset \mathscr{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset \mathscr{D}$ và

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a;b) \setminus \{x_0\}.$$

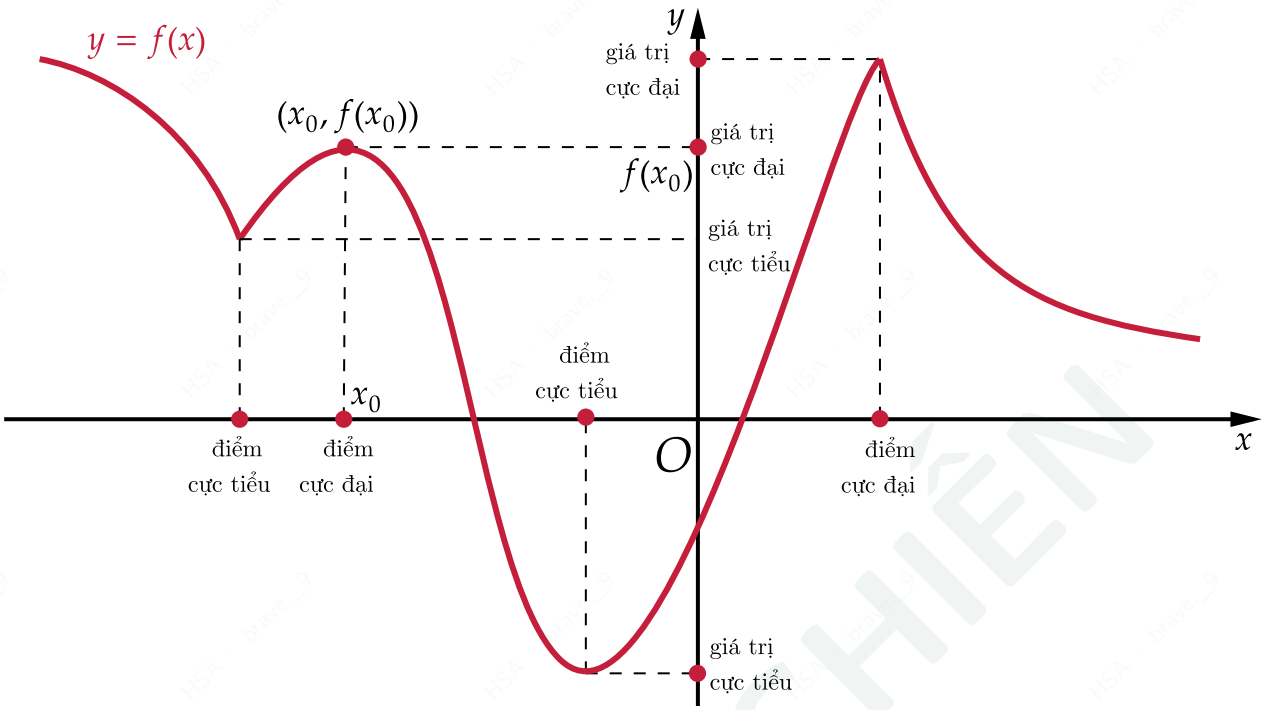
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0.

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9



Chú ý

1) Giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) $f(x_0)$ không đồng nhất với giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của hàm số trên toàn bộ tập xác định $\mathscr{D}$. Thực chất, $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa điểm x_0.

2) Một hàm số có thể đạt cực trị tại nhiều điểm, hoặc hoàn toàn không có cực trị trên tập xác định. Chẳng hạn như ở đồ thị minh họa phía trên, hàm số đạt cực trị tại bốn điểm phân biệt (hai điểm cực đại và hai điểm cực tiểu).

3) Cần phân biệt rõ cực trị của hàm số và cực trị của đồ thị: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số f, thì điểm có tọa độ $(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị* hàm số f.

7.1.2 Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và nếu đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0; f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành, tức là $f'(x_0) = 0$.

Đó là nội dung của định lí mà ta thừa nhận sau đây.

Định lý: Điều kiện cần

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.

7.1.3 Điều đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị.

Định lý: Điều kiện đủ

Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nói một cách khác,

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh

a) Vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $(a;x_0]$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ nên hàm số f nghịch biến trên $(a;x_0]$. Do đó

$$f(x)>f(x_0) \text{ với mọi } x\in(a;x_0).$$

Tương tự, vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[x_0;b)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ nên hàm số đồng biến trên $[x_0;b)$. Do đó

$$f(x)>f(x_0) \text{ với mọi } x\in(x_0;b).$$

Vậy $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$, tức là hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Phần b) được chứng minh tương tự.

Định lí 2 được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

(a) Cực đại

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

(b) Cực tiểu

Từ định lí 2 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây:

QUY TẮC 1

1. Tìm $f'(x)$.

2. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Từ đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Sau đây là bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\frac{23}{3}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, giá trị cực đại của hàm số là $f(-1) = 3$. Hàm số đạt

cực tiểu tại điểm $x=3$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(3)=-\dfrac{23}{3}$.

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $f(x)=|x|$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{với } x<0\\ x & \text{với } x\geq 0.\end{cases}$$

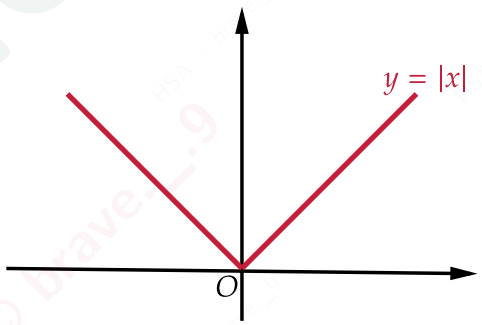
Do đó

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{với } x<0\\ 1 & \text{với } x>0.\end{cases}$$

(Hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x=0$).

Sau đây là bảng biến thiên và đồ thị hàm số:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 (cực tiểu)	$\nearrow$	$+\infty$



Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và giá trị cực tiểu của hàm số là $f(0)=0$.

Có thể sử dụng đạo hàm cấp hai để tìm cực trị của hàm số. Người ta đã chứng minh định lí sau đây.

Định lý

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

a) Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Từ định lí 3, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số (nếu hàm số có đạo hàm cấp hai).

QUY TẮC 2

1. Tìm $f'(x)$.

2. Tìm các nghiệm x_i $(i = 1, 2, ...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

3. Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

– Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

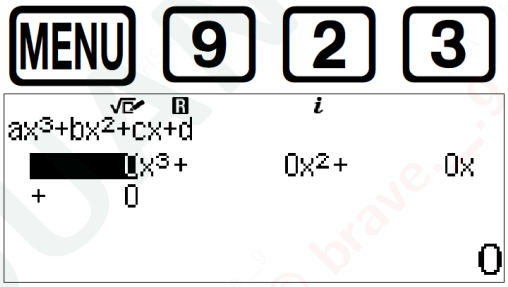
– Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

7.1.4 Sử dụng CASIO fx-580VN X tìm cực trị hàm bậc ba

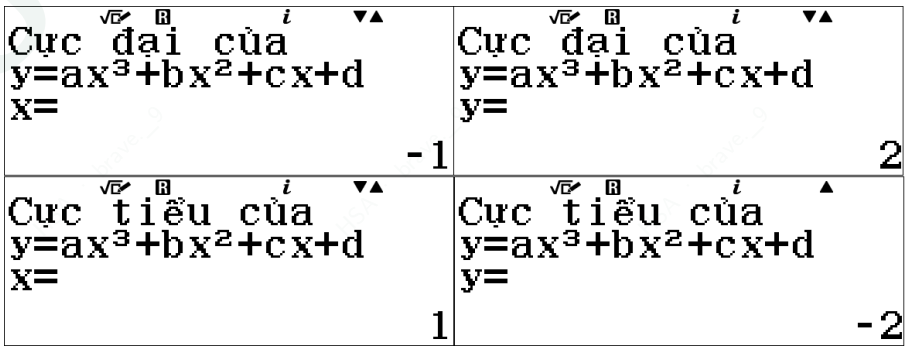
Máy tính CASIO fx-580VN X (và các dòng tương đương) có tích hợp sẵn tính năng tìm toạ độ điểm cực đại, cực tiểu của hàm số bậc ba vô cùng nhanh chóng mà không cần giải phương trình đạo hàm.

– **Bước 1:** Nhấn MENU → chọn 9 (Phương trình/Hệ phương trình) → chọn 2 (Phương trình đa thức) → chọn 3 (Bậc 3).

– **Bước 2:** Nhập các hệ số a, b, c, d của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



– **Bước 3:** Nhấn = liên tục để bỏ qua các nghiệm x_1, x_2, x_3 là nghiệm của $f(x) = 0$. Máy tính sẽ hiển thị lần lượt:



Ví dụ

Áp dụng quy tắc 2 tìm cực trị của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x^2-2x-3$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=3;$$

$$f''(x)=2x-2.$$

Vì $f''(-1)=-4<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1$, $f(-1)=3$.

Vì $f''(3)=4>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3$, $f(3)=-\dfrac{23}{3}$.

Ta nhận được các kết quả đã biết trong ví dụ 1.

Ví dụ

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta tính đạo hàm của hàm số:

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(2x-m(m+1))(x-m)-(x^2-m(m+1)x+m^3+1)\cdot 1}{(x-m)^2}\\&=\frac{2x^2-2mx-m(m+1)x+m^3+m^2-x^2+m(m+1)x-m^3-1}{(x-m)^2}\\&=\frac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2}\end{aligned}$$

Cho $y'=0$, ta có phương trình:

$$x^2-2mx+m^2-1=0\Leftrightarrow(x-m)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$$

Nhận thấy hai nghiệm $x_1 = m-1$ và $x_2 = m+1$ luôn phân biệt với mọi m (vì $m-1 < m < m+1$) và khác điểm gián đoạn m.

Tử số là tam thức bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, nên y' mang dấu dương ngoài khoảng nghiệm và âm trong khoảng nghiệm.

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số luôn đạt cực đại tại $x = m-1$ và đạt cực tiểu tại $x = m+1$.

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

7.2 Xét cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên và đồ thị

7.2.1 Dựa vào bảng biến thiên

Để xác định cực trị của hàm số $y = f(x)$ thông qua bảng biến thiên, ta đối chiếu trực tiếp với định nghĩa. Bản chất của cực trị là việc so sánh giá trị của hàm số tại x_0 với các giá trị trong một khoảng lân cận $(a;b)$ chứa nó. Thông qua dòng $f(x)$ và $f'(x)$ trên bảng biến thiên, ta có:

- **Điểm cực đại:** Tại $x_0 \in \mathscr{D}$, nếu dòng $f(x)$ cho thấy $f(x_0)$ lớn hơn mọi giá trị $f(x)$ lân cận nó (tương ứng với chiều mũi tên đi lên tới $f(x_0)$ rồi đi xuống), thì x_0 là điểm cực đại. Điều kiện đủ tương ứng là $f'(x)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi qua x_0.
- **Điểm cực tiểu:** Tại $x_0 \in \mathscr{D}$, nếu dòng $f(x)$ cho thấy $f(x_0)$ nhỏ hơn mọi giá trị $f(x)$ lân cận nó (tương ứng với chiều mũi tên đi xuống tới $f(x_0)$ rồi đi lên), thì x_0 là điểm cực tiểu. Điều kiện đủ tương ứng là $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua x_0.

BÙI QUANG CHIẾN

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

(a) Cực đại

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

(b) Cực tiểu

Lưu ý quan trọng từ định nghĩa:

- Tại điểm x_i, nếu đạo hàm $f'(x)$ không xác định (ký hiệu $\|$ ở dòng f'), nhưng hàm số $f(x)$ vẫn liên tục và $f(x_i)$ thỏa mãn tính chất lớn nhất/nhỏ nhất trong một lân cận, thì x_i vẫn là điểm cực trị.
- Tại điểm x_i, nếu cả đạo hàm và hàm số đều không xác định (ký hiệu $\|$ kéo dài qua cả hai dòng), thì hàm số **không** đạt cực trị tại x_i vì vi phạm điều kiện $x_i \in \mathscr{D}$.

Xét bảng biến thiên minh họa sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4	$\cdots$	x_n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$+$		$-$ $\cdots$ $-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$		$+\infty$	↘	$f(x_n)$	↗	$+\infty$

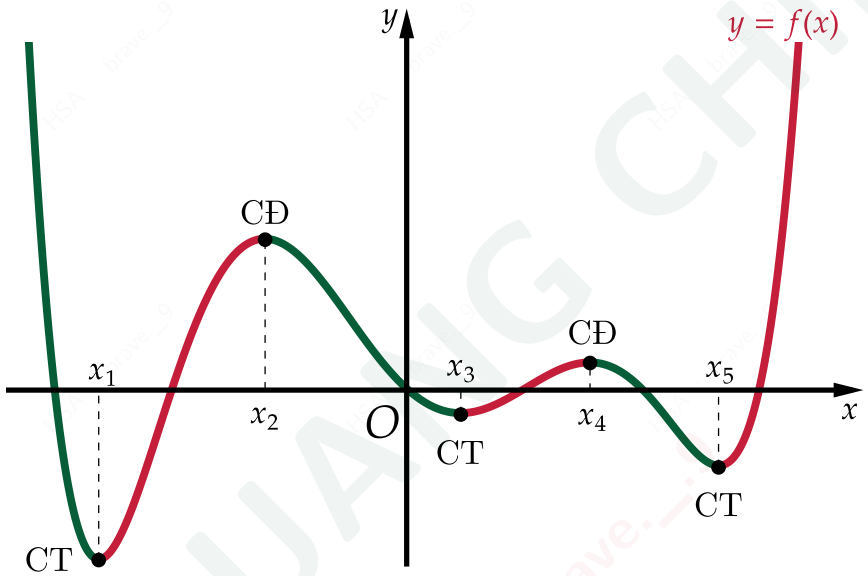
Dựa vào bảng biến thiên trên, đối chiếu với định nghĩa, ta thấy:

- **Tại x_1 và x_n:** Tồn tại các lân cận mà $f(x_1)$ là giá trị lớn nhất và $f(x_n)$ là giá trị nhỏ nhất. Do đó x_1 là điểm cực đại, x_n là điểm cực tiểu.
- **Tại x_2:** Hàm số xác định, liên tục và $f(x_2)$ nhỏ hơn các giá trị lân cận. Dù đạo hàm không tồn tại, x_2 vẫn là điểm cực tiểu.
- **Tại x_3:** Không tồn tại lân cận nào để $f(x_3)$ là lớn nhất hay nhỏ nhất (đạo hàm không đổi dấu), nên x_3 không phải cực trị.
- **Tại x_4:** Hàm số không xác định tại x_4, do đó không thỏa mãn định nghĩa. Điểm x_4 không phải là cực trị.

7.2.2 Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$

Về mặt hình học, điều kiện $f(x) < f(x_0)$ trong một lân cận $(a;b)$ của định nghĩa mang ý nghĩa điểm $M(x_0; f(x_0))$ nằm **cao hơn** mọi điểm khác trên đồ thị thuộc lân cận đó. Do vậy, cực trị của hàm số thể hiện qua đồ thị như sau:

- **Điểm cực đại của đồ thị:** Là điểm mà tại đó tung độ của nó lớn hơn tung độ của tất cả các điểm lân cận trên đồ thị.
- **Điểm cực tiểu của đồ thị:** Là điểm mà tại đó tung độ của nó nhỏ hơn tung độ của tất cả các điểm lân cận trên đồ thị.



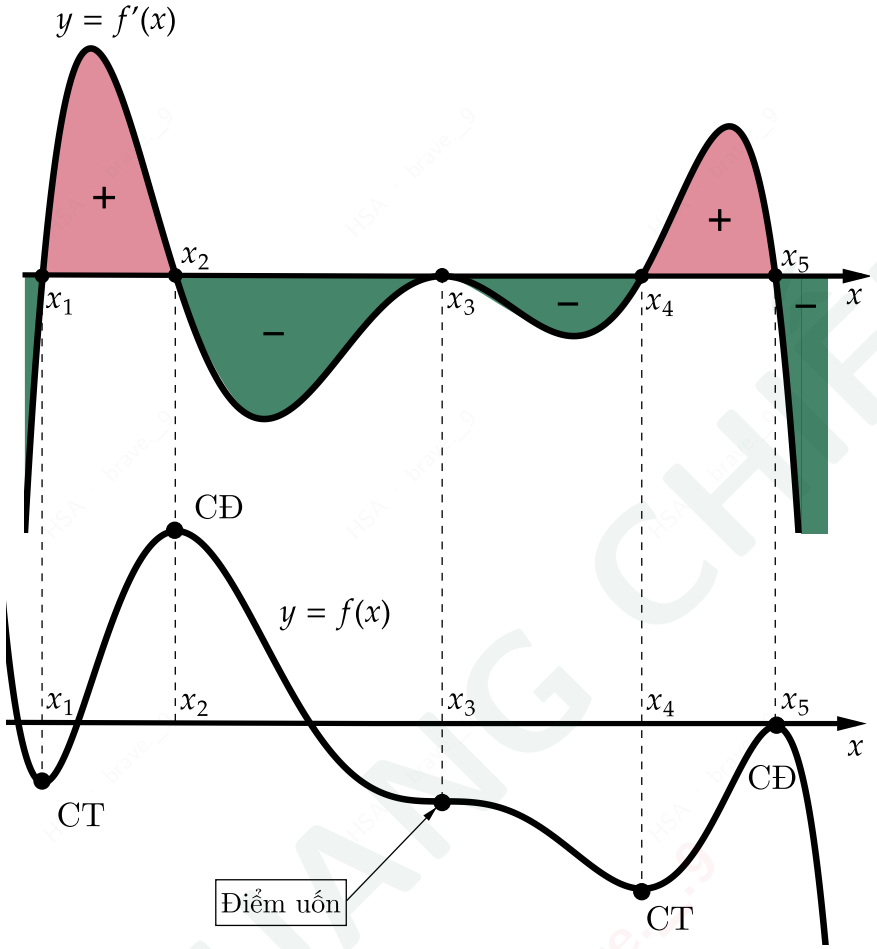
Quan sát đồ thị minh họa, đối chiếu với tính chất hình học trên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại các điểm x_2, x_4 và đạt cực tiểu tại các điểm x_1, x_3, x_5.

7.2.3 Dựa vào đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$

Khi biết đồ thị của hàm số đạo hàm $y = f'(x)$, ta cần áp dụng Định lí (điều kiện đủ) để xét cực trị. Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 sẽ đạt cực trị tại x_0 nếu đạo hàm $f'(x)$ **đổi dấu** khi đi qua x_0. Trên đồ thị $f'(x)$, sự đổi dấu này tương ứng với việc đồ thị cắt ngang qua trục hoành Ox:

- Nếu đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành và đi từ **trên xuống dưới** (đổi dấu từ dương sang âm) khi qua x_0, thì hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- Nếu đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành và đi từ **dưới lên trên** (đổi dấu từ âm sang dương) khi qua x_0, thì hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

Lưu ý: Nếu đồ thị $f'(x)$ chỉ chạm (tiếp xúc) với trục hoành rồi quay lại cùng phía (đạo hàm không đổi dấu), thì hàm số không đạt cực trị.



Dựa vào đồ thị $f'(x)$ minh họa, ta phân tích:

- **Tại x_1 và x_4:** Đồ thị $f'(x)$ đi từ dưới lên trên trục hoành (đổi dấu $(-)$ sang $(+)$), hàm số đạt **cực tiểu**.
- **Tại x_2 và x_5:** Đồ thị $f'(x)$ đi từ trên xuống dưới trục hoành (đổi dấu $(+)$ sang $(-)$), hàm số đạt **cực đại**.
- **Tại x_3:** Đồ thị $f'(x)$ tiếp xúc trục hoành và nằm hoàn toàn phía dưới, không có sự đổi dấu nên hàm số **không** đạt cực trị.

7.3 Cực trị của các hàm số cơ bản

7.3.1 Hàm đa thức, phân thức

Ví dụ

Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Cách 1: Sử dụng bảng biến thiên (Quy tắc 1)

Ta tính đạo hàm của hàm số:

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

Cho

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta đi đến kết luận:

- Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}} = y(-1) = 8$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = y(2) = -19$.

Cách 2: Sử dụng đạo hàm cấp hai (Quy tắc 2)

Đạo hàm cấp hai của hàm số là: $y'' = 12x - 6$.

Xét dấu đạo hàm cấp hai tại các nghiệm của phương trình $y' = 0$:

- Tại $x = -1$: $y''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
- Tại $x = 2$: $y''(2) = 12(2) - 6 = 18 > 0$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Kết luận: Giá trị cực đại là $y(-1) = 8$ và giá trị cực tiểu là $y(2) = -19$. Cả hai cách đều cho ra cùng một kết quả.

BÙI QUANG CHIẾN

Ví dụ

Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tính đạo hàm bằng công thức thương:

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 3) \cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Cho $y' = 0$: $x^2 - 2x - 1 = 0$. Giải bằng công thức nghiệm:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Cả hai giá trị $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ và $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ đều thuộc $\mathscr{D}$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Cực đại tại $x = 1 - \sqrt{2}$: $f(1-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$.

Cực tiểu tại $x = 1 + \sqrt{2}$: $f(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

7.3.2 Hàm lượng giác

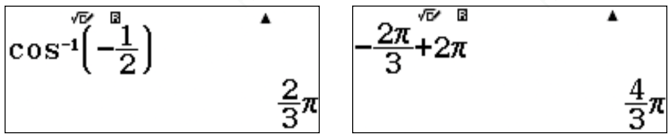
Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $y = \sin 2x - 2\sin x$ trên $(0, 2\pi)$.

Lời giải

$y' = 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2$.

Đặt $t = \cos x$: $4t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow (2t+1)(t-1) = 0$, suy ra $t = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $t = 1$.



$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

Vì ta chỉ lấy nghiệm x nằm trong $(0, 2\pi)$, nên ta chỉ lấy 2 nghiệm trên là thoả mãn.

Trên $(0, 2\pi)$: $\cos x = 1$ (loại vì $x = 0 \notin (0, 2\pi)$); $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ hoặc $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin 2x - 2\sin x$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
y'	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
y	‖ 0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0 ‖

Từ bảng biến thiên, ta kết luận: hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \dfrac{4\pi}{3}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

7.3.3 Hàm số mũ và logarit

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}e^{3x} - \dfrac{3}{2}e^{2x} + 2e^x$.

Lời giải

– Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Tính đạo hàm:

$$y' = e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x.$$

– Giải phương trình $y' = 0$:

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0.$$

Đặt $t = e^x > 0$. Phương trình trở thành:

$$t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t-2) = 0.$$

Vì $t > 0$ nên ta chỉ nhận $t = 1$ hoặc $t = 2$.

+ Với $t = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

+ Với $t = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

– Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$\frac{5}{6}$	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$
	0						

– Từ bảng biến thiên, ta kết luận:

∗ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $f(0) = \dfrac{5}{6}$.

∗ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \ln 2$, $f(\ln 2) = \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $y = x(\ln^2 x - 3\ln x + 3)$.

Lời giải

– Điều kiện xác định: $x > 0$. Tập xác định $D = (0, +\infty)$.

– Đạo hàm (áp dụng quy tắc $(uv)' = u'v + uv'$):

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot (\ln^2 x - 3\ln x + 3) + x \cdot \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{x}\right) \\ &= \ln^2 x - 3\ln x + 3 + 2\ln x - 3 \\ &= \ln^2 x - \ln x. \end{aligned}$$

– Giải phương trình $y' = 0$:

$$\ln^2 x - \ln x = 0.$$

Đặt $t = \ln x$ ($t \in \mathbb{R}$), ta có $t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$.

+ $t = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

+ $t = 1 \Rightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

– Lập bảng biến thiên trên $(0, +\infty)$.

x	0		1		e		$+\infty$
y'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	‖ 0	↗	3	↘	e	↗	$+\infty$

– Từ bảng biến thiên, ta kết luận:

* Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y(1) = 3$.
* Hàm số đạt cực tiểu tại $x = e$, giá trị cực tiểu $y(e) = e$.

7.4 Bài toán cực trị chứa tham số

7.4.1 Hàm số bậc 3

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a \neq 0$). Ta tính đạo hàm:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Biệt thức của đạo hàm được tính bởi:

$$\Delta_{y'} = 4(b^2 - 3ac)$$

Trường hợp	Kết luận
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

Đối với trường hợp hàm bậc ba có hai điểm cực trị, ta thường gặp bài toán tổng quát sau đây:

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước.

– **Bước 1:** Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

– **Bước 2:** Lập điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị phân biệt. Điều này tương đương với phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathscr{D}_1$$

– **Bước 3:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo định lí Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$$

– **Bước 4:** Biến đổi điều kiện K của bài toán về dạng tổng S và tích P. Thay hệ thức Vi-ét vào để giải ra tham số $m \in \mathscr{D}_2$.

– **Bước 5:** Đối chiếu điều kiện và kết luận. Giá trị m thỏa mãn là $m \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1$ có cực đại và cực tiểu

Lời giải

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$.
Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Cách 1:

Ta có: $\Delta = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$ với mọi m. Vậy phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó, hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi giá trị m. Hai điểm cực trị: $x_1 = m - 1$, $x_2 = m + 1$.

Cách 2

Ta có thể biến đổi phương trình $y' = 0$ như sau:

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-m)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - m = 1 \\ x - m = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{array}\right.$$

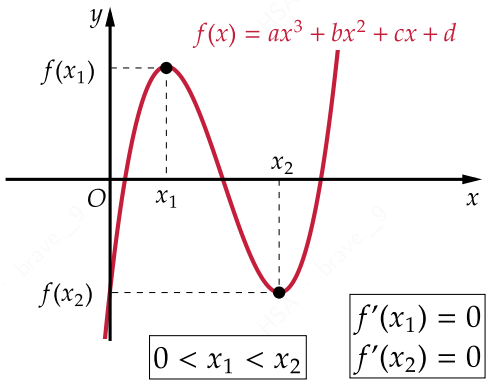
Vì $m + 1 > m - 1$ với mọi m, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, nên hàm số luôn có 2 điểm cực trị.

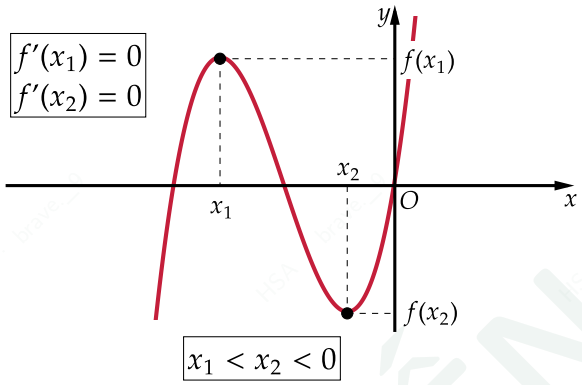
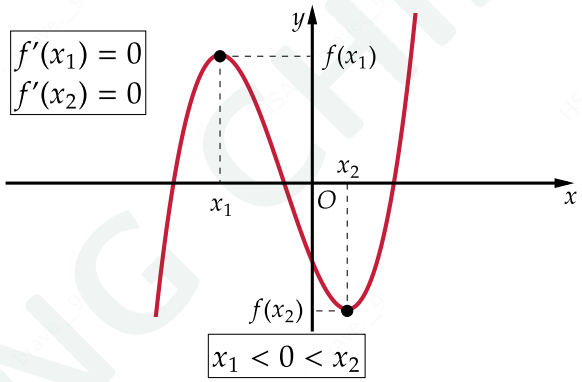
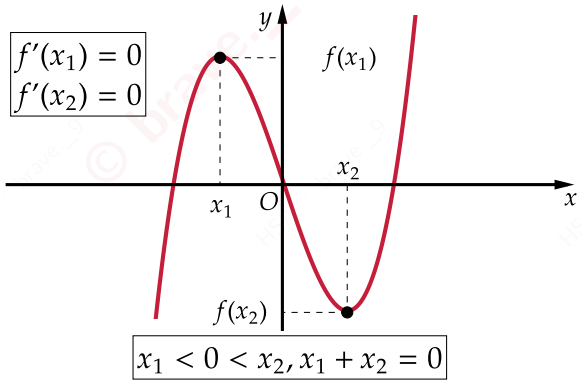
x	$-\infty$		$x_1 = m-1$		$x_2 = m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(m-1)$	↘	$f(m+1)$	↗	$+\infty$

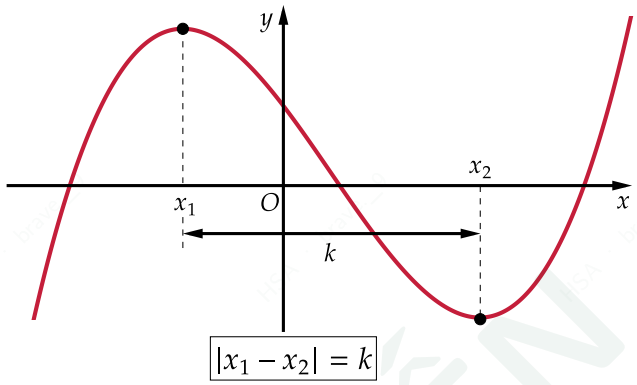
7.4.2 Biện luận theo hoành độ các điểm cực trị

Khi $b^2 - 3ac > 0$, hàm số có hai điểm cực trị $A(x_1, f(x_1))$ và $B(x_2, f(x_2))$.

Theo Vi-ét: $S = -\dfrac{2b}{3a}$ và $P = \dfrac{c}{3a}$.

Trường hợp	Điều kiện	Đồ thị
Hai điểm cực trị nằm cùng phía bên phải trục tung $(x_1 > 0, x_2 > 0)$	$\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$	

Trường hợp	Điều kiện	Đồ thị
Hai điểm cực trị nằm cùng phía bên trái trục tung $(x_1 < 0, x_2 < 0)$	$\begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$	
Hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung $(x_1 x_2 < 0)$	$P = \dfrac{c}{3a} < 0$	
Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua gốc tọa độ (chỉ xét hoành độ)	$\begin{cases} S = -\dfrac{2b}{3a} = 0 \\ P = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases}$	

Trường hợp	Điều kiện	Đồ thị
Khoảng cách hoành độ bằng k cho trước ($\lvert x_1 - x_2\rvert = k$)	Bình phương hai vế và dùng Vi-ét: $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = k^2$ $\Rightarrow S^2 - 4P = k^2$	

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 với $0 < x_1 < x_2$.

Lời giải

Ta có

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1) = 3(x^2 - 2mx + 2m - 1).$$

Hàm số có hai cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta = m^2 - (2m-1) = (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Theo Vi-et cho $y' = 0$:

$$x_1 + x_2 = 2m, \qquad x_1x_2 = 2m - 1.$$

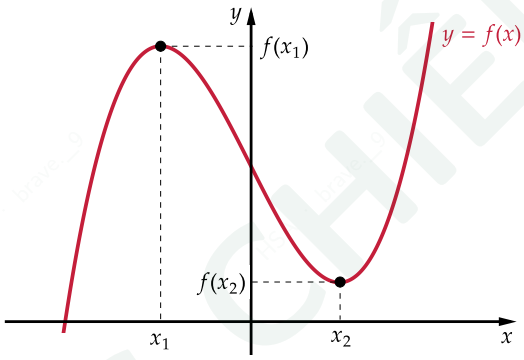
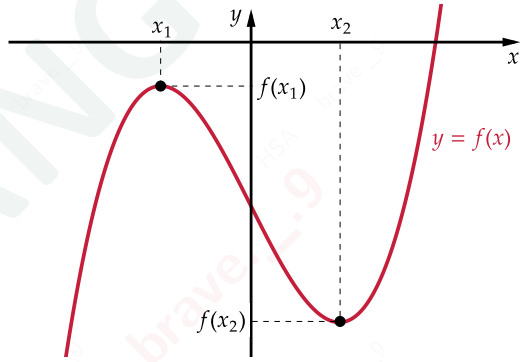
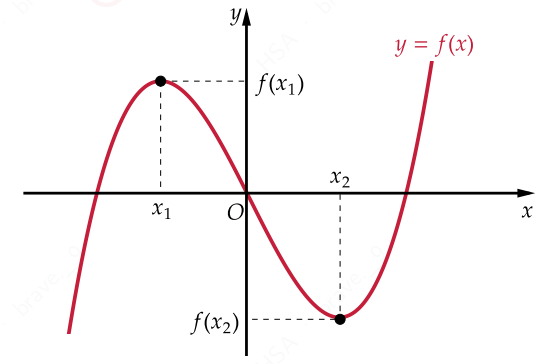
Điều kiện hai hoành độ đều dương:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m \neq 1 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \iff m > \frac{1}{2},\ m \neq 1.$$

Vậy $m \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \cup (1,\ +\infty)$.

7.4.3 Biện luận theo tung độ các điểm cực trị

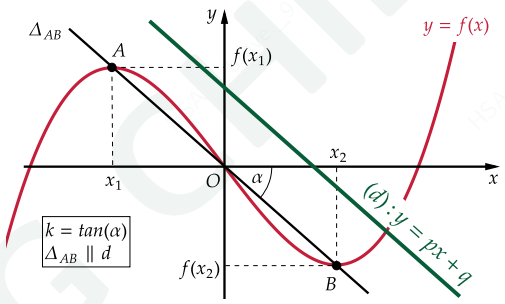
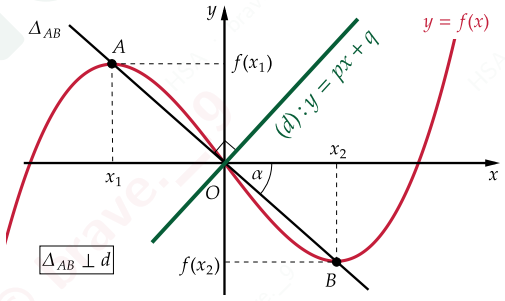
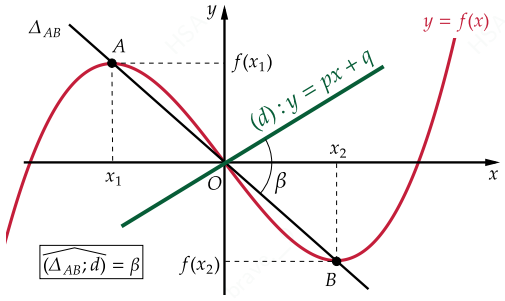
Nếu đề bài cho các dữ kiện liên quan đến giá trị của các cực trị, ta có thể áp dụng công thức bên dưới:

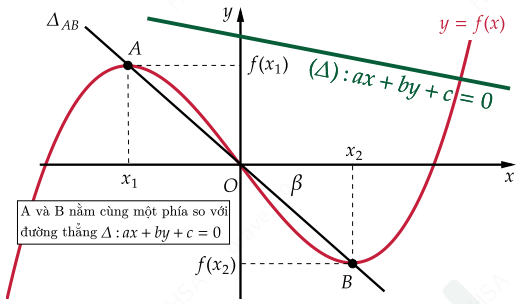
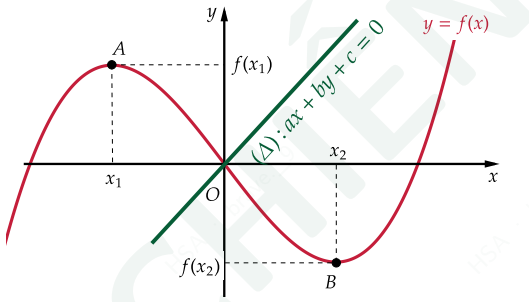
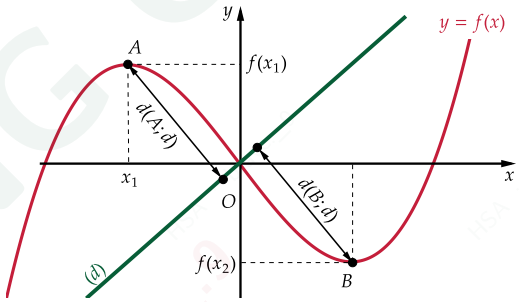
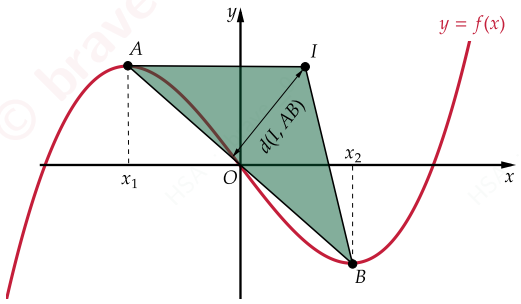
Trường hợp	Điều kiện tương đương	Đồ thị minh hoạ
Hai giá trị cực trị cùng dương $(f(x_1), f(x_2) > 0)$	$\begin{cases} f(x_1) + f(x_2) > 0 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) > 0 \end{cases}$	
Hai giá trị cực trị cùng âm $(f(x_1), f(x_2) < 0)$	$\begin{cases} f(x_1) + f(x_2) < 0 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) > 0 \end{cases}$	
Hai giá trị cực trị trái dấu $(f(x_1) \cdot f(x_2) < 0)$	$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$	

7.4.4 Tính chất hình học của hai điểm cực trị

Xét hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$.

Gọi $\Delta_{AB}\colon y = kx + m$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A và B. Khi đó, tọa độ của A, B cùng các hệ số a, b, c, d và hệ số góc k sẽ có mối liên hệ mật thiết để giải quyết các bài toán hình học (như góc, khoảng cách, vị trí tương đối).

Yêu cầu bài toán	Điều kiện tương đương	Đồ thị minh hoạ
Đường thẳng AB song song với $d\colon y = px + q$	Giải phương trình hệ số góc: $k = p$	
Đường thẳng AB vuông góc với $d\colon y = px + q$	Giải phương trình: $k \cdot p = -1$	
Đường thẳng AB tạo với $d\colon y = px + q$ góc β	Sử dụng công thức tang: $\left\lvert \dfrac{k-p}{1+kp} \right\rvert = \tan\beta$	

Yêu cầu bài toán	Điều kiện tương đương	Đồ thị minh hoạ
A, B nằm cùng phía so với $\Delta\colon ax+by+c=0$	$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$	
A, B nằm khác phía so với $\Delta\colon ax+by+c=0$	$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)<0$	
Hai điểm cực trị cách đều đường thẳng d cho trước	Giải phương trình: $d(A,d)=d(B,d)$	
Diện tích ΔIAB bằng S (I là điểm cho trước)	Tính $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}d(I,AB)\cdot AB$	

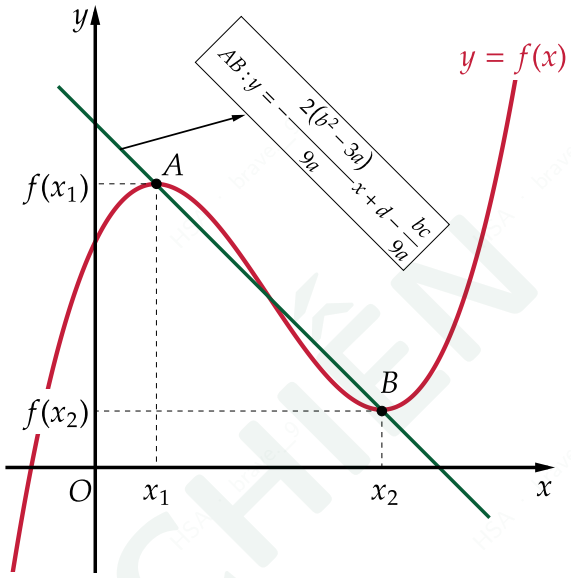
7.4.5 Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$.
Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ta chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x)$ được:

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right) f'(x) + \left[-\frac{2(b^2 - 3ac)}{9a}x + d - \frac{bc}{9a}\right].$$

Vì $f'(x_1) = 0$ và $f'(x_2) = 0$ nên phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là phần dư:

$$AB\colon y = -\frac{2(b^2 - 3ac)}{9a}x + d - \frac{bc}{9a}.$$



Ví dụ

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

Lời giải

Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Khi đó:

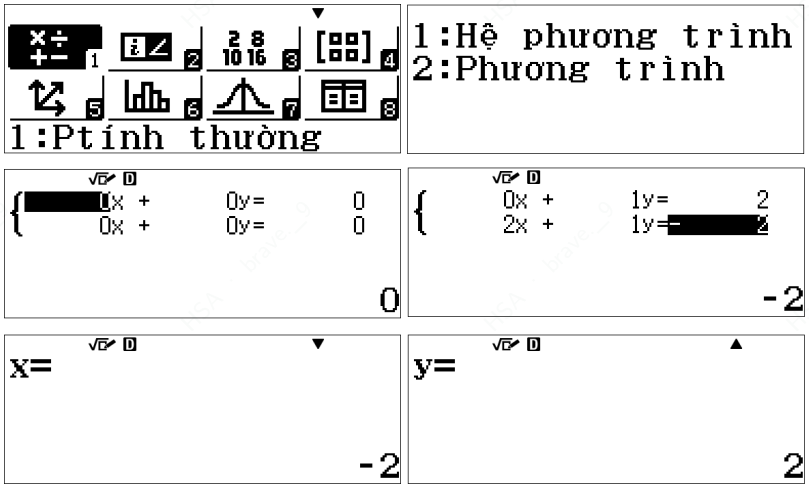
- Với $x = 0$, ta có $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$, suy ra điểm $A(0; 2)$.
- Với $x = 2$, ta có $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2$, suy ra điểm $B(2; -2)$.

Vậy đồ thị có hai điểm cực trị là $A(0; 2)$ và $B(2; -2)$.

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$. Vì đường thẳng này đi qua A và B, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_A = a \cdot x_A + b \\ y_B = a \cdot x_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a \cdot 0 + 1b \\ -2 = a \cdot 2 + 1b \end{cases}$$

Lần lượt nhập các hệ số tương ứng theo các dòng đã thiết lập ở hệ phương trình trên:

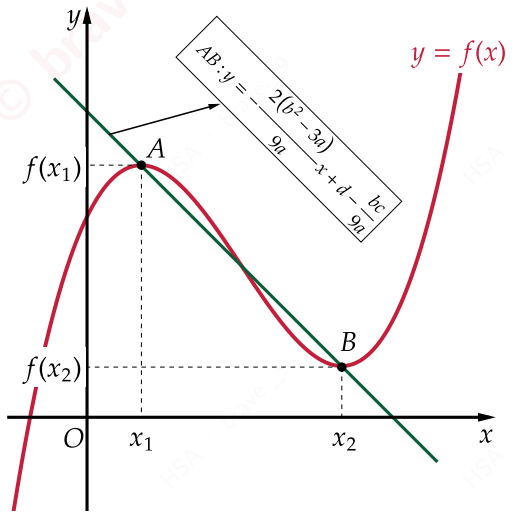


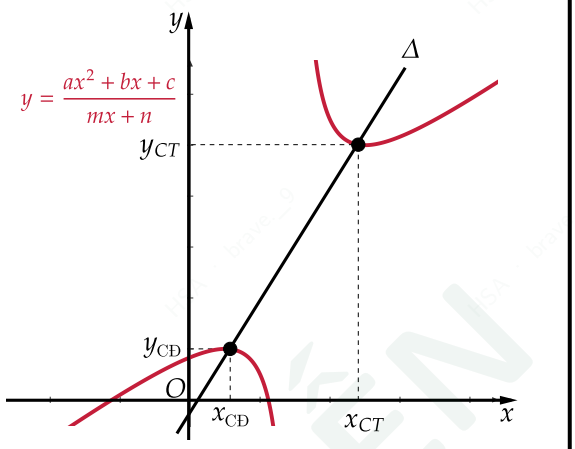
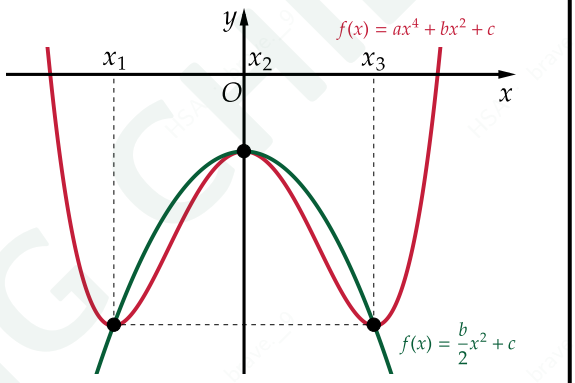
Máy sẽ trả về kết quả: $a=-2$, $b=2$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị cần tìm là $y=-2x+2$.

7.4.6 Tổng hợp phương trình qua các điểm cực trị

Bên cạnh hàm số bậc ba, các dạng hàm số thường gặp khác (như hàm phân thức, hàm trùng phương) cũng có công thức giải nhanh để xác định đường thẳng hoặc parabol đi qua các điểm cực trị.

Hàm số	Phương trình qua cực trị	Đồ thị minh hoạ
Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$	Đường thẳng qua 2 điểm cực trị: $y=-\dfrac{2(b^2-3ac)}{9a}x+d-\dfrac{bc}{9a}$ Hoặc: $y=f(x)-\dfrac{f'(x)f''(x)}{18a}$	

Hàm số	Phương trình qua cực trị	Đồ thị minh hoạ
Hàm phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$	Đường thẳng Δ qua 2 điểm cực trị: $y=\dfrac{2ax+b}{m}$	
Hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ $(ab<0)$	Parabol qua 3 điểm cực trị: $y=\dfrac{b}{2}x^2+c$	

7.4.7 Tìm tham số để hàm số đạt cực trị tại điểm bất kì

Với bài toán yêu cầu hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$, ta áp dụng quy tắc đạo hàm cấp hai như sau:

- **Điều kiện cần:** Luôn phải có $f'(x_0)=0$.
- **Quy tắc 2:**
  - Nếu $f''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
  - Nếu $f''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại.
- **Lưu ý:** Nếu $f''(x_0)=0$ thì chưa thể kết luận được. Khi đó ta phải quay lại Quy tắc 1 (xét sự đổi dấu của bảng xét dấu $f'(x)$ xung quanh lân cận điểm x_0).

Ví dụ

Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3+(m+4)x^2+(5m+2)x+m+6$ đạt cực tiểu tại

$x = -2$ là

(A) $\emptyset$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\{2\}$. (D) $\{-2\}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m+4)x + 5m + 2$; $y'' = 6x + 2(m+4)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4(m+4) + 5m + 2 = 0 \\ -12 + 2m + 8 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > 2. \end{cases}$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) ☐

Ví dụ

Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -2$. (D) $m = 0$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$, $y'' = 6x - 6$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$ nên $y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có $y''(0) < 0$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (D) ☐

Ví dụ

Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại

$x = -1$.

(A) $\{5; 1\}$. (B) $\{5\}$. (C) $\emptyset$. (D) $\{1\}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3m-1)x + m^2$; $y'' = 6x + 2(3m-1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ nên $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5. \end{array}\right.$

– Với $m = 1$, ta được $\begin{cases} y'' = 6x + 4 \\ y''(-1) = -2 < 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

– Với $m = 5$, ta được $\begin{cases} y'' = 6x + 28 \\ y''(-1) = 22 > 0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) ..... □

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$?

(A) $m = 2$ hoặc $m = -1$. (B) $m = 2$ hoặc $m = 1$.

(C) $m = 1$. (D) $m = 2$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2. \end{array}\right.$

– Với $m = 1$, ta được $y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số không có

cực trị.

– Với $m=2$, ta được $\begin{cases} y''=2x-4 \\ y''(1)=-2<0 \end{cases}$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Vậy $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) ..... □

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

(A) Không tồn tại m.
(B) $m=\pm 1$.
(C) $m=1$.
(D) $m\in\{1;2\}$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-4mx+m$; $y''=6x-4m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) ..... □

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y=mx^4+(m^2-1)x+1$ đạt cực đại tại $x=0$.

(A) $m=0$.
(B) $m=-1$.
(C) $m=1$.
(D) $-1<m<1$.

Lời giải

Ta có $y'=4mx^3+m^2-1$. Hàm số đạt cực trị tại $x=0 \Leftrightarrow y'(0)=0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

– Với $m=1$, ta được $y=x^4+1$, $y'=4x^3$. Khảo sát hàm số ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ nên không thỏa.

– Với $m=-1$, ta được $y=-x^4+1$, $y'=-4x^3$. Khảo sát hàm số ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$ nên $m=-1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) ..... □

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta tính các đạo hàm:

$$y'=3x^2-3m, \qquad y''=6x.$$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases}$$

Từ phương trình $y'(1)=0 \Leftrightarrow 3(1)^2-3m=0 \Leftrightarrow m=1$.
Mặt khác, thay $x=1$ vào đạo hàm cấp hai ta được $y''(1)=6\cdot 1=6>0$. Điều kiện cực tiểu được thỏa mãn.
Vậy $\boxed{m=1}$.

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

(A) $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. (B) $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. (C) $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. (D) $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

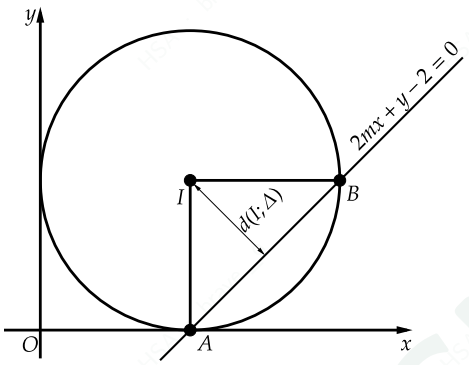
Ta có $y=x^3-3mx+2 \Rightarrow y'=3x^2-3m$.

Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ (1).

Ta có $y = \dfrac{1}{3}x \cdot y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là

$$y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0.$$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$d(I;\Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \quad (*)$$

Do $m > 0$ nên $(*)$ luôn đúng. Ta có $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \dfrac{1}{2} \cdot \sin \widehat{AIB} \le \dfrac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$d(I;\Delta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2-8m+1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) ..... □

7.4.8 Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

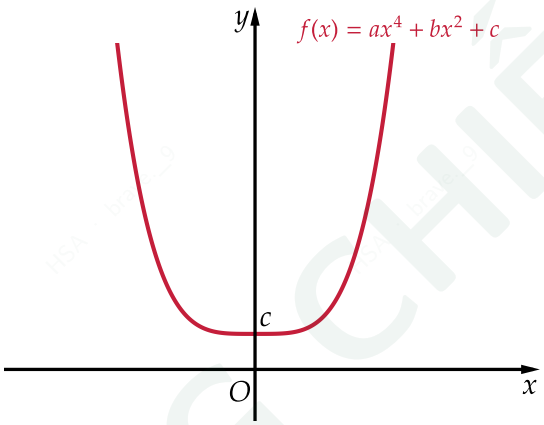
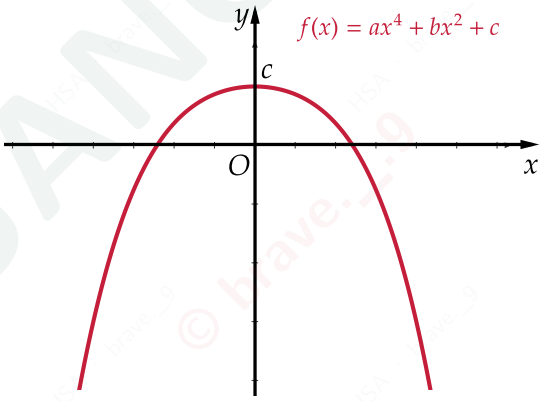
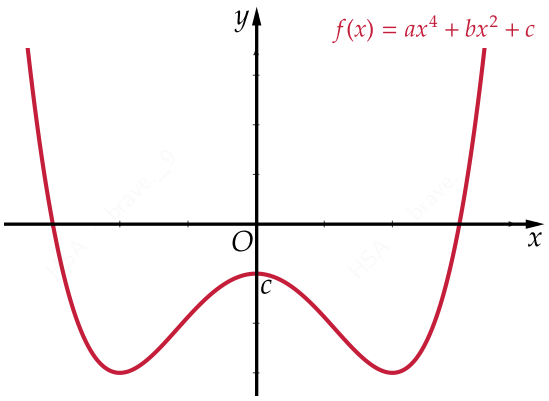
Ta có đạo hàm của hàm số:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b).$$

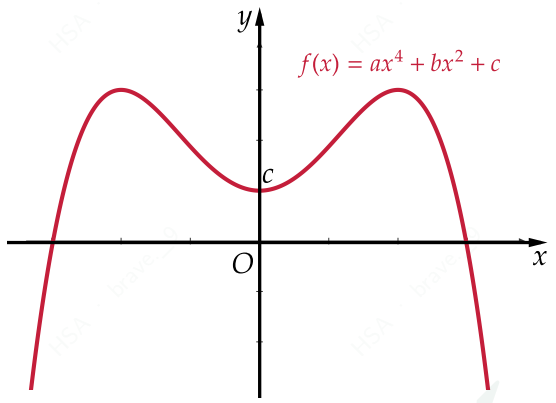
Cho $y' = 0$, ta thu được:

$$2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$$

Sự biến thiên và số điểm cực trị của hàm số phụ thuộc trực tiếp vào số nghiệm của phương trình $x^2 = -\dfrac{b}{2a}$ như sau:

Đặc điểm và Điều kiện	Đồ thị minh hoạ
Đúng 1 điểm cực tiểu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow ab \geq 0$	
Đúng 1 điểm cực đại $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow ab \geq 0$	
Có 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Longrightarrow ab < 0$	

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9

Có 1 điểm cực tiểu, 2 điểm cực đại $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases} \Longrightarrow ab<0$	

Ví dụ

Tìm m để $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

$y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

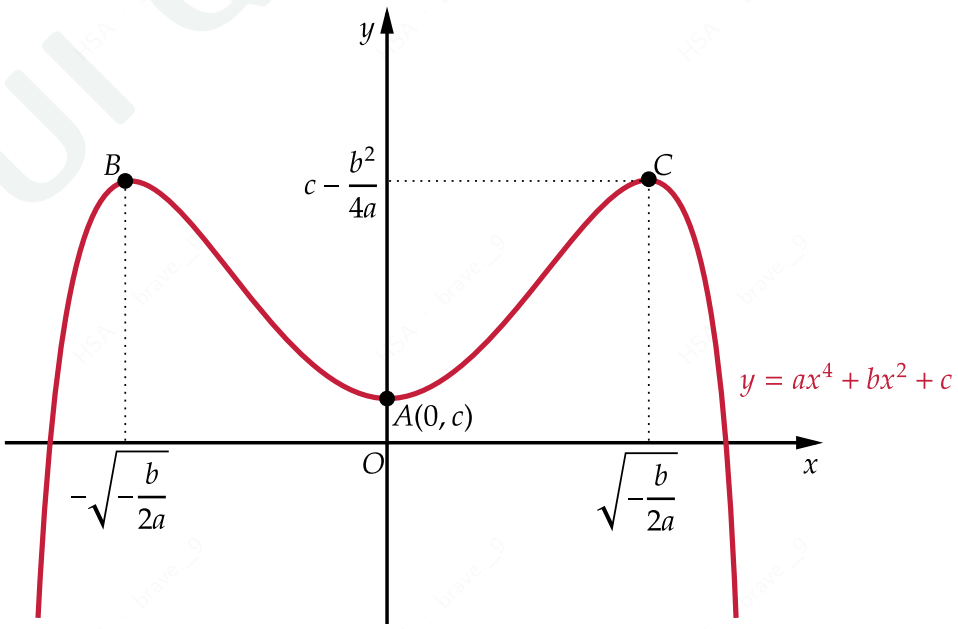
Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow x^2-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m>0$.

Vậy $\boxed{m>0}$.

7.4.9 Tọa độ ba điểm cực trị và tính chất hình học

Khi $ab<0$, ba điểm cực trị là $A(0,c)$, $B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}},\ c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}},\ c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$.

Nhận xét: B,C đối xứng qua Oy, nên BC song song Ox và tam giác ABC cân tại A.



Tính chất: Công thức cho tam giác ABC

Giả sử $ab < 0$ và đặt $\alpha = \widehat{BAC}$. Khi đó:

$$BC = \sqrt{-\frac{2b}{a}}, \quad AB = AC = \sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}, \quad S_{ABC} = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}.$$

Với tam giác ABC ở trên, bán kính đường tròn ngoại tiếp là

$$R = \frac{|b^3 - 8a|}{8|ab|}.$$

Một số điều kiện thường dùng (giả sử $ab < 0$):

Điều kiện	Công thức nhanh
ΔABC đều	$b^3 + 24a = 0$
ΔABC vuông tại A	$b^3 + 8a = 0$
$\widehat{BAC} = 120^\circ$	$3b^3 + 8a = 0$
$B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
ΔABC nhọn	$b(b^3 + 8a) > 0$
O là trọng tâm ΔABC	$b^2 - 6ac = 0$
O là trực tâm ΔABC	$b^3 + 8a - 4abc = 0$
$OA = OB = OC$	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Điểm $(0; m)$ là trọng tâm ΔABC	$m = c - \frac{b^2}{6a}$
Điểm $(0; m)$ là trực tâm ΔABC	$m = c - \frac{b^3 + 8a}{4ab}$
Điểm $(0; m)$ là tâm ngoại tiếp ΔABC	$m = c - \frac{b^3 - 8a}{8ab}$
Ba đỉnh A, B, C cách đều trục Ox	$b^2 = 8ac$
$BC = k\,AB$ $(k > 0)$	$b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Phần diện tích phía trên và phía dưới Ox bằng nhau	$5b^2 = 36ac$

BÍ QUYẾT CHIẾN

Do tam giác cân tại $A(0,c)$ và đối xứng qua Oy, các điểm đặc biệt đều thuộc Oy. Cụ thể:

$$G\left(0,\ c-\frac{b^2}{6a}\right), H\left(0,\ c-\frac{b^3+8a}{4ab}\right), I\left(0,\ c-\frac{b^3-8a}{8ab}\right),$$

với G, H, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Ví dụ

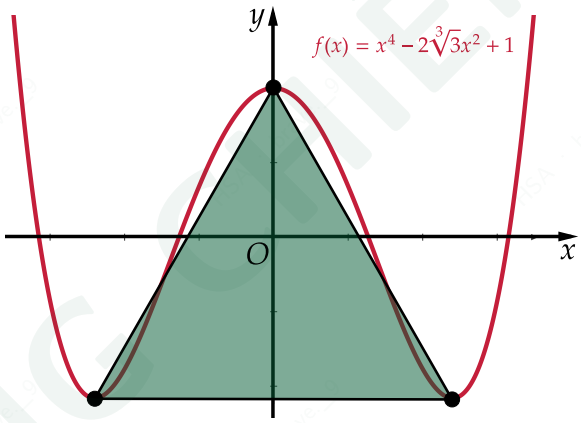
Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

Lời giải

Xác định: $a=1,\ b=2m,\ c=1$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi:

$$ab<0 \Leftrightarrow 2m<0 \Leftrightarrow m<0. \quad (*)$$



Tam giác ABC đều khi và chỉ khi (áp dụng công thức trong bảng):

$$\begin{aligned} b^3+24a=0 &\Leftrightarrow (2m)^3+24=0\\ &\Leftrightarrow 8m^3=-24\\ &\Leftrightarrow m^3=-3\\ &\Leftrightarrow m=-\sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

Kiểm tra: $m=-\sqrt[3]{3}<0$, thỏa mãn $(*)$. Vậy $\boxed{m=-\sqrt[3]{3}}$.

7.4.10 Cực trị của hàm phân thức bậc 2 trên bậc nhất có tham số

Xét hàm số

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e} \qquad (a\neq 0,\ d\neq 0).$$

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{e}{d}\right\}$. Đạo hàm:

$$y'=\frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}.$$

Đặt $g(x)=adx^2+2aex+(be-dc)$. Để gọn kí hiệu, đặt

$$D_g=(ae)^2-ad(be-dc).$$

Hàm số này có 2 trường hợp không có cực trị hoặc có 2 cực trị (1 cực đại, 1 cực tiểu).

Tính chất: Điều kiện có cực trị

– **Hàm số không có cực trị** $\Leftrightarrow g(x)=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

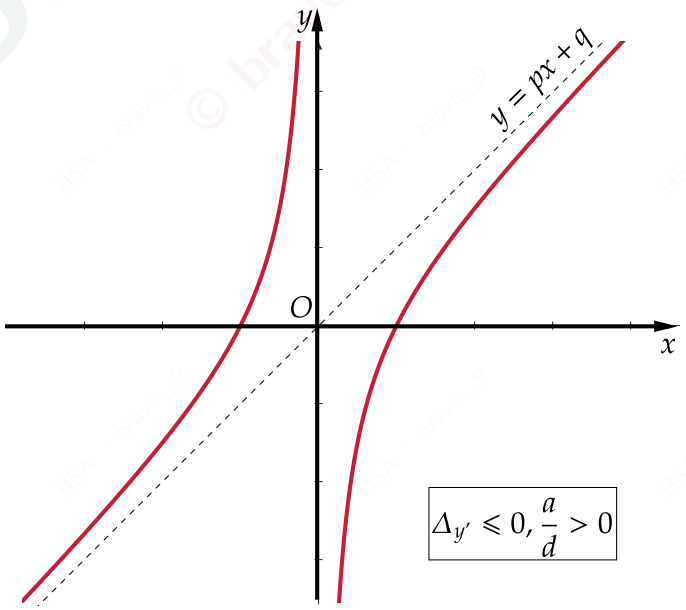
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ D_g \leq 0 \end{cases}$$

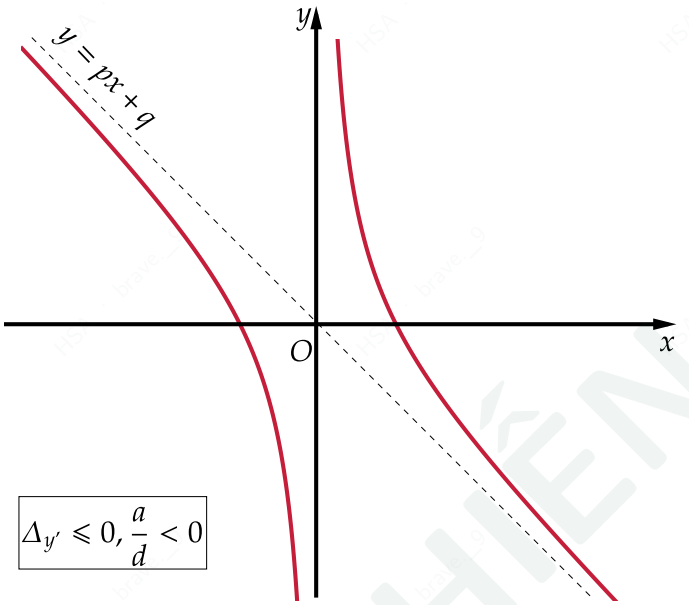
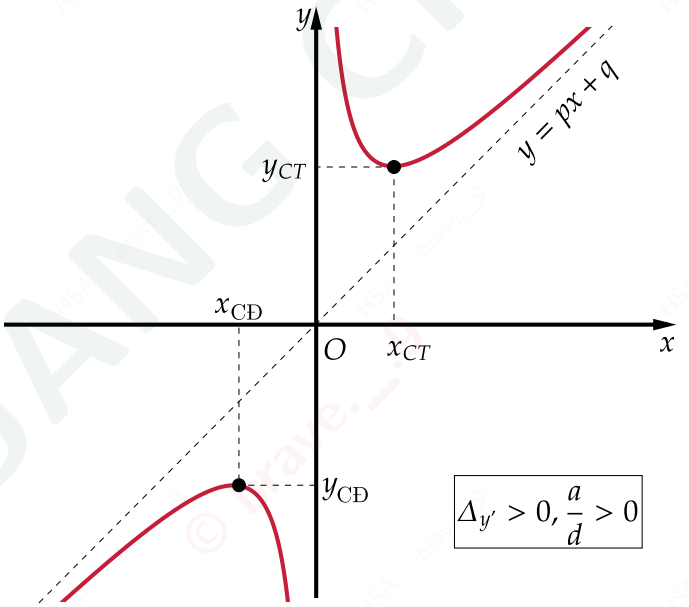
Khi đó hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định (nếu $ad>0$) hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định (nếu $ad<0$).

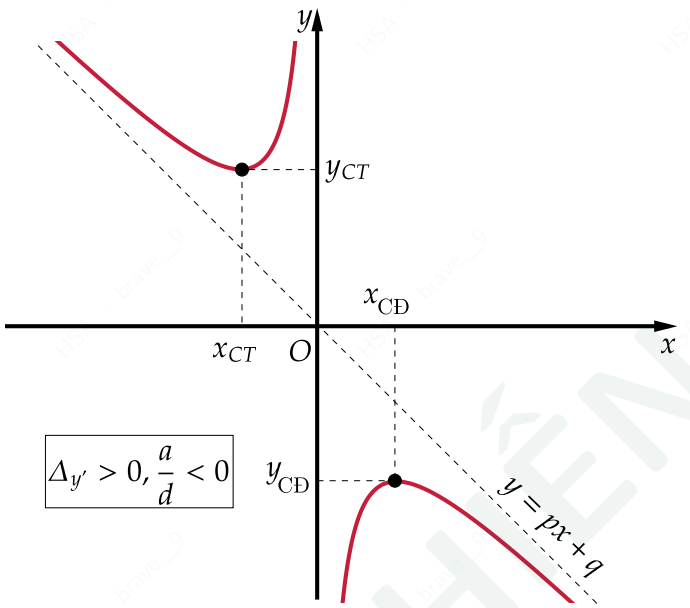
– **Hàm số có 2 cực trị** $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ D_g > 0 \\ g\left(-\dfrac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ D_g > 0 \end{cases}$$

(Điều kiện $g\left(-\dfrac{e}{d}\right) \neq 0$ luôn tự động thỏa mãn. Thật vậy, ta có hằng đẳng thức $D_g = a\cdot d\cdot g\left(-\dfrac{e}{d}\right)$, nên khi $D_g>0$ thì chắc chắn $g\left(-\dfrac{e}{d}\right)\neq 0$).

Đặc điểm và Điều kiện	Đồ thị minh hoạ
Không có cực trị $g(x)=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\begin{cases} ad>0 \\ D_g \leq 0 \end{cases}$	

Không có cực trị $g(x)=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\begin{cases} ad<0 \\ D_g \le 0 \end{cases}$	
Có cực trị (1 cực đại, 1 cực tiểu) $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} ad>0 \\ D_g > 0 \end{cases}$	

Có cực trị (1 cực đại, 1 cực tiểu) $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} ad<0 \\ D_g>0 \end{cases}$	

Chú ý: Trường hợp a hoặc d chưa chắc khác 0

Nếu đề bài không cho chắc chắn $a\neq 0$ và $d\neq 0$ (ví dụ khi a,d phụ thuộc tham số m) thì phải xét thêm các trường hợp $a=0$ và $d=0$ trước khi áp dụng bảng trên.

BÙI QUANG CHIẾN
© brave_9

Chương

8 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

8.1 Định nghĩa và quy tắc tìm GTLN và GTNN

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$).

a) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathscr{D}$ sao cho

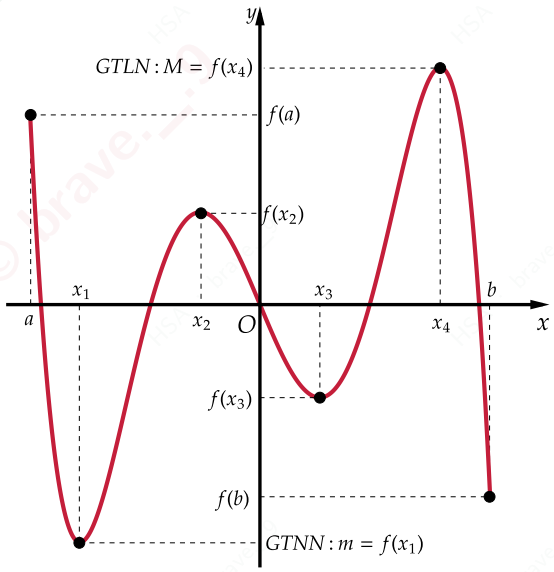
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi } x \in \mathscr{D}$$

thì $M = f(x_0)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** của f trên $\mathscr{D}$, ký hiệu $M = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.

b) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathscr{D}$ sao cho

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{với mọi } x \in \mathscr{D}$$

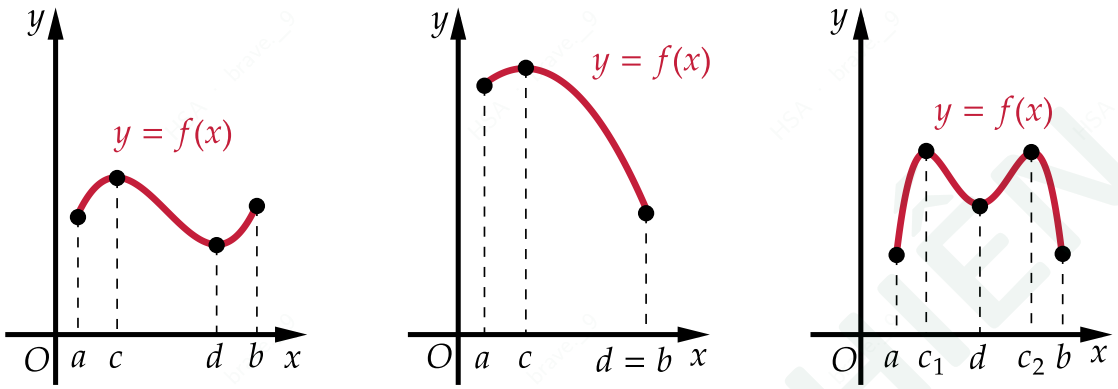
thì $m = f(x_0)$ được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của f trên $\mathscr{D}$, ký hiệu $m = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.



BUI QUANG CHIẾN

Định lý: Định lý về giá trị cực trị

Nếu hàm số f liên tục trên một đoạn $[a;b]$, thì f luôn đạt được giá trị lớn nhất là $f(c)$ và giá trị nhỏ nhất là $f(d)$ tại các điểm c, d nào đó thuộc đoạn $[a;b]$.



Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ có thể đạt được tại các điểm nằm trong khoảng $(a;b)$, tại các đầu mút của đoạn, hoặc đạt cùng một giá trị tại nhiều điểm phân biệt.

8.1.1 Quy tắc tìm trên đoạn $[a;\ b]$

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, trừ một số hữu hạn điểm.

QUY TẮC

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (a;b)$ tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không tồn tại. $(i = 1, 2, \cdots, k-1, k)$.
2. Tính các giá trị của $f(x_1), \ldots, f(x_k), f(a), f(b)$.
3. So sánh các giá trị ta vừa tìm được: giá trị lớn nhất trong các số đó là $\max\limits_{[a;b]} f$, giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{[a;b]} f$.

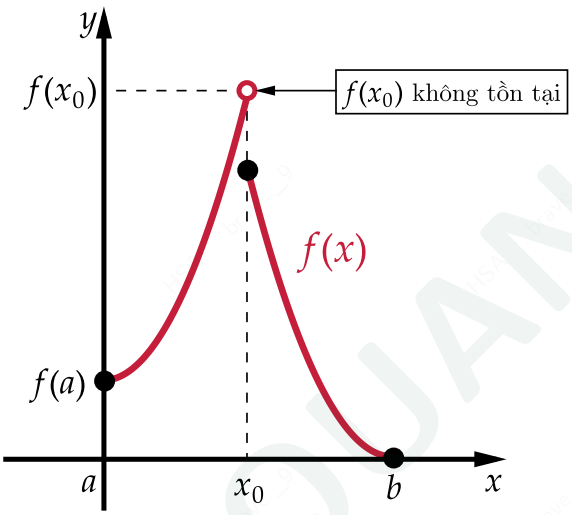
8.1.2 Quy tắc tìm trên khoảng $(a;\ b)$

Khi tìm GTLN, GTNN của f trên khoảng mở (a, b) (trong đó a hoặc b có thể là $\pm\infty$):

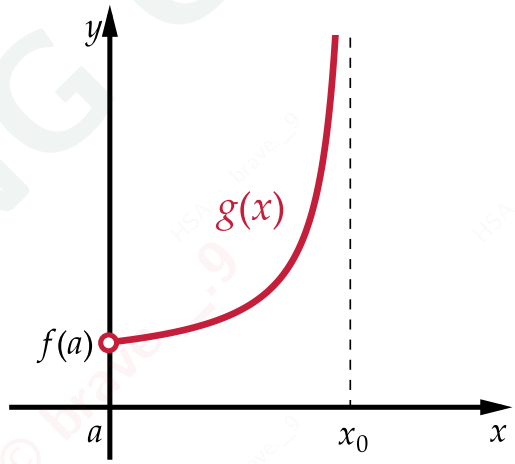
1. Tìm các điểm tới hạn trong (a, b): nghiệm của $f'(x) = 0$ và điểm làm $f'(x)$ không xác định.
2. Tính giá trị tại các điểm cực trị và hai giới hạn biên:

$$A = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad B = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

3. So sánh để suy ra GTLN, GTNN (nếu có).
4. Nếu GTLN (hoặc GTNN) chỉ đạt tại giới hạn biên thì hàm số **không có** GTLN (hoặc GTNN) trên khoảng mở đó.



Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $f(b)$, nhưng không có giá trị lớn nhất



Hàm số $g(x)$ liên tục nhưng không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

8.2 Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay (Casio fx-580VN X) tìm GTLN, GTNN

Phương pháp sử dụng Bảng giá trị (Table) trên máy tính cầm tay giúp ta quét các giá trị của hàm số $y = f(x)$ trên một đoạn $[a; b]$ để tìm ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất một cách nhanh chóng.

Công thức tính bước nhảy (Step) để chia 40 khoảng (đạt độ chính xác cao nhất) là:

$$\text{Step} = \frac{\text{End} - \text{Start}}{40} = \frac{b-a}{40}$$

Chú ý

Để máy tính có đủ bộ nhớ quét được 41 dòng giá trị, ta **bắt buộc phải tắt hàm** $g(x)$ bằng cách bấm liên tiếp:

SHIFT MENU ▽ ▽ 1 (Bảng giá trị) 1 ($f(x)$).

8.2.1 Quy trình thao tác bấm máy

– **Bước 1:** Thiết lập chỉ dùng 1 hàm $f(x)$ (như chú ý ở trên) để giải phóng bộ nhớ.

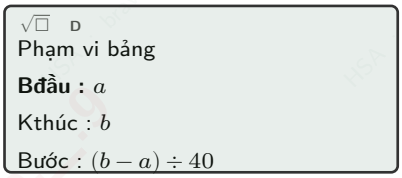
– **Bước 2:** Vào phương thức Bảng giá trị bằng cách bấm MENU 8.

– **Bước 3:** Nhập biểu thức hàm số $f(x)$. Bấm =.

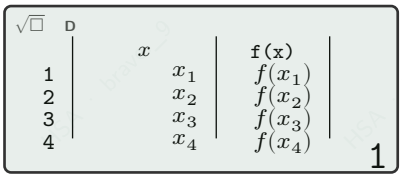


– **Bước 4:** Nhập thông số phạm vi quét:

* Bắt đầu (Start): a =
* Kết thúc (End): b =
* Bước nhảy (Step): $(b-a) \div 40$ =



– **Bước 5:** Dùng phím ▽ và △ để dò dọc theo cột $f(x)$. Số lớn nhất xấp xỉ GTLN, số nhỏ nhất xấp xỉ GTNN.



8.3 Xét GTLN và GTNN thông qua bảng biến thiên và đồ thị

8.3.1 Dựa vào bảng biến thiên

Để xác định giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên một miền $\mathscr{D}$ cho trước thông qua bảng biến thiên, ta quan sát dòng biểu diễn giá trị của $f(x)$:

– **Giá trị lớn nhất:** Tương ứng với vị trí **cao nhất** của các mũi tên (chiều biến thiên) trên miền đang xét.

– **Giá trị nhỏ nhất:** Tương ứng với vị trí **thấp nhất** của các mũi tên (chiều biến thiên) trên miền đang xét.

Chú ý: Lưu ý quan trọng khi xét bảng biến thiên

– Hàm số chỉ đạt GTLN, GTNN bằng M khi tồn tại hoành độ $x_0 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.

– Nếu giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất rơi vào các vị trí đầu mút của khoảng mở (hoặc khi x tiến tới $\pm\infty$) mà biến x không thể đạt tới, thì hàm số **không** có GTLN, GTNN trên khoảng đó.

Xét bảng biến thiên minh họa của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta xét trên các miền khác nhau:

– **Trên $\mathbb{R}$:** Hàm số không có GTLN và GTNN do giới hạn của hàm số tiến về $-\infty$ và $+\infty$.

– **Trên đoạn $[x_1; x_2]$:** $\max\limits_{[x_1;x_2]} f(x) = f(x_1)$ (đạt tại $x = x_1$) và $\min\limits_{[x_1;x_2]} f(x) = f(x_2)$ (đạt tại $x = x_2$).

– **Trên khoảng $(x_1; x_2)$:** Giá trị hàm số nằm trong khoảng $(f(x_2); f(x_1))$ nhưng không tồn tại $x \in (x_1; x_2)$ để $f(x) = f(x_1)$ hoặc $f(x) = f(x_2)$. Do đó, hàm số **không** có GTLN và GTNN trên khoảng này.

8.3.2 Dựa vào đồ thị hàm số

Khi quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$:

– **Giá trị lớn nhất** chính là tung độ của điểm **cao nhất** trên phần đồ thị biểu diễn miền $\mathscr{D}$.

– **Giá trị nhỏ nhất** chính là tung độ của điểm **thấp nhất** trên phần đồ thị biểu diễn miền $\mathscr{D}$.

Chú ý: Phân tích điểm đầu mút trên đồ thị

- Nếu đồ thị kéo dài vô tận lên phía trên (hoặc xuống dưới) thì hàm số **không có** GTLN (hoặc GTNN).
- Nếu điểm cao nhất hoặc thấp nhất là một điểm rỗng (tương ứng với các đầu mút của khoảng mở, không lấy dấu bằng), thì tung độ của điểm đó **không được công nhận** là GTLN hay GTNN.

8.4 GTLN và GTNN của hàm số không chứa tham số

8.4.1 Tính toán trực tiếp trên đoạn, khoảng

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;\, 2]$.

Lời giải

Hàm số liên tục trên $[-3;\, 2]$, nên đạt GTLN và GTNN trên đoạn này.

Ta tính đạo hàm:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Cho $f'(x) = 0$: $x = -1$ hoặc $x = 1$, cả hai đều thuộc $(-3;\, 2)$.

Tính giá trị tại các điểm cần thiết:

$$f(-3) = -27 + 9 + 2 = -16, \quad f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4,$$
$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0, \quad f(2) = 8 - 6 + 2 = 4.$$

So sánh: $-16 < 0 < 4$. Vậy:

$$\max_{[-3;\,2]} f = 4 \text{ (tại } x = -1 \text{ và } x = 2), \quad \min_{[-3;\,2]} f = -16 \text{ (tại } x = -3).$$

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$.

Đặt $f(x) = 4 - x^2$. Ta có $f'(x) = -2x$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-2; 2]$.

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[-2; 2]$:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

Từ bảng: $0 \leq f(x) \leq 4$ với mọi $x \in [-2; 2]$. Vì hàm căn đồng biến:

- $\max\limits_{[-2;\,2]} y = \sqrt{4} = 2$, đạt tại $x = 0$.
- $\min\limits_{[-2;\,2]} y = \sqrt{0} = 0$, đạt tại $x = \pm 2$.

8.4.2 Phương pháp đặt ẩn phụ / đổi biến

Với các hàm lượng giác, mũ, logarit, ta thường đặt ẩn phụ t để đưa bài toán về tìm GTLN – GTNN của một hàm đại số trên một đoạn $[p;\, q]$ xác định bởi miền giá trị của t.

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + \sin x - 1$.

Lời giải

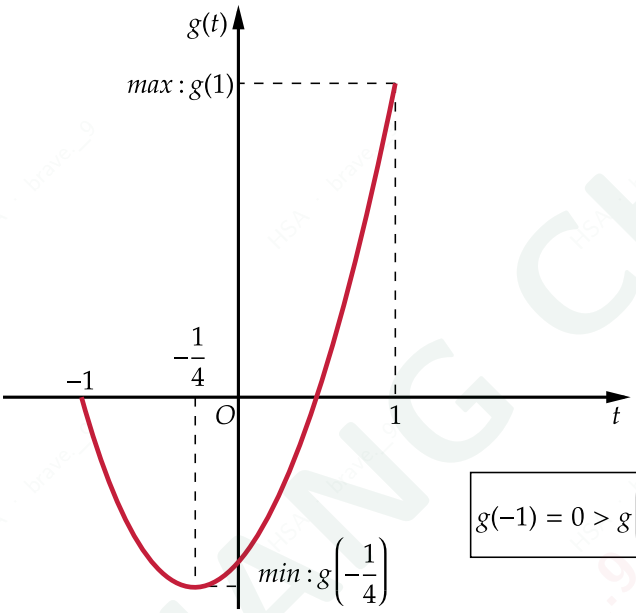
Đặt $t = \sin x$. Vì $\sin x \in [-1;\, 1]$ nên $t \in [-1;\, 1]$.

Bài toán trở thành: tìm GTLN – GTNN của $g(t) = 2t^2 + t - 1$ trên đoạn $[-1;\, 1]$.

Tính đạo hàm: $g'(t) = 4t + 1$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4} \in (-1;\, 1)$.

Bảng biến thiên của $g(t)$ trên $[-1;\, 1]$:

t	-1		$-\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	2



$g(-1) = 0 > g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

Vậy:

$$\min y = -\frac{9}{8} \quad \text{và} \quad \max y = 2.$$

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $y = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, chứa $[-2;0]$.

Đạo hàm:

$$y' = 2x + \frac{2}{1-2x} = \frac{-4x^2+2x+2}{1-2x}.$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 2 = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại, } 1 \notin [-2;0]) \\ x = -\dfrac{1}{2} \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[-2;0]$:

x	-2		$-\frac{1}{2}$		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$4-\ln 5$	$\searrow$	$\frac{1}{4}-\ln 2$	$\nearrow$	0

Kết luận:

$$\min_{[-2;0]} y = \frac{1}{4} - \ln 2 \quad \text{và} \quad \max_{[-2;0]} y = 4 - \ln 5.$$

8.5 Bài toán GTLN và GTNN chứa tham số

8.5.1 GTLN, GTNN bằng một số cho trước

Ví dụ

Tìm m để $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -5$ với $f(x) = x^3 - 3x + m$.

Lời giải

Tính đạo hàm:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Cho $f'(x) = 0$: $x = 1$ (thoả mãn) hoặc $x = -1$ (loại, $-1 \notin [0;2]$).

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[0;2]$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+2$

Từ bảng: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = m-2$. Theo yêu cầu:

$$m-2=-5 \Leftrightarrow \boxed{m=-3}.$$

8.5.2 Hệ thức liên hệ giữa GTLN và GTNN

Nhận xét

Với hàm đơn điệu trên đoạn $[a;b]$, tổng $\max f + \min f = f(a) + f(b)$ bất kể hàm số đó đồng biến hay nghịch biến.

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ có $\max\limits_{[2;4]} y + \min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{16}{3}$.

Lời giải

Hàm số liên tục trên $[2;4]$ (điểm gián đoạn $x=1 \notin [2;4]$).

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

TH1: $m=-1 \Rightarrow y=1$.

Suy ra: $\max\limits_{[2;4]} y + \min\limits_{[2;4]} y = 2 \neq \dfrac{16}{3}$ (loại).

TH2: $m \neq -1$. Hàm số đơn điệu, và hàm số sẽ đạt được GTLN và GTNN tại 2 đầu mút $x=2$ và $x=4$.

Ta giải phương trình:

$$y(2)+y(4)=\frac{16}{3} \Leftrightarrow (m+2)+\frac{m+4}{3}=\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4m+10=16 \Leftrightarrow \boxed{m=\frac{3}{2}}.$$

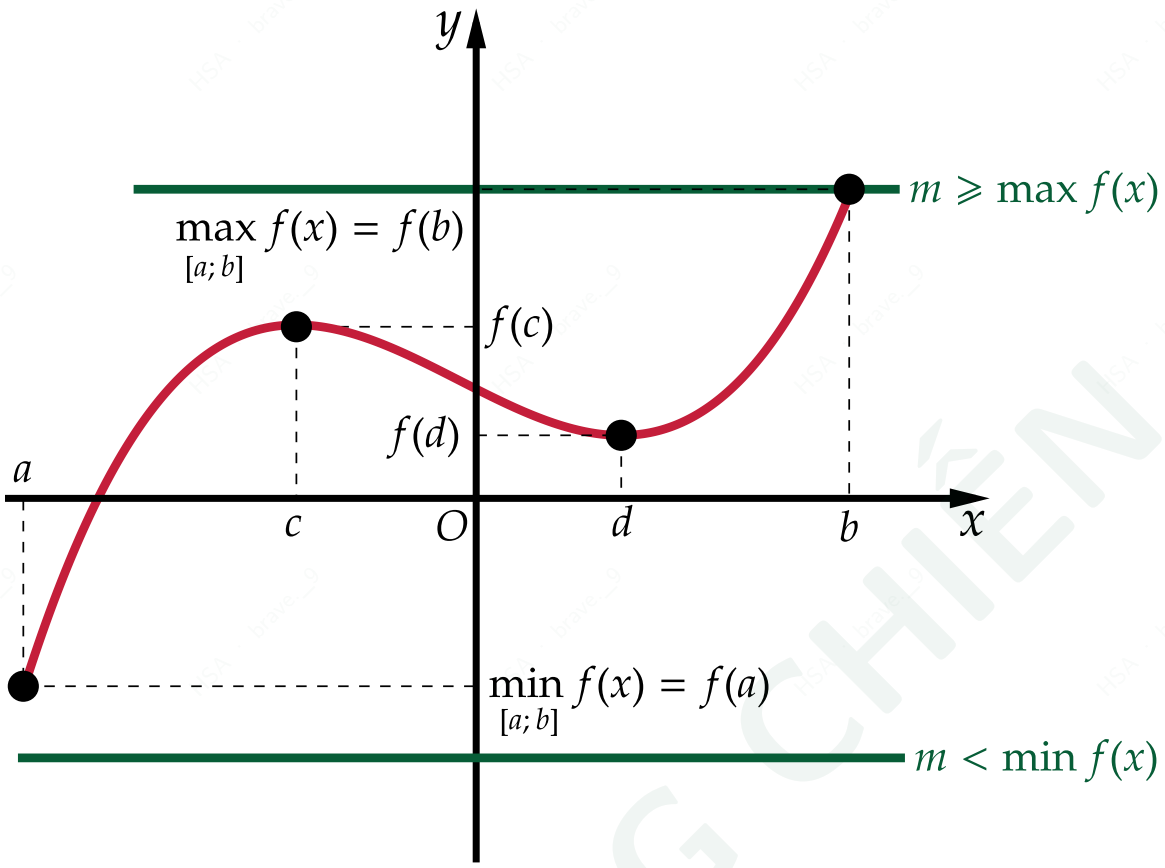
8.6 Ứng dụng của GTLN và GTNN vào phương trình và bất phương trình chứa tham số

8.6.1 Bài toán trên đoạn $[a;b]$

Khi hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, nó luôn có giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên đoạn đó. Do vậy, để giải các bài toán biện luận bất phương trình chứa tham số m, ta chỉ cần so sánh m với GTLN hoặc GTNN của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Bài toán	Điều kiện tương đương
$m>f(x),\ \forall x\in[a;b]$	$m>\max\limits_{[a;b]}f(x)$
$m\geq f(x),\ \forall x\in[a;b]$	$m\geq\max\limits_{[a;b]}f(x)$
$m<f(x),\ \forall x\in[a;b]$	$m<\min\limits_{[a;b]}f(x)$
$m\leq f(x),\ \forall x\in[a;b]$	$m\leq\min\limits_{[a;b]}f(x)$
$m>f(x)$ có nghiệm $x\in[a;b]$	$m>\min\limits_{[a;b]}f(x)$
$m\geq f(x)$ có nghiệm $x\in[a;b]$	$m\geq\min\limits_{[a;b]}f(x)$
$m<f(x)$ có nghiệm $x\in[a;b]$	$m<\max\limits_{[a;b]}f(x)$
$m\leq f(x)$ có nghiệm $x\in[a;b]$	$m\leq\max\limits_{[a;b]}f(x)$

BÙI QUANG CHIẾN



Ví dụ

Tìm tất cả giá trị m để bất phương trình $x^3 - 3x + m \geq 0$ đúng với mọi $x \in [0;\, 2]$.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương với: $m \geq -(x^3 - 3x)$ với mọi $x \in [0;2]$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$m \geq \max_{[0;\,2]} f(x), \quad \text{với } f(x) = -x^3 + 3x.$$

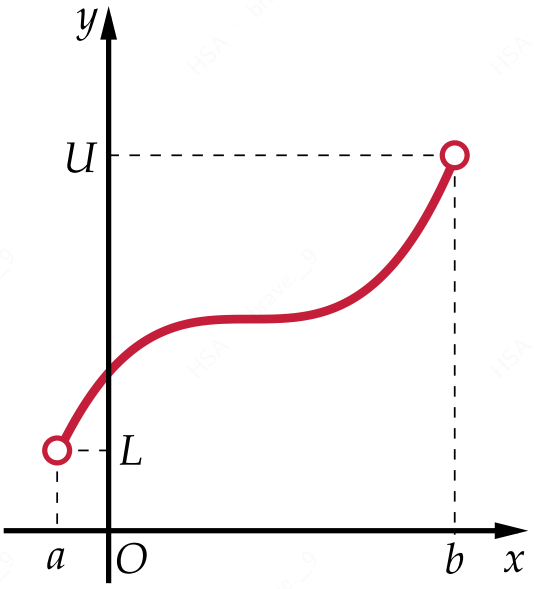
Đạo hàm $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \in (0;2)$ (thỏa mãn).

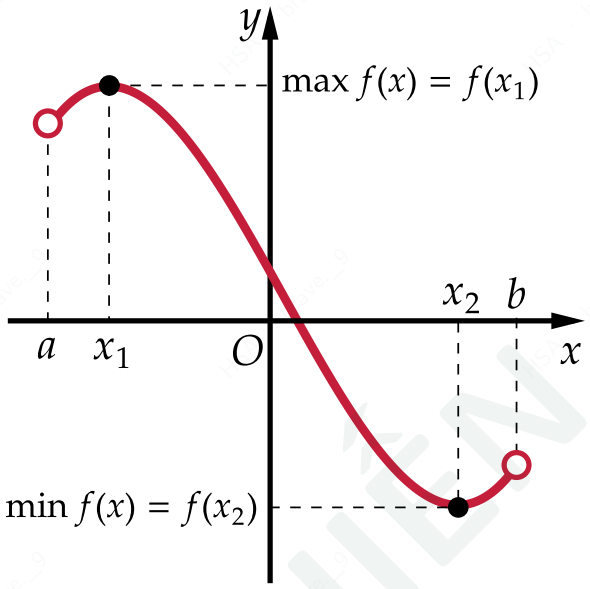
Tính các giá trị tại đầu mút và điểm tới hạn: $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = -2$.

Suy ra $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 2$. Vậy điều kiện cần tìm là: $\boxed{m \geq 2}$.

8.6.2 Bài toán trên khoảng $(a;b)$

Khác với đoạn, khi xét trên khoảng $(a;b)$, hàm số có thể không đạt được GTLN hay GTNN thực sự do hai đầu mút là khoảng mở.





Gọi U là giới hạn cận trên và L là giới hạn cận dưới của hàm số. Ta có quy tắc xét dấu bằng $(=)$ như sau:

- Yêu cầu **đúng với mọi** x: Luôn **có dấu bằng** khi so sánh với mút mở U, L. (Ví dụ: $m > f(x)$ trở thành $m \geq U$, vì đường $y = m$ chạm vào điểm rỗng U thì vẫn lớn hơn toàn bộ phần đồ thị thực sự).
- Yêu cầu **có nghiệm**: Luôn **bỏ dấu bằng** khi so sánh với mút mở U, L. (Ví dụ: $m \leq f(x)$ trở thành $m < U$, vì nếu $m = U$ thì đường ngang đi qua điểm rỗng, không cắt đồ thị tại điểm nào).

Bài toán	Cận tương ứng đạt được (Có Max/Min)	Cận không đạt được (Chỉ có U, L)
$m > f(x),\ \forall x \in (a;b)$	$m > \max\limits_{(a;b)} f(x)$	$m \geq U$
$m \geq f(x),\ \forall x \in (a;b)$	$m \geq \max\limits_{(a;b)} f(x)$	$m \geq U$
$m < f(x),\ \forall x \in (a;b)$	$m < \min\limits_{(a;b)} f(x)$	$m \leq L$
$m \leq f(x),\ \forall x \in (a;b)$	$m \leq \min\limits_{(a;b)} f(x)$	$m \leq L$
$m > f(x)$ có nghiệm	$m > \min\limits_{(a;b)} f(x)$	$m > L$
$m \geq f(x)$ có nghiệm	$m \geq \min\limits_{(a;b)} f(x)$	$m > L$
$m < f(x)$ có nghiệm	$m < \max\limits_{(a;b)} f(x)$	$m < U$

$m \le f(x)$ có nghiệm	$m \le \max\limits_{(a;b)} f(x)$	$m < U$

8.6.3 Phương pháp đặt ẩn phụ và cô lập tham số

Đối với các phương trình hoặc bất phương trình chứa tham số m có dạng phức tạp, ta quy về dạng cơ bản $f(x,m)=0$ hoặc bất phương trình thông qua phép đặt ẩn phụ.

Quy trình 4 bước thực hiện:

1. **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định của biến x.
2. **Bước 2:** Đặt ẩn phụ $t=u(x)$ hoặc $x=u(t)$. Khảo sát hàm số $u(x)$ để tìm chính xác tập giá trị K của biến t.
3. **Bước 3:** Đưa bài toán về dạng cô lập tham số $g(t)=h(m)$ (hoặc bất phương trình tương ứng) với $t \in K$.
4. **Bước 4:** Khảo sát, tìm GTLN và GTNN của $g(t)$ trên miền K để biện luận số nghiệm theo m.

Nhận xét: Một số phép đặt ẩn phụ đặc biệt đối với hàm vô tỉ

- Với phương trình chứa $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}$ và $\sqrt{(ax+b)(cx+d)}$: Ta ưu tiên đặt $t=\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}$.
- Với phương trình chứa $\sqrt{a+bx}$ và $\sqrt{c-bx}$ (điều kiện $a+c>0$): Dựa vào hằng đẳng thức lượng giác cơ bản $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ta có thể đặt:

$$\begin{cases} \sqrt{a+bx}=\sqrt{a+c}\sin\alpha \\ \sqrt{c-bx}=\sqrt{a+c}\cos\alpha \end{cases} \quad \text{với } \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Nếu hệ thức phía sau phức tạp, có thể tiếp tục sử dụng phép thế $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ (với $t \in [0;1]$) để chuyển hoàn toàn về hàm phân thức theo biến t.

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $6x+\sqrt{(2+x)(8-x)} \le x^2+m-1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;8]$.

Lời giải

Ta biến đổi bất phương trình đã cho về dạng cô lập tham số m:

$$m \geq -x^2 + 6x + 1 + \sqrt{(2+x)(8-x)}$$

$$\Leftrightarrow m \geq (-x^2 + 6x + 16) + \sqrt{(2+x)(8-x)} - 15.$$

Nhận thấy $-x^2 + 6x + 16 = (2+x)(8-x)$. Đặt $t = \sqrt{(2+x)(8-x)}$.

Xét hàm số biểu thức trong căn $u(x) = -x^2 + 6x + 16$ trên đoạn $[-2;8]$, ta có:

$u'(x) = -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [-2;8]$.

Tính các giá trị: $u(-2) = 0$, $u(3) = 25$, $u(8) = 0$.

Suy ra $0 \leq u(x) \leq 25$. Do đó, điều kiện của t là $t \in [0;5]$.

Bài toán trở thành: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng

$$m \geq t^2 + t - 15, \quad \forall t \in [0;5].$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 15$ trên đoạn $[0;5]$. Đạo hàm $f'(t) = 2t + 1 > 0$ với mọi $t \in (0;5)$.

Ta có bảng biến thiên của $f(t)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:

t	0		5
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-15	$\nearrow$	15

Để bất phương trình ẩn t nghiệm đúng với mọi $t \in [0;5]$, đường thẳng $y = m$ phải nằm trên hoặc chạm đỉnh cao nhất của đồ thị $f(t)$ trên đoạn này. Tức là:

$$m \geq \max_{[0;5]} f(t) \Leftrightarrow m \geq 15.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\boxed{m \geq 15}$.

Ví dụ

Tìm m để bất phương trình $4\sqrt{6 + x - x^2} - 3x \leq m\left(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}\right)$ có nghiệm thực.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \in [-2;3]$.

Đặt $t = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}$ với $x \in [-2;3]$.

Ta có $t' = \dfrac{\sqrt{3-x} - 2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}}$.

Cho $t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3 - x = 4(x+2) \Leftrightarrow x = -1 \in [-2;3]$.

Ta có bảng biến thiên của t trên đoạn $[-2;3]$:

x	-2		-1		3
t'		$+$	0	$-$	
t	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\sqrt{5}$

Suy ra tập giá trị của t là $t \in [\sqrt{5};5]$.

Mặt khác: $t^2 = 14 - 3x + 4\sqrt{6+x-x^2} \Rightarrow 4\sqrt{6+x-x^2} - 3x = t^2 - 14$.

Bất phương trình ban đầu trở thành: $t^2 - 14 \le mt$.

Vì $t \in [\sqrt{5};5]$ nên $t > 0$, ta chia hai vế cho t:

$$m \ge \frac{t^2-14}{t}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-14}{t}$ trên đoạn $[\sqrt{5};5]$: $f'(t) = \dfrac{t^2+14}{t^2} > 0, \forall t \in [\sqrt{5};5]$. Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $[\sqrt{5};5]$.

Để bất phương trình có nghiệm thực, ta cần:

$$m \ge \min_{[\sqrt{5};5]} f(t) = f(\sqrt{5}) = \frac{5-14}{\sqrt{5}} = -\frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\boxed{m \ge -\dfrac{9\sqrt{5}}{5}}$.

Ví dụ

Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} \ge \sqrt{-x^2+9x+m}$ có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $0 \le x \le 9$ và $-x^2 + 9x + m \ge 0$.

Bình phương hai vế của bất phương trình, ta được:

$$x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} \ge -x^2 + 9x + m$$

$$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{-x^2+9x} \geq -x^2+9x+m \quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{-x^2+9x}$. Do $x \in [0;9]$ nên $-x^2+9x \in \left[0;\dfrac{81}{4}\right]$, suy ra $t \in \left[0;\dfrac{9}{2}\right]$.
Bất phương trình $(*)$ trở thành:

$$9+2t \geq t^2+m \Leftrightarrow m \leq -t^2+2t+9$$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+9$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$. Ta có $f'(t)=-2t+2$; cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	0		1		$\dfrac{9}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	9	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\dfrac{9}{4}$

Để bất phương trình có nghiệm, đường thẳng $y=m$ chỉ cần nằm dưới hoặc chạm vào điểm cao nhất của đồ thị hàm số $f(t)$. Tức là:

$$m \leq \max_{[0;9/2]} f(t) = 10.$$

Vậy điều kiện để bất phương trình có nghiệm là $\boxed{m \leq 10}$.

Ví dụ

Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị m_1+m_2 bằng

(A) 3. (B) 5. (C) 10. (D) 2.

Lời giải

Với mọi $x \in [2;5]$ có $f'(x)=\dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m.

$\forall m \neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2;5] \Rightarrow \min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)+f(5)=m+2m$.

Từ giả thiết ta được $m^2-10=m+2m \Leftrightarrow m^2-3m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Vậy $m_1+m_2=3$.

Chọn đáp án (A) ..... □

Ví dụ

Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

(A) -2. (B) 4. (C) -4. (D) 0.

Lời giải

Đặt $y=f(x)=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2\left(x^3-3x+m+1\right)\left(3x^2-3\right)$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ m=-x^3+3x-1=g(x). \end{array}\right.$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$. Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Nếu $m \in [-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0 \in [-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \notin [-3;1]$ thì $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \in [-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\left\{(m-1)^2;(m+3)^2\right\}$.

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0 \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \text{ (TM)} \\ m=0 \text{ (KTM)}. \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0 \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \text{ (TM)} \\ m=-2 \text{ (KTM)}. \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Chọn đáp án (A) ..... □

Ví dụ

Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20 (với m là tham số). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $0<m\le 2$. (B) $4<m\le 8$. (C) $2<m\le 4$. (D) $m>8$.

Lời giải

Ta có: $\min\limits_{[0;3]} y=20 \Leftrightarrow \begin{cases} mx+\dfrac{36}{x+1}\ge 20, \forall x\in[0;3] \\ \exists x_0\in[0;3]: mx_0+\dfrac{36}{x_0+1}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{20x-16}{x(x+1)}, \forall x\in(0;3] \\ \exists x_0\in(0;3]: m=\dfrac{20x_0-16}{x_0(x_0+1)} \end{cases} \quad (*)$

(vì $y(0)=36>20$).

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{20x-16}{x(x+1)}$ trên $(0;3]$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-20x^2+32x+16}{[x(x+1)]^2}$; $g'(x)=0 \Rightarrow -20x^2+32x+16=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (tm)} \\ x=-\dfrac{2}{5} \text{ (l)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$\dfrac{11}{3}$

Do đó, từ $(*)$ suy ra $m=4$. Vậy $2<m\le 4$.

Chọn đáp án C. □

8.6.4 Bài toán tối ưu thực tế

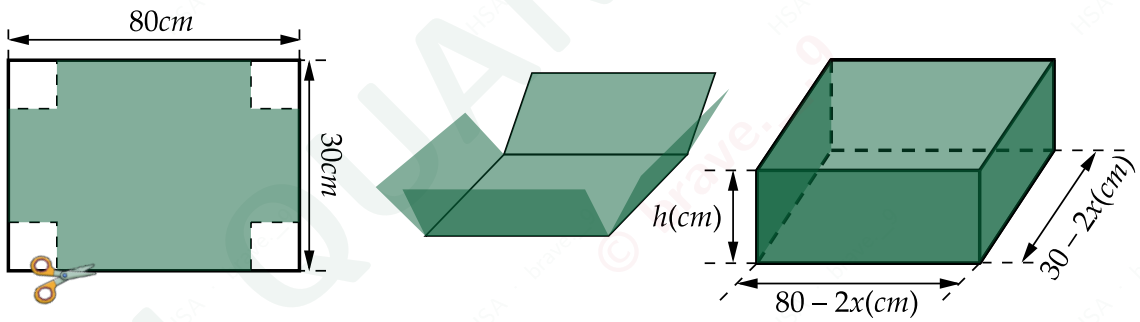
Nhận xét

Nhiều bài toán thực tế (tìm kích thước tối ưu, chi phí nhỏ nhất, lợi nhuận lớn nhất, ...) đều quy về tìm GTLN – GTNN của một hàm số trên một đoạn hoặc khoảng xác định bởi điều kiện thực tế.

Ví dụ

Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



Khi cắt bốn góc và gấp lại, chiếc hộp tạo thành có kích thước như sau:

- Chiều cao của hộp: $h = x$.
- Chiều rộng của đáy hộp: $w = 30 - 2x$.
- Chiều dài của đáy hộp: $l = 80 - 2x$.

Thể tích của chiếc hộp là một hàm số theo biến x:

$$\begin{aligned} V(x) &= x(30-2x)(80-2x) \\ &= x(2400 - 60x - 160x + 4x^2) \\ &= 4x^3 - 220x^2 + 2400x \end{aligned}$$

với điều kiện $x \in [5;10]$.

Đạo hàm của hàm số thể tích:

$$V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400.$$

Cho $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 110x + 600 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \text{ (loại vì } 30 \notin [5;10]) \\ x = \dfrac{20}{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $V(x)$ trên đoạn $[5;10]$:

x	5		$\dfrac{20}{3}$		10
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	7000	$\nearrow$	$\dfrac{200000}{27}$	$\searrow$	6000

Từ bảng biến thiên, ta thấy thể tích chiếc hộp đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{20}{3}$.

Thực hiện làm tròn đến hàng phần trăm, ta được:

$$x \approx 6{,}67 \text{ (cm)}.$$

Vậy người ta cần cắt các hình vuông có cạnh $\boxed{x \approx 6{,}67 \text{ cm}}$ để thể tích hộp lớn nhất.

Ví dụ

Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \le x \le 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0{,}001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Hàm số biểu diễn lợi nhuận của doanh nghiệp trong một tháng là:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 60x - (0{,}001x^3 + 30x + 10) \\ &= -0{,}001x^3 + 30x - 10 \end{aligned}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $P(x)$ trên đoạn $[1;200]$.

Đạo hàm: $P'(x) = -0{,}003x^2 + 30$.

Cho $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}003x^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10000$.

Vì $x \in [1;200]$ nên ta nhận nghiệm $x = 100$.

Bảng biến thiên của hàm số $P(x)$ trên đoạn $[1;200]$:

x	1		100		200
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	$19{,}999$	$\nearrow$	1990	$\searrow$	-2010

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 100$ với $P(100) = 1990$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là $\boxed{1990}$ triệu đồng (khi chế biến 100 tấn nguyên liệu).

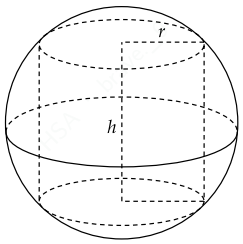
Ví dụ

Cho (S) là một mặt cầu cố định có bán kính R. Một hình trụ (H) thay đổi nhưng luôn có hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối cầu (S) và V_2 là thể tích lớn nhất của khối trụ (H). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{2}$. (B) $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$. (C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}$. (D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi bán kính đáy hình trụ là r và chiều cao là h, ta có $r^2 + \dfrac{h^2}{4} = R^2$.



Ta có $\dfrac{V_1}{V_{\text{trụ}}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 \cdot h} = \dfrac{4R^3}{3h\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)} = \dfrac{4R^3}{3hR^2 - \dfrac{3}{4}h^3}$.

Xét $f(h) = 3hR^2 - \dfrac{3}{4}h^3 \Rightarrow f'(h) = 3R^2 - \dfrac{9}{4}h^2$.

Ta có $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Ta có bảng biến thiên:

h	0	$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$	$2R$
$f(h)$	0	$\dfrac{4R^3\sqrt{3}}{3}$	0

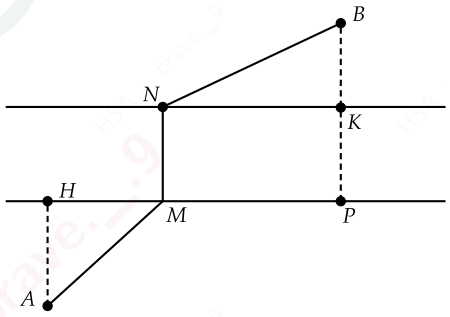
Từ bảng biến thiên, ta thấy thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất khi biểu thức $f(h)$ đạt cực đại.
Khi đó $V_2 = \max V_{\text{trụ}} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4R^3}{\max f(h)} = \dfrac{4R^3}{\dfrac{4R^3\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Vậy tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án C. □

Ví dụ

Người ta muốn làm một con đường đi từ thành phố A đến thành phố B ở hai bên bờ sông như hình vẽ, thành phố A cách bờ sông $AH = 3$ km, thành phố B cách bờ sông $BK = \sqrt{28}$ km, $HP = 10$ km. Con đường làm theo đường gấp khúc $AMNB$. Biết chi phí xây dựng một km đường bên bờ B nhiều gấp $\dfrac{16}{15}$ lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ A, chi phí làm cầu ở đoạn nào cũng như nhau. M là vị trí để xây cầu sao cho chi phí ít tốn kém nhất. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



A $AM \in \left(\dfrac{16}{3}; 7\right)$.

B $AM \in \left(\dfrac{10}{3}; 4\right)$.

C $AM \in \left(\dfrac{17}{4}; 5\right)$.

D $AM \in \left(4; \dfrac{16}{3}\right)$.

Lời giải

Đặt $HM = x$ với $0 < x < 10$. Khi đó, $NK = MP = 10 - x$.

Ta có $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2+9}$, $BN = \sqrt{BK^2 + NK^2} = \sqrt{28 + (10-x)^2}$.

Gọi m là giá thành xây dựng một km đường bên bờ A, suy ra giá thành xây dựng một km bên bờ B là $\dfrac{16}{15}m$. Vậy giá thành xây dựng hai đoạn đường AM và BN là

$$T = m\sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}m\sqrt{28+(10-x)^2} = m\left(\sqrt{x^2+9} + \frac{16}{15}\sqrt{28+(10-x)^2}\right).$$

Để giá thành xây dựng thấp nhất thì hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+9} + \dfrac{16}{15}\sqrt{28+(10-x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{16}{15}\cdot\dfrac{10-x}{\sqrt{28+(10-x)^2}}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{16}{15}\cdot\frac{10-x}{\sqrt{28+(10-x)^2}} \\
&\Leftrightarrow 15x\sqrt{28+(10-x)^2} = 16(10-x)\sqrt{x^2+9} \\
&\Leftrightarrow 225x^2(128-20x+x^2) = 256(100-20x+x^2)(x^2+9) \\
&\Leftrightarrow 31x^4 - 620x^3 - 896x^2 - 46080x + 230400 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-4)(31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ 31x^3 - 496x^2 - 2880x - 57600 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x \approx 23{,}375 \text{ (loại)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy khi $x = 4$ thì giá thành sẽ nhỏ nhất, khi đó $AM = \sqrt{4^2+9} = 5$ (km). Nên $AM \in \left(4; \dfrac{16}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D) ..... □

Ví dụ

Bác An dự định xây dựng một bể chứa nước sạch cho gia đình sử dụng dạng hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 m^2 và độ dài đường chéo bằng 6 m. Bể nước đó có thể chứa được tối đa V m^3. Giá trị của V ở trong khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(12;13)$. (B) $(11;12)$. (C) $(9;10)$. (D) $(10;11)$.

Lời giải

Gọi các kích thước của bể nước lần lượt là a, b, c (m), với $a, b, c > 0$.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} 2(ab+bc+ca)=36 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca=18 \\ a^2+b^2+c^2=36. \end{cases}$

Từ đó ta có $(a+b+c)^2=72 \Rightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có

$$2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2 \Leftrightarrow 2(36-a^2) \geq (6\sqrt{2}-a)^2 \Leftrightarrow a(a-4\sqrt{2}) \leq 0 \Rightarrow a \leq 4\sqrt{2}.$$

Thể tích bể nước là

$$V=abc=a(18-ab-ac)=a\left[18-a(b+c)\right]=a\left[18-a(6\sqrt{2}-a)\right]=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a.$$

Xét hàm số $f(a)=a^3-6\sqrt{2}a^2+18a$ với $0<a\leq 4\sqrt{2}$.

Ta có $f'(a)=3a^2-12\sqrt{2}a+18$, $f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2} \\ a=3\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(a)$ như sau:

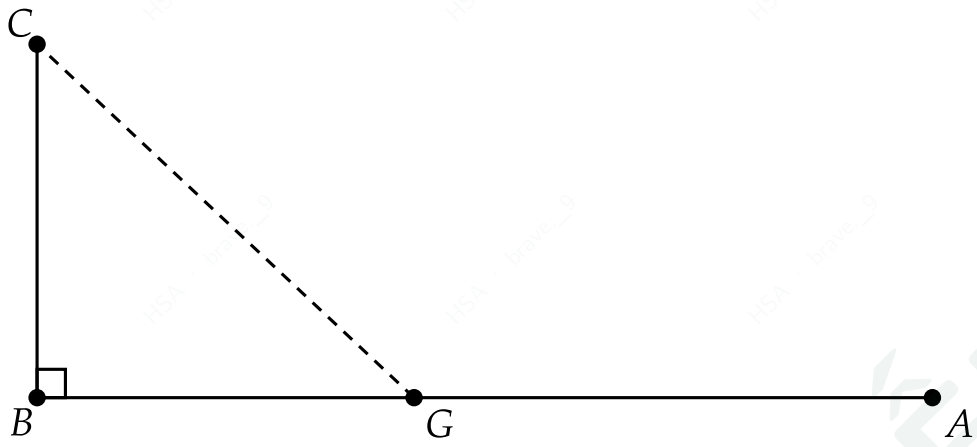
a	0		$\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	↗	$8\sqrt{2}$	↘	0	↗	$8\sqrt{2}$

Vậy $\max V=8\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=4\sqrt{2}, b=c=\sqrt{2}$. Do $8\sqrt{2}\approx 11{,}31 \in (11;12)$ nên ta chọn đáp án B.

Chọn đáp án (B). . . . . □

Ví dụ

Đường dây điện 110 KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ điểm C đến điểm B trên đất liền là 60 km, khoảng cách từ A đến B là 100 km, góc $\widehat{ABC}=90^\circ$. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD.



Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.

A 60 km. **B** 55 km. **C** 45 km. **D** 40 km.

Lời giải

Gọi x (km) là khoảng cách từ điểm A đến G. Ta có $BG = 100 - x$ với $0 \le x \le 100$.

Tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100-x)^2}$.

Chi phí tiền mắc điện là $T = 3000x + 5000\sqrt{3600 + (100-x)^2}$ (USD).

Xét hàm số $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{3600 + (100-x)^2}$ trên đoạn $[0; 100]$.

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000\dfrac{100-x}{\sqrt{3600 + (100-x)^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3000\sqrt{3600 + (100-x)^2} = 5000(100-x) \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{3600 + (100-x)^2} = 5(100-x) \\ &\Leftrightarrow 9\left[3600 + (100-x)^2\right] = 25(100-x)^2 \\ &\Leftrightarrow (100-x)^2 = 2025 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 100-x = 45 \\ 100-x = -45 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 55 \\ x = 145 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

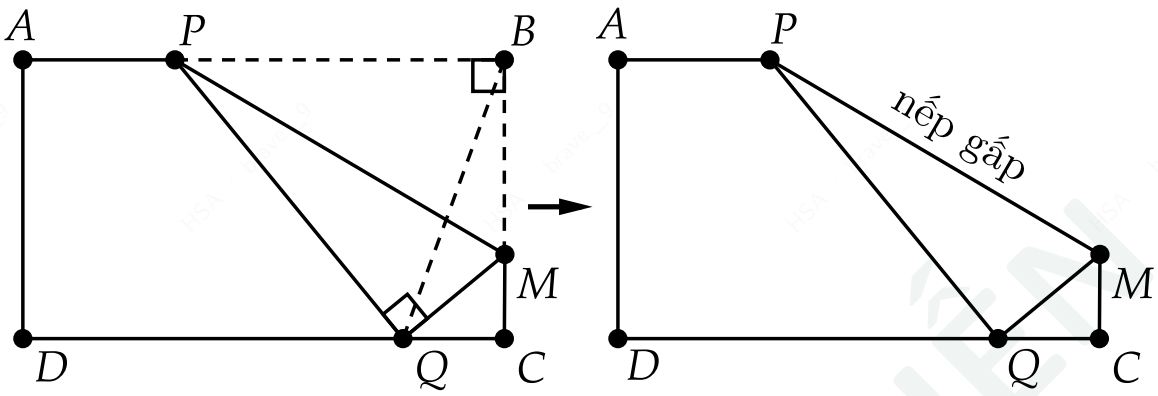
Ta có $f(0) = 583095$ (USD); $f(55) = 540000$ (USD); $f(100) = 600000$ (USD).

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 55$ km.

Chọn đáp án B. □

Ví dụ

Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $AB = 9$ (cm) và chiều rộng $BC = 6$ (cm). Gấp tờ giấy một lần sao cho khi gấp ta được đỉnh B nằm trên cạnh CD (xem hình sau).



Để độ dài nếp gấp PM là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

(A) $PM = \dfrac{27 - 9\sqrt{5}}{2}$ (cm).

(B) $PM = \dfrac{9\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)}{2}$ (cm).

(C) $PM = \dfrac{9}{2}$ (cm).

(D) $PM = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm).

Lời giải

Đặt $PB = x, BM = MQ = y$ với $0 < x < 9$ và $0 < y < 6$. Suy ra

$$MC = 6 - y, \quad QC = \sqrt{12y - 36}, \quad QB = \sqrt{12y}.$$

Ta chứng minh được $PM \perp BQ$ nên suy ra

$$PM = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{xy}{\sqrt{12y}} = \frac{xy}{\sqrt{3y}} \Rightarrow x^2 = \frac{3y^2}{y - 3}.$$

Khi đó $PM = \sqrt{\dfrac{3y^2}{y-3} + y^2} = \sqrt{\dfrac{y^3}{y-3}} = \sqrt{f(y)}$. Xét hàm số $f(y) = \dfrac{y^3}{y-3}$ với $3 < y < 6$.

Ta có

$$f'(y) = \frac{y^2(2y - 9)}{(y-3)^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \in (3; 6).$$

Ta có bảng biến thiên:

y	3		$\dfrac{9}{2}$		6
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{243}{4}$	$\nearrow$	72

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{243}{4}$ khi $y=\dfrac{9}{2}$. Do đó PM đạt giá trị nhỏ nhất $\sqrt{\dfrac{243}{4}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) ..... □

8.7 Các dạng toán liên quan khác

8.7.1 Bài toán hình học với hai đường tiệm cận

Với $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Ta có các tính chất:

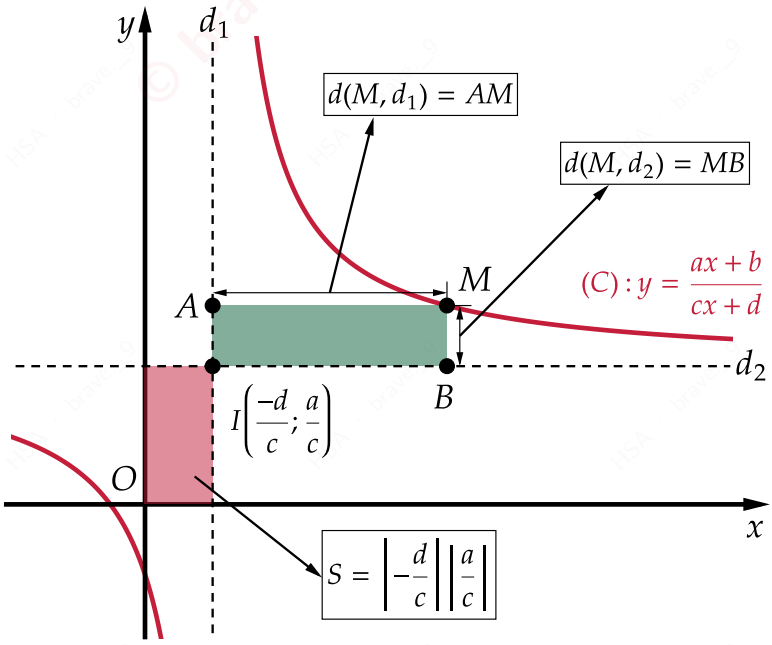
– Hai đường tiệm cận cắt hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích không đổi:

$$S=\left|-\frac{d}{c}\right|\cdot\left|\frac{a}{c}\right|.$$

– Với điểm $M(x_0,y_0)$ bất kỳ nằm trên đồ thị, tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là hằng số:

$$d\left(M,\ x=-\frac{d}{c}\right)\cdot d\left(M,\ y=\frac{a}{c}\right)$$

$$=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|.$$

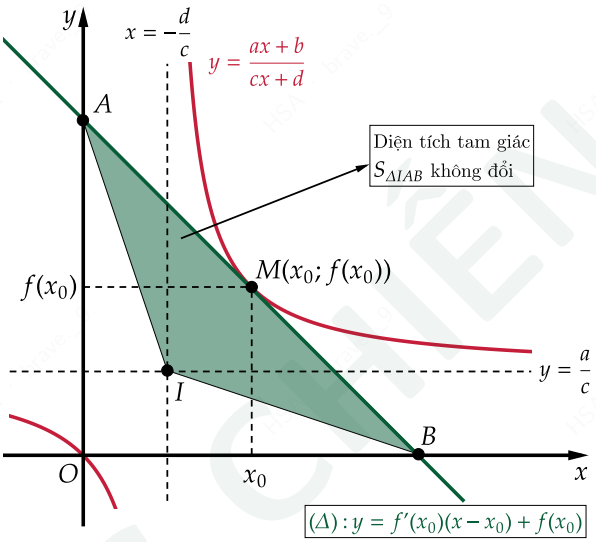


8.7.2 Tiếp tuyến của hàm nhất biến

Cho $M(x_0, f(x_0))$ thuộc đồ thị $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ và Δ là tiếp tuyến tại M. Giả sử Δ cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A và B.

1. Tiếp điểm M luôn là trung điểm của đoạn thẳng AB.
2. Diện tích tam giác IAB luôn là một hằng số không đổi:

$$S_{\Delta IAB} = \frac{2|ad-bc|}{c^2}.$$



Các bài toán yêu cầu: ΔIAB cân tại I, độ dài AB ngắn nhất, chu vi ΔIAB nhỏ nhất, khoảng cách từ I đến AB lớn nhất, hoặc bán kính đường tròn ngoại tiếp/nội tiếp nhỏ nhất... đều được quy về một điều kiện chung:

$$[f'(x_0)]^2 = 1.$$

Khi đó, hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1, đường thẳng hợp với trục Ox một góc 45° hoặc 135°.

8.7.3 Hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất

Xét hàm số phân thức có dạng:

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} \quad (a \neq 0, d \neq 0).$$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

Viết lại hàm số dưới dạng $y = \dfrac{f(x)}{dx+e}$ với $f(x) = ax^2+bx+c$.

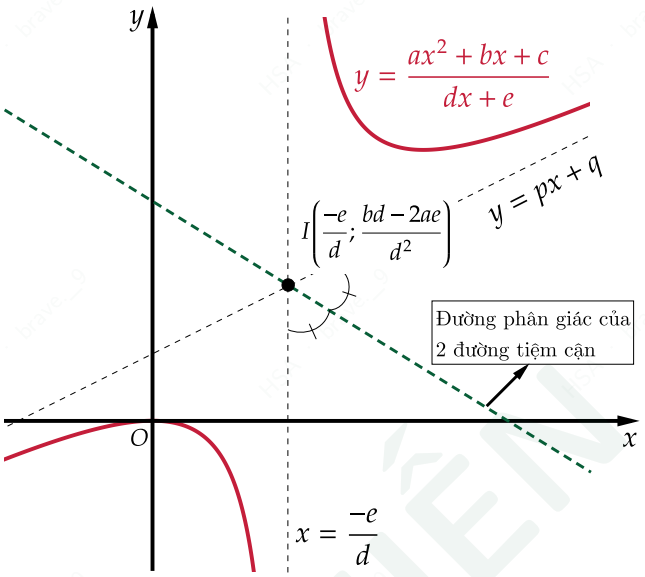
Đặt $x_0 = -\dfrac{e}{d}$ là hoành độ của đường tiệm cận đứng.

Gọi $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta \geq 0$, ký hiệu x_1, x_2 là các nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$.

Khi thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$y = px + q + \frac{r}{dx + e},$$

trong đó $p = \frac{a}{d}, q = \frac{bd - ae}{d^2}, r = \frac{cd^2 - bde + ae^2}{d^2}$.



Đồ thị hàm số có các tính chất hình học sau:

- Đường tiệm cận đứng: $x = -\frac{e}{d}$.
- Đường tiệm cận xiên: $y = px + q$ (khi $r \neq 0$).
- Tâm đối xứng I (giao hai đường tiệm cận):

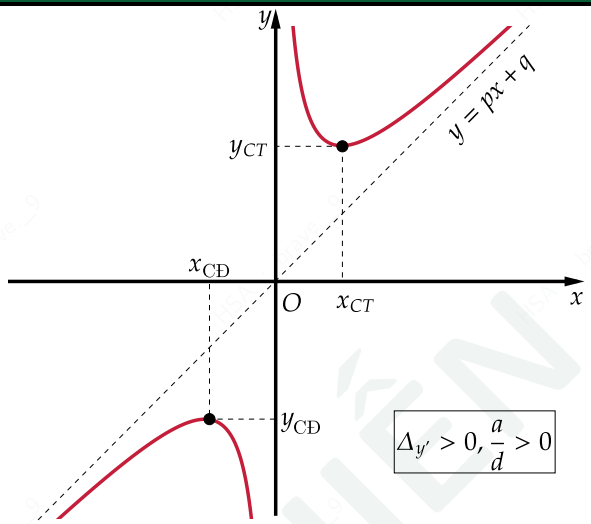
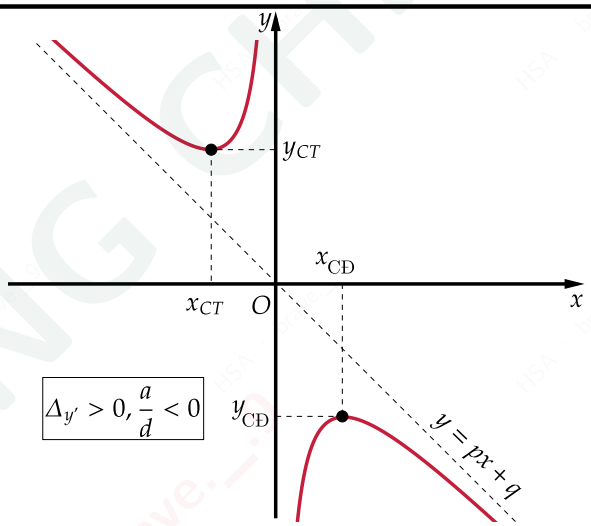
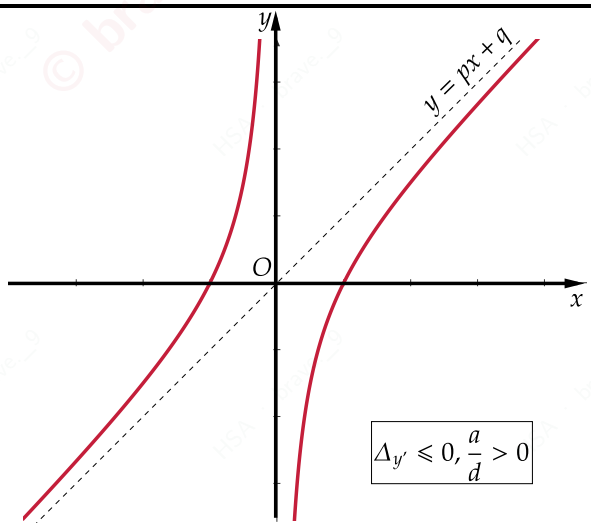
$$I\left(-\frac{e}{d}, \frac{bd - 2ae}{d^2}\right).$$

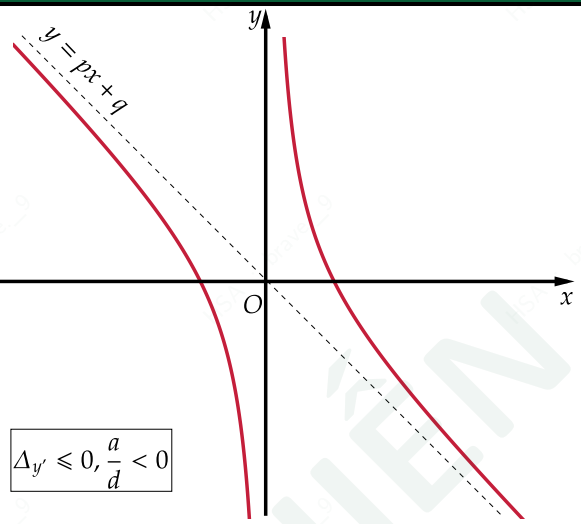
- Trục đối xứng: Đồ thị hàm số nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

Các dạng đồ thị cơ bản

Dáng điệu đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình $y' = 0$ và dấu của hệ số $\frac{a}{d}$.

BÙI QUANG CHIẾN

Đặc điểm đạo hàm và dấu $\frac{a}{d}$	Hình dáng đồ thị
Trường hợp 1: $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\frac{a}{d}>0$. Đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu. Đồ thị nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba tạo bởi hai đường tiệm cận.	
Trường hợp 2: $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\frac{a}{d}<0$. Đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu. Đồ thị nằm ở góc phần tư thứ hai và thứ tư tạo bởi hai đường tiệm cận.	
Trường hợp 3: $y'=0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép và $\frac{a}{d}>0$. Đồ thị hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định. Không có cực trị.	

Đặc điểm đạo hàm và dấu $\frac{a}{d}$	Hình dáng đồ thị
Trường hợp 4: $y'=0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép và $\frac{a}{d}<0$. Đồ thị hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định. Không có cực trị.	

Ví dụ

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y=x+\dfrac{1}{x-1}$. Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)=0$ nên đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên.

Đạo hàm:

$$y'=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

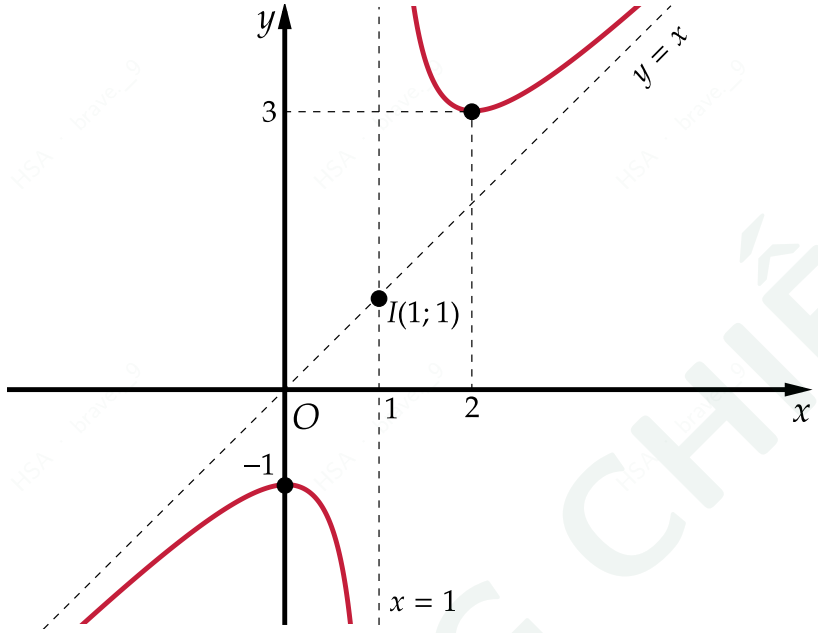
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = -1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 3$.

Tâm đối xứng của đồ thị là $I(1;1)$.



Tiệm cận xiên chứa tham số

Phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có dạng $y = px + q$. Trong các bài toán chứa tham số, ta thường gặp yêu cầu tìm tham số để đường tiệm cận xiên đi qua một điểm, song song với một đường thẳng, hoặc tạo thành tam giác có diện tích không đổi.

Ví dụ

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$. Tìm m để đường tiệm cận xiên của đồ thị đi qua điểm $A(2;5)$.

Lời giải

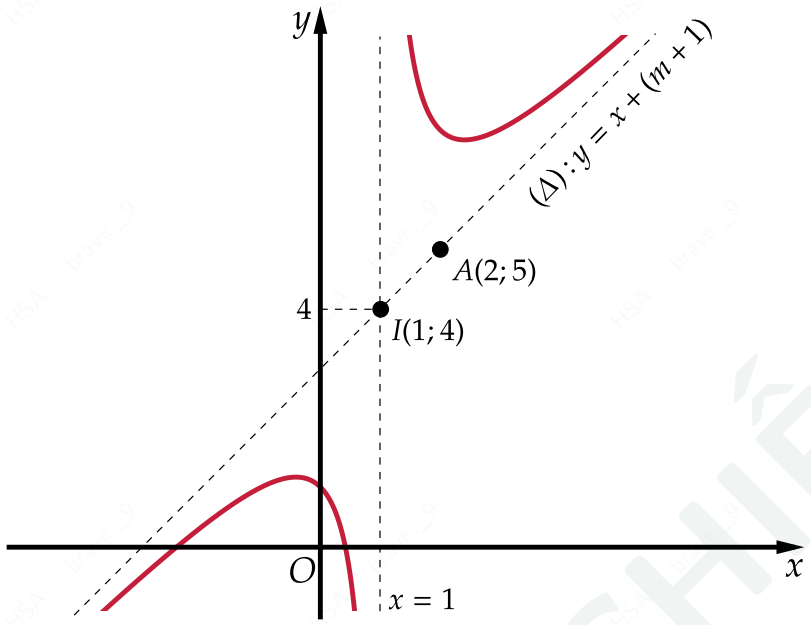
Thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = x + (m + 1) + \frac{m}{x - 1}.$$

Để đồ thị có đường tiệm cận xiên thì $m \neq 0$. Khi đó, đường tiệm cận xiên Δ có phương trình: $y = x + m + 1$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(2;5)$ khi và chỉ khi:

$$5 = 2 + m + 1 \Leftrightarrow m = 2.$$



Giá trị $m = 2$ thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$. Vậy $m = 2$.

Ví dụ

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx - 1}{x - 1}$. Gọi Δ là đường tiệm cận xiên của đồ thị. Tìm m để Δ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8.

Lời giải

Thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$y = \frac{x^2 + 2mx - 1}{x - 1} = x + (2m + 1) + \frac{2m}{x - 1}.$$

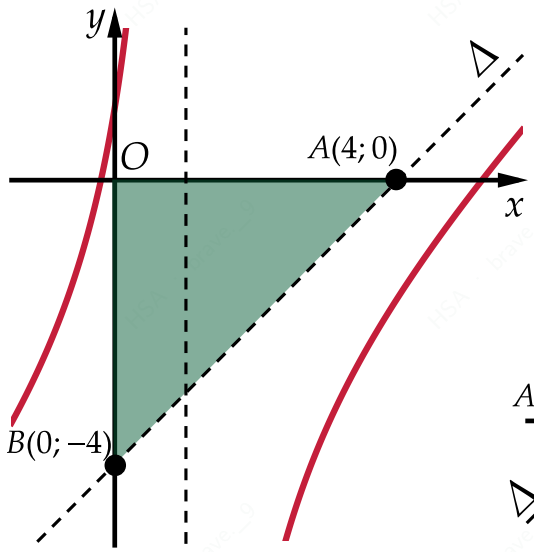
Điều kiện tồn tại tiệm cận xiên là $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó, Δ có phương trình: $y = x + 2m + 1$.

Tìm toạ độ các giao điểm của Δ với các trục tọa độ:

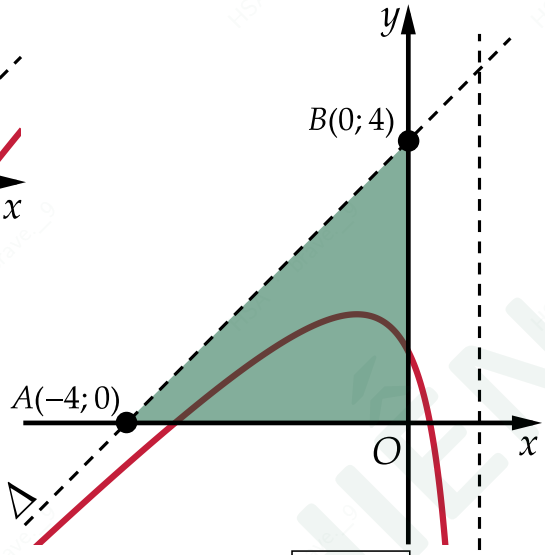
- Giao với trục Ox $(y = 0)$: $A(-2m - 1; 0)$.
- Giao với trục Oy $(x = 0)$: $B(0; 2m + 1)$.

Diện tích tam giác vuông OAB tại O là:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |x_A| \cdot |y_B| = \frac{1}{2} |2m + 1|^2.$$



$m = \dfrac{-5}{2}$



$m = \dfrac{3}{2}$

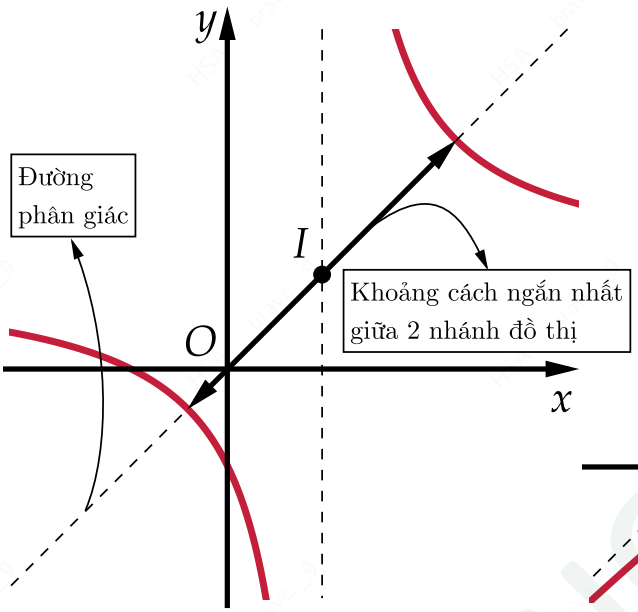
Theo giả thiết, $S_{OAB} = 8$, suy ra:

$$\frac{1}{2}(2m+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (2m+1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=4 \\ 2m+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

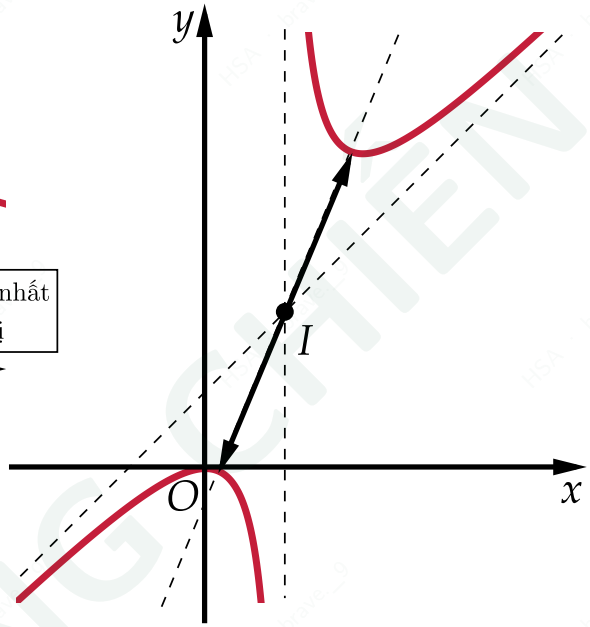
Cả hai giá trị đều thỏa mãn $m \neq 0$. Vậy $m \in \left\{\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right\}$.

8.7.4 Khoảng cách ngắn nhất giữa hai nhánh đồ thị

Khoảng cách ngắn nhất giữa hai nhánh đồ thị của hàm phân thức luôn đạt được tại các giao điểm của đồ thị với đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận (chọn đường phân giác có cắt đồ thị hàm số).



$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$



$$y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

Phương pháp giải bằng đường phân giác:

- **Bước 1:** Xác định tâm đối xứng I và hệ số góc của hai đường tiệm cận.
- **Bước 2:** Xác định hệ số góc k_{pg} của đường phân giác.
  - Với hàm bậc nhất trên bậc nhất: Hai tiệm cận vuông góc nên đường phân giác luôn có hệ số góc $k_{\text{pg}} = \pm 1$.
  - Với hàm bậc hai trên bậc nhất: Nếu tiệm cận xiên hợp với trục hoành góc α, hệ số góc đường phân giác là $k_{\text{pg}} = \tan\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)$ hoặc $k'_{\text{pg}} = -\dfrac{1}{k_{\text{pg}}}$.
- **Bước 3:** Viết phương trình đường phân giác đi qua I và tìm giao điểm A, B với đồ thị. Đoạn AB chính là khoảng cách ngắn nhất cần tìm.

Ví dụ

Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai nhánh đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

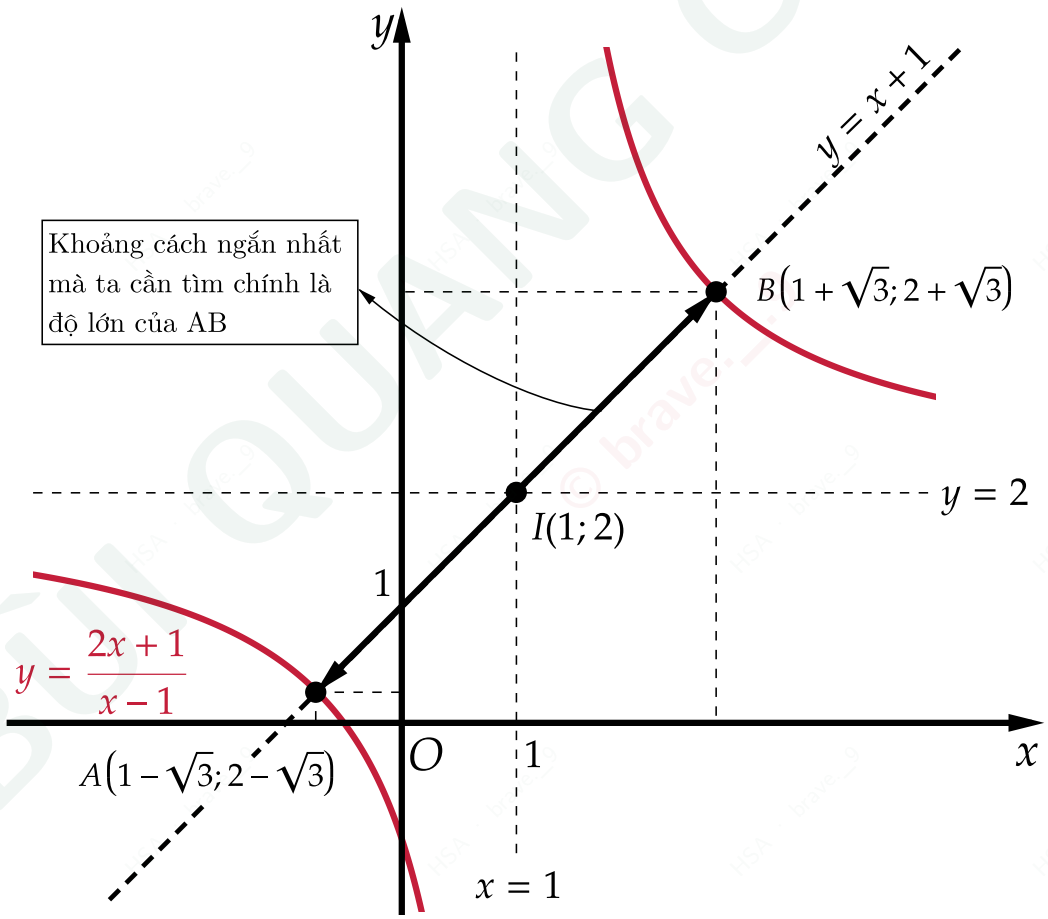
Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$. Tâm đối xứng $I(1;2)$. Đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận có hệ số góc $k_{\text{pg}} = \pm 1$.

Xét đường phân giác có hệ số góc $k = 1$ đi qua $I(1;2)$:

$$y = 1(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x + 1 = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}.$$



Hai giao điểm là $A\left(1-\sqrt{3};\, 2-\sqrt{3}\right)$ và $B\left(1+\sqrt{3};\, 2+\sqrt{3}\right)$. Khoảng cách ngắn nhất bằng độ dài đoạn thẳng AB:

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Ví dụ

Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai nhánh đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

Lời giải

Thực hiện phép chia đa thức: $y = x + 2 + \dfrac{3}{x-1}$. Tiệm cận đứng: $x = 1$; tiệm cận xiên: $y = x + 2$. Tâm $I(1;3)$.

Hệ số góc tiệm cận xiên $p = 1 \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. Hệ số góc đường phân giác là:

$$k = \tan\left(45^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right) = \tan 67.5^\circ = \sqrt{2}+1.$$

Phương trình phân giác qua $I(1;3)$:

$$y = (\sqrt{2}+1)(x-1)+3.$$

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm của đường phân giác và đồ thị hàm số y:

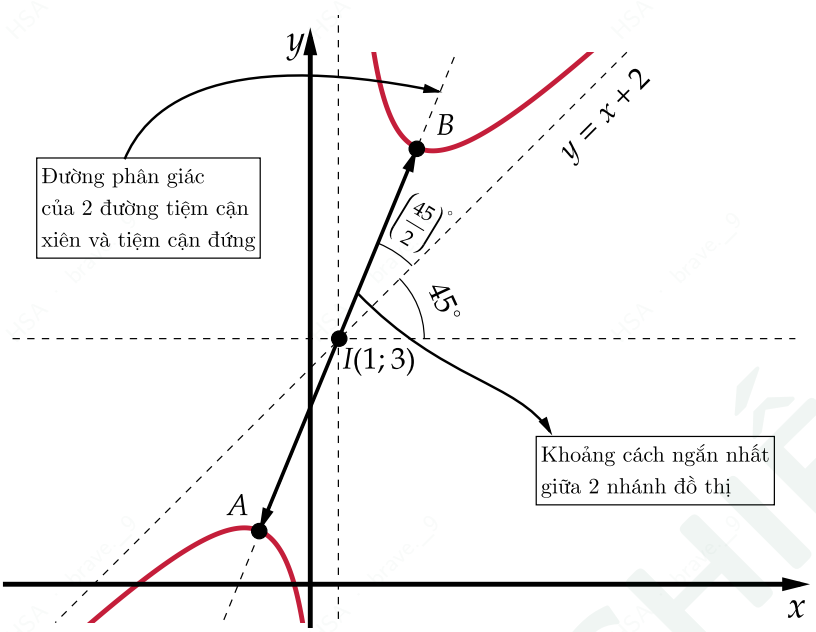
$$(x-1) + \frac{3}{x-1} + 3 = (\sqrt{2}+1)(x-1)+3.$$

Đặt $t = x-1$, ta có:

$$t + \frac{3}{t} = (\sqrt{2}+1)t \Leftrightarrow \frac{3}{t} = \sqrt{2}t \Leftrightarrow t^2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}.$$

Khoảng cách giữa hoành độ hai giao điểm: $|x_A - x_B| = 2\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$.

Khoảng cách ngắn nhất $d_{\min} = AB$:



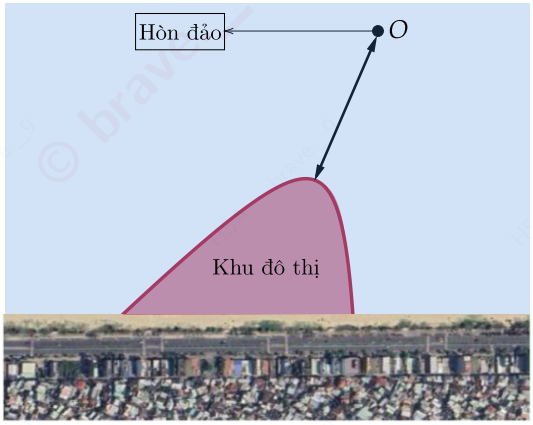
$$AB = |x_A - x_B|\sqrt{1+k^2} = 2\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+(\sqrt{2}+1)^2} = 2\sqrt{6(\sqrt{2}+1)}.$$

Ví dụ

Trích đề KSCL Toán lần 1 THPT 2025 chuyên ĐH Vinh - Nghệ An

Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1 km, hòn đảo nằm ở vị trí gốc tọa độ O. Đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số:

$$y = \frac{x^2+1}{x} \quad (x < 0).$$



Lời giải

Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị sao cho có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài tuyến cáp treo (làm tròn đến phần mười).

Đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ $O(0;0)$. Tiệm cận đứng là $d_1 : x = 0$ và tiệm cận xiên là $d_2 : y = x$.

Khoảng cách ngắn nhất từ O đến một điểm trên (C) chính là khoảng cách từ O đến đỉnh của hypebol (C). Đỉnh này nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2.

Tiệm cận xiên $d_2 : y = x$ có hệ số góc $k = 1 \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. Hệ số góc của đường phân giác là:

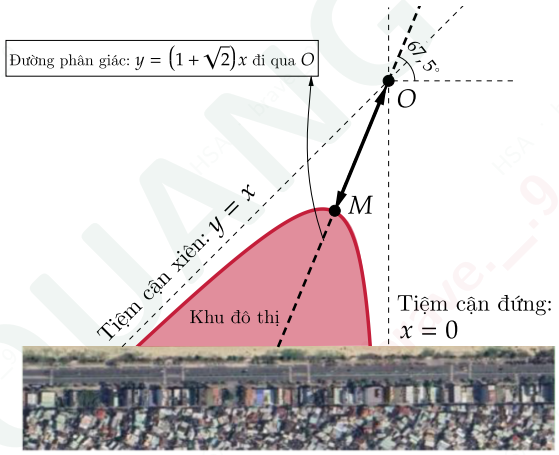
$$k_{\text{pg}} = \tan\left(45^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right) = \tan 67.5^\circ = \sqrt{2}+1.$$

(Đường phân giác còn lại có hệ số góc $k'_{\text{pg}} = -\dfrac{1}{k_{\text{pg}}} = 1-\sqrt{2}$).

Nhánh đồ thị đang xét có $x < 0, y < 0$ (góc phần tư thứ III), nên ta chọn đường phân giác Δ đi qua góc phần tư thứ I và III, tức là đường thẳng có hệ số góc dương: $y = (1+\sqrt{2})x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ:

$$x + \frac{1}{x} = (1+\sqrt{2})x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{2}x \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Khoảng cách ngắn nhất $d_{\min} = OM$ với $M \in \Delta$ là:

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(1+\sqrt{2})^2x^2} \\ &= |x|\sqrt{1+(3+2\sqrt{2})} = \sqrt{x^2(4+2\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(4+2\sqrt{2})} = \sqrt{2\sqrt{2}+2}. \end{aligned}$$

Suy ra $OM \approx 2,197 \approx 2,2$ (km).

Vậy độ dài ngắn nhất của tuyến cáp treo là khoảng $2,2$ km.

Chương 9

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

9.1 Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

9.1.1 Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang

Đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là đường hypebol gồm hai nhánh nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba của mặt phẳng toạ độ.

Ta có

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

và

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

BÙI QUANG CHIẾN

Điều đó có nghĩa là khoảng cách $MH = |f(x)|$ từ điểm M của đồ thị đến trục hoành dần đến 0 khi điểm M theo đường hypebol đi xa ra vô tận về phía phải hoặc phía trái.

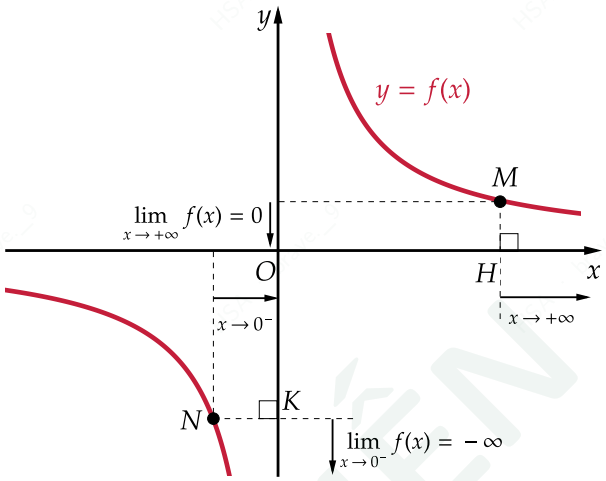
Trục hoành được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$.

Ta cũng có

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

và

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$



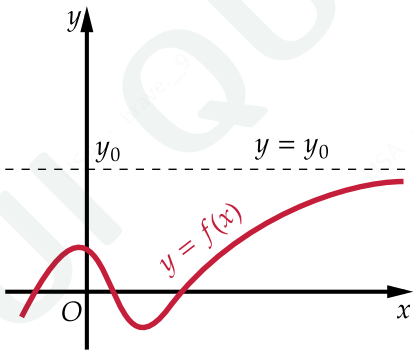
Khi đó, khoảng cách $NK = |x|$ từ một điểm N trên đồ thị đến trục tung tiến về 0 khi $|y| \to +\infty$.

Trục tung được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$.

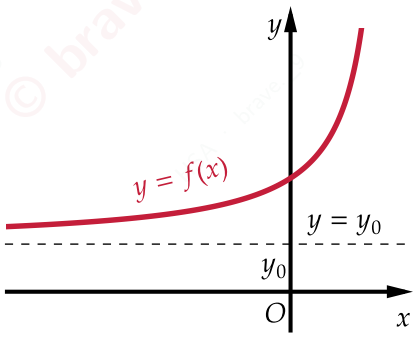
Định nghĩa

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \to +\infty$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $x \to -\infty$

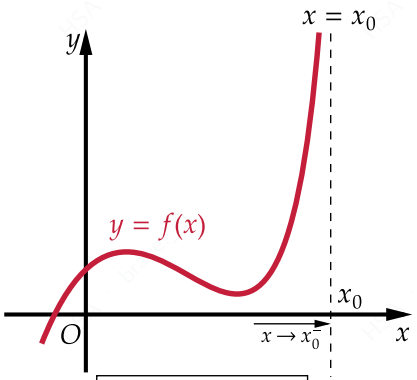
Định nghĩa

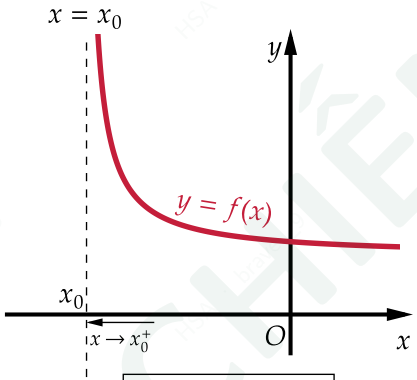
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là **tiệm cận đứng**) của đồ thị

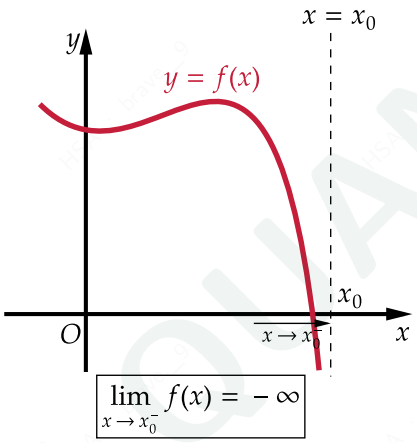
hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

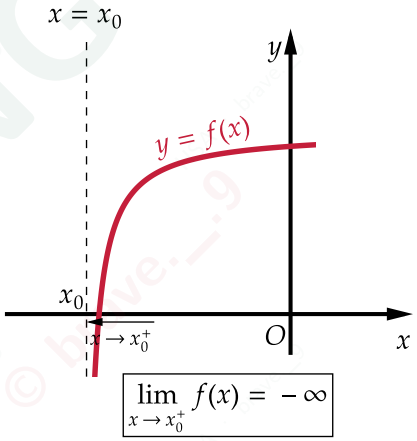
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$$









9.1.2 Kĩ năng sử dụng máy tính cầm tay CASIO tìm Tiệm cận

Tìm Tiệm cận ngang (TCN)	Tìm Tiệm cận đứng (TCĐ)
1. Thao tác trên máy tính CASIO	

Tìm Tiệm cận ngang (TCN)	Tìm Tiệm cận đứng (TCĐ)
Bước 1: Nhập biểu thức hàm số $f(x)$. **Bước 2:** Bấm phím [CALC]. **Bước 3:** Kiểm tra giới hạn tại vô cực: – $x \to +\infty$: Bấm [1][0][$x^{\blacksquare}$][9][=]. – $x \to -\infty$: Bấm [-][1][0][$x^{\blacksquare}$][9][=].	**Bước 1:** Nhập biểu thức hàm số $f(x)$. **Bước 2:** Bấm phím [CALC]. **Bước 3:** Kiểm tra giới hạn một bên tại x_0: – $x \to x_0^+$: Nhập x_0 [+][1][0][$x^{\blacksquare}$][-][9][=]. – $x \to x_0^-$: Nhập x_0 [-][1][0][$x^{\blacksquare}$][-][9][=].
2. Phân tích kết quả hiển thị	
– Nếu màn hình hiển thị một **số thực** y_0 (ví dụ: 2; 0; hoặc giá trị rất gần 0 như 1.2×10^{-12}), ta kết luận đường thẳng $\mathbf{y = y_0}$ **là tiệm cận ngang**.  – Nếu màn hình trả về **số có trị tuyệt đối rất lớn** (ví dụ: 10^{20}) hoặc báo lỗi **Math ERROR**, tức là giới hạn không hữu hạn, đồ thị **không có tiệm cận ngang**.	– Nếu màn hình hiển thị **số có trị tuyệt đối rất lớn** (ví dụ: 10^{11} hoặc -10^{10}), nghĩa là giới hạn là vô cực, ta kết luận đường thẳng $\mathbf{x = x_0}$ **là tiệm cận đứng**.  – Nếu màn hình hiển thị một **số thực**, nghĩa là giới hạn hữu hạn, do đó $\mathbf{x = x_0}$ **không phải là tiệm cận đứng** (trường hợp nghiệm của mẫu bị triệt tiêu bởi tử số).

Ví dụ

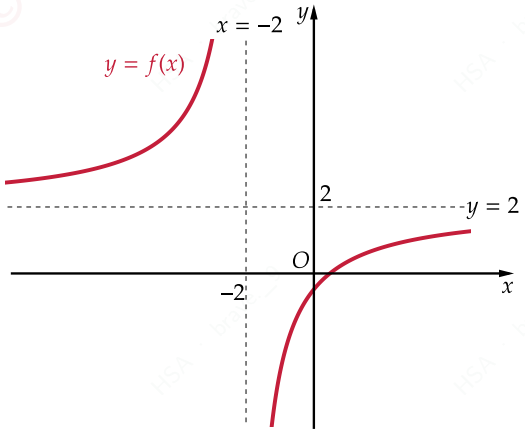
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác, $\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -2^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.



Kiểm tra nhanh bằng CASIO fx-580VN X:

TCN khi $x \to +\infty$ (CALC $x = 10^9$):



TCN khi $x \to -\infty$ (CALC $x = -10^9$):



TCĐ khi $x \to (-2)^+$ (CALC $x = -2 + 10^{-9}$):



TCĐ khi $x \to (-2)^-$ (CALC $x = -2 - 10^{-9}$):



Ví dụ

Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

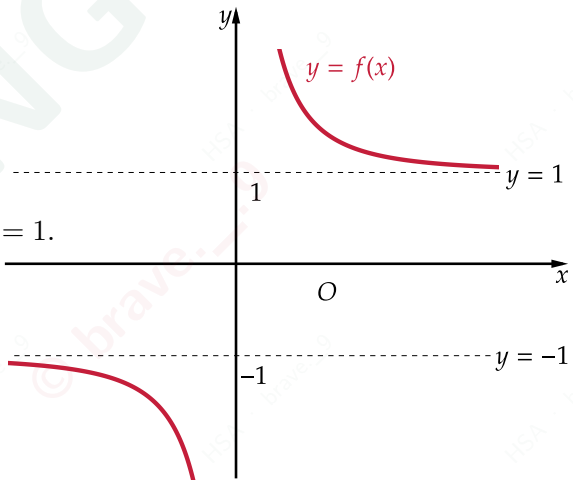
Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Do đó, đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x \to +\infty$).



Tương tự,

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Do đó, đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x \to -\infty$).

Vì $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (khi $x \to 0^+$ và khi $x \to 0^-$).

Kiểm tra bằng máy tính CASIO fx-580VN X:

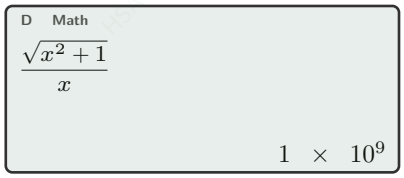
TCN khi $x \to +\infty$ (Ấn CALC 10^9 = *):*



TCN khi $x \to -\infty$ (Ấn CALC -10^9 = *):*



TCĐ khi $x \to 0^+$ (Ấn CALC 10^{-9} = *):*



TCĐ khi $x \to 0^-$ (Ấn CALC -10^{-9} = *):*



9.1.3 Đường tiệm cận xiên

Cho $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và (d) là đường thẳng phương trình: $y = ax + b \quad (a \neq 0)$.

Gọi M và N là hai điểm của $(\mathscr{C})$ và (d) có cùng hoành độ x. Nếu độ dài của đoạn thẳng MN dần đến 0 khi x dần đến $+\infty$ (hoặc khi x dần đến $-\infty$) thì đường thẳng (d) được gọi là đường tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$.

Vì $MN = |f(x) - (ax + b)|$ nên ta có định nghĩa sau:

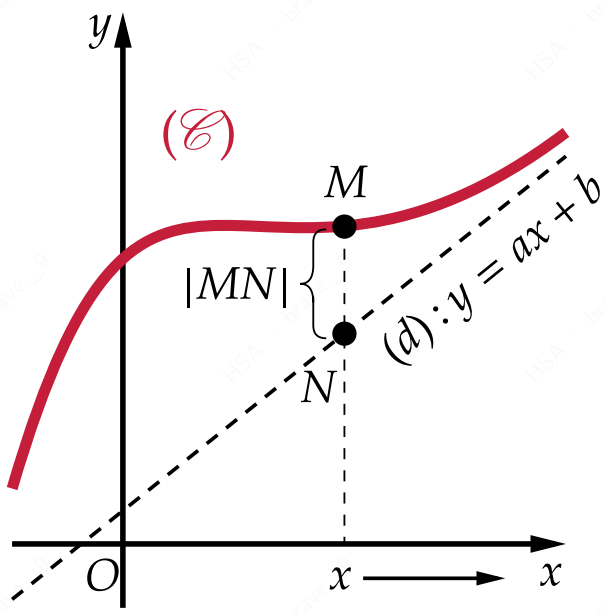
Định nghĩa

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

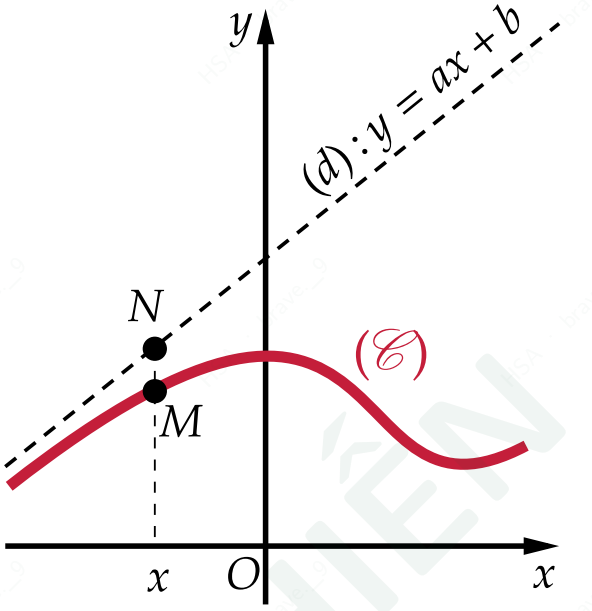
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

hoặc

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$)



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$)

Ví dụ

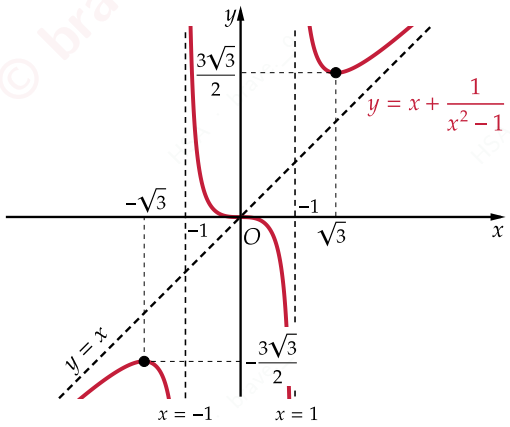
Tìm các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị hàm số $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Lời giải

Đồ thị hàm số $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ nhận đường thẳng $y = x$ làm đường tiệm cận xiên khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

và $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$.



Ví dụ

Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số:

$$y = f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Xét hiệu:

$$f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x-2}.$$

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2} = 0,$$

và

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (2x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2} = 0.$$

Theo định nghĩa, đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (cả khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

Chú ý

Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$$

hoặc

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax].$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang).

Thật vậy, xét trường hợp $x \to +\infty$, giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(\alpha; +\infty)$ và đường thẳng $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$). Khi đó, theo định nghĩa, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0. \tag{1}$$

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - (ax+b)}{x} = 0,$$

tức là

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ nên

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Từ (1) suy ra

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]. \tag{3}$$

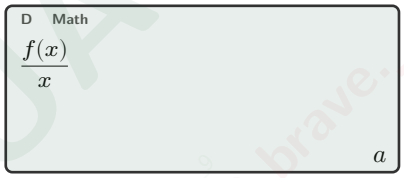
Đảo lại, nếu a và b thoả mãn (2) và (3) thì từ (3) suy ra (1). Do đó đường thẳng $y=ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $a\neq 0$ và là tiệm cận ngang nếu $a=0$. Trường hợp $x\to-\infty$ được chứng minh tương tự.

9.1.4 Kĩ năng sử dụng CASIO tìm Tiệm cận xiên

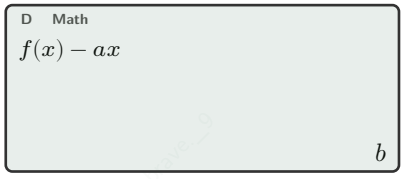
Dựa trên định nghĩa và công thức tính hệ số a,b của đường tiệm cận xiên $y=ax+b$, ta có thể sử dụng tính năng tính giới hạn (phím CALC) trên máy tính CASIO để tìm nhanh các hệ số này mà không cần thực hiện phép chia đa thức thủ công.

Phương pháp thực hiện:

- **Bước 1 (Tìm hệ số a):** Nhập vào màn hình biểu thức $\dfrac{f(x)}{x}$. Ấn phím CALC và nhập một giá trị x dương rất lớn (ví dụ: $x=10^9$). Kết quả trả về trên màn hình chính là hệ số a.



- **Bước 2 (Tìm hệ số b):** Nhập vào màn hình biểu thức $f(x)-ax$ (với a vừa tìm được). Ấn phím CALC và tiếp tục nhập $x=10^9$. Kết quả trả về chính là hệ số b.



Chú ý

Nếu ở Bước 1, máy tính trả về $a=0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên mà chỉ có tiệm cận ngang $y=b$. Nếu máy báo lỗi **Math ERROR** hoặc ra một số vô cùng lớn, hàm số đó không có đường tiệm cận xiên. Các bước tương tự áp dụng cho $x\to-\infty$ bằng cách nhập $x=-10^9$.

Ví dụ

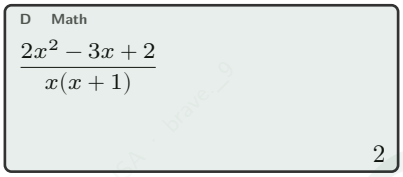
Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ bằng máy tính CASIO

Lời giải

Ta nhập vào máy tính biểu thức hàm số chia cho x:

$$\frac{2x^2 - 3x + 2}{x(x + 1)}$$

Nhấn phím CALC và nhập $x = 10^9$, ấn =.

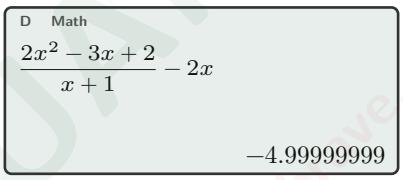


Máy tính trả về kết quả bằng 2. Vậy ta có $a = 2$.

Với $a = 2$, ta nhập tiếp biểu thức $f(x) - 2x$ vào máy tính:

$$\frac{2x^2 - 3x + 2}{x + 1} - 2x$$

Nhấn phím CALC và nhập $x = 10^9$, ấn =.



Máy tính trả về kết quả xấp xỉ -5 (kết quả hiển thị có sai số rất nhỏ do làm tròn của máy).

Vậy ta có $b = -5$.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là $y = 2x - 5$.

9.2 Xác định tiệm cận qua bảng biến thiên và đồ thị

9.2.1 Dựa vào bảng biến thiên

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên một tập $\mathscr{D}$. Để xác định các đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên, ta quan sát các giới hạn tại biên của tập xác định và tại các điểm gián đoạn:

– **Đường tiệm cận ngang (TCN):** Quan sát ở hai đầu $x \to -\infty$ và $x \to +\infty$. Nếu giá trị $f(x)$ tiến đến một hằng số hữu hạn, thì đường thẳng $y =$ hằng số là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

– **Đường tiệm cận đứng (TCĐ):** Quan sát tại các điểm x_0 mà hàm số không xác định (được ký hiệu bằng 2 gạch sọc $\|$). Nếu giới hạn của $f(x)$ khi $x \to x_0^+$ hoặc $x \to x_0^-$ là $+\infty$ hoặc $-\infty$ (chỉ cần ít nhất một bên là vô cực), thì đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Xét hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên tổng quát như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	y_1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	y_2 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	y_3 $\|\|$ y_4	$\nearrow$	y_5

Dựa vào bảng biến thiên tổng quát trên, ta phân tích các trường hợp xảy ra đối với đường tiệm cận:

– **Đường tiệm cận ngang (TCN):**

∗ Ta có:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_1$$

Suy ra đường thẳng $y = y_1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

∗ Ta có:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_5$$

Suy ra đường thẳng $y = y_5$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

– **Đường tiệm cận đứng (TCĐ):** Xét giới hạn tại các điểm gián đoạn x_1, x_2, x_3:

* **Tại** $x = x_1$**:** Ta có:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = -\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = x_1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

* **Tại** $x = x_2$**:** Do có ít nhất một giới hạn bên tiến đến vô cực:

$$\lim_{x \to x_2^+} f(x) = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = x_2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

* **Tại** $x = x_3$**:** Các giới hạn một bên đều mang giá trị hữu hạn:

$$\lim_{x \to x_3^-} f(x) = y_3 \quad \text{và} \quad \lim_{x \to x_3^+} f(x) = y_4$$

Do đó, đường thẳng $x = x_3$ không phải là đường tiệm cận đứng.

9.3 Biện luận số đường tiệm cận chứa tham số

9.3.1 Điều kiện để tiệm cận đứng không bị khử

Cho hàm phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình mẫu $Q(x) = 0$. Đường thẳng $x = x_0$ sẽ là **đường tiệm cận đứng** nếu x_0 thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

1. x_0 **không phải** là nghiệm của đa thức tử $P(x)$.
2. x_0 **là nghiệm** của $P(x)$, nhưng **bội** của nghiệm x_0 ở mẫu $Q(x)$ **lớn hơn** bội của nghiệm đó ở tử $P(x)$ (khi rút gọn, dưới mẫu vẫn còn thừa số $x - x_0$).

Ngược lại, nếu x_0 là nghiệm của tử với bội lớn hơn hoặc bằng bội ở mẫu, thì nghiệm đó bị khử hoàn toàn và $x = x_0$ không phải là đường tiệm cận đứng.

Ví dụ

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 8x + m}$ có đúng 3 đường tiệm cận?

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + m \neq 0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$. Suy ra đồ thị hàm số luôn có đúng một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng. Điều này tương đương với phương trình mẫu số $x^2 - 8x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 (để không bị tử số khử).

Ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta' = 16 - m > 0 \\ 1^2 - 8(1) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên dương ($m \in \mathbb{Z}^+$), ta có $m \in \{1; 2; 3; \ldots; 15\} \setminus \{7\}$.

Vậy có tất cả 14 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ

Có bao nhiêu số nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

Lời giải

Ta có điều kiện xác định là:

$$\begin{cases} x \neq m \\ 2x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \in (0; 2) \end{cases}$$

Do tập xác định của hàm số bị chặn trong khoảng $(0; 2)$, biến x không thể tiến tới $+\infty$ hoặc $-\infty$. Do đó, đồ thị hàm số **không có đường tiệm cận ngang**.

Xét các giới hạn tại hai đầu mút của tập xác định:

$$\lim_{x \to 0^+} y = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to 2^-} y = +\infty$$

Suy ra $x = 0$ và $x = 2$ luôn là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số với mọi giá trị của tham số m.

Đồ thị hàm số đã có sẵn 2 đường tiệm cận. Vậy để đồ thị có đúng hai đường tiệm cận, thì phương trình mẫu không được sinh thêm bất kỳ đường tiệm cận đứng nào khác thuộc khoảng

$(0;2)$.

Tức là đường thẳng $x=m$ không được là đường tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi $x=m$ không thuộc miền xác định $(0;2)$:

$$\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$$

Theo giả thiết, m là số nguyên và $m \in [-100;100]$. Tập hợp các giá trị của m là: $S=\{-100;-99;\ldots;0\} \cup \{2;3;\ldots;100\}$.

Số lượng giá trị m thỏa mãn là: $101+99=200$ giá trị.

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

Chương 10

BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

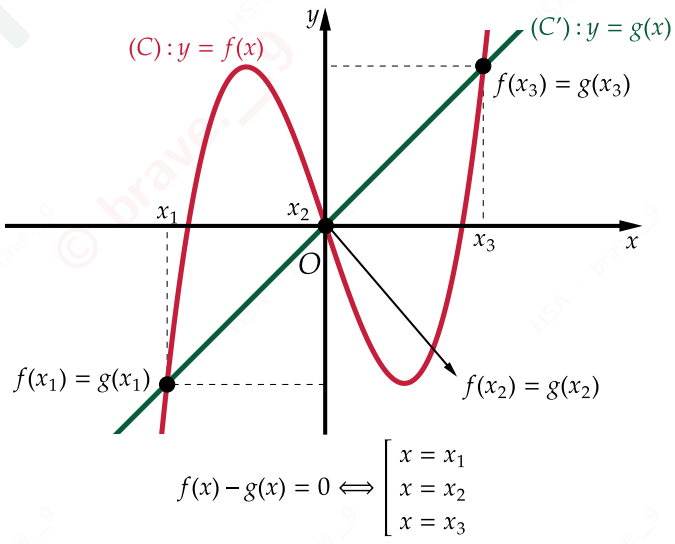
10.1 Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C'). Để tìm tọa độ giao điểm, ta thực hiện các bước sau:

– **Bước 1:** Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'):

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

– **Bước 2:** Giải phương trình $(*)$ tìm x. Số nghiệm của $(*)$ chính là số giao điểm của (C) và (C').



– **Bước 3:** Từ các giá trị x tìm được, thay vào $y = f(x)$ (hoặc $y = g(x)$) để suy ra tung độ y. Từ đó kết luận tọa độ giao điểm.

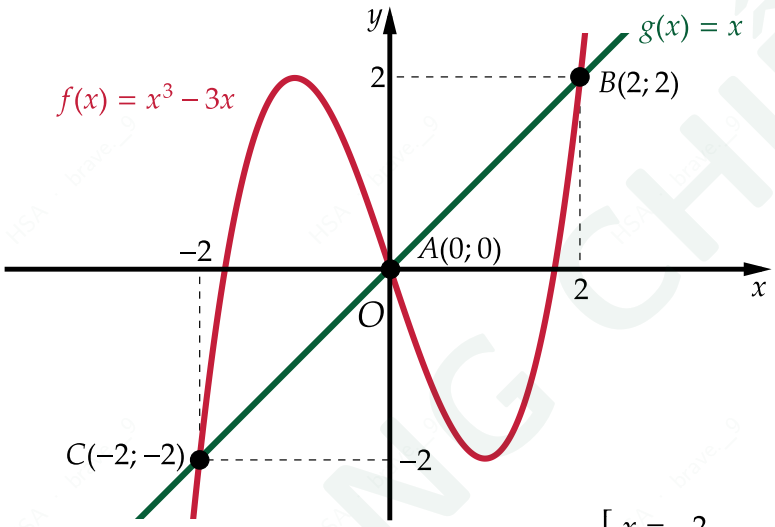
Ví dụ

Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ và đường thẳng $y = x$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3x=x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$



$$f(x)-g(x)=0 \Longleftrightarrow x^3-3x-x=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Thay lần lượt các giá trị của x vào phương trình $y=x$, ta được ba giao điểm tương ứng là: $A(0;0)$, $B(2;2)$ và $C(-2;-2)$.

10.2 Biện luận số nghiệm phương trình chứa tham số m

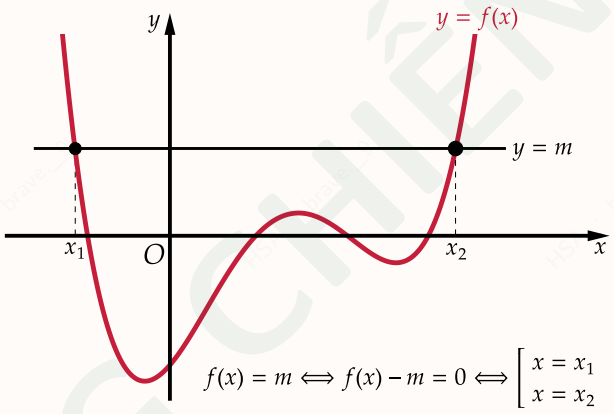
10.2.1 Tương giao dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$

Nhận xét: Biện luận bằng đồ thị

Khi đã có sẵn đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta coi phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của:

- Đồ thị (C): $y = f(x)$ (đã vẽ cố định).
- Đường thẳng d: $y = m$ (đường thẳng di động, luôn cùng phương với trục hoành Ox).

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ chính là số giao điểm. Ta cho đường thẳng $y = m$ di chuyển dọc theo trục tung Oy để đếm số giao điểm tương ứng với đồ thị (C).



$$f(x) = m \iff f(x) - m = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$$

10.2.2 Tương giao dựa vào Bảng biến thiên

Ví dụ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A $(-4;2)$. B $(-\infty;2]$. C $[-4;2)$. D $(-3;3)$.

Lời giải

Phương trình $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y=m-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta được:

$$-4<m-1<2 \Leftrightarrow -3<m<3.$$

Vậy $m \in (-3;3)$.

Chọn đáp án D. □

10.2.3 Tương giao của hàm số bậc ba

Để giải quyết bài toán tương giao giữa đường thẳng $d: y=px+q$ và đồ thị hàm số bậc ba $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$, ta thường lập phương trình hoành độ giao điểm và đưa về một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Phân tích nhân tử (Nhẩm nghiệm – Sơ đồ Horner)

Đây là phương pháp nền tảng và thường gặp nhất khi phương trình hoành độ giao điểm có thể nhẩm được một nghiệm đẹp (thường nghiệm này độc lập với tham số m).

– **Bước 1:** Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$ax^3+bx^2+cx+d=px+q \Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-p)x+(d-q)=0 \quad (*)$$

Nhẩm một nghiệm đặc biệt $x=x_0$ (thử $x=0,\pm1,\pm2$ hoặc chọn x sao cho tham số m bị triệt tiêu). Sử dụng sơ đồ Horner để phân tích $(*)$ thành nhân tử:

$$(x-x_0)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=ax^2+b'x+c'=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

– **Bước 2:** Xử lý điều kiện để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt. Điều này tương đương với phương

trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác x_0:

$$\begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Tìm được điều kiện của tham số } m \in \mathscr{D}_1.$$

– **Bước 3:** Gọi tọa độ 3 giao điểm là $A(x_0; px_0 + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Áp dụng định lý Vi-ét cho (1), ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b'}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c'}{a} \end{cases}$$

– **Bước 4:** Biến đổi yêu cầu hình học/đại số của bài toán (điều kiện K) về dạng tổng và tích của x_1, x_2. Thế hệ thức Vi-ét vào, giải phương trình/bất phương trình tìm $m \in \mathscr{D}_2$. Kết luận $m \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d : y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3.

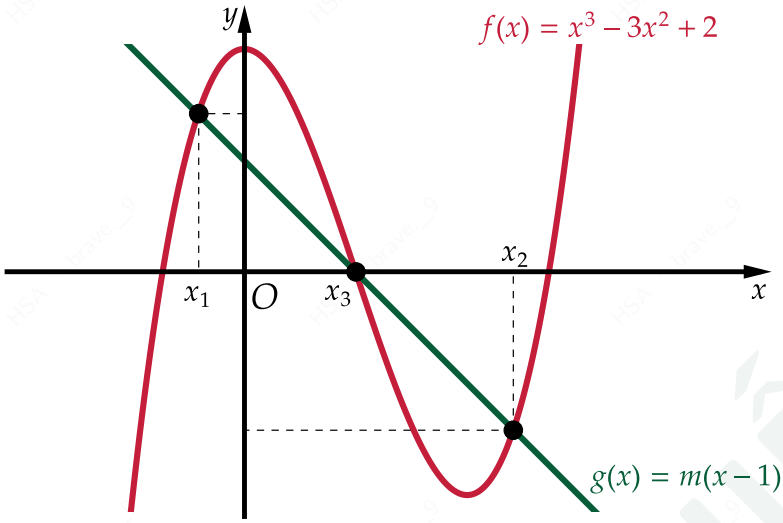
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1)$$

Nhận thấy tổng các hệ số của vế trái $1 - 3 + 2 = 0$ nên vế trái có nghiệm $x = 1$. Ta phân tích thành nhân tử:

$$\begin{aligned} & (x-1)(x^2 - 2x - 2) - m(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$



Để đồ thị cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1. Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(-m-2) > 0 \\ 1^2 - 2(1) - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ -m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Vậy $m > -3$ là các giá trị cần tìm.

Phương pháp 2: Công thức giải nhanh liên quan đến cấp số cộng và cấp số nhân

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$.

Ba nghiệm lập thành Cấp số cộng	Ba nghiệm lập thành Cấp số nhân
Giả sử 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_3 = 2x_2$. **Điều kiện cần:** Đồng nhất hệ thức $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ với phương trình gốc, ta luôn suy ra nghiệm ở giữa là: $$x_2 = -\frac{b}{3a}$$ Thế trực tiếp giá trị $x_2 = -\frac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ta sẽ thu được một phương trình chứa tham số m. Giải tìm m. **Điều kiện đủ:** Thay các giá trị m vừa tìm được vào lại phương trình ban đầu, bấm máy tính xem phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng hay không để loại nghiệm ngoại lai.	Giả sử 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$. **Điều kiện cần:** Tương tự, từ việc đồng nhất hệ thức, ta luôn suy ra nghiệm ở giữa là: $$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$$ **Điều kiện đủ:** Thế trực tiếp giá trị $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ta sẽ thu được một phương trình chứa tham số m. Giải tìm m. Thay các giá trị m vừa tìm được vào lại phương trình ban đầu, bấm máy tính kiểm tra sự tồn tại 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn cấp số nhân.

Ví dụ

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx^2 + 2m = 0 \quad (*)$

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng x_1, x_2, x_3. Khi đó, nghiệm ở giữa phải là:

$$x_2 = -\frac{b}{3a} = -\frac{-3m}{3 \cdot 1} = m$$

Thế $x = m$ vào phương trình $(*)$, ta được:

$$m^3 - 3m \cdot m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

- Với $m = 0$: $(*)$ trở thành $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (chỉ có 1 nghiệm, loại).
- Với $m = 1$: $(*)$ trở thành $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$.
  Phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $x_1 = 1 - \sqrt{3};\ x_2 = 1;\ x_3 = 1 + \sqrt{3}$.
  Ta thấy $x_1 + x_3 = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}) = 2 = 2x_2$. Ba nghiệm lập thành cấp số cộng (thỏa

mãn).

– Với $m=-1$: $(*)$ trở thành $x^3+3x^2-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-2)=0$.
Phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $x_1=-1-\sqrt{3};\ x_2=-1;\ x_3=-1+\sqrt{3}$.
Ta thấy $x_1+x_3=(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=-2=2x_2$. Ba nghiệm lập thành cấp số cộng (thỏa mãn).

Vậy có đúng 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=1$ và $m=-1$.

Phương pháp 3: Sử dụng giá trị cực trị của đồ thị hàm số

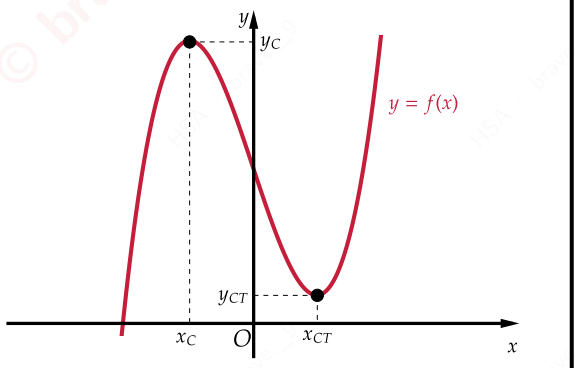
Nhận xét: Dấu hiệu nhận biết và quy tắc tính

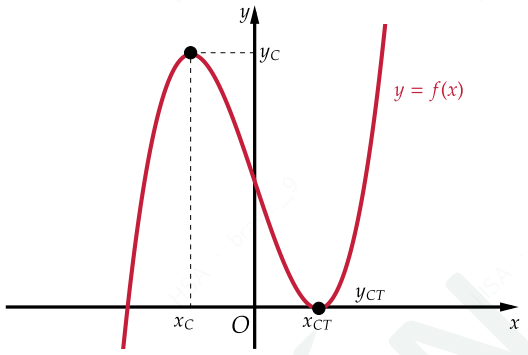
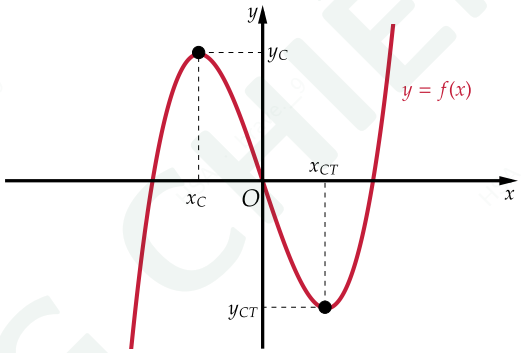
Khi phương trình

$$f(x,m)=0 \quad (1)$$

chứa tham số m ở bậc cao (ta không thể cô lập thành $f(x)=g(m)$) và không nhẩm được nghiệm nguyên nào để dùng sơ đồ Horner.

Ta coi $y=f(x,m)$ là một hàm số bậc ba ẩn x. Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số này với trục hoành ($y=0$). Ta biện luận hoàn toàn dựa vào giá trị cực đại ($y_{CĐ}$) và cực tiểu (y_{CT}):

Số nghiệm	Điều kiện cực trị	Đồ thị minh hoạ
(1) có đúng **1 nghiệm**	$y_{CĐ}\cdot y_{CT}>0$ (hoặc hàm số không có cực trị)	

Số nghiệm	Điều kiện cực trị	Đồ thị minh hoạ
(1) có đúng **2 nghiệm**	$y_{CĐ} \cdot y_{CT} = 0$	
(1) có đúng **3 nghiệm**	$y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0$	

10.2.4 Tương giao của hàm số phân thức

Bài toán tổng quát: Tìm tham số m để đường thẳng $d\colon y = kx+p$ cắt đồ thị hàm số $(C)\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K cho trước.

– **Bước 1:** Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{ax+b}{cx+d} = kx+p \Leftrightarrow g(x) = Ax^2+Bx+C = 0 \quad \left(\forall x \neq -\frac{d}{c}\right).$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $g(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Giải hệ điều kiện này, ta tìm được tập giá trị của tham số $m \in \mathscr{D}_1$.

– **Bước 2:** Gọi $A(x_1; kx_1+p)$ và $B(x_2; kx_2+p)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}; \qquad P = x_1 x_2 = \frac{C}{A}.$$

Biến đổi điều kiện K về dạng biểu thức chứa tổng và tích của x_1, x_2. Thế hệ thức Vi-ét vào, ta thu được phương trình hoặc bất phương trình theo biến m. Giải tìm được $m \in \mathscr{D}_2$.

Kết luận giá trị m cần tìm là $m \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

Ví dụ

Mã 104 - THPTQG 2019 Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

(A) $(-\infty; -3)$. (B) $[-3; +\infty)$. (C) $(-\infty; -3]$. (D) $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = F(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y = -m$.

Ta có:

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} - 1, & \text{khi } x > -1 \\ \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + 2x + 1, & \text{khi } x < -1 \end{cases}$$

Đạo hàm:

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}, & \text{khi } x\in(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+2, & \text{khi } x\in(-\infty;-1)\setminus\{-2\}\end{cases}$$

Suy ra $F'(x)>0$ với mọi x thuộc tập xác định.

Mặt khác, ta tính được các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=3$$

$$\lim_{x\to-2^-}F(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to-2^+}F(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to-1^-}F(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to-1^+}F(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}F(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to0^+}F(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to1^-}F(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to1^+}F(x)=-\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=-m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=F(x)$ tại đúng 4 điểm.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y=-m$ luôn cắt 4 nhánh đầu tiên của đồ thị (trên các khoảng từ $-\infty$ đến 1) với mọi giá trị của m.

Do đó, để phương trình có **đúng** 4 nghiệm, đường thẳng $y=-m$ không được cắt nhánh thứ 5 (nhánh trên khoảng $(1;+\infty)$). Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$-m\geq 3\Leftrightarrow m\leq -3$$

Vậy $m\in(-\infty;-3]$.

Chọn đáp án C. □

Ví dụ

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)+1=m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A $(-4;2)$. B $(-\infty;2]$. C $[-4;2)$. D $(-3;3)$.

Lời giải

Phương trình $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta được $-4<m-1<2 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Vậy $m\in(-3;3)$.

Chọn đáp án D. □

Ví dụ

Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A $m=-1$. B $m=0$. C $m=-2$. D $m=-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\dfrac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (đk $x \neq 1$)

$\Rightarrow x = (1-x)(mx-m-1) \Leftrightarrow x = mx-m-1-mx^2+mx+x \Leftrightarrow mx^2-2mx+m+1 = 0 \quad (*)$

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N thì $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m+1) = -m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Giả sử $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$. Theo hệ thức Viét $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m+1}{m}$.

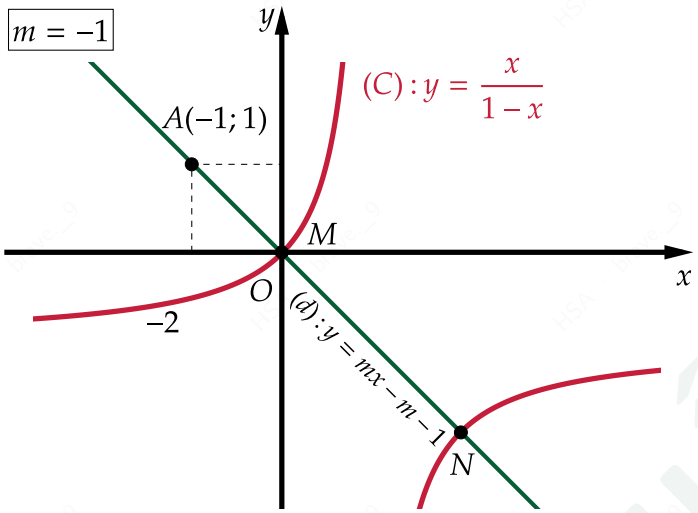
Suy ra $y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m - 2 = 2m - 2m - 2 = -2$

và $y_1 \cdot y_2 = (mx_1 - m - 1)(mx_2 - m - 1) = m^2 x_1 x_2 - m(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$

$$= m(m+1) - 2m(m+1) + (m+1)^2 = m + 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= (x_1+1)^2 + (y_1-1)^2 + (x_2+1)^2 + (y_2-1)^2 \\ &= (x_1+x_2+2)^2 - 2(x_1+1)(x_2+1) + (y_1+y_2-2)^2 - 2(y_1-1)(y_2-1) \\ &= (x_1+x_2+2)^2 - 2(x_1x_2+x_1+x_2+1) + (y_1+y_2-2)^2 - 2\left(y_1y_2-(y_1+y_2)+1\right) \\ &= (2+2)^2 - 2\left(\frac{m+1}{m}+2+1\right) + (-2-2)^2 - 2(m+1-(-2)+1) \\ &= 18 - 2\left(\frac{m+1}{m}\right) - 2m = 18 - 2 - 2\cdot\frac{1}{m} - 2m = 16 + 2\cdot\left[\frac{1}{-m} + (-m)\right] \\ &\geq 16 + 2\cdot 2 = 20. \end{aligned}$$



Suy ra $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\dfrac{1}{-m} = -m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $m = -1$ (vì $m < 0$).

Chọn đáp án A. □

10.2.5 Tương giao của hàm số bậc 4 (trùng phương)

Bài toán tổng quát: Tìm m để đường thẳng $d\colon y = \alpha$ cắt đồ thị $(C)\colon y = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K.

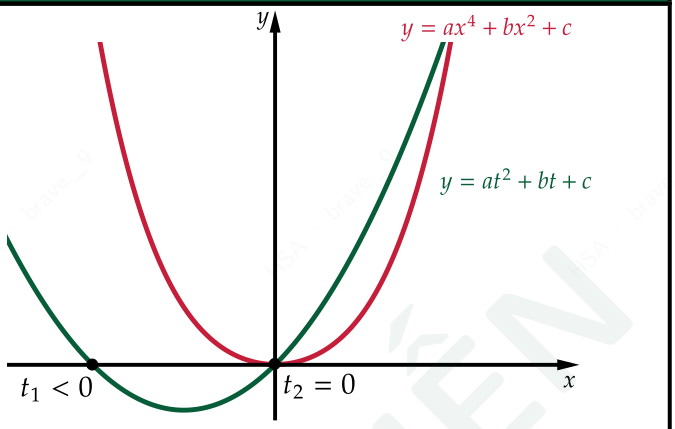
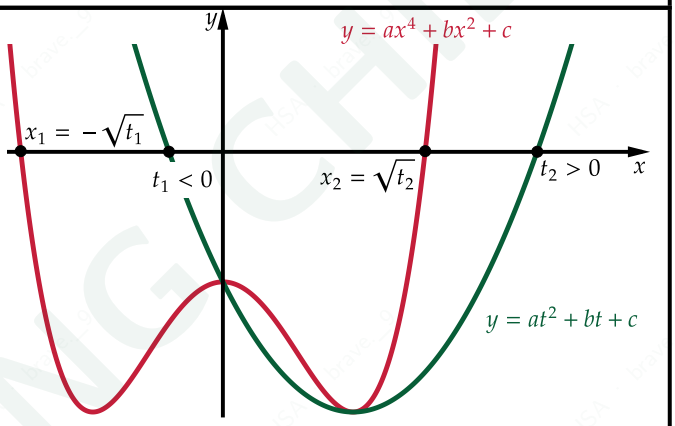
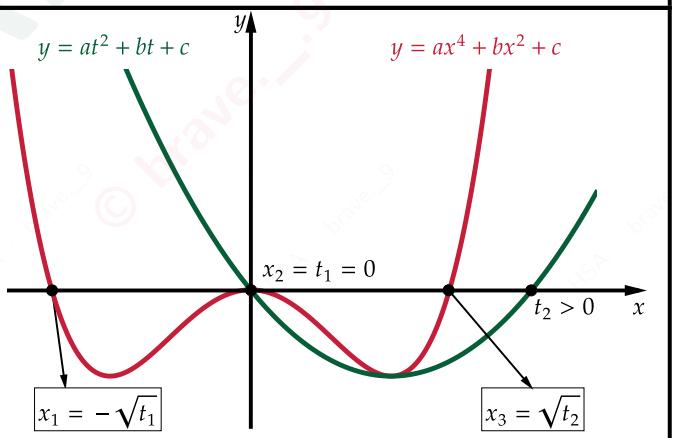
Phương pháp giải: Lập phương trình hoành độ giao điểm:

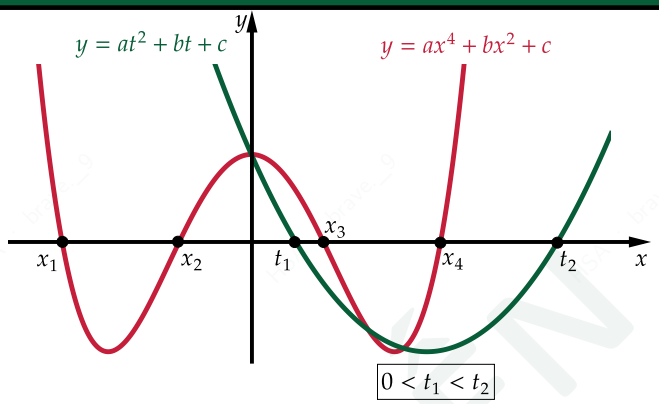
$$ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, phương trình trở thành:

$$at^2 + bt + c - \alpha = 0 \quad (2)$$

Tùy thuộc vào số giao điểm n yêu cầu mà ta biện luận số nghiệm t của phương trình (2). Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình (2) với $S = t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $P = t_1 t_2 = \dfrac{c - \alpha}{a}$.

Số nghiệm của (1)	Điều kiện của PT (2)	Đồ thị minh hoạ
(1) có đúng **1 nghiệm**	(2) có nghiệm $t_1 < 0 = t_2$ hoặc $t_1 = t_2 = 0$. $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S \le 0 \end{cases}$	
(1) có đúng **2 nghiệm** phân biệt	(2) có nghiệm $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	
(1) có đúng **3 nghiệm** phân biệt	(2) có 2 nghiệm $0 = t_1 < t_2$. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$	

Số nghiệm của (1)	Điều kiện của PT (2)	Đồ thị minh hoạ
(1) có đúng **4 nghiệm** phân biệt	(2) có 2 nghiệm $0 < t_1 < t_2$. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$	

Bài toán: Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành **cấp số cộng**.

Điều kiện cần: Giả sử phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt. Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, ta được phương trình $at^2 + bt + c = 0$ (2) có 2 nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$.

Bốn nghiệm của (1) lần lượt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$. Để 4 nghiệm này lập thành cấp số cộng thì khoảng cách giữa chúng phải bằng nhau:

$$\sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$$

Theo định lý Vi-ét cho phương trình (2):

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} \\ t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10t_1 = -\dfrac{b}{a} \\ 9t_1^2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{-b}{10a} \Rightarrow 9\left(\frac{-b}{10a}\right)^2 = \frac{c}{a}$$

Rút gọn ta được điều kiện rút gọn: $\mathbf{9b^2 = 100ac}$. Giải phương trình này ta tìm được m.

Điều kiện đủ: Thử lại các giá trị m vừa tìm được vào phương trình ban đầu để đảm bảo phương trình thực sự có 4 nghiệm phân biệt ($b^2 - 4ac > 0$, $-\dfrac{b}{a} > 0$, $\dfrac{c}{a} > 0$).

Ví dụ

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A $(-1; 3)$. **B** $(-3; 1)$. **C** $(2; 4)$. **D** $(-3; 0)$.

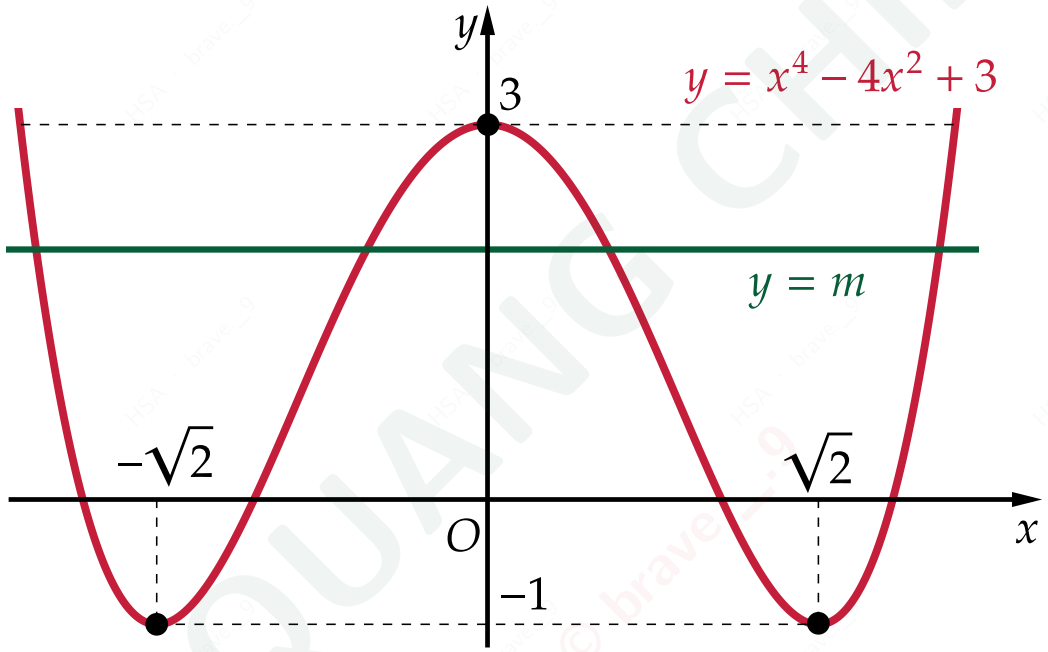
Lời giải

Ta có: $x^4-4x^2+3+m=0 \Leftrightarrow -x^4+4x^2-3=m.$

Xét hàm số $y=-x^4+4x^2-3$, khi đó:

$$y'=-4x^3+8x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=0 \end{array}\right. .$$

Suy ra $y_{CĐ}=1;\ y_{CT}=-3.$



.

Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì: $-3<m<1 \Rightarrow m\in(-3;1).$

Chọn đáp án (B) . . . . . □

Ví dụ

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

(A) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}.$ (B) $(1;+\infty).$

C $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$.

Đặt $x^2=t$ $(t\geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+(2m-1)=0 \quad (*)$.

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+1>0 \\ 2m>0 \\ 2m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m\neq 1 \\ m>0 \\ m>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{2} \\ m\neq 1 \end{cases}$$ hay $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$.

Chọn đáp án **A** ..... □

Ví dụ

Biết đồ thị hàm số $y=(x-1)(x+1)(x^2-7)-m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3,x_4. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}+\frac{1}{1-x_4}>1$.

A 9. **B** 8. **C** 6. **D** 7..

Lời giải

Ta có $y=(x-1)(x+1)(x^2-7)-m=x^4-8x^2+7-m$.

Mặt khác ta có $y'=4x^3-16x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-9-m$	$\nearrow$	$7-m$	$\searrow$	$-9-m$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-9 < m < 7$. Vì hàm số chẵn nên có 2 cặp nghiệm đối xứng. Giả sử $x_1 + x_2 = 0$ và $x_3 + x_4 = 0$.

Theo đề bài ta có:

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1+x_3} = \frac{2}{1-x_1^2} + \frac{2}{1-x_3^2} = \frac{4-2(x_3^2+x_1^2)}{1-(x_3^2+x_1^2)+x_3^2x_1^2} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{4-2\cdot 8}{1-8+(7-m)} > 1 \Leftrightarrow 0 < m < 12.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $0 < m < 7 \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Chọn đáp án (C) . . . . . □

Chương 11

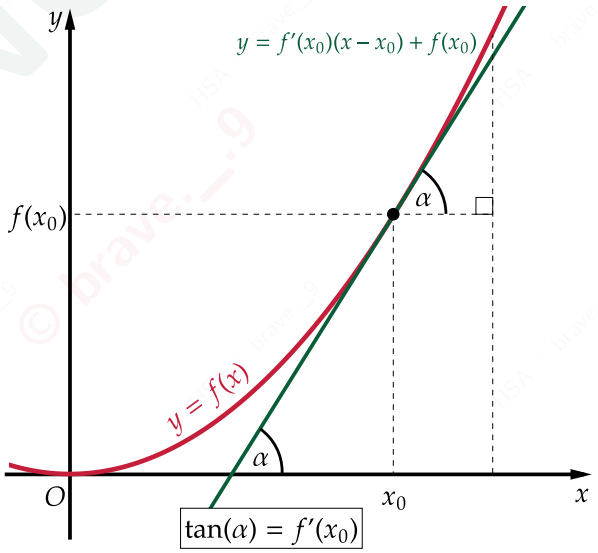
TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

11.1 Định nghĩa tiếp tuyến

Định lý

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 chính là *hệ số góc* của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



11.2 Các dạng viết phương trình tiếp tuyến

11.2.1 Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị

Bài toán cho trước hoành độ x_0 hoặc tung độ y_0. Ta cần tìm đầy đủ ba đại lượng: hoành độ tiếp điểm x_0, tung độ tiếp điểm $y_0 = f(x_0)$ và hệ số góc $k = f'(x_0)$.

Ví dụ

Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

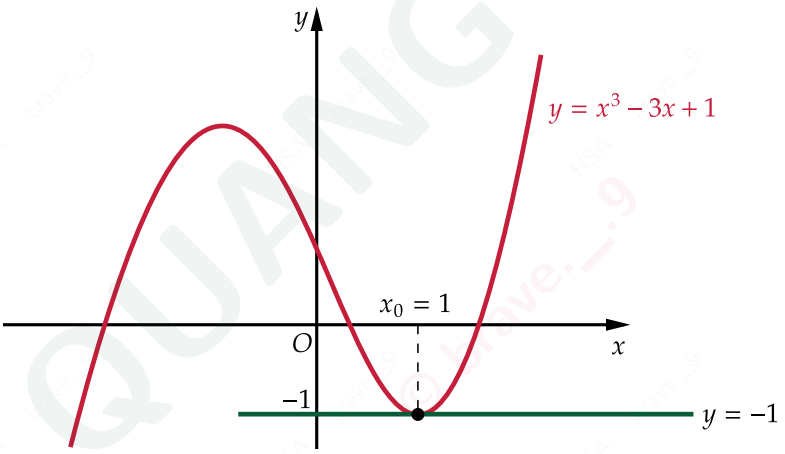
Lời giải

Tính tọa độ tiếp điểm: $y_0 = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$. Vậy tiếp điểm là $M(1; -1)$.

Tính đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$. Hệ số góc tiếp tuyến tại M là: $k = y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 0$.

Áp dụng công thức, phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = 0 \cdot (x - 1) + (-1) \Leftrightarrow y = -1.$$



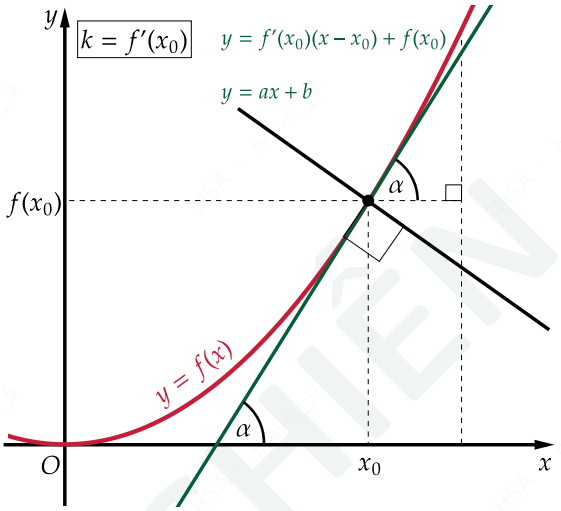
(Đây là một tiếp tuyến nằm ngang, song song với trục hoành).

11.2.2 Tiếp tuyến khi biết hệ số góc

Bài toán thường yêu cầu tìm tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước (hoặc thông qua dữ kiện tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với một đường thẳng).

- Nếu tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b$ thì $k = a$.
- Nếu tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$.

Ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ để tìm hoành độ tiếp điểm x_0, từ đó viết phương trình tiếp tuyến.



Ví dụ

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = 9x + 1$.

Lời giải

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = 9x + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 9$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Giả sử x_0 là hoành độ tiếp điểm, ta giải phương trình $y'(x_0) = 9$:

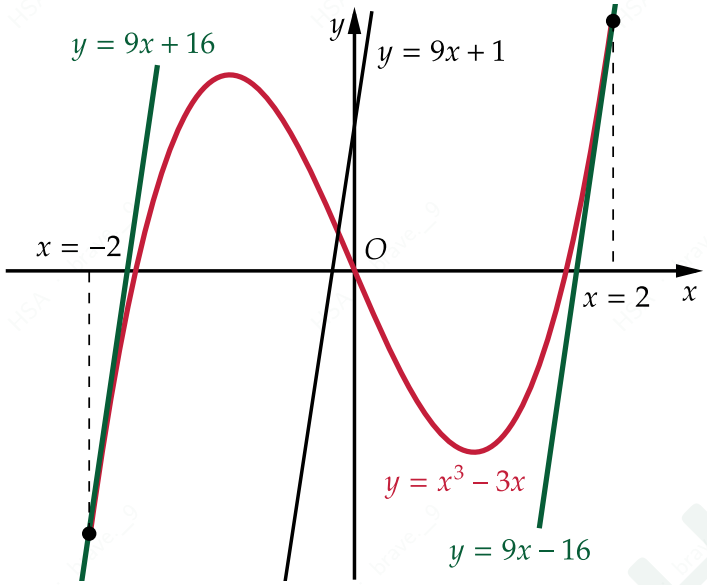
$$3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$. Phương trình tiếp tuyến là:

$$y = 9(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16.$$

- Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = (-2)^3 - 3(-2) = -2$. Phương trình tiếp tuyến là:

$$y = 9(x + 2) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 16.$$



Cả hai đường thẳng này đều không trùng với d. Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là: $y = 9x - 16$ và $y = 9x + 16$.

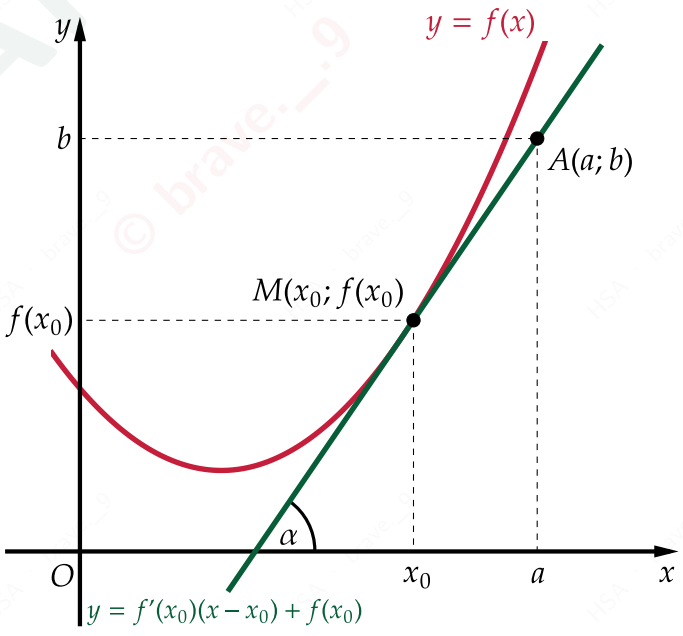
11.2.3 Tiếp tuyến đi qua điểm cho trước

– Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

– Vì tiếp tuyến Δ đi qua điểm $A(a; b)$ cho trước, thay tọa độ $x = a, y = b$ vào phương trình trên ta được:

$$b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0).$$



– Giải phương trình này để tìm x_0. Có bao nhiêu giá trị x_0 thì có bấy nhiêu phương trình tiếp tuyến tương ứng.

Ví dụ

Viết phương trình các tiếp tuyến của parabol $(P): y = x^2$ đi qua điểm $A(2;3)$.

Lời giải

Nhận xét: $A(2;3)$ không thuộc (P) vì $2^2 = 4 \neq 3$.

Gọi tiếp điểm là $M(x_0; x_0^2) \in (P)$. Ta có $y' = 2x$ nên hệ số góc tiếp tuyến tại M là $k = 2x_0$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0 x - x_0^2.$$

Vì Δ đi qua $A(2;3)$, thế $x = 2, y = 3$ vào ta được:

$$3 = 2x_0 \cdot 2 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 1$: Tiếp tuyến là $y = 2 \cdot 1 \cdot x - 1^2 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.
- Với $x_0 = 3$: Tiếp tuyến là $y = 2 \cdot 3 \cdot x - 3^2 \Leftrightarrow y = 6x - 9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $y = 2x - 1$ và $y = 6x - 9$.

Chú ý

Cần phân biệt rõ ngữ nghĩa: Điểm A cho trước *không nhất thiết* thuộc đồ thị.

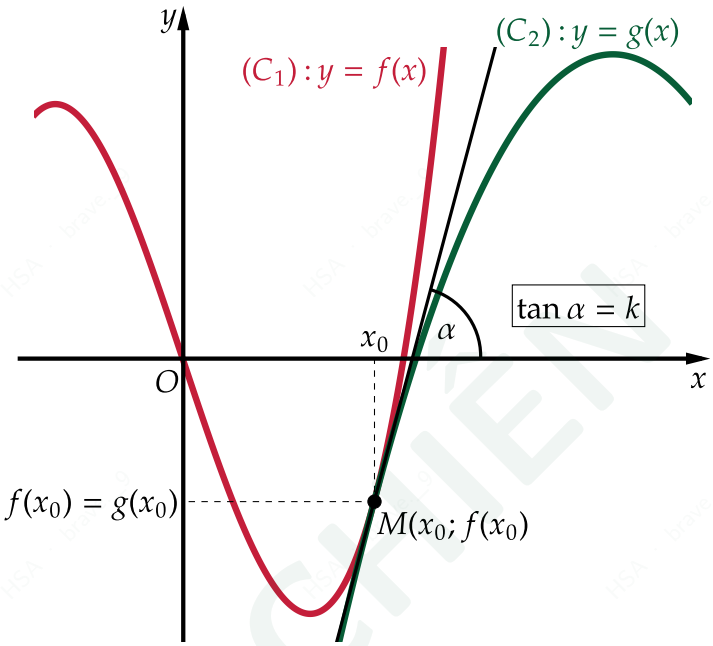
- Tiếp tuyến **tại** A: A chắc chắn là tiếp điểm (nằm trên đồ thị $f(x)$ mà đề bài cho).
- Tiếp tuyến **đi qua** A: A có thể chỉ là một điểm nằm trên đường thẳng tiếp tuyến chứ không phải là tiếp điểm của đồ thị $f(x)$.

11.3 Sự tiếp xúc của hai đồ thị hàm số

Hai đồ thị hàm số $(C_1)\colon y = f(x)$ và $(C_2)\colon y = g(x)$ *tiếp xúc* với nhau tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) & (1) \quad \text{(điểm chung)} \\ f'(x_0) = g'(x_0) & (2) \quad \text{(cùng hệ số góc)} \end{cases}$$

Nghiệm x_0 của hệ phương trình chính là hoành độ của tiếp điểm.



Đường thẳng đi qua tiếp điểm đó với hệ số góc $k = f'(x_0) = g'(x_0)$ được gọi là *tiếp tuyến chung* của hai đồ thị tại tiếp điểm.

Ví dụ

Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x + m$ tại điểm $x_0 = 1$.

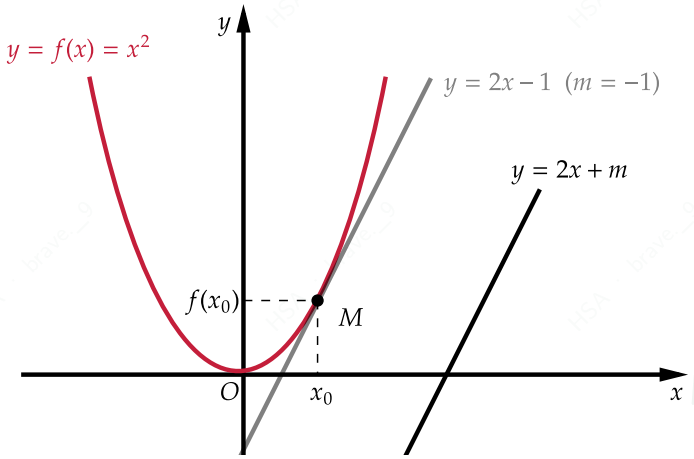
Lời giải

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Hai đồ thị tiếp xúc với nhau khi x_0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_0^2 = 2x_0 + m \\ (x_0^2)' = (2x_0 + m)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = 2x_0 + m & (1) \\ 2x_0 = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2), ta có $x_0 = 1$. Thay vào phương trình (1):

$$1^2 = 2 \cdot 1 + m \Rightarrow m = -1.$$



Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Phần III

CÁC DẠNG TOÁN VÀ CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

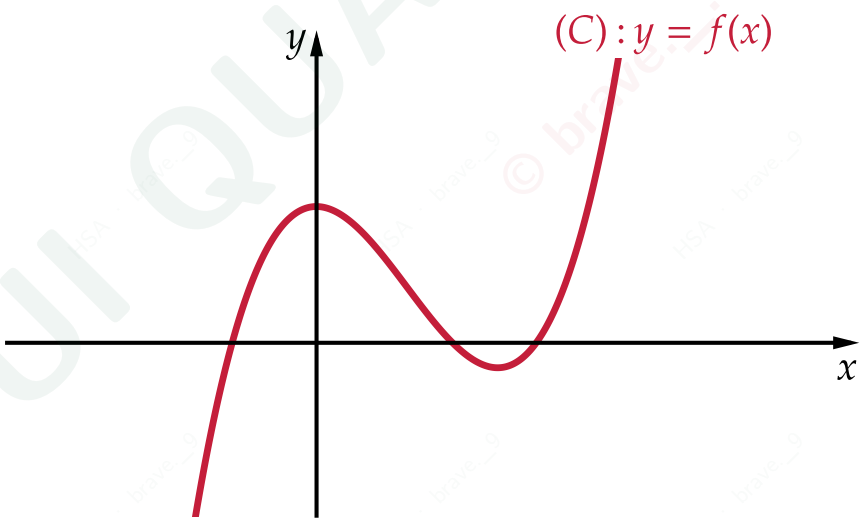
BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Chương

12 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ VÀ ĐỒ THỊ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

12.1 Các phép biến đổi đồ thị cơ bản

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập D, có đồ thị là (C) như hình minh họa dưới đây:



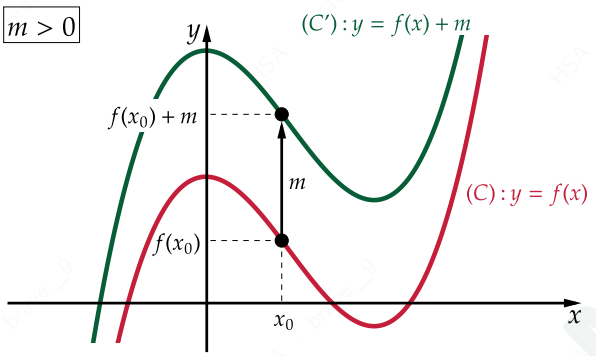
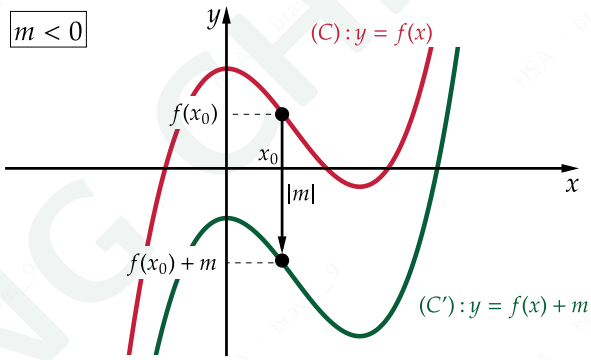
Ta xét các phép biến đổi đồ thị cơ bản như sau:

BÙI QUANG CHIẾN

12.1.1 Phép tịnh tiến theo phương thẳng đứng

Định nghĩa

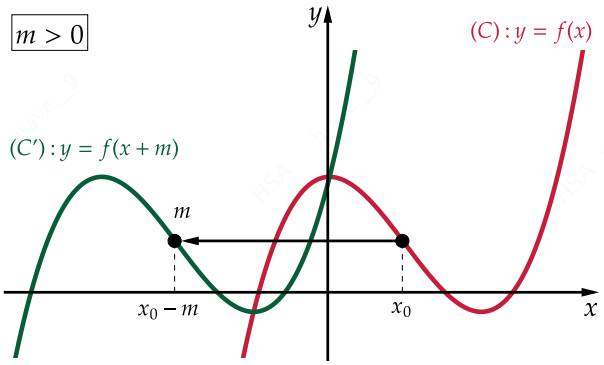
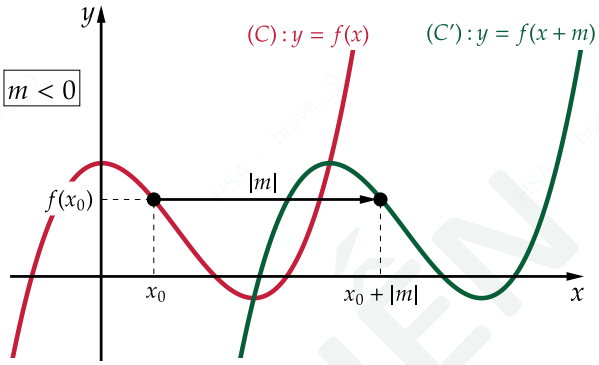
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và số thực $m \neq 0$. Đồ thị (C') của hàm số $y = f(x) + m$ được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách tịnh tiến dọc theo trục tung (phương thẳng đứng).

$m > 0$	$m < 0$
Tịnh tiến (C) **lên trên** m đơn vị, ta được đồ thị mới (C').	Tịnh tiến (C) **xuống dưới** $\lvert m\rvert$ đơn vị, ta được đồ thị mới (C').
	

12.1.2 Phép tịnh tiến theo phương ngang

Định nghĩa

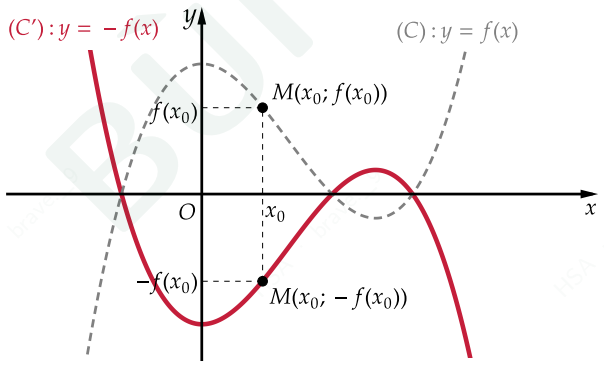
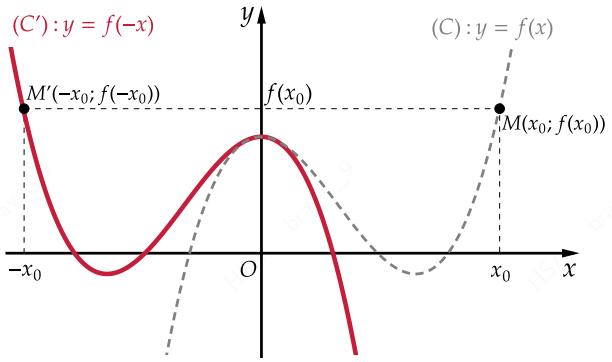
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và số thực $m \neq 0$. Đồ thị (C') của hàm số $y = f(x + m)$ được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách tịnh tiến dọc theo trục hoành (phương ngang). Cụ thể như sau:

$m > 0$	$m < 0$
Tịnh tiến (C) **sang trái** m đơn vị, ta được đồ thị mới (C').	Tịnh tiến (C) **sang phải** $\lvert m\rvert$ đơn vị, ta được đồ thị mới (C'').
	

12.1.3 Phép đối xứng trục

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Đồ thị của các hàm số $(C') : y = -f(x)$ và $(C') : y = f(-x)$ được suy ra từ đồ thị (C) thông qua phép đối xứng trục. Cụ thể như sau:

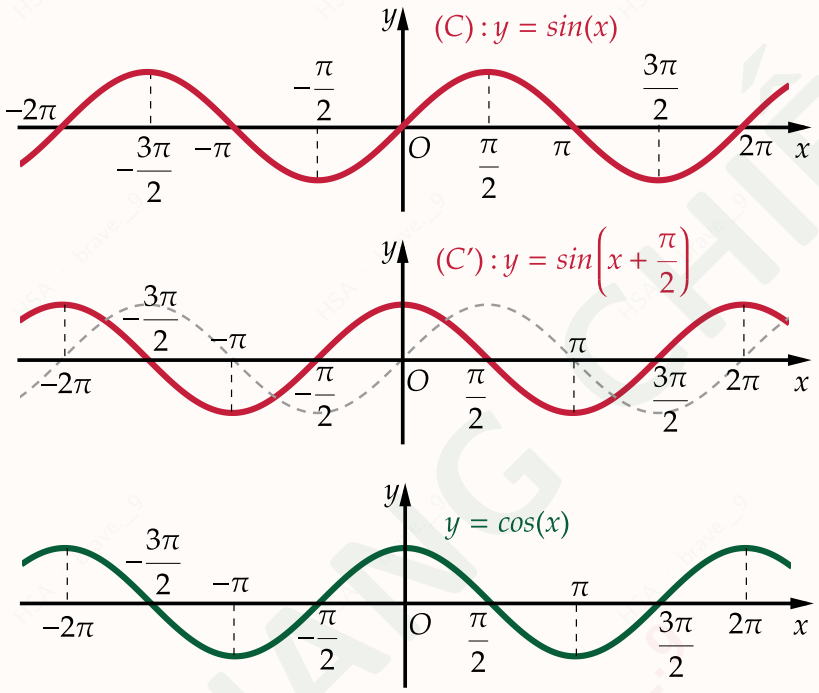
Đồ thị hàm số $y = -f(x)$	Đồ thị hàm số $y = f(-x)$
Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox. Mỗi điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ biến thành điểm $M'(x_0; -f(x_0)) \in (C')$.	Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách lấy đối xứng qua trục tung Oy. Mỗi điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ biến thành điểm $M'(-x_0; f(x_0)) \in (C')$.
	

Nhận xét: Liên hệ với lượng giác

Các công thức lượng giác thường gặp có thể được xem như kết quả của phép tịnh tiến đồ thị. Ví dụ:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$$

Điều này mang ý nghĩa hình học là: đồ thị hàm số $y=\cos x$ có thể thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\sin x$ sang trái một đoạn bằng $\frac{\pi}{2}$ đơn vị dọc theo trục hoành.



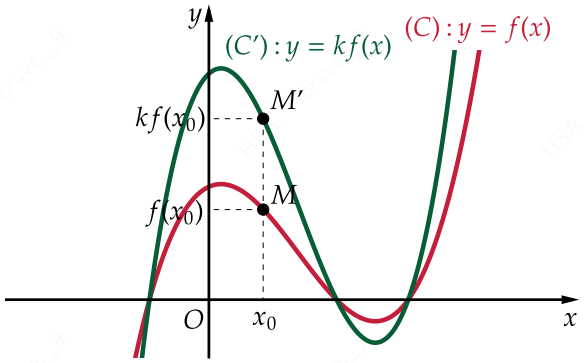
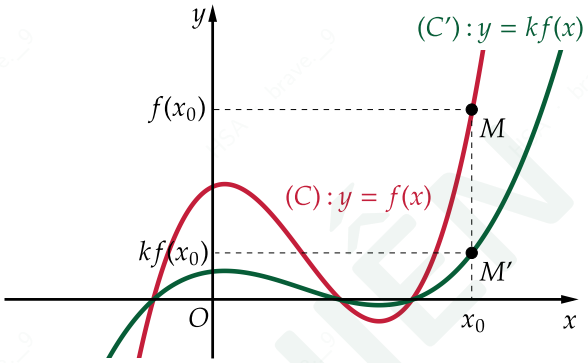
Minh họa: Tịnh tiến đồ thị $y=\sin x$ sang trái $\frac{\pi}{2}$ đơn vị thu được $y=\cos x$

Tương tự, từ công thức $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$, ta cũng rút ra được: đồ thị hàm số $y=\sin x$ có thể thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\cos x$ sang phải một đoạn bằng $\frac{\pi}{2}$ đơn vị.

12.1.4 Phép co – dãn đồ thị theo phương thẳng đứng

Định nghĩa

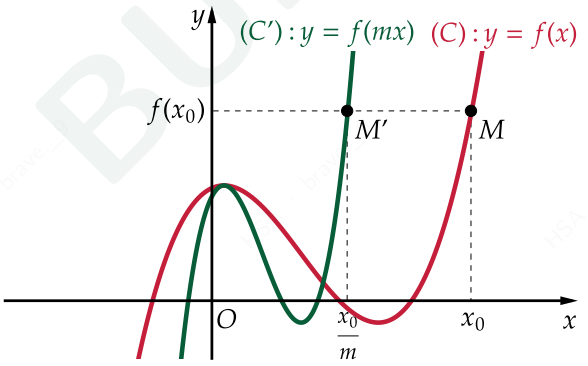
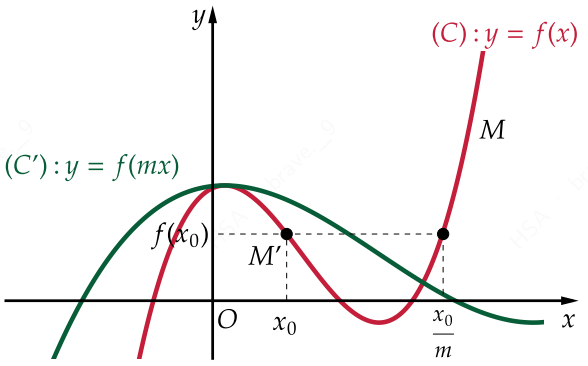
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và hằng số dương $k>0$. Đồ thị (C') của hàm số $y=k\cdot f(x)$ được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách nhân tung độ của mọi điểm thuộc (C) với k (trong khi giữ nguyên hoành độ).

$k > 1$	$0 < k < 1$
Dãn đồ thị (C) ra xa trục hoành Ox theo hệ số k. Mỗi điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ biến thành $M'(x_0; kf(x_0)) \in (C')$. 	Co đồ thị (C) về phía trục hoành Ox theo hệ số k. Mỗi điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ biến thành $M'(x_0; kf(x_0)) \in (C')$. 

12.1.5 Phép co – dãn đồ thị theo phương ngang

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và hằng số dương $m > 0$. Đồ thị (C') của hàm số $y = f(mx)$ được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách chia hoành độ của mọi điểm thuộc (C) cho m (trong khi giữ nguyên tung độ).

$m > 1$	$0 < m < 1$
Co đồ thị (C) về phía trục tung Oy theo hệ số m. Mỗi điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ biến thành $M'\left(\frac{x_0}{m}; f(x_0)\right) \in (C')$. 	Dãn đồ thị (C) ra xa trục tung Oy theo hệ số $1/m$. Mỗi điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ biến thành $M'\left(\frac{x_0}{m}; f(x_0)\right) \in (C')$. 

Chú ý

– Trường hợp hệ số âm (ví dụ $k<0$ hoặc $m<0$): Ta thực hiện lấy đối xứng đồ thị qua trục tọa độ tương ứng (trục hoành Ox đối với k và trục tung Oy đối với m), sau đó tiếp tục co/dãn đồ thị với hệ số là giá trị tuyệt đối (tương ứng là $|k|$ hoặc $|m|$).

12.1.6 Tính chẵn lẻ và tính đối xứng của đồ thị hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D. Tập D được gọi là một tập đối xứng nếu thỏa mãn điều kiện: với mọi $x\in D$ thì $-x\in D$. Khi đó:

– Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x)=f(x)$ với mọi $x\in D$. Về mặt hình học, đồ thị của hàm số chẵn luôn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

– Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu $f(-x)=-f(x)$ với mọi $x\in D$. Về mặt hình học, đồ thị của hàm số lẻ luôn nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Ví dụ

Chứng minh hàm số chẵn

Xét hàm số $y=f(x)=x^2$. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số chẵn.

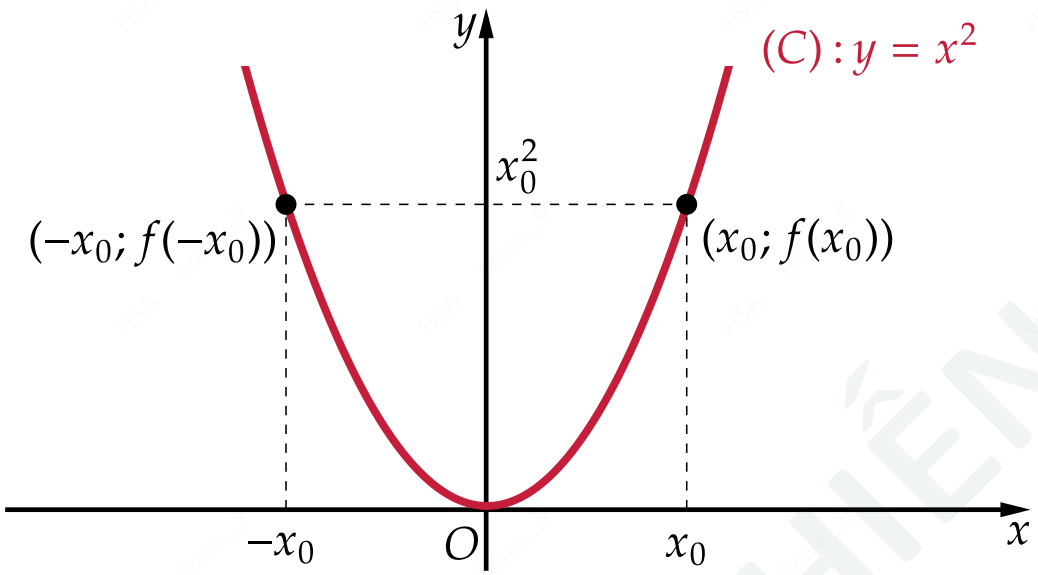
Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$. Ta thấy D là một tập đối xứng vì với mọi $x\in D$, ta luôn có $-x\in D$.

Mặt khác, với mọi $x\in D$, ta có:

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

Về mặt hình học, đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.



Điều này chứng tỏ rằng ứng với mỗi giá trị x bất kỳ thuộc tập xác định, giá trị của hàm số tại x và tại $-x$ luôn bằng nhau. Do đó, hàm số $y = x^2$ là một hàm số chẵn. (ĐPCM)

Ví dụ

Xét hàm số $y = f(x) = \sin x$. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số lẻ.

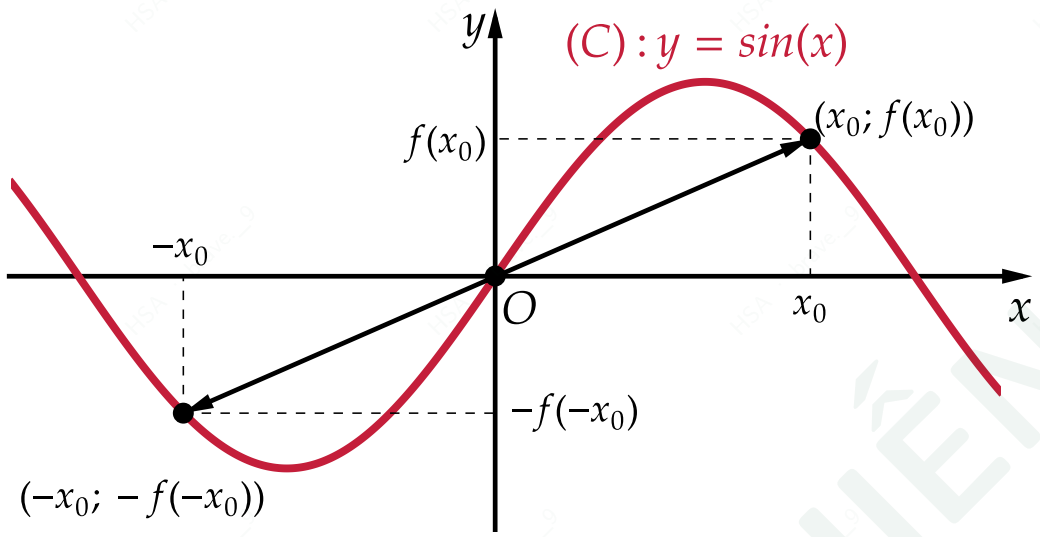
Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Ta thấy D là một tập đối xứng vì với mọi $x \in D$, ta luôn có $-x \in D$.

Mặt khác, với mọi $x \in D$, ta có:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

Về mặt hình học, đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



Điều này chứng tỏ rằng ứng với mỗi giá trị x bất kỳ thuộc tập xác định, giá trị của hàm số tại x và tại $-x$ luôn đối nhau. Do đó, hàm số $y = \sin x$ là một hàm số lẻ. (ĐPCM)

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

12.2 Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

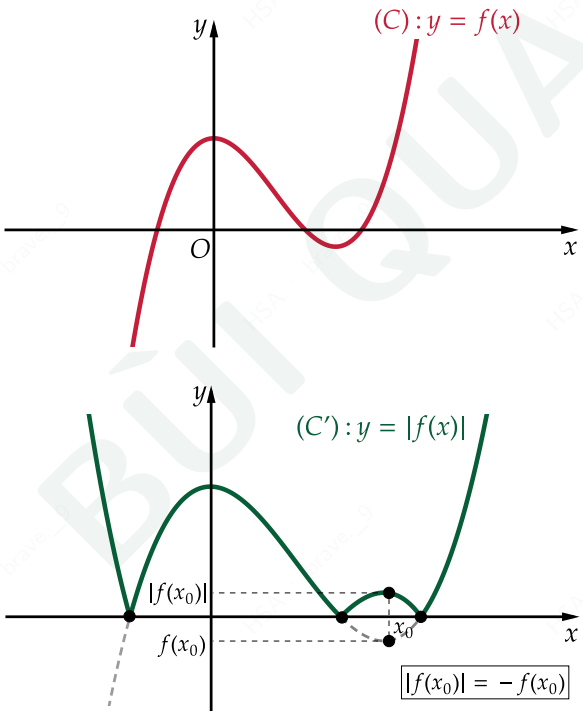
Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Định nghĩa cơ bản:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Quy tắc vẽ từ đồ thị (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành Ox (ứng với miền $f(x) \geq 0$).
- Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành (ứng với miền $f(x) < 0$).
- Xóa bỏ phần đồ thị nằm dưới trục hoành.



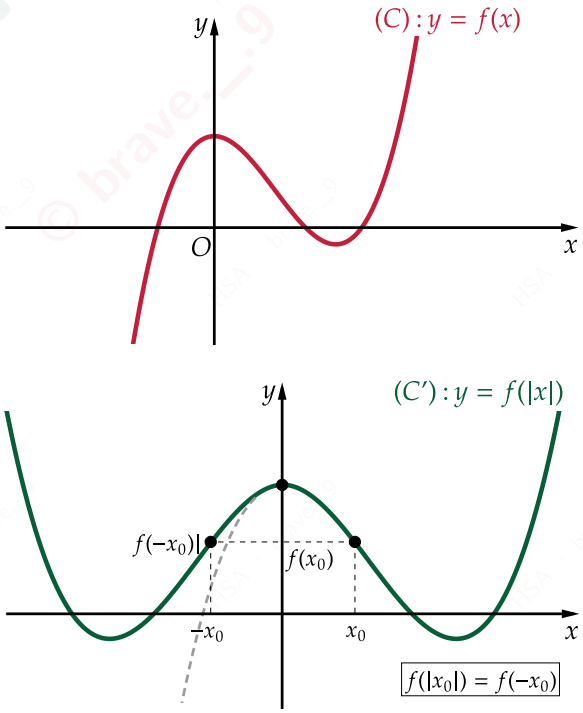
Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

Định nghĩa cơ bản:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

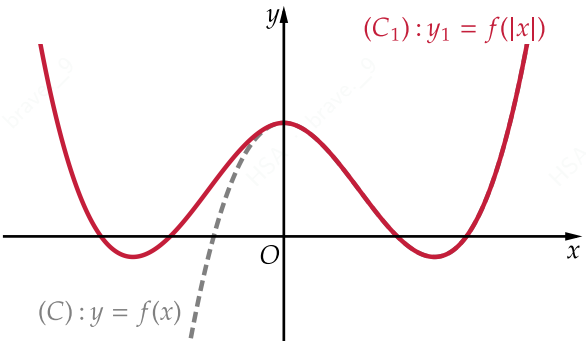
Quy tắc vẽ từ đồ thị (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục tung Oy (ứng với miền $x \geq 0$).
- Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ qua trục tung Oy (vì hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn).
- Xóa bỏ phần đồ thị (C) ban đầu nằm bên trái trục tung (nếu có).

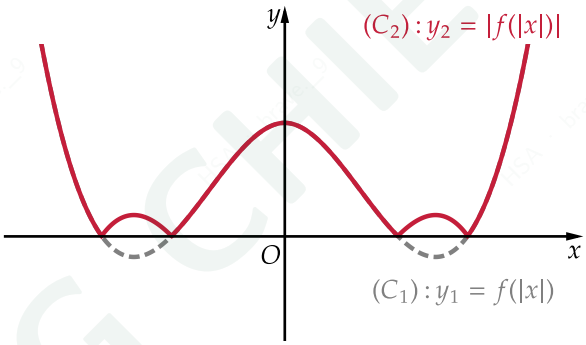


Đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$

1. Vẽ đồ thị (C_1) của hàm số $y_1 = f(|x|)$.
   - Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục tung Oy (ứng với $x \geq 0$).
   - Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ qua trục tung Oy.
   - Xóa bỏ phần đồ thị (C) nằm bên trái trục tung (nếu có).
2. Vẽ đồ thị (C_2) của hàm số $y_2 = |y_1| = |f(|x|)|$.
   - Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) nằm phía trên trục hoành Ox (ứng với $y_1 \geq 0$).
   - Lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_1) nằm phía dưới trục hoành.
   - Xóa bỏ phần đồ thị (C_1) nằm phía dưới trục hoành.



1. Vẽ đồ thị (C_1) của hàm số $y_1 = f(|x|)$.

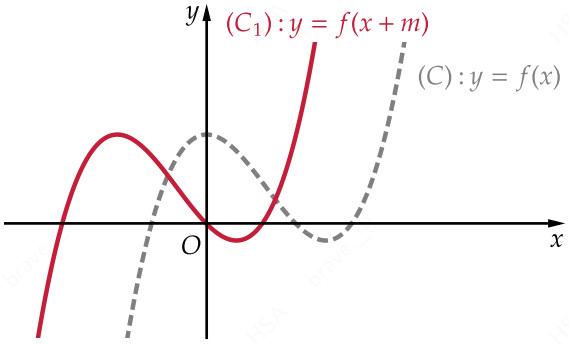


2. Vẽ đồ thị (C_2) của hàm số $y_2 = |y_1| = |f(|x|)|$.

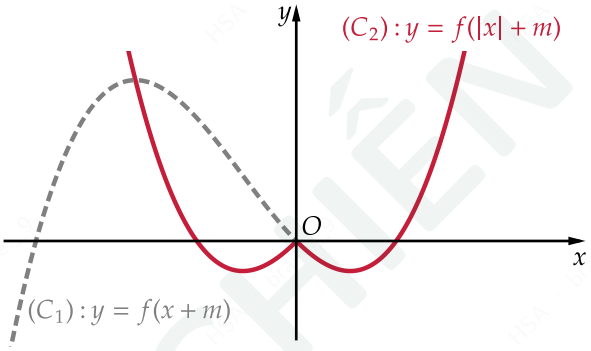
12.2.1 Đồ thị tịnh tiến kết hợp lấy trị tuyệt đối

Đồ thị hàm số $y = f(|x| + m)$

1. Tịnh tiến trước: Tịnh tiến đồ thị (C) sang trái (nếu $m > 0$) hoặc sang phải (nếu $m < 0$) một đoạn bằng $|m|$ đơn vị, ta thu được đồ thị $(C_1) : y = f(x + m)$.
2. Lấy đối xứng sau: Từ đồ thị (C_1), giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải trục tung Oy, rồi lấy đối xứng phần đồ thị đó qua trục Oy, ta thu được đồ thị $(C_2) : y = f(|x| + m)$.



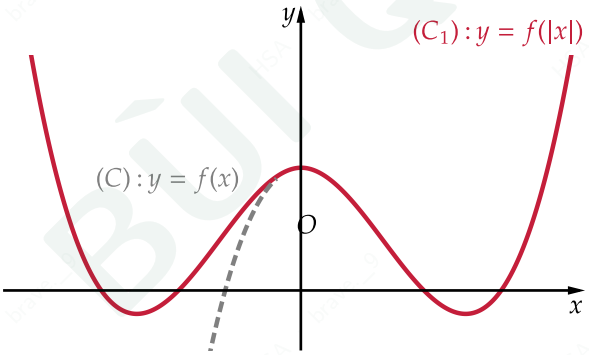
1. Tịnh tiến sang ngang m đơn vị



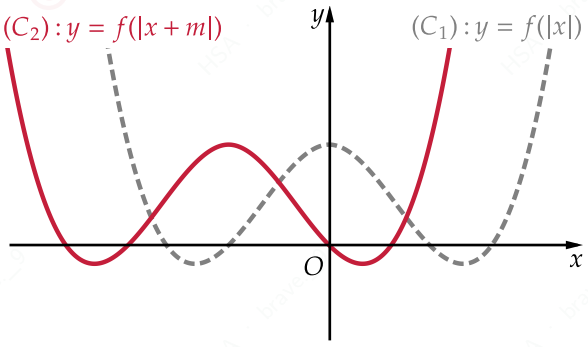
2. Lấy đối xứng qua trục Oy

Đồ thị hàm số $y = f(|x + m|)$

1. Lấy đối xứng trước: Từ đồ thị (C), giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải trục tung Oy, rồi lấy đối xứng phần đồ thị đó qua trục Oy, ta thu được đồ thị $(C_3) : y = f(|x|)$.
2. Tịnh tiến sau: Tịnh tiến đồ thị (C_3) sang trái (nếu $m > 0$) hoặc sang phải (nếu $m < 0$) một đoạn bằng $|m|$ đơn vị, ta thu được đồ thị $(C_4) : y = f(|x + m|)$.



1. Lấy đối xứng qua trục Oy



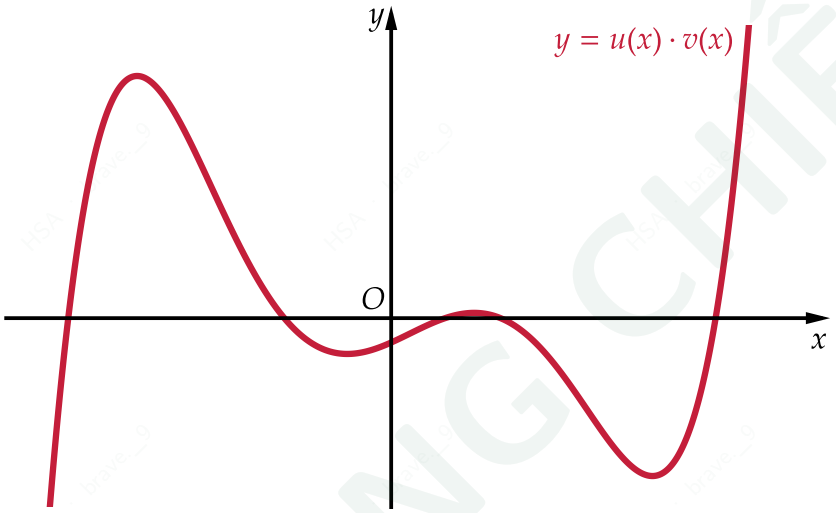
2. Tịnh tiến sang ngang m đơn vị

12.2.2 Giải quyết bài toán dạng $y = |u(x)| \cdot v(x)$

Cho đồ thị $(C) : y = u(x) \cdot v(x)$. Để vẽ đồ thị $(C') : y = |u(x)| \cdot v(x)$, ta biến đổi dựa vào dấu của $u(x)$.

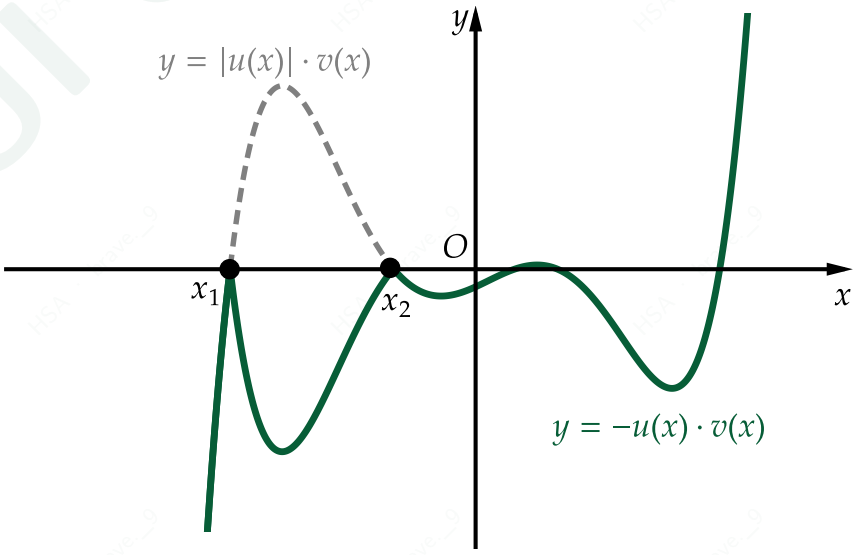
Ta có:

$$y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x), & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x), & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$$



Từ đó, quy tắc vẽ (C') từ (C) gồm hai phần:

- **Phần 1:** Giữ nguyên phần đồ thị (C) trên các khoảng mà $u(x) \geq 0$.
- **Phần 2:** Lấy đối xứng phần đồ thị (C) trên các khoảng mà $u(x) < 0$ qua trục hoành Ox. Chú ý xóa bỏ phần đồ thị cũ của (C) trên các khoảng này.



12.3 Tính đơn điệu của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Nhận xét: Công thức đạo hàm hàm trị tuyệt đối

Trong nhiều trường hợp, để xét tính đơn điệu của hàm số $y = |f(x)|$ một cách nhanh chóng, ta có thể áp dụng trực tiếp công thức tính đạo hàm (với điều kiện $f(x) \neq 0$):

$$y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

Bản chất của công thức này xuất phát từ việc biến đổi $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$. Việc nắm vững công thức sẽ giúp tăng tốc độ xử lý các bài toán.

12.3.1 Tìm điều kiện tham số để hàm số dạng đa thức đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước

Tính đơn điệu của $y = |f(x)|$ trên $[a, b]$

Xét $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$.

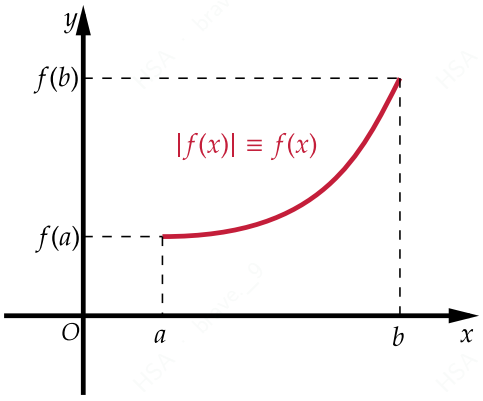
– $y = |f(x)|$ **đồng biến** trên $[a; b]$ khi xảy ra một trong hai trường hợp:

1. $f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ và $f(a) \geq 0$ (tức $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$).
2. $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ và $f(a) \leq 0$ (tức $f(x) \leq 0$ trên $[a; b]$).

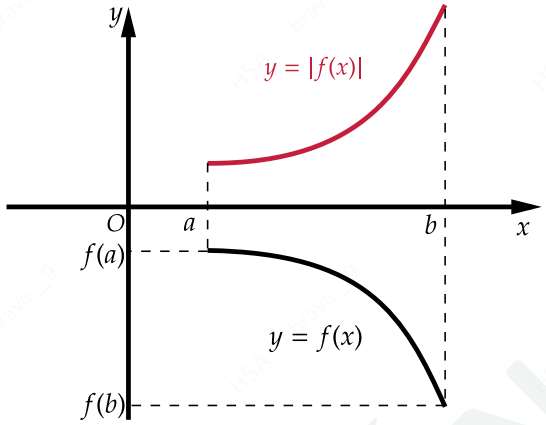
– $y = |f(x)|$ **nghịch biến** trên $[a; b]$ khi xảy ra một trong hai trường hợp:

1. $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ và $f(b) \geq 0$ (tức $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$).
2. $f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ và $f(b) \leq 0$ (tức $f(x) \leq 0$ trên $[a; b]$).

BÙI QUANG CHIẾN

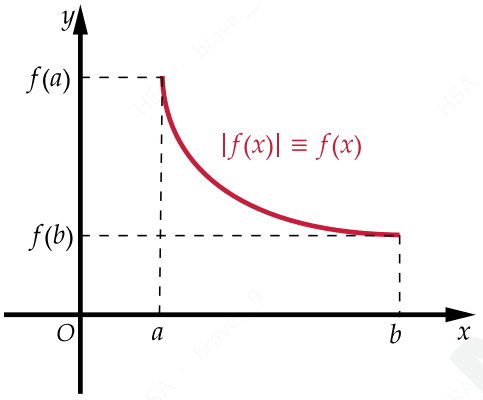


$\boxed{f'(x) \geqslant 0, f(a) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]}$

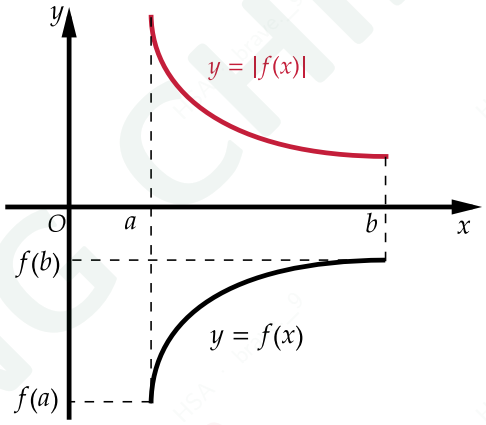


$\boxed{f'(x) \leqslant 0, f(a) \leqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]}$

Trường hợp 1: Để $|f(x)|$ đồng biến trên $[a,b]$ thì ta xét điều kiện như 2 nhánh trên.



$\boxed{f'(x) \leqslant 0, f(b) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]}$



$\boxed{f'(x) \geqslant 0, f(b) \leqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]}$

Trường hợp 2: Để $|f(x)|$ nghịch biến trên $[a,b]$ thì ta xét điều kiện như 2 nhánh trên.

Ví dụ

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A 2. **B** 0. **C** 4. **D** 1.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8$.

TH1: $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$ thì hàm số $y = |f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

TH2: $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1)$.

Khi đó $y = \left|x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8\right| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \dfrac{f'(x)\cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0$ với $\forall x \in (-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\cdot f(x) \le 0 \\ f(x) \ne 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty;1)$$

(vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1) \ge 0,\ \forall x \in (-\infty;1) \\ f(1) = 5m - 17 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -x^4 + 2x + 1,\ \forall x \in (-\infty;1) \\ m \le \dfrac{17}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max\limits_{(-\infty;1)} (-x^4 + 2x + 1) = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \\ m \le \dfrac{17}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \le m \le \frac{17}{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m = 3.$$

Chọn đáp án (D) ..... □

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \left|x^4 + 2x^3 + mx + 2\right|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

(A) $m \ge 1$. (B) $m \in \emptyset$. (C) $0 \le m \le 1$. (D) $m \le 0$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m$.

Ta có hàm số $y = \left|x^4 + 2x^3 + mx + 2\right| = |f(x)|$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (-1;+\infty) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + m \geq 0,\ \forall x \in (-1;+\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4x^3 - 6x^2,\ \forall x \in (-1;+\infty) \\ m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max\limits_{(-1;+\infty)} (-4x^3 - 6x^2) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án C. □

12.3.2 Tìm điều kiện tham số để hàm số dạng phân thức hữu tỉ đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước

Ví dụ

Tìm m để hàm số $y = \left|\dfrac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A $\dfrac{1}{3} < m \leq 1.$

B $m \in [-1;1] \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}.$

C $-1 \leq m < \dfrac{1}{3}.$

D $\dfrac{1}{3} < m \leq 1.$

Lời giải

Đặt $f(x) = \dfrac{x-2m+1}{x+m}$. Điều kiện: $x \neq -m$.

Khi đó $f'(x) = \dfrac{3m-1}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y' = \dfrac{f'(x)\cdot f(x)}{|f(x)|} \geq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$

Trường hợp 1 (I):

$$\begin{cases} f'(x) > 0,\ \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 > 0 \\ -m \leq 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m \leq 1.$$

Trường hợp 2 (II):

$$\begin{cases} f'(x) < 0,\ \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -m \leq 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

Chọn đáp án (A) ..... □

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \left|\frac{x+m}{x+1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

(A) $m < -1$. (B) $m > 1$. (C) $-1 \leq m \leq 1$. (D) $-1 \leq m < 1$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq -1$.

Đặt $f(x) = \frac{x+m}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó ta có $y = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ nếu $y' \geq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) \geq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$$

TH1:

$$\begin{cases} f'(x) > 0,\ \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ \dfrac{1+m}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 1.$$

TH2:

$$\begin{cases} f'(x) < 0,\ \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ \dfrac{1+m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in [-1;1)$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (D) ..... □

12.3.3 Tìm điều kiện tham số để hàm số chứa căn đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước

Ví dụ

Cho hàm số $f(x) = \left|\sqrt{x^2+2x+2} - x + m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

(A) 2018. (B) 2017. (C) 2019. (D) 4039.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x + m$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ta có, $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0,\ \forall x > -1$

(Do $x+1-\sqrt{x^2+2x+2} = (x+1) - \sqrt{(x+1)^2+1} < 0,\ \forall x > -1$)

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x)=|g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow g(x)\le 0,\ \forall x>-1 \quad (1)$$

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow \max\limits_{[-1;+\infty)} g(x)\le 0\Leftrightarrow g(-1)=m+2\le 0\Leftrightarrow m\le -2$.

Kết hợp điều kiện, ta có $S=\{-2019;-2018;\ldots;-2\}$, nên suy ra đáp án là **A** (có 2018 phần tử).

Chọn đáp án (A) ..... □

Ví dụ

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\left|3\sqrt{x^2+1}+x+m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{x^2+1}+x+m\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}+1$.

Trên khoảng $(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$.

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$3\sqrt{2}+1+m$ ↗	$+\infty$

Nhận thấy: hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}+1+m\geq 0\Leftrightarrow m\geq -3\sqrt{2}-1.$$

Lại do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m<0 \end{cases} \Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}.$

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) ..... □

12.3.4 Tìm điều kiện tham số để hàm số lượng giác đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước

Ví dụ

Cho hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\sin x+1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến. Đặt $t=\sin x$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó hàm số $y=\left|\sin^3 x-m\sin x+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y=g(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Xét hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ trên khoảng $(0;1)$ có $f'(t)=3t^2-m$.

+) Khi $m=0$: $f'(t)=3t^2>0$, $\forall t\in(0;1)\Rightarrow y=f(t)=t^3+1$ đồng biến trên $(0;1)$ và đồ thị hàm số $y=f(t)=t^3+1$ luôn dương trên $(0;1)$ vì $f(0)=1>0$.

$$\Rightarrow y=g(t)=|t^3-mt+1| \text{ đồng biến trên } (0;1)\Rightarrow m=0 \text{ thỏa mãn.}$$

+) Khi $m>0$: $f'(t)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1=-\sqrt{\dfrac{m}{3}}$, $t_2=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$.

Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}};+\infty\right)$.

TH1: $-\sqrt{\dfrac{m}{3}}<0<\sqrt{\dfrac{m}{3}}<1\Leftrightarrow 0<m<3.$

Hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\dfrac{m}{3}}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{\dfrac{m}{3}};1\right)$.

$\Rightarrow$ Không thỏa mãn điều kiện đơn điệu trên toàn $(0;1)$.

TH2: $-\sqrt{\dfrac{m}{3}}<0<1\leq\sqrt{\dfrac{m}{3}}\Leftrightarrow m\geq 3.$

Để $y=g(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $f(t)$ phải nghịch biến và $f(t)\leq 0,\ \forall t\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow t^3-mt+1\leq 0,\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow mt\geq t^3+1,\ \forall t\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow m\geq t^2+\frac{1}{t},\ \forall t\in(0;1)$$

Do $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(t^2+\dfrac{1}{t}\right)=+\infty$, nên không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy $S=\{0\}$, do đó tập S có 1 phần tử.

Chọn đáp án (A) ..... □

Ví dụ

Các giá trị của tham số m để hàm số $y=|\sin x-\cos x+m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

(A) $m>\sqrt{2}$. (B) $m\geq\sqrt{2}$. (C) $m>1$. (D) $m\geq 1$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+m=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+m.$

Suy ra $f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

Khi đó $y = |\sin x - \cos x + m| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$. Nên $y' = \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số $y = |\sin x - \cos x + m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot f'(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

Với $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} < x - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0,\ \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\Rightarrow f'(x) > 0,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Nên $(1) \Leftrightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot (-1) + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B) ..... □

12.3.5 Tìm điều kiện tham số để hàm số mũ đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước

Ví dụ

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = |9^x + 3^x - m + 1|$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$

(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

Lời giải

Đặt $3^x = t \Rightarrow t \in [1; 3]$ vì $x \in [0; 1]$.

$$\Rightarrow y = |t^2 + t - m + 1| = \sqrt{(t^2 + t - m + 1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2 \cdot (t^2+t-m+1)' \cdot (t^2+t-m+1)}{2 \cdot |t^2+t-m+1|}$$

Để hàm số đồng biến trên đoạn $t \in [1;3]$ thì:

$$y' = \frac{(2t+1)(t^2+t-m+1)}{|t^2+t-m+1|} \geq 0,\ \forall t \in [1;3]$$

Với mọi giá trị của $t \in [1;3]$ thì $2t+1>0$ nên để $y' \geq 0,\ \forall t \in [1;3]$ thì:

$$t^2+t-m+1 \geq 0,\ \forall t \in [1;3] \Rightarrow m-1 \leq t^2+t = g(t),\ \forall t \in [1;3]$$

$$\Rightarrow m-1 \leq \min_{[1;3]} g(t) = 2 \Rightarrow m \leq 3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương $\{1;2;3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) ..... □

Ví dụ

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y = \left|4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

(A) 2018. (B) 2019. (C) 2. (D) 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2 \quad (1)$ trên khoảng $(0;1)$.

Đặt $t = 2^x$, $t \in (1;2)$.

Hàm số (1) trở thành $h(t) = t^2 - 2mt + m + 2$ trên khoảng $(1;2)$. Suy ra $h'(t) = 2t - 2m$.

Ta có $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên } (0;1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên } (0;1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (*)$$

Vì hàm số $t = 2^x$ đồng biến trên $(0;1)$. Do đó, $(*)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(t) \text{ đồng biến trên } (1;2) \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(t) \text{ nghịch biến trên } (1;2) \\ 3-m \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2t-2m \geq 0,\ \forall t \in (1;2) \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2t-2m \leq 0,\ \forall t \in (1;2) \\ 3-m \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} m \geq 2 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 (gồm $m = 1$ và $3 \leq m \leq 2019$) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) ..... □

12.3.6 Tìm điều kiện tham số để hàm số logarit đồng biến, nghịch biến trên tập D cho trước

Ví dụ

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y = \left|\ln 3x - 4x^2 + m\right|$ đồng biến trên đoạn $[1;e^2]$?

(A) 101. (B) 102. (C) 103. (D) 100.

Lời giải

$y = \left|\ln 3x - 4x^2 + m\right|$. Điều kiện: $x > 0$.

Xét hàm số $g(x) = \ln 3x - 4x^2 + m$ trên đoạn $[1;e^2]$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} - 8x = \frac{1-8x^2}{x} < 0,\ \forall x \in [1;e^2] \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên } [1;e^2].$$

x	1		e^2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\ln 3 - 4 + m$	$\searrow$	$\ln 3 - 4e^4 + 2 + m$

$\Rightarrow$ hàm số $y = |g(x)| = \left|\ln 3x - 4x^2 + m\right|$ đồng biến trên đoạn $[1; e^2]$

$$\Leftrightarrow \ln 3 - 4 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 4 - \ln 3.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-100; 100)$ nên $m \in \{-99; -98; \ldots; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 102 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) . . . . . □

Ví dụ

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $y = |\ln(mx) - x + 2|$ nghịch biến trên $(1; 4)$?

(A) 2018. (B) 2019. (C) 1. (D) vô số.

Lời giải

Xét $f(x) = \ln(mx) - x + 2$.

Dễ thấy $\forall x \in (1; 4) : mx > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0,\ \forall x \in (1; 4).$$

Do đó $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(1; 4)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$f(4) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(4m) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{e^2}{4} \approx 1{,}84.$$

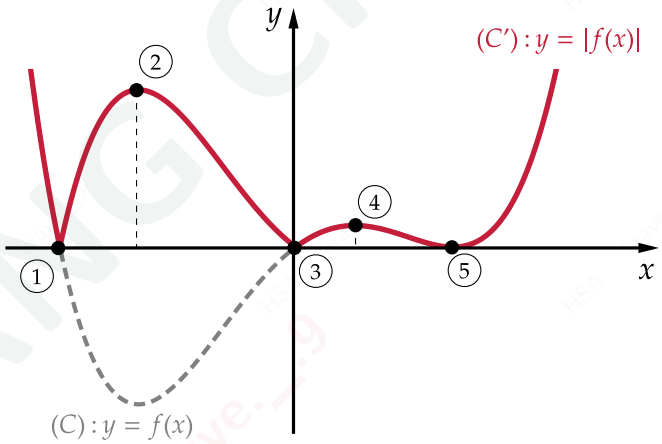
Vậy $m \in [2;2019]$ có 2018 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án A. . . . . □

12.4 Cực trị của hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

12.4.1 Cực trị hàm trị tuyệt đối $y = |f(x)|$

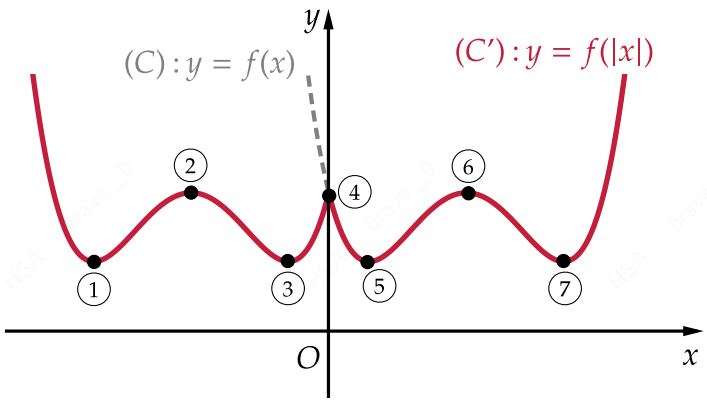
Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị có sẵn của hàm số $y = f(x)$ (kí hiệu là α) và số giao điểm cắt xuyên qua trục hoành, tương ứng với các nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$ (kí hiệu là β).
Từ đó ta có công thức: $S = \alpha + \beta$.



12.4.2 Cực trị hàm trị tuyệt đối $y = f(|x|)$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị có hoành độ dương của hàm số $y = f(x)$ ban đầu (kí hiệu là p) và cộng thêm 1.

Công thức: $S = 2p + 1$.



Giá trị "1"chính là điểm cực trị được sinh ra tại trục tung (khi $x = 0$). Tuy nhiên, giá trị này chỉ được cộng thêm khi đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

– 0 thuộc tập xác định D của hàm số $f(x)$ (tức là điểm $x=0$ tồn tại trên đồ thị).

– Tại lân cận $x=0$, hàm số $f(x)$ không phải là hàm hằng (nếu $f(x)$ là hằng số trên một khoảng chứa 0, thì $y=f(|x|)$ cũng là hàm hằng trên khoảng đó, do đó không có cực trị tại $x=0$).

12.4.3 Các dạng toán chứa tham số

Để tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$, ta có:

(Áp dụng định nghĩa). $y=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{f^2(x)}}=\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1) \\ f'(x)=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

BÙI QUANG CHIẾN © brave_9

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. **B** 6. **C** 3. **D** 1.

Lời giải

$y=f(|x-3|)$ (1). Đặt $t=|x-3|, t\geq 0$. Thì (1) trở thành: $y=f(t)$ $(t\geq 0)$

Có $t=\sqrt{(x-3)^2}\Rightarrow t'_x=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x=t'_x.f'(t)$

$$y'_x=0\Leftrightarrow t'_x.f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x=0 \\ f'(t)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ t=-2 \text{ (L)}\Rightarrow x\in\emptyset \\ t=4\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Lấy $x=8$ có $t'(8)f'(5)>0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y=f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án **C** ..... □

Câu 2. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \left|x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12\right|$ có bảy điểm cực trị.

A 1. **B** 4. **C** 0. **D** 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12\right|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - (2m^2 + m - 12) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \dfrac{-1 - \sqrt{97}}{4} \vee m > \dfrac{-1 + \sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} < m < 3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12\right|$ có bảy điểm cực trị.

Chọn đáp án C ..... □

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A 5. **B** 7. **C** 6. **D** 4.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2<0 \\ 5<m^2<32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{5}<|m|<\sqrt{32}.$

Vậy $m \in \{3;4;5;-3;-4;-5\}$.

Chọn đáp án C ..... □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A 16. B 44. C 26. D 27.

Lời giải

Đặt: $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$

Ta có: $g'(x)=12x^3-12x^2-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=m-32 \\ x=-1 \Rightarrow y=m-5 \\ x=0 \Rightarrow y=m \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ \left\{\begin{array}{l} m-5>0 \\ m-32<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ 5<m<32 \end{array}\right.$

Vì m là số nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài.

Chọn đáp án (C) ..... □

Câu 5. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

(A) $(0;6)$. (B) $(6;33)$. (C) $(1;33)$. (D) $(1;6)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-6$	↗	$m-1$	↘	$m-33$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m - 6 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Chọn đáp án (D) ..... □

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

(A) $\dfrac{5}{4} < m \le 2$. (B) $-2 < m < \dfrac{5}{4}$. (C) $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. (D) $\dfrac{5}{4} < m < 2$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ \dfrac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Chọn đáp án (D) ..... □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2021x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 9. (B) 2018. (C) 2022. (D) 11.

Lời giải

Ta có $f'(x) = x^3(x-2)(x^2-2) = 0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y = f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

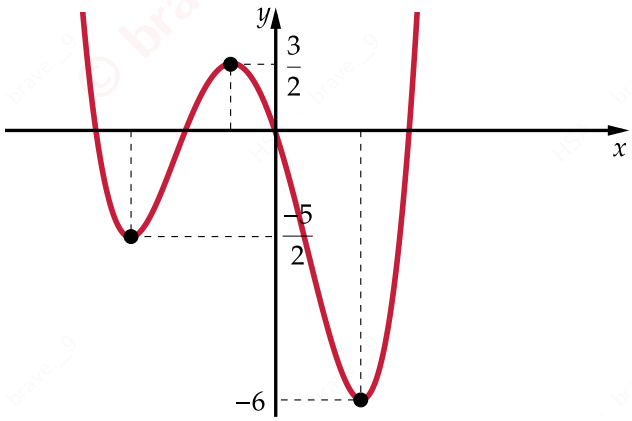
Do đó $y = |f(1 - 2021x)|$ có tối đa 9 cực trị.

Chọn đáp án (A) ..... □

Câu 8.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



(A) 9. (B) 12. (C) 18. (D) 15.

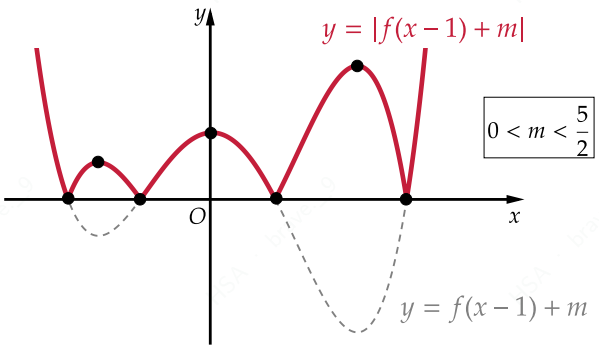
Lời giải

Nhận xét: Số điểm cực trị và số giao điểm với trục Ox của $(C) : y = f(x)$ bằng với đồ thị

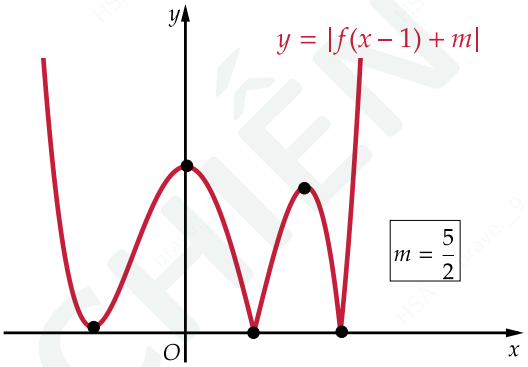
$(C'): y = f(x-1)$.

Vì $m > 0$ nên đồ thị $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.

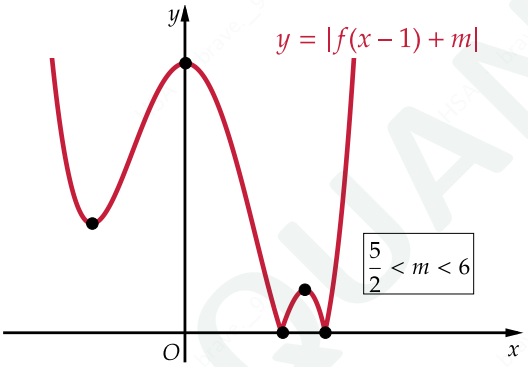
Sau khi lấy trị tuyệt đối thì ta sẽ được hàm số mà đầu bài yêu cầu với 4 trường hợp ứng với mỗi m:



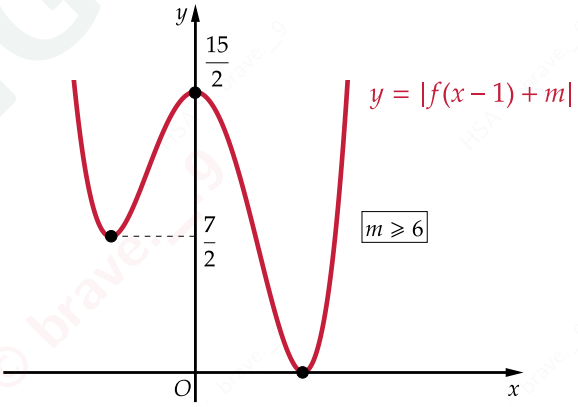
TH1: $0 < m < \dfrac{5}{2}$



TH2: $m = \dfrac{5}{2}$



TH3: $\dfrac{5}{2} < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

TH1: $0 < m < \dfrac{5}{2}$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = \dfrac{5}{2}$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $\dfrac{5}{2} < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $\dfrac{5}{2} \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng $3 + 4 + 5 = 12$.

Chọn đáp án (B) ..... □

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 3. (B) 9. (C) 6. (D) 4.

Lời giải

Ta có $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right|=\sqrt{\left(3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow y'=\frac{(12x^3+12x^2-24x)\left(3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right)}{\sqrt{\left(3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}12x^3+12x^2-24x=0 & (1)\\ 3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}=0 & (2)\end{array}\right.$$

$$\text{Từ } (1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0;1;-2\}$.

Xét hàm số $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\Rightarrow f'(x)=12x^3+12x^2-24x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-32+\dfrac{m}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{m}{2}$	$\searrow$	$-5+\dfrac{m}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5+\dfrac{m}{2}<0 \\ \dfrac{m}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<10 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) ..... □

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3-3x^2+m=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y=x^3-3x^2$ $y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4<-m<0\Leftrightarrow 0<m<4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) ..... □

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 42. (B) 21. (C) 40. (D) 20.

Lời giải

$y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$

$\Rightarrow y' = 15x^4 - 75x^2 + 60$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = m - 16 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 38 \\ x = 1 \Rightarrow y = m + 38 \\ x = 2 \Rightarrow y = m + 16 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$m-16$	↘	$m-38$	↗	$m+38$	↘	$m+16$	↗	$+\infty$

Suy ra $y = \left|3x^5 - 25x^3 + 60x + m\right|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 38 < 0 < m - 16 \\ m + 16 < 0 < m + 38 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16 < m < 38 \\ -38 < m < -16 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \in \{17; \ldots; 37\} \\ m \in \{-37; \ldots; -17\} \end{array}\right.$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (A) ..... □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị và chỉ khi

A $m \in (4;11)$. **B** $m \in \left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C** $m = 3$. **D** $m \in \left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - 2m$ như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$[f(x)-2m]'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-2m$	$-\infty$	↗	$11-2m$	↘	$4-2m$	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ gồm hai phần:

- Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía trên trục hoành.
- Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox. content...

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

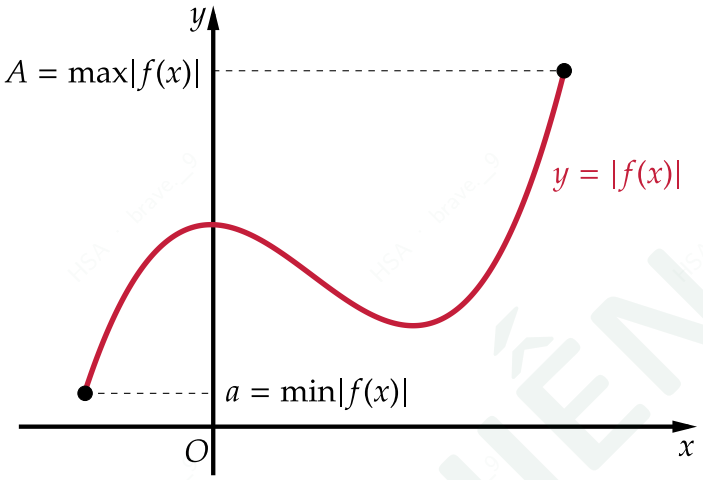
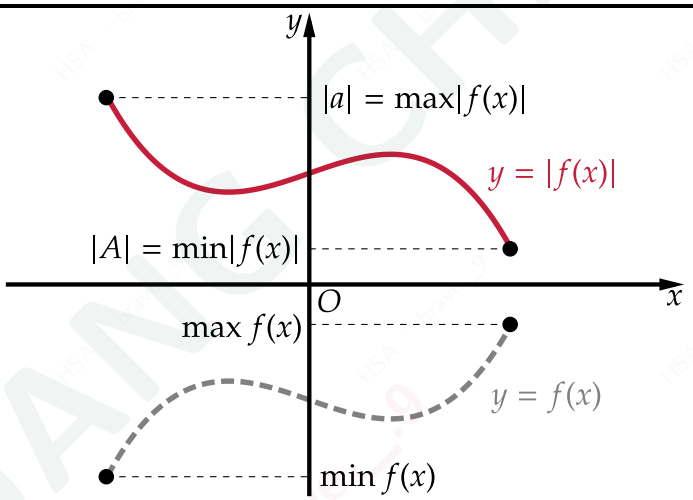
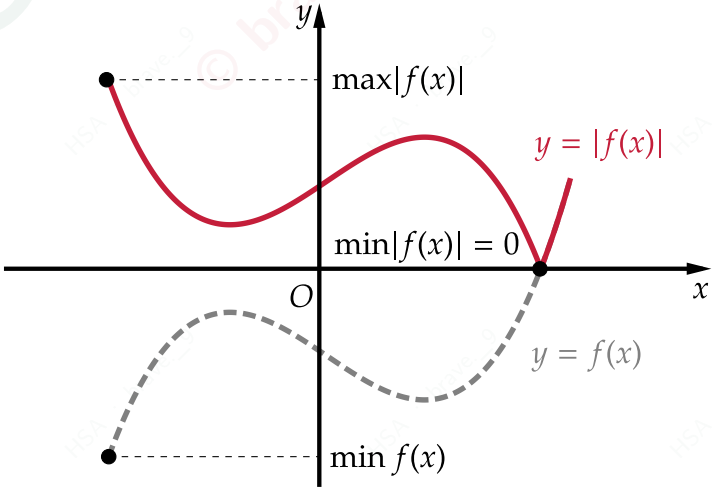
$$(4-2m)(11-2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2;\frac{11}{2}\right).$$

Chọn đáp án B ..... □

12.5 GTLN và GTNN của hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

12.5.1 Quy tắc tìm GTLN và GTNN của $|f(x)|$

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D. Đặt $A = \max\limits_{D} f(x)$ và $a = \min\limits_{D} f(x)$.

Các trường hợp	Đồ thị minh hoạ
TH1: $a \geq 0$ $(f(x) \geq 0,\ \forall x \in D)$ $\max \lvert f \rvert = A, \quad \min \lvert f \rvert = a$	
TH2: $A \leq 0$ $(f(x) \leq 0,\ \forall x \in D)$ $\max \lvert f \rvert = \lvert a \rvert, \quad \min \lvert f \rvert = \lvert A \rvert$	
TH3: $a < 0 < A$ (f đổi dấu trên D) $\max \lvert f \rvert = \max\{A, \lvert a \rvert\}, \min \lvert f \rvert = 0$	

BUI QUANG CHIEN

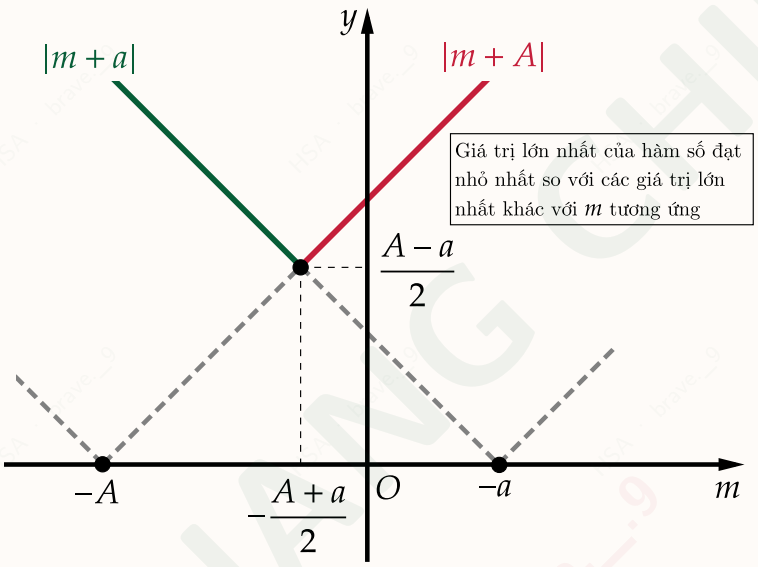
Nhận xét

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên D, đặt $A = \max\limits_{D} f(x)$, $a = \min\limits_{D} f(x)$ (suy ra $A \geq a$). Khi đó

$$\max_{D} |f(x) + m| = g(m) = \max\{|A + m|, |a + m|\}.$$

Đồ thị của $g(m)$ là đường bao trên của hai đồ thị $y = |A + m|$ và $y = |a + m|$. Hai đồ thị này cắt nhau tại điểm có hoành độ $m_0 = -\dfrac{A + a}{2}$ và tung độ $g(m_0) = \dfrac{A - a}{2}$. Do đó

$$\min_{m} \max_{D} |f(x) + m| = \frac{A - a}{2}.$$



12.5.2 Hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối $y = |f(x) + m|$

Lưu ý: Mọi bài toán Max/Min theo m đều dựa trên đẳng thức

$$\max_{D} |f(x) + m| = \max\{|A + m|, |a + m|\}.$$

Phương pháp vẽ và phác hoạ đồ thị:

1. Tìm $A = \max\limits_{D} f(x)$ và $a = \min\limits_{D} f(x)$.
2. Trên hệ trục Omy, vẽ $y = |m + A|$ và $y = |m + a|$.
3. Hàm $\max$ là đường phía trên, hàm $\min$ là đường phía dưới. Dùng tương giao với $y = k$ để biện luận m.

Ví dụ

Tìm m để $\max\limits_{[0;3]}|x^3-3x+m|=11$.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3-3x \Rightarrow f'(x)=3(x-1)(x+1)$. Trên $[0;3]$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$.

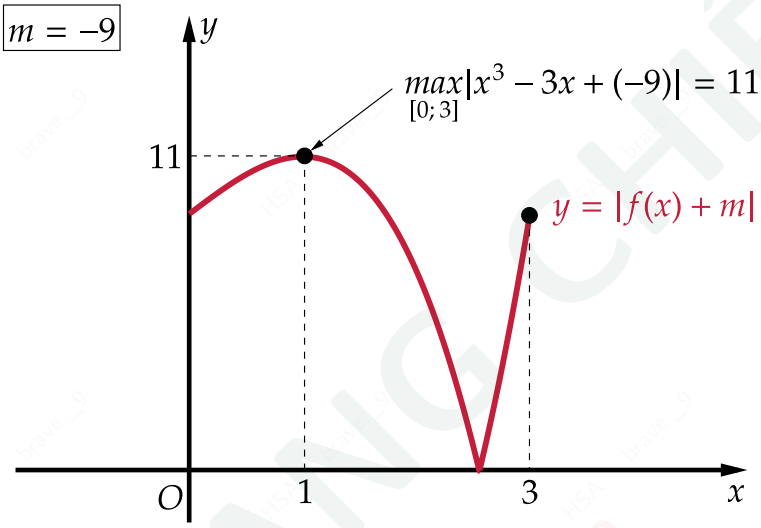
$f(0)=0$, $f(1)=-2$, $f(3)=18$ nên $A=18$, $a=-2$.

Yêu cầu trở thành $\max\{|m+18|, |m-2|\}=11$.

Cách 1:

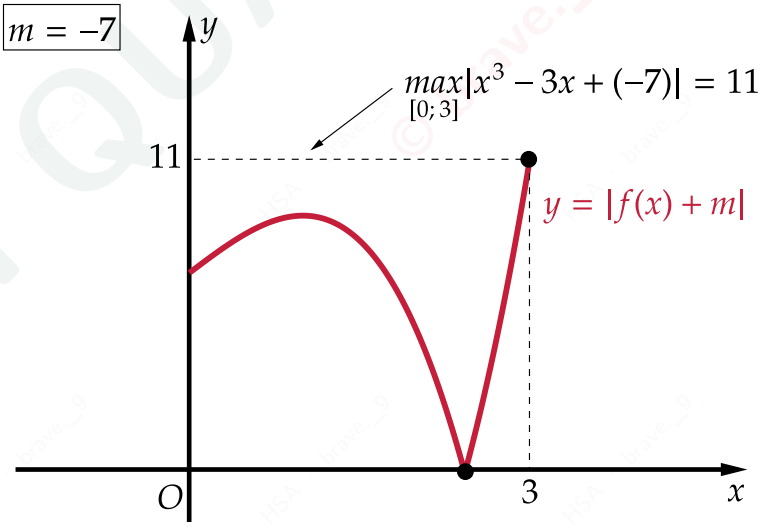
– TH1: $|m-2|=11$ và $|m+18|\le 11 \Rightarrow m=-9$ (thoả mãn).

$\boxed{m=-9}$



– TH2: $|m+18|=11$ và $|m-2|\le 11 \Rightarrow m=-7$ (thoả mãn).

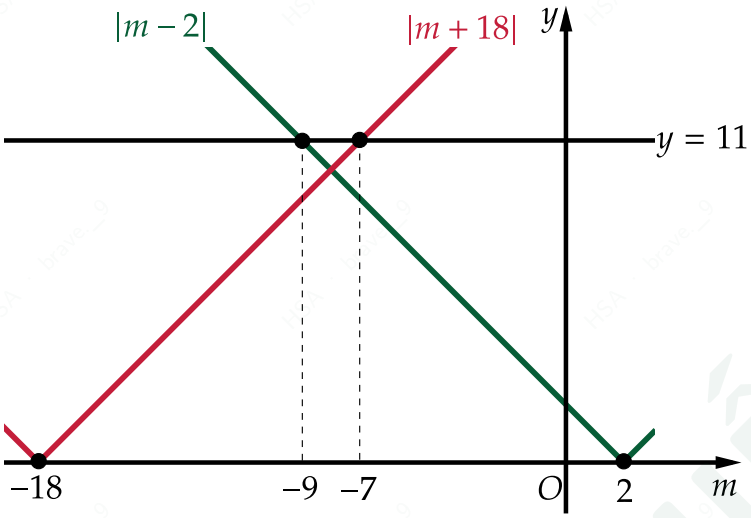
$\boxed{m=-7}$



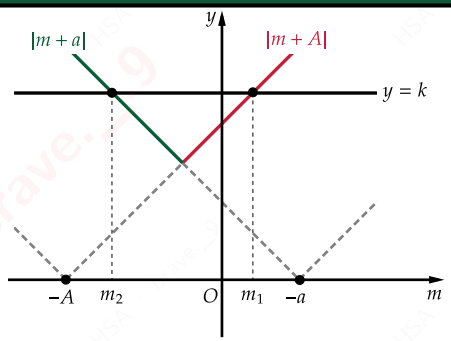
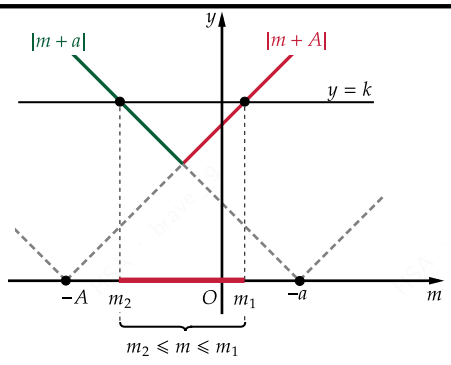
Vậy $m\in\{-9;-7\}$.

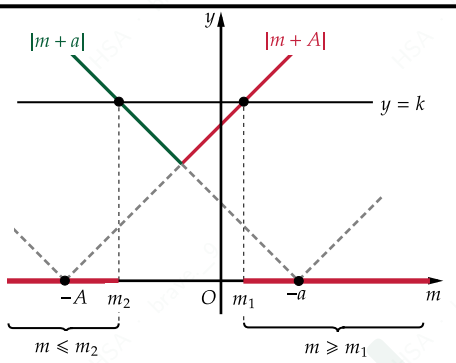
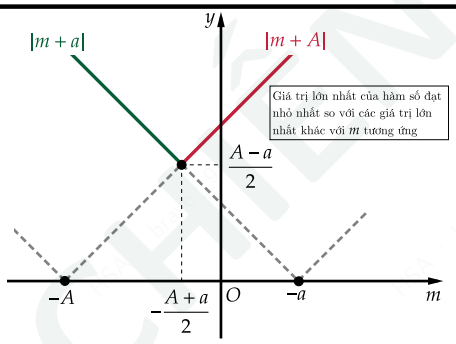
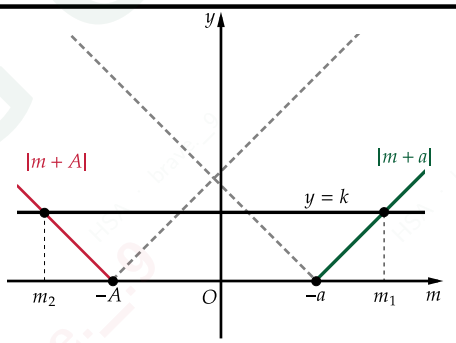
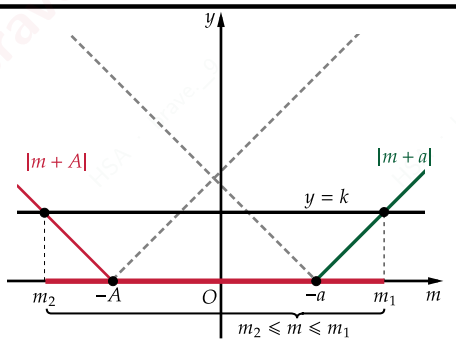
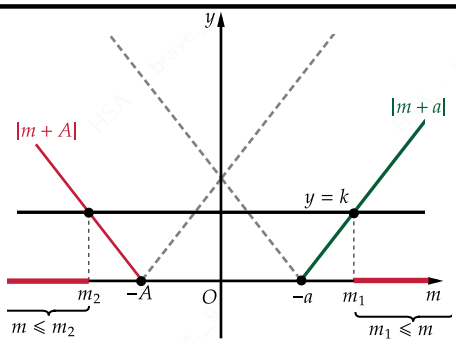
Cách 2: Sử dụng phương pháp vẽ đồ thị

Vẽ $y=|m+18|$ và $y=|m-2|$. Đường phía trên (hàm max) cắt $y=11$ tại $m=-9$ và $m=-7$.



12.5.3 Tổng hợp các bài toán biện luận giá trị lớn nhất, nhỏ nhất theo tham số

Dạng toán	Điều kiện đại số	Đồ thị minh họa
Dạng 1: $\max \lvert f+m\rvert = k$ $(k>0)$	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lvert A+m\rvert = k,\ \lvert a+m\rvert \le k \\ \lvert a+m\rvert = k,\ \lvert A+m\rvert \le k \end{array}\right.$	
Dạng 2: $\max \lvert f+m\rvert < k$ $(k>0)$	$\Leftrightarrow \lvert A+m\rvert < k$ và $\lvert a+m\rvert < k$	

Dạng 3: $\max\|f+m\| \geq k$ $(k>0)$	$\Leftrightarrow \max\limits_D (f+m) \geq k$ hoặc $\min\limits_D (f+m) \leq -k$	
Dạng 4: Tìm m để $\max\|f+m\|$ đạt giá trị nhỏ nhất	$\max\{\|A+m\|, \|a+m\|\} \geq \dfrac{A-a}{2}$. Dấu "=" xảy ra tại $m = -\dfrac{A+a}{2}$.	
Dạng 5: $\min\|f+m\| = k$ $(k>0)$	$\Leftrightarrow \|f(x)+m\| \geq k,\ \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\|f(x_0)+m\| = k$	
Dạng 6: $\min\|f+m\| \leq k$ $(k>0)$	$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $-k \leq f(x)+m \leq k$ có nghiệm trên D	
Dạng 7: $\min\|f+m\| \geq k$ $(k>0)$	$\Leftrightarrow \min\limits_D (f+m) \geq k$ hoặc $\max\limits_D (f+m) \leq -k$	

12.5.4 Các ví dụ cụ thể

Câu 1. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 + 2x + m - 4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 + 2x - 4$.

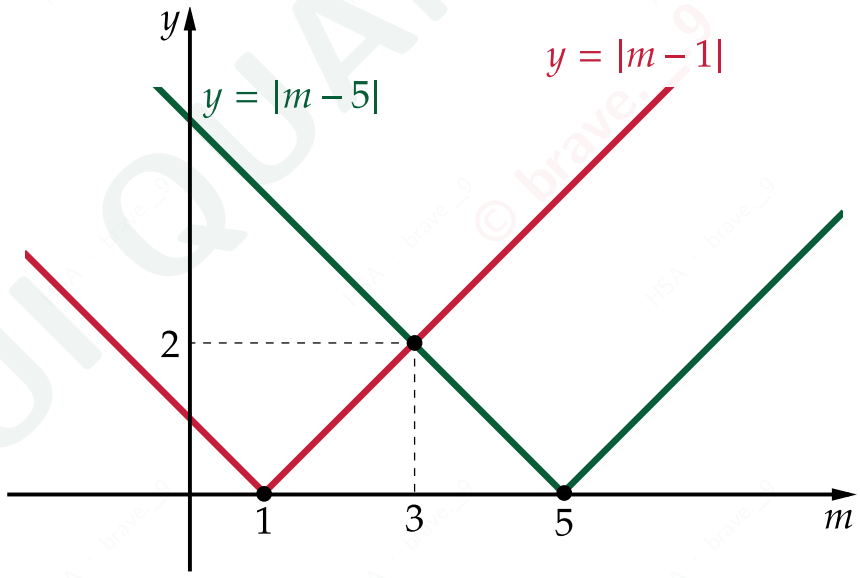
Ta có: $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2;1)$.

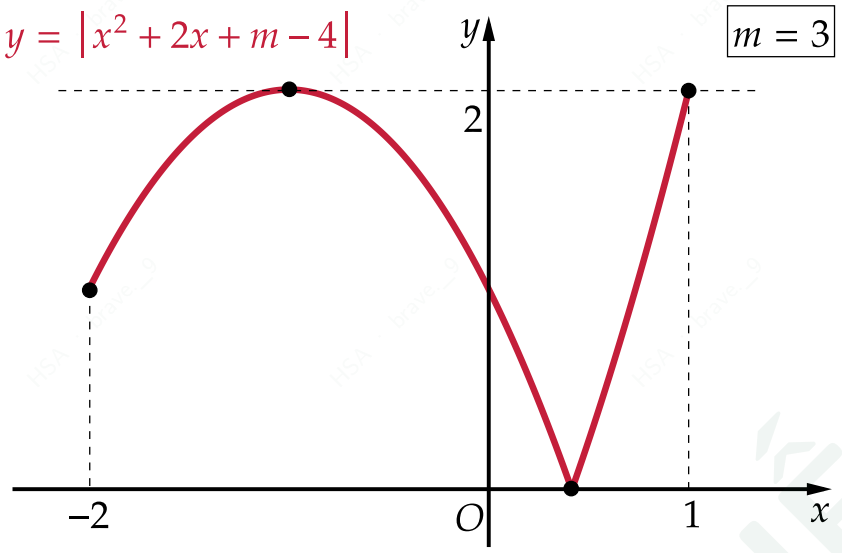
Tính các giá trị: $f(-2) = -4$; $f(-1) = -5$; $f(1) = -1$.

Suy ra trên đoạn $[-2;1]$, ta có $A = \max f(x) = -1$ và $a = \min f(x) = -5$.

Áp dụng lý thuyết **Dạng 4** (Tìm m để $\max|f + m|$ đạt GTNN):

$$\max_{[-2;1]} y = \max_{[-2;1]} |f(x) + m| \geq \frac{A - a}{2} = \frac{-1 - (-5)}{2} = 2.$$





Giá trị lớn nhất này đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi và chỉ khi:

$$m = -\frac{A+a}{2} = -\frac{-1+(-5)}{2} = 3.$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (B) ..... □

Câu 2. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 - mx + 2m}{x-2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A) $-\dfrac{8}{3}$. (B) 5. (C) $\dfrac{5}{3}$. (D) -1.

Lời giải

Ta biến đổi lại hàm số: $y = \left|\dfrac{x^2 - m(x-2)}{x-2}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x-2} - m\right|$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

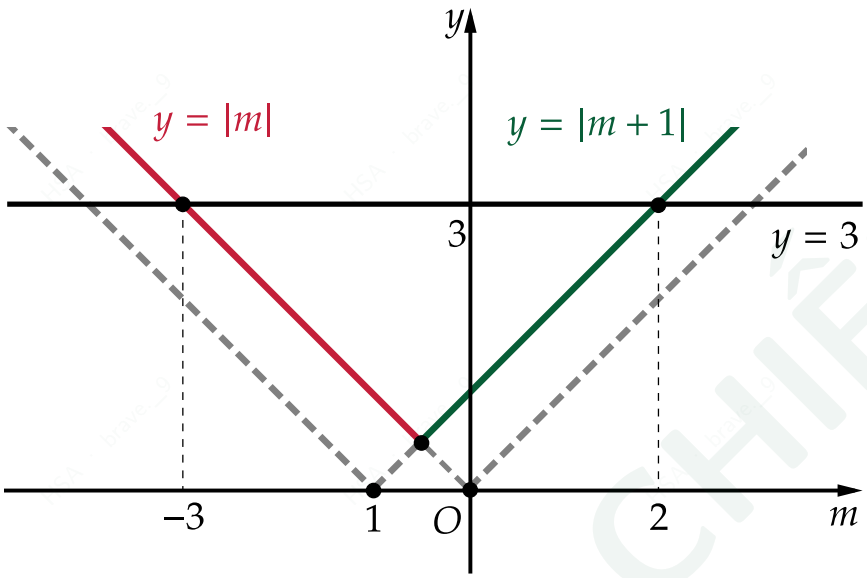
Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 4 \notin [-1;1] \end{array}\right.$.

Tính các giá trị: $f(-1) = -\dfrac{1}{3}$; $f(0) = 0$; $f(1) = -1$.

Suy ra trên đoạn $[-1;1]$, ta có $A = \max f(x) = 0$ và $a = \min f(x) = -1$.

Áp dụng lý thuyết **Dạng 1** ($\max|f(x)+m|=k$), yêu cầu bài toán trở thành:

$$\max_{[-1;1]}|f(x)-m|=\max\{|0-m|,|-1-m|\}=3\Leftrightarrow\max\{|m|,|m+1|\}=3.$$



Trường hợp 1:

$$\begin{cases}|m|=3\\|m+1|\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.\\-4\le m\le 2\end{cases}\Rightarrow m=-3.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}|m+1|=3\\|m|\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-4\end{array}\right.\\-3\le m\le 3\end{cases}\Rightarrow m=2.$$

Vậy $S=\{-3;2\}$. Tổng các phần tử của S là $-3+2=-1$.

Chọn đáp án (D) ..... □

Câu 3. Cho hàm số $y=|x^3-x^2-x+m|$ với $m\in\mathbb{Z}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[1;3]}y<3$?

(A) 21. (B) 22. (C) 4. (D) 20.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2-x$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [1;3] \\ x = -\dfrac{1}{3} \notin [1;3] \end{array}\right.$.

Tính các giá trị: $f(1) = -1$; $f(3) = 15$.

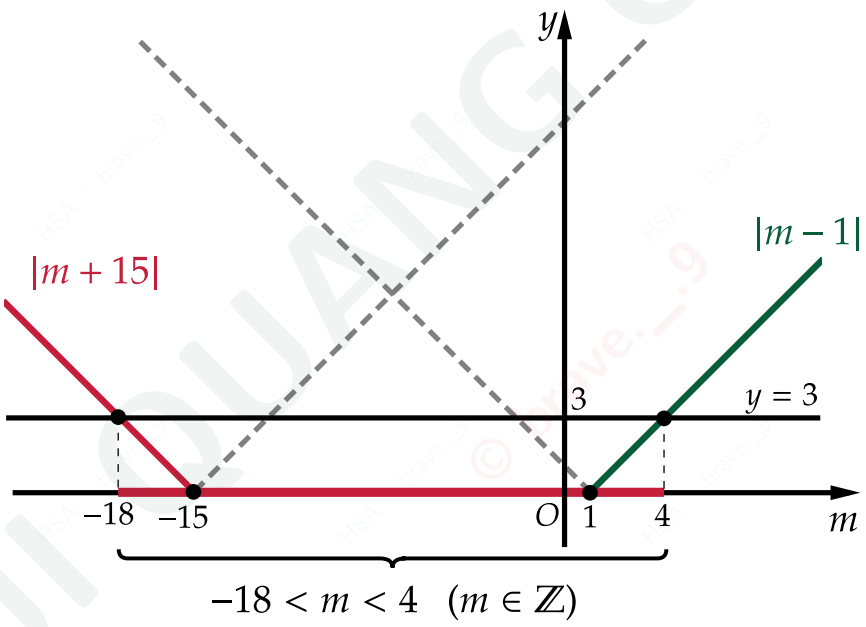
Suy ra trên đoạn $[1;3]$, ta có $A = \max f(x) = 15$ và $a = \min f(x) = -1$.

Áp dụng lý thuyết **Dạng 6** ($\min |f(x) + m| < k$), yêu cầu bài toán tương đương với việc khoảng giá trị của hàm số $f(x) + m$ phải giao với khoảng $(-3;3)$.

Tập giá trị của $f(x) + m$ trên đoạn $[1;3]$ là $[a + m; A + m] = [m - 1; m + 15]$.

Để đoạn $[m - 1; m + 15]$ giao với khoảng $(-3;3)$, ta cần:

$$\begin{cases} m - 1 < 3 \\ m + 15 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > -18 \end{cases} \Leftrightarrow -18 < m < 4.$$



Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-17; -16; \ldots; 3\}$.

Vậy có $3 - (-17) + 1 = 21$ số nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) ..... □

Câu 4. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 2x^2 + m| + 1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 7. (B) 17. (C) -3. (D) -7.

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \max\limits_{[0;2]} \left|-x^4+2x^2+m\right|=5$.

Xét hàm số $f(x)=-x^4+2x^2$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=-4x^3+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$.

Tính các giá trị: $f(0)=0$; $f(1)=1$; $f(2)=-8$.

Suy ra trên đoạn $[0;2]$, ta có $A=\max f(x)=1$ và $a=\min f(x)=-8$.

Áp dụng lý thuyết **Dạng 1** ($\max|f(x)+m|=k$), ta có:

$$\max_{[0;2]}|f(x)+m|=\max\{|1+m|,|-8+m|\}=5.$$

Bạn hãy thử vẽ sơ đồ của 2 đồ thị trên xuống dưới nhé!

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m+1|=5 \\ |m-8|\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-6 \end{array}\right. \\ 3\le m\le 13 \end{cases} \Rightarrow m=4.$$

Trường hợp 2:

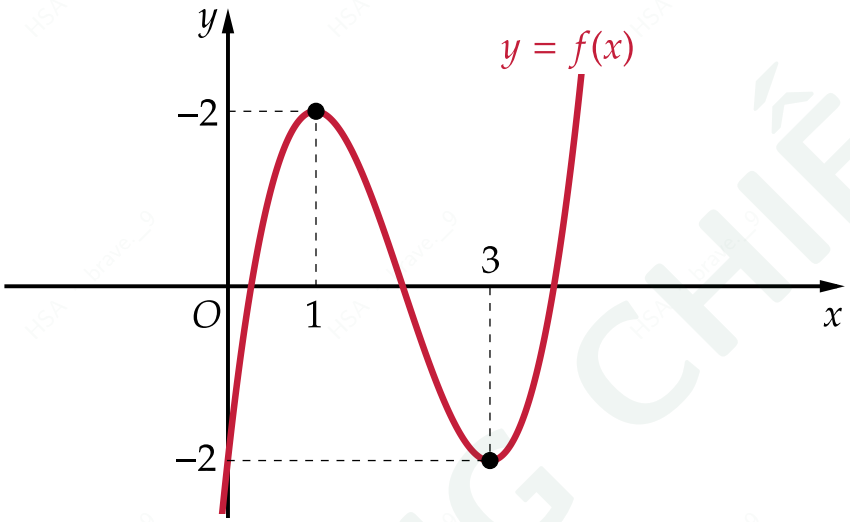
$$\begin{cases} |m-8|=5 \\ |m+1|\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=13 \\ m=3 \end{array}\right. \\ -6\le m\le 4 \end{cases} \Rightarrow m=3.$$

Vậy $S=\{3;4\}$. Tổng các phần tử của S là $3+4=7$.

Chọn đáp án (A) ..... □

12.6 Tương giao chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 1. Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ như hình vẽ.



Khi đó phương trình $\left|x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right| = m$ (m là tham số) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

(A) $-2 \le m \le 2$. (B) $0 < m < 2$. (C) $0 \le m \le 2$. (D) $-2 < m < 2$.

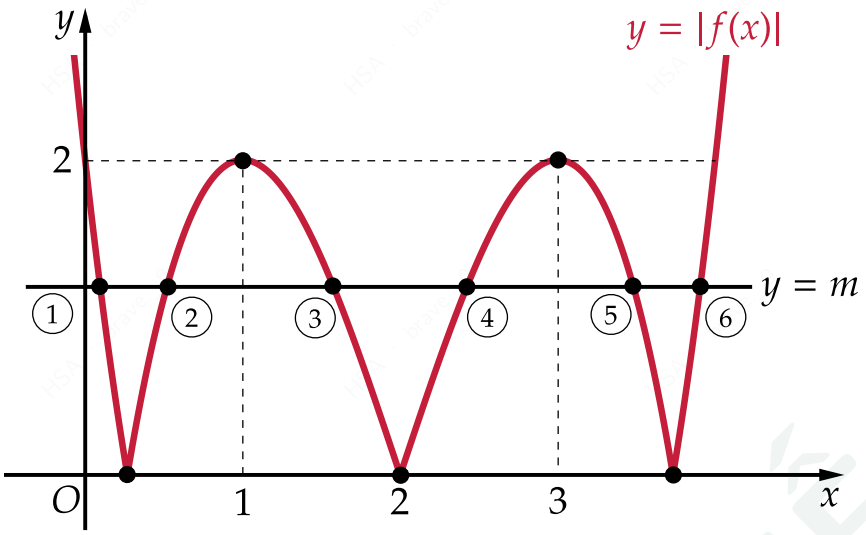
Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \left|x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right|$ có được bằng cách biến đổi đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$:

– Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên trục hoành.

– Lấy đối xứng phần đồ thị của (C) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.

– Xóa phần đồ thị còn lại của (C) phía dưới trục hoành.



Số nghiệm của phương trình $\left|x^3-6x^2+9x-2\right| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^3-6x^2+9x-2\right|$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào đồ thị, để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $0<m<2$.

Chọn đáp án (B) ..... □

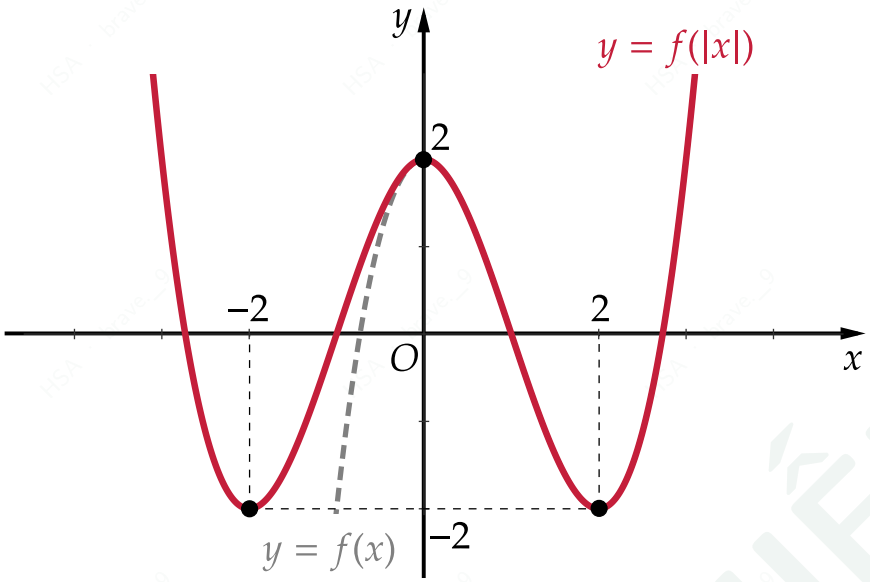
Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) 3. (B) 12. (C) $T=7$. (D) 5.

Lời giải

Ta có $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0 \Leftrightarrow |x|^3-3|x|^2+2=|m|^3-3|m|^2 \quad (*)$

Xét hàm số: $y=f(x)=|x|^3-3|x|^2+2$ có đồ thị như hình vẽ:



Từ đồ thị của hàm số ta có: Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -2 < |m|^3 - 3|m|^2 < 2$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $|m|^3 - 3|m|^2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2(|m| - 3) \in \mathbb{Z}$ do đó $m^2(|m| - 3) \in \{-1; 0; 1\}$ từ đây ta có

$$\left[\begin{array}{l} m = \pm 3 \\ m = 0 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án A ..... □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|x^4 - 5x^2 + 4\right| = m$ có 8 nghiệm phân biệt.

(A) $\dfrac{-9}{4} < m < 4$. (B) $\dfrac{-9}{4} < m < 0$. (C) $\dfrac{9}{4} < m < 4$. (D) $0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Xét hàm $y = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có bảng biến thiên hàm $y = \left|x^4 - 5x^2 + 4\right|$:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		-1		0		1		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình có 8 nghiệm $\Leftrightarrow$ đường $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 5x^2 + 4\right|$ tại 8 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án (D) ..... □

Chương 13

Hàm hợp và các dạng toán nâng cao

13.1 Tính đơn điệu của hàm hợp

1. Nhắc lại đạo hàm của hàm số hợp

Định lý

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm theo biến x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo biến u thì hàm số hợp $y = f(u(x))$ có đạo hàm theo biến x là:

$$g'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Công thức này cho thấy sự biến thiên của $g(x)$ phụ thuộc đồng thời vào đạo hàm của hàm trung gian $u'(x)$ và đạo hàm của hàm số f xét tại u.

2. Sự biến thiên của hàm số hợp

Khi xét hàm hợp $g(x) = f(u(x))$, ta có chuỗi biến đổi:

$$x \xrightarrow{\text{tính } u} u = u(x) \xrightarrow{\text{sử dụng hàm } f} y = f(u)$$

Trong hàm số $y = f(x)$, biến độc lập x biến thiên trực tiếp. Đối với hàm hợp $y = f(u(x))$, khi x thay đổi, giá trị u thay đổi theo quy luật của hàm số $u(x)$, dẫn đến chiều biến thiên của $y = f(u)$ cũng thay đổi theo.

Ví dụ

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(3;+\infty)$. **B** $(-3;0)$. **C** $(-\infty;-3)$. **D** $(-2;2)$.

Lời giải

Ta có

$$y'=\left[f\left(x^2\right)\right]'=\left(x^2\right)'x^4\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2.$$

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y':

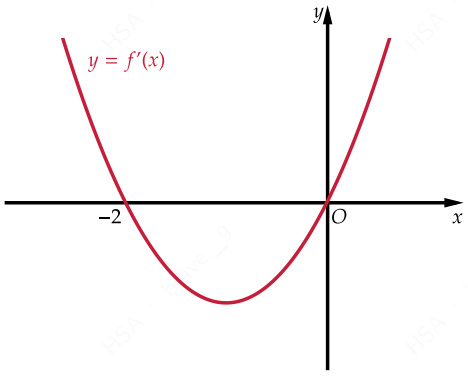
x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

Chọn đáp án **C** . . . . . □

Ví dụ

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A $(-1;0)$. **B** $(0;1)$. **C** $(-\infty;0)$. **D** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = 2x \cdot f'\left(x^2 - 1\right)$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$. Do đó:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án (B) ..... □

Ví dụ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)\left(x^2 + mx + 5\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f\left(x^2 + x - 2\right)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 7.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (2x+1) \cdot f'\left(x^2 + x - 2\right)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in (1; +\infty)$.

Nhận thấy với mọi $x \in (1;+\infty)$, ta có $2x+1>0$ và $x^2+x-2>0$. Khi đó, bất phương trình tương đương với: $f'\left(x^2+x-2\right) \geq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$.

Đặt $t = x^2+x-2$, với $x \in (1;+\infty)$ thì $t \in (0;+\infty)$. Bài toán trở thành tìm m để $f'(t) \geq 0,\ \forall t \in (0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow t^2(t+2)\left(t^2+mt+5\right) \geq 0,\ \forall t \in (0;+\infty).$$

Vì $t>0$ nên $t^2(t+2)>0$. Do đó điều kiện tương đương với:

$$t^2+mt+5 \geq 0,\ \forall t \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \geq -t-\frac{5}{t},\ \forall t \in (0;+\infty).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy), ta có $t+\dfrac{5}{t} \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow -t-\dfrac{5}{t} \leq -2\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $t=\sqrt{5}$.

Suy ra $m \geq \max\limits_{t\in(0;+\infty)}\left(-t-\dfrac{5}{t}\right) = -2\sqrt{5} \approx -4{,}47$.

Vì m là số nguyên âm nên $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 4 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) ..... □

Ví dụ

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

(A) $m \geq f(0)-2$. (B) $m>f(-1)-e$. (C) $m>f(0)-1$. (D) $m \geq f(-1)-e$.

Lời giải

Ta có $f(x)<e^{x^2}+m,\ \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m>f(x)-e^{x^2},\ \forall x \in (-1;1)$. (1)

Xét hàm số $g(x)=f(x)-e^{x^2}$ trên khoảng $(-1;1)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x\cdot e^{x^2}$. Dễ thấy $g'(0)=f'(0)-0=0 \Rightarrow x=0 \in (-1;1)$ là một

nghiệm của $g'(x) = 0$.

Đồng thời:

- Với $\forall x \in (-1;0)$: $x < 0 \Rightarrow -2x \cdot e^{x^2} > 0$. Kết hợp với $f'(x) > 0$ (từ bảng xét dấu), ta suy ra $g'(x) > 0$.
- Với $\forall x \in (0;1)$: $x > 0 \Rightarrow -2x \cdot e^{x^2} < 0$. Kết hợp với $f'(x) < 0$ (do $(0;1) \subset (0;3)$), ta suy ra $g'(x) < 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-1;1)$:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$f(-1)-e$	$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	$f(1)-e$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = g(0) = f(0) - 1$.

Do đó, bất phương trình (1) đúng với mọi $x \in (-1;1) \Leftrightarrow m > \max\limits_{(-1;1)} g(x) \Leftrightarrow m > f(0) - 1$.

Chọn đáp án (C) ..... □

Ví dụ

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2;2)$ khi và chỉ khi

(A) $m \geq f(-2) - 3$.

(B) $m > f(2) - 3e^4$.

(C) $m \geq f(2) - 3e^4$.

(D) $m > f(-2) - 3$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$m > f(x) - 3e^{x+2}, \quad \text{có nghiệm } x \in (-2;2). \quad (1)$$

Xét hàm số $h(x) = f(x) - 3e^{x+2}$ trên khoảng $(-2;2)$. Ta có $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2}$.

- Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$, với $x \in (-2;2) \subset (-3;3)$, ta thấy $f'(x) \leq 3$.
- Mặt khác, $x \in (-2;2) \Rightarrow x+2 \in (0;4) \Rightarrow 3e^{x+2} > 3e^0 = 3$.

Do đó, $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 3 - 3 = 0$, $\forall x \in (-2;2)$. Suy ra hàm số $h(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

Tập giá trị của $h(x)$ trên $(-2;2)$ là khoảng $(h(2); h(-2)) = (f(2) - 3e^4; f(-2) - 3)$.

Do hàm số $h(x)$ luôn nghịch biến và liên tục trên khoảng $(-2;2)$, nên ta có:

$$h(x) > \lim_{x \to 2^-} h(x) = h(2), \quad \forall x \in (-2;2).$$

Tập giá trị của $h(x)$ trên khoảng này là $(h(2); h(-2))$.

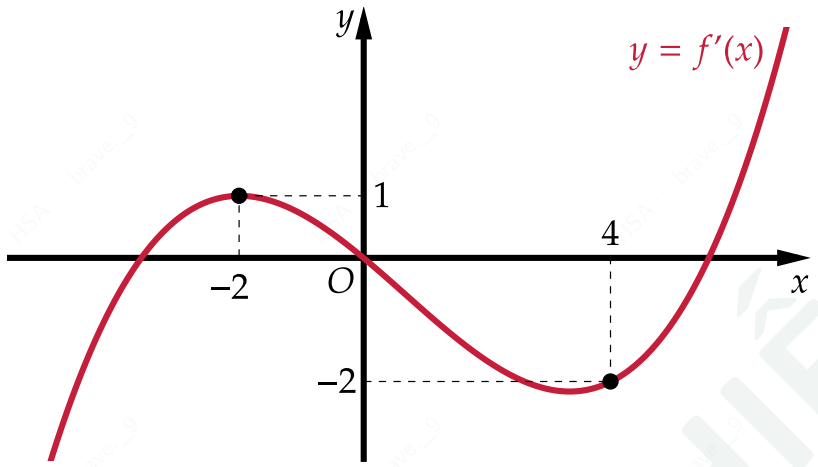
Để bất phương trình $h(x) < m$ có ít nhất một nghiệm $x \in (-2;2)$, giá trị m chỉ cần lớn hơn giới hạn dưới của tập giá trị:

$$m > h(2) \Leftrightarrow m > f(2) - 3e^4.$$

Chọn đáp án (B) . . . . . □

Ví dụ

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



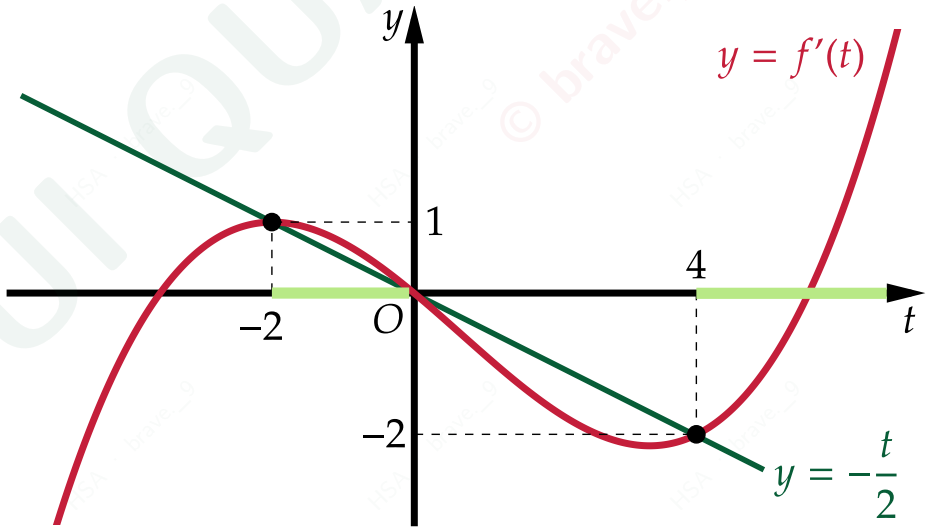
(A) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. (B) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. (C) $(-2;-1)$. (D) $(2;3)$.

Lời giải

Ta có $g(x)=f(1-2x)+x^2-x \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-2x)>-\dfrac{1-2x}{2}$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.



Dựa vào đồ thị ta có $f'(t)>-\dfrac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2<t<0 \\ t>4. \end{array}\right.$

Khi đó ta trả lại biến x:

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<1-2x<0 \\ 1-2x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ x<-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) ..... □

13.2 Cực trị của hàm hợp

Ví dụ

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2-4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 19.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=0 \\ x=4. \end{array}\right.$

Đạo hàm $g'(x)=(4x-12)f'\left(2x^2-12x+m\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=0 \Leftrightarrow 2x^2-12x=-m \quad (1) \\ 2x^2-12x+m=4 \Leftrightarrow 2x^2-12x=4-m \quad (2). \end{array}\right.$$

(Bỏ qua phương trình $2x^2-12x+m=-1$ do chỉ sinh ra các nghiệm bội chẵn, không tạo cực trị).

Xét hàm số $h(x)=2x^2-12x$, có đồ thị là một parabol bề lõm hướng lên, đạt cực tiểu tại điểm $(3;-18)$.

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì các phương trình (1) và (2) phải sinh ra 4 nghiệm phân biệt khác 3. Điều này tương đương với việc hai đường thẳng $y=-m$ và $y=4-m$ phải cắt đồ thị $h(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Nhận thấy đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm phía trên đường thẳng $y=-m$. Do đó, ta chỉ cần đường thẳng thấp hơn nằm trên đỉnh cực tiểu của Parabol:

$$-m>-18 \Leftrightarrow m<18.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;\ldots;17\}$. Vậy có 17 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) ..... □

Ví dụ

Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

Lời giải

Vì $f(x)$ có ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ nên $f'(x)=0$ có ba nghiệm bội lẻ là $x=-2$, $x=-1$ và $x=0$.

Đạo hàm $g'(x)=(2x-2)\cdot f'(x^2-2x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\text{Vô nghiệm}\\(x-1)^2=0\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (nghiệm bội ba)}\\x=0\text{ (nghiệm đơn)}\\x=2\text{ (nghiệm đơn).}\end{array}\right.$$

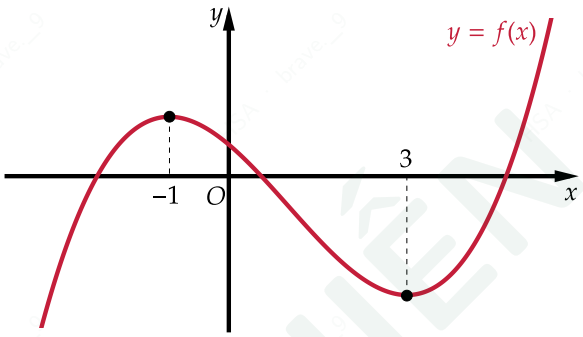
Nhận thấy $x=1$ là nghiệm bội ba (được gộp từ một nghiệm đơn và một nghiệm kép), do đó $g'(x)$ vẫn đổi dấu khi đi qua $x=1$. Các nghiệm $x=0$ và $x=2$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ cũng đổi dấu.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ, suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) ..... □

Ví dụ

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left((x-1)^2 + m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là



(A) 2. (B) 4. (C) 8. (D) 10.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$ và $x = 3$.

Ta có đạo hàm: $g'(x) = 2(x-1) \cdot f'\left((x-1)^2 + m\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \text{(nghiệm đơn)} \\ (x-1)^2 = -1 - m & (1) \\ (x-1)^2 = 3 - m & (2). \end{array}\right.$$

Nhận thấy $3 - m > -1 - m$. Để hàm số $g(x)$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x) = 0$ phải có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Do $x = 1$ đã là một nghiệm đơn, nên hai phương trình (1) và (2) chỉ được phép sinh ra thêm 2 nghiệm phân biệt khác 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, đồng thời phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 1$ (nghiệm kép không làm đổi dấu):

$$\begin{cases} 3 - m > 0 \\ -1 - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m < 3.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Tổng các phần tử của S là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Chọn đáp án (A) ..... □

13.3 Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của hàm hợp

Ví dụ

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau:

x	-1		1		3
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	
	1				2

Tìm m để bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\dfrac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$.

(A) $m<f(0)$. (B) $m<f(1)-\dfrac{2}{3}$. (C) $m\le f(0)$. (D) $m\le f(3)$.

Lời giải

Ta có $m+x^2\le f(x)+\dfrac{1}{3}x^3\Leftrightarrow m\le f(x)+\dfrac{1}{3}x^3-x^2$. Xét hàm $h(x)=f(x)+\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ trên $(0;3)$. Có $h'(x)=f'(x)+x^2-2x$. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $1<f'(x)\le 3$, $\forall x\in(0;3)$. Khảo sát hàm số $y=x^2-2x$ ta có bảng biến thiên:

x	0		1		3
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên ta có $-1\le x^2-2x<3$ với mọi $x\in(0;3)$. Suy ra $h'(x)=f'(x)+x^2-2x>0$ với mọi $x\in(0;3)$. Cũng từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$, liên tục trên $[0;3)$. Do đó hàm số $h(x)=f(x)+\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ cũng liên tục trên $[0;3)$. Bảng biến thiên:

x	0	3
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$h(0)$ ↗	$h(3)$

Phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3) \Leftrightarrow m \le h(0) \Leftrightarrow m \le f(0)$. Vậy $m \le f(0)$.

Chọn đáp án C. □

Ví dụ

Cho hàm số $f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$. Số các giá trị m nguyên để $f^2(x) \le 36,\ \forall x$ là

A 0. B 3. C 1. D 2.

Lời giải

Ta có $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m = 1 - \sin^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$.

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow t^2 - 1 = \sin 2x$.

Khi đó, ta được $1 - (t^2-1)^2 + 2t^3 - 3(t^2-1) + m = 1 - (t^2-1)(t^2+2) + 2t^3 + m$.

Xét $h(t) = 1 + 2t^3 - (t^2-1)(t^2+2) = -t^4 + 2t^3 - t^2 + 3$.

Ta có $f^2(x) \le 36,\ \forall x \Leftrightarrow |h(t) + m| \le 6 \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) + m \le 6 \\ h(t) + m \ge -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) \le 6 - m \\ h(t) \ge -6 - m. \end{cases}$

Ta có $h'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-3-4\sqrt{2}$	↗	3	↘	$\frac{47}{16}$	↗	3	↘	$-3+4\sqrt{2}$

Khi đó $\begin{cases} h(t) \le 6-m \\ h(t) \ge -6-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\limits_{t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} h(t) \le 6-m \\ \min\limits_{t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} h(t) \ge -6-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le 6-m \\ -3-4\sqrt{2} \ge -6-m \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}-3 \le m \le 3$. Số giá trị m nguyên thỏa mãn là 1.

Chọn đáp án (C) . . . . . □

Ví dụ

Cho $y=f(x)=|x^2-5x+4|+mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số các phần tử của tập hợp S.

(A) 8. (B) 7. (C) 6. (D) 5.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)>1 \Leftrightarrow f(x)>1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $f(0)=4>1$ nên

$$|x^2-5x+4|+mx>1,\ \forall x\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m>\max\limits_{x>0}\dfrac{1-|x^2-5x+4|}{x},\ \forall x>0 \\ m<\min\limits_{x<0}\dfrac{1-|x^2-5x+4|}{x},\ \forall x<0. \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1-|x^2-5x+4|}{x}=\begin{cases} -x-\dfrac{3}{x}+5 & \text{khi } x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(4;+\infty) \\ x+\dfrac{5}{x}-5 & \text{khi } x\in[1;4]. \end{cases}$

– Với $x \in (-\infty;0)\cup(0;1)\cup(4;+\infty)$. Ta có $g'(x) = -1 + \dfrac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \quad \text{(loại)} \\ x = -\sqrt{3} \quad \text{(nhận)}. \end{array}\right.$

– Với $x \in [1;4]$. Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \quad \text{(nhận)} \\ x = -\sqrt{5} \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{5}$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	0	$+$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	$g(\sqrt{5})$	$\searrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(*)$ xảy ra khi $1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B). $\square$

Ví dụ

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đặt $S = 3t - \dfrac{6}{\sqrt{t+1}+1}$ với $t = f'(x) - f(x+a-c)$. Khẳng định đúng với mọi $x \in [b;c]$ là

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

(A) $-9 \le S \le -4$. (B) $S \le -9$. (C) $S \ge -3$. (D) $-4 \le S \le -3$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ban đầu, ta trích xuất riêng đoạn $[b;c]$:

x	b		c
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$f(b)$	↗	$f(c)$

Từ đây, ta dễ dàng thấy $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in [b;c]$. (1)

Mặt khác, với mọi $x \in [b;c]$, ta có $x \leq c \Leftrightarrow x - c \leq 0 \Leftrightarrow x + a - c \leq a$. Nhìn lại khoảng $(-\infty;a]$ trên bảng biến thiên gốc, hàm số đạt cực đại tại $x = a$ với giá trị $f(a) = 0$. Suy ra:

$$f(x + a - c) \leq f(a) = 0,\ \forall x \in [b;c]. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $t = f'(x) - f(x + a - c) \geq 0 - 0 = 0,\ \forall x \in [b;c]$.

Xét hàm số $g(t) = 3t - \dfrac{6}{\sqrt{t+1}+1}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Ta có $g'(t) = 3 + \dfrac{6}{\left(\sqrt{t+1}+1\right)^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} > 0,\ \forall t \geq 0$.

Hàm số $g(t)$ luôn đồng biến, ta có bảng biến thiên của $g(t)$:

t	0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	↗	$+\infty$

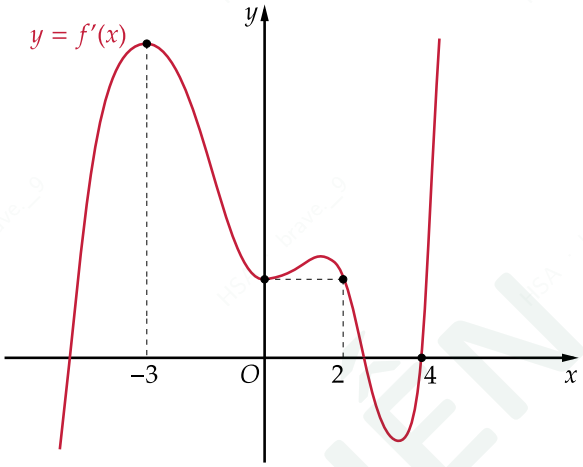
Do vậy, $g(t) \geq g(0) = -3,\ \forall t \geq 0$.

Vậy ta được $S \geq -3$ với mọi $x \in [b;c]$.

Chọn đáp án C. □

Ví dụ

Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};2\right]$ bằng



A $f(0)$. **B** $f(-3)+6$. **C** $f(2)-4$. **D** $f(4)-8$.

Lời giải

Đặt $t=2x$, với $x\in\left[-\dfrac{3}{2};2\right]\Rightarrow t\in[-3;4]$.

Xét hàm $h(t)=f(t)-2t$ trên $[-3;4]$, có $h'(t)=f'(t)-2$.

Cho $h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in[-3;4]\\ t=2\in[-3;4].\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$ trên $[-3;4]$:

t	-3		0		2		4
$h'(t)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗		↗	$h(2)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};2\right]}g(x)=\max\limits_{[-3;4]}h(t)=h(2)=f(2)-4$.

Chọn đáp án C. □

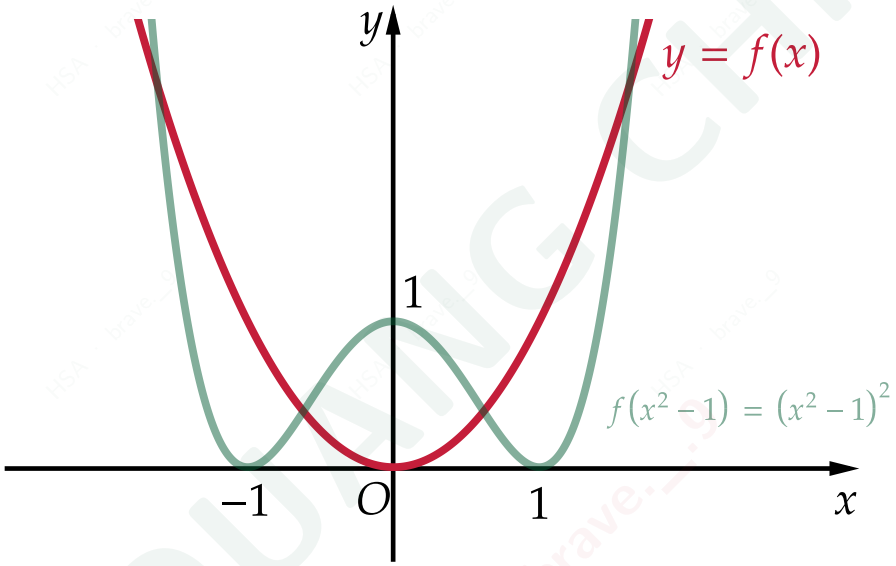
13.4 Phương pháp ghép trục

13.4.1 Ý tưởng phương pháp

Khi xét hàm hợp $g(x) = f(u(x))$, ta có sơ đồ biến đổi:

$$x \xrightarrow{\text{Tính } u} u = u(x) \xrightarrow{\text{Sử dụng hàm } f} y = f(u).$$

Xét ví dụ: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



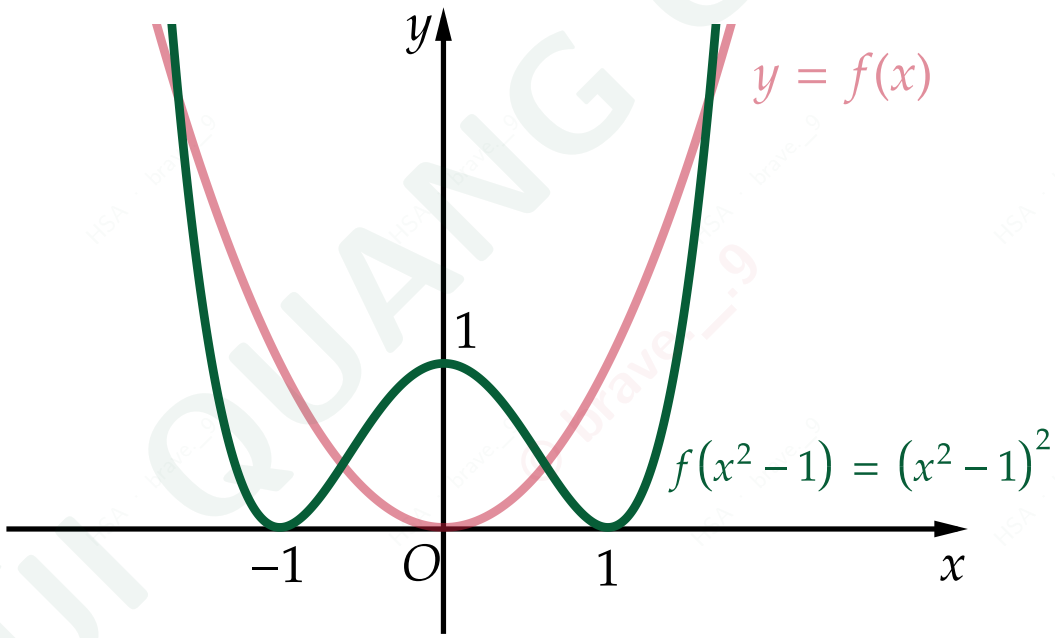
$$u' = \left(x^2 - 1\right)' = 2x = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x = 0}$$

x	$-\infty$	?	0	?	$+\infty$
u	$+\infty$	?	$u(0) = -1$	?	$+\infty$
$f(u)$					

Giả sử ta cần lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ dựa vào đồ thị của hàm số gốc $f(x)$.

Xét hàm trung gian $u(x) = x^2 - 1$. Ta có đạo hàm $u' = 2x$; $u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi $x \to \pm\infty$ thì $u \to +\infty$. Tại điểm cực trị $x = 0$, ta có $u(0) = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
u	$+\infty$	$\searrow$	$u(-1) = 0$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$u(1) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	$f(-1) = 1$	$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$



Quan sát đồ thị hàm số gốc $y = f(x)$, ta thấy hàm số đạt cực trị tại điểm có hoành độ bằng 0 (tức $u = 0$). Để xác định đầy đủ các điểm cực trị của hàm hợp, ta giải phương trình:

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Như vậy, dòng 1 gồm các giá trị x được sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

$$-\infty,\ -1,\ 0,\ 1,\ +\infty.$$

Tương ứng ở dòng 2 (hàng giá trị của u), ta có:

$$u(-\infty) = +\infty,\ u(-1) = 0,\ u(0) = -1,\ u(1) = 0,\ u(+\infty) = +\infty.$$

Sự biến thiên của u và chiều mũi tên được xác định như sau:

- Khi x tăng từ $-\infty$ đến 0, giá trị u giảm từ $+\infty$ về -1. Trên khoảng giá trị này, u đi qua điểm cực trị 0 (tương ứng $x = -1$).
- Khi x tăng từ 0 đến $+\infty$, giá trị u tăng từ -1 lên $+\infty$. Trên khoảng giá trị này, u tiếp tục đi qua điểm cực trị 0 (tương ứng $x = 1$).

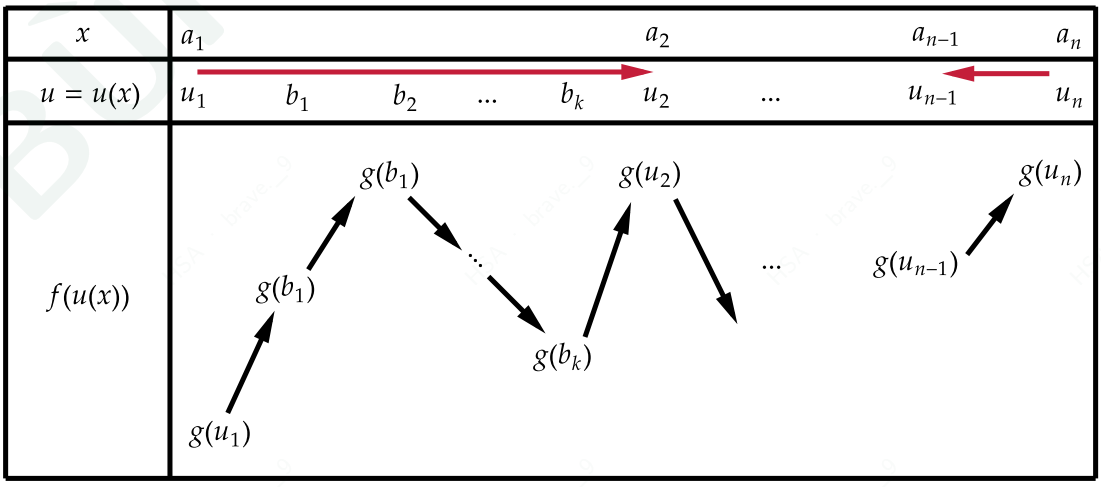
Từ chiều biến thiên của u và dạng đồ thị hàm số gốc $f(x)$, ta hoàn thiện được chiều biến thiên của $f(x^2 - 1)$ ở dòng 3.

Chú ý

Trong hàm hợp $y = f(u(x))$, biến x gián tiếp tác động lên y thông qua hàm trung gian $u = u(x)$, sau đó u đóng vai trò là biến số độc lập của hàm $f(u)$.
Bản chất của phương pháp ghép trục là: khảo sát chiều biến thiên của $u = u(x)$, sau đó đối chiếu trực tiếp khoảng giá trị của u với đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của hàm số gốc f để suy ra dáng điệu biến thiên của hàm hợp $f(u)$.

13.4.2 Các bước tổng quát lập bảng ghép trục

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số $g(x) = f(u(x))$.
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên ghép trục gồm 3 dòng:



– *Dòng 1 (x):* Điền các điểm biên của tập xác định và các điểm tới hạn (nghiệm của $u'(x)=0$ hoặc điểm làm $u'(x)$ không xác định) theo thứ tự tăng dần: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

– *Dòng 2 (u):* Điền các giá trị mốc $u_i = u(a_i)$ với $i = \overline{1,n}$. Trên mỗi khoảng giữa hai mốc liên tiếp u_i và u_{i+1}, bổ sung các điểm cực trị $b_1, b_2, \ldots, b_k$ của hàm số gốc $y=f(x)$ theo đúng chiều tăng hoặc giảm từ u_i đến u_{i+1}.

– *Dòng 3 ($f(u)$):* Điền chiều biến thiên (các mũi tên) và các giá trị cực trị tương ứng của $f(u)$ bằng cách tra cứu trực tiếp từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số gốc $y=f(x)$.

– **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)=f(u(x))$ để trả lời các yêu cầu bài toán (cực trị, tính đơn điệu, giá trị lớn nhất/nhỏ nhất hoặc số nghiệm phương trình).

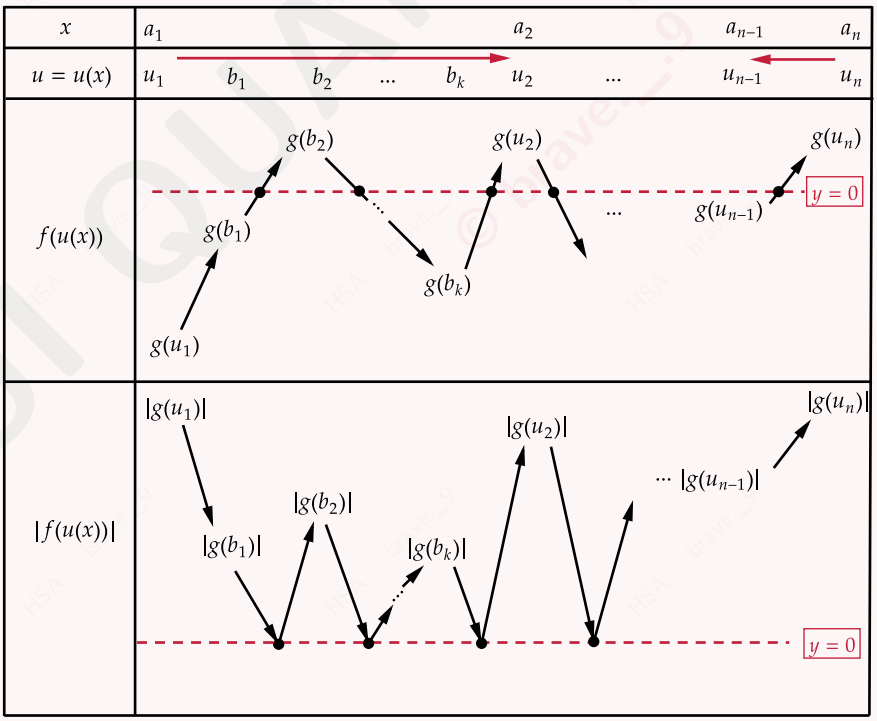
Chú ý

Bổ sung điểm đặc biệt cho các hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:

– Điểm đặc biệt của hàm số gốc $y=f(x)$ bao gồm: điểm cực trị và điểm tại đó hàm số hoặc đạo hàm không xác định.

– **Dạng 1: Hàm số $g(x)=|f(u(x))|$**

Đồ thị hàm số nhận được bằng cách giữ nguyên phần phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành qua trục hoành. Do đó, cần bổ sung thêm các nghiệm của phương trình $f(u)=0$ (giao điểm với đường thẳng $y=0$).



– **Dạng 2: Hàm số $g(x)=f(|u(x)|)$**

Hàm trung gian đổi chiều biến thiên tại các điểm $u(x)=0$. Vì vậy, ở Dòng 1 cần bổ sung

thêm các nghiệm của phương trình $u(x)=0$.

– **Dạng 3: Hàm số** $g(x)=f(u(|x|))$

Đây là hàm số chẵn, đồ thị nhận trục tung Oy $(x=0)$ làm trục đối xứng. Do đó, ở Dòng 1 bắt buộc phải điền mốc $x=0$.

13.5 Dạng bài toán truy ngược hàm

13.5.1 Ý tưởng phương pháp

Ở bài toán thuận (phương pháp ghép trục), ta đi dựng bảng biến thiên cho hàm hợp $g(x)=f(u(x))$ dựa trên quy luật biến thiên đã biết của hàm gốc $f(x)$.

Ngược lại, dạng toán **truy ngược hàm** cho trước thông tin (bảng biến thiên hoặc đồ thị) của hàm hợp $g(x)=f(u(x))$ cùng biểu thức hàm trung gian $u(x)$. Yêu cầu của bài toán là xác định tính đơn điệu và cực trị của hàm số gốc $f(x)$.

Xét đạo hàm của hàm hợp:

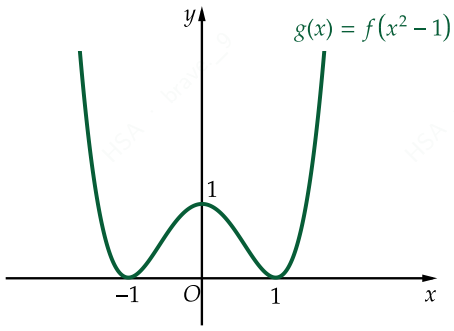
$$g'(x)=[f(u(x))]'=u'(x)\cdot f'(u(x)).$$

Phương trình $g'(x)=0$ xảy ra khi $u'(x)=0$ hoặc $f'(u(x))=0$. Về mặt bản chất, quá trình truy ngược là phép ánh xạ các điểm đặc biệt từ đồ thị hàm hợp về đồ thị hàm gốc thông qua việc đồng nhất biến số u và x.

Ví dụ

Cho hàm số $g(x)=f(x^2-1)$ có bảng biến thiên và đồ thị như sau:

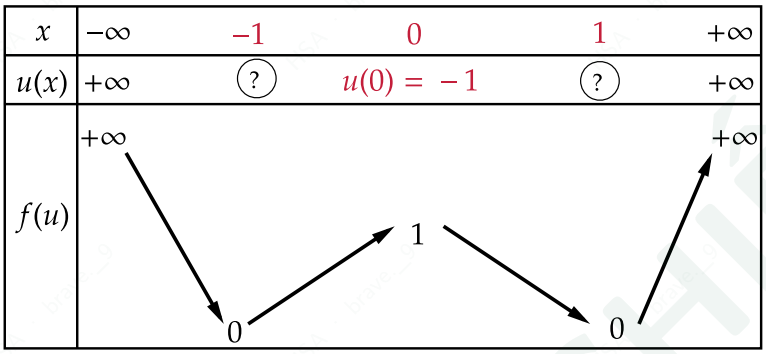
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Hãy xác định khoảng đơn điệu và điểm cực trị của hàm số gốc $y = f(x)$.

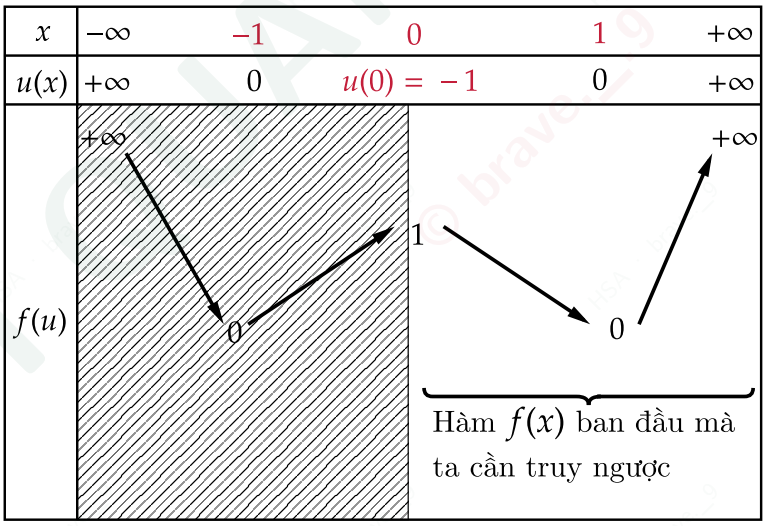
Lời giải

Xét hàm trung gian $u(x) = x^2 - 1$, ta có $u'(x) = 2x$. Phương trình $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Ta thiết lập bảng biến thiên kép để đồng bộ các mốc giá trị của x, u và $f(u)$:



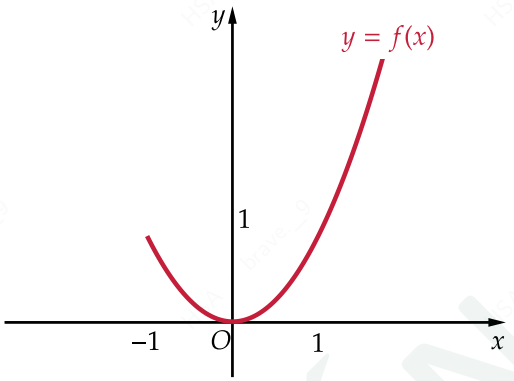
Dựa vào bảng trên, ta thực hiện quá trình đối chiếu:

- Tại $x = 0$ (là nghiệm của $u'(x) = 0$), ta tính được $u(0) = -1$. Chiếu xuống dòng $f(u)$, ta có $f(-1) = 1$. Đây chính là một điểm thuộc đồ thị hàm số gốc $f(x)$.
- Tại các điểm cực trị $x = -1$ và $x = 1$ của hàm hợp $g(x)$, ta tính được $u(\pm 1) = 0$. Chiếu xuống dòng $f(u)$, ta có $f(0) = 0$. Đây là điểm cực trị của hàm số gốc $f(x)$.



Khi x tăng từ 0 đến $+\infty$, biến u tăng đơn điệu từ -1 đến $+\infty$. Sự biến thiên của $f(u)$ trên nhánh này phản ánh chính xác sự biến thiên của hàm số gốc $f(x)$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$. Đồng nhất biến u thành biến x, ta trích xuất được bảng biến thiên và đồ thị của hàm số gốc $y = f(x)$ như sau:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = 0$.

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Phần IV

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._9

Chương 14

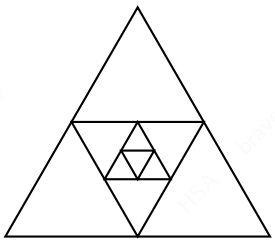
BÀI TẬP GIỚI HẠN

Câu 1. Tính $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - x^n}{x-1}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(A) $L = 0$. (B) $L = m - n$. (C) $L = +\infty$. (D) $L = m + n$.

Câu 2.

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ta được $\triangle A_1B_1C_1$. Tương tự $\triangle A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Quá trình lặp lại sau n bước ($n \in \mathbb{N}^*$) ta được $\triangle A_nB_nC_n$. Gọi S_0, S_n lần lượt là diện tích $\triangle ABC$ và $\triangle A_nB_nC_n$. Đặt T_n là tổng diện tích các tam giác $ABC, A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$. Hỏi T_n không vượt quá số nào sau đây



(A) $\dfrac{19\sqrt{3}}{240}$. (B) $\dfrac{100\sqrt{3}}{299}$. (C) $\dfrac{11\sqrt{3}}{36}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3. Tìm các giá trị của m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x-1} & x \neq 1 \\ mx+1, & x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $m = \dfrac{1}{2}$. (B) $m = \dfrac{2}{5}$. (C) $m = -\dfrac{3}{4}$. (D) $m = \dfrac{5}{4}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Khi đó $\lim\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}\right)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

BÙI QUANG CHIẾN

Câu 5. Tính $\lim \dfrac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)^2(n+1)} \cdot n$.

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Câu 6. Tính giới hạn $T = \lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

(A) $T = 0$. (B) $T = \dfrac{1}{8}$. (C) $T = \dfrac{1}{4}$. (D) $T = \dfrac{1}{16}$.

Câu 7. Cho phương trình $x^5 + 3x^2 - 14x - 7 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

(A) Phương trình có đúng 3 nghiệm trong $(-1;2)$.

(B) Phương trình có ít nhất 2 nghiệm trong $(-1;2)$.

(C) Phương trình không có nghiệm trong $(1;2)$.

(D) Phương trình có 1 nghiệm trong $(0;1)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2+4x+3}{3x-2ax^2}, (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ bằng

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) $\dfrac{a}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = ax^3 - x + 1$. Tìm điều kiện của a để hàm số liên tục tại $x = 0$.

(A) $a = 0$. (B) $a = 1$. (C) $a \neq 0$. (D) $\forall a$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{5} \end{cases}$. Tìm giới hạn $\lim u_n$.

(A) $I = \dfrac{2}{5}$. (B) $I = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$. (C) $I = \dfrac{1}{3}$. (D) $+\infty$.

Câu 11. Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+5 & x \geq 2 \\ 3x-1 & x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu a bằng

(A) 7. (B) 0. (C) -1. (D) 3.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$. Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

(A) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. (B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. (D) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{100}-2x^{50}+7}-x^{50}\right)$.

(A) 0. (B) 1. (C) -2. (D) -1.

Câu 14. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x\neq 4\\ 1-m & \text{khi } x=4\end{cases}$ liên tục tại $x=4$.

(A) $m=2$. (B) $m=0$. (C) $m=7$. (D) $m=-5$.

Câu 15. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{2x-1}$.

(A) -1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 1. (D) $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 1. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Câu 17. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^4+9x^2-5)$.

(A) -2. (B) 2. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

Câu 18. Giá trị của $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$ bằng:

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) -1. (C) 0. (D) $-\infty$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2} & \text{khi } x>4\\ ax+8 & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục trên toàn trục số.

(A) $a=-3$. (B) $a=-2$. (C) $a=-1$. (D) $a=-4$.

Câu 20. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2ax^2+4ax-8}{x^2-4}$ bằng

(A) $3-a$. (B) $2a$. (C) $\dfrac{3a}{4}$. (D) 0.

Câu 21. Cho $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm 0 và $|f(x)|\leq\left|\dfrac{x}{2017x+1}\right|,\forall x\in(a;b)\setminus\{0\}$. Tính $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(A) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$. (B) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

C $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

D Hàm số không có giới hạn tại 0.

Câu 22. Cho $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+6x}}{x} = -\dfrac{m}{n}$; trong đó m, n là các số tự nhiên, $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $A = m + n$ là

A 11. **B** 10. **C** 8. **D** 9.

Câu 23. Với n là số nguyên dương, đặt

$$S_n = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

Khi đó, $\lim S_n$ bằng

A 1. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 24. Tính $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2} - |x-2|}{|4-x^2|}$.

A $\dfrac{1}{4}$. **B** $-\infty$. **C** 0. **D** $+\infty$.

Câu 25. Cho a, b là các hằng số, b khác 0. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2an^3 - 4n^2 + 2an + 1}{bn^3 - 5bn + 3b - 1}$.

A $\dfrac{2a}{b}$. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Câu 26. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ $(a > 0)$ có kết quả là

A $\dfrac{a}{2}$. **B** a. **C** 0. **D** $+\infty$.

Câu 27. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Gọi $S_n = \dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$. Tính $\lim S_n$.

A $\lim S_n = 1$. **B** $\lim S_n = \dfrac{1}{6}$. **C** $\lim S_n = \dfrac{1}{3}$. **D** $\lim S_n = 0$.

Câu 28. Giá trị của $\lim(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$ bằng

A 1. **B** 3. **C** 0. **D** 2.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) \le 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số liên tục tại $x = a$.

B $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

C Hàm số liên tục trên tập số thực.

D Hàm số liên tục tại $x = b$.

Câu 30. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số mà tổng các chữ số trong mỗi số bằng 3?

A 36. **B** 19. **C** 21. **D** 15.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax-1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 4$ là

A $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$. **B** $\{8\}$. **C** $\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$. **D** $\{0\}$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{4}{3}x^3 - 5x + 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \dfrac{1}{5}$.

C Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

D Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{nếu } x \neq 0; x \neq -1 \\ 3 & \text{nếu } x = -1 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

A liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.

B liên tục trên $\mathbb{R}$.

C liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -1$.

D liên tục tại các điểm thuộc đoạn $[-1; 0]$.

Câu 34. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

A $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x-4}$. **B** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+5}{x^2-9}$. **C** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x^2-1}$. **D** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x^2+x+1}$.

Câu 35. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$

là

(A) 5. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Câu 36. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{x^2\cos 2x}{x^2+1}\right)$.

(A) 4. (B) $\dfrac{1}{4}$.

(C) Không tồn tại giới hạn. (D) 5.

Câu 37. Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

(A) 0. (B) 9. (C) -1. (D) $\dfrac{1}{9}$.

Câu 38. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

(A) $a^2-b^2>6$. (B) $1\le a\le 3$. (C) $a-b\ge 0$. (D) $a^2+b^2>10$.

Câu 39. Tính giới hạn $T=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)$.

(A) $T=1$. (B) $T=0$. (C) $T=-\infty$. (D) $T=2$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

(A) $m=-1$. (B) $m=4$. (C) $m=-4$. (D) $m=1$.

BÙI QUANG CHIẾN © bravee_9

Chương

15 BÀI TẬP ĐẠO HÀM

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1,k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của (d) và (C). Khi đó $k_1\cdot k_2$ bằng

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ là:

(A) $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$. (B) $y'=\dfrac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$.

(C) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\cot x}}$. (D) $y'=-\dfrac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$.

Câu 3. Cho khai triển $(x-2)^{80}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{80}x^{80}$. Tổng $S=a_1+2a_2+\cdots+80a_{80}$ có giá trị là

(A) 80. (B) -70. (C) -80. (D) 70.

Câu 4. Tìm số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1;-9)$.

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số sau $y=\sqrt{(2x+1)^{2017}}$.

(A) $y'=\dfrac{(2x+1)^{2017}}{2\sqrt{(2x+1)^{2017}}}$. (B) $y'=\dfrac{2017}{2\sqrt{(2x+1)^{2017}}}$.

(C) $y'=\dfrac{2017(2x+1)^{2016}}{2\sqrt{(x+1)^{2017}}}$. (D) $y'=\dfrac{2017(2x+1)^{2016}}{\sqrt{(2x+1)^{2017}}}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{5-x}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho

tiếp tuyến đó song song với $d\colon x+7y-5=0$.

(A) $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{23}{7} \end{array}\right.$. (B) $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{23}{7}$. (C) $y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{23}{7}$. (D) $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{23}{7} \end{array}\right.$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx^3}{3}-3x^2+mx-5$. Xác định các giá trị của m để $f'(x)>0, \forall x$.

(A) $m>3$. (B) $0<m<3$. (C) $-3<m<3$. (D) $m>0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x\cos x$. Chọn khẳng định đúng?

(A) $2(\cos x-y')+x(y''+y)=1$. (B) $2(\cos x-y')-x(y''+y)=0$.

(C) $2(\cos x-y')-x(y''+y)=1$. (D) $2(\cos x-y')+x(y''+y)=0$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\sin 2x-x+17$. Giải phương trình $y'=0$.

(A) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số sau $y=\sqrt{(2x+1)^{2017}}$.

(A) $y'=\dfrac{2017}{2\sqrt{(2x+1)^{2017}}}$. (B) $y'=\dfrac{2017(2x+1)^{2016}}{2\sqrt{(x+1)^{2017}}}$.

(C) $y'=\dfrac{2017(2x+1)^{2016}}{\sqrt{(2x+1)^{2017}}}$. (D) $y'=\dfrac{(2x+1)^{2017}}{2\sqrt{(2x+1)^{2017}}}$.

Câu 11. Cho $f(x)=(1+x)\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Giá trị $f'(0)$ bằng

(A) 0. (B) n. (C) $\dfrac{1}{n}$. (D) 1.

Câu 12. Cho $\left(\dfrac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)'=\dfrac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$. Tính $E=\dfrac{a}{b}$.

(A) $E=4$. (B) $E=-1$. (C) $E=-16$. (D) $E=-4$.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị nào của m để đồ thị của hàm số $y=x^3+3x^2+3(2m-1)x-m^2+2$ có tiếp tuyến cùng phương với trục hoành.

(A) $m\in\mathbb{R}$. (B) Không tồn tại m.

C $m \le 1$. **D** $m > 1$.

Câu 14. Cho $f(x) = \sqrt{3}\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x - 2x$. Phương trình $f'(x) = 0$, $x \in [0; 2\pi]$ có bao nhiêu nghiệm?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = \sin 2x - x + 17$. Giải phương trình $y' = 0$.

A $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x = 0$.

A $f^{(6)}(0) = 60480$. **B** $f^{(6)}(0) = 34560$.

C $f^{(6)}(0) = -60480$. **D** $f^{(6)}(0) = -34560$.

Câu 17. Tổng $S = \dfrac{1}{2017}\left(2 \cdot 3C_{2017}^2 + 3 \cdot 3^2 C_{2017}^3 + 4 \cdot 3^3 C_{2017}^4 + \cdots + k \cdot 3^{k-1} C_{2017}^k + \cdots + 2017 \cdot 3^{2016} C_{2017}^{2017}\right)$ bằng

A 3^{2016}. **B** 4^{2016}. **C** $3^{2016} - 1$. **D** $4^{2016} - 1$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là

A $y = -x - 2$. **B** $y = -x + 2$. **C** $y = x - 2$. **D** $y = -x + 1$.

Câu 19. Giá trị của tổng $S = 1 \cdot C_{2017}^1 + 2 \cdot C_{2017}^2 + 3 \cdot C_{2017}^3 + \cdots + 2017 \cdot C_{2017}^{2017}$ bằng

A $S = 2016 \cdot 2^{2017}$. **B** $S = 2016 \cdot 2^{2018}$. **C** $S = 2017 \cdot 2^{2016}$. **D** $S = 2017 \cdot 2^{2017}$.

Câu 20. Cho hàm số $(C)\colon y = x^3 - 3x^2 + 1$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $(d)\colon y = -3x + 6$ có phương trình là

A $y = -3x + 5$. **B** $y = -3x + 2$. **C** $y = -3x - 2$. **D** $y = -3x + 1$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x}{3}\right)$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

(A) Đáp án khác. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Câu 22. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$ và $P = 2\sqrt{x^2+1} \cdot y'$. Khi đó nhận định nào dưới đây đúng?

(A) $P = \dfrac{y}{2}$. (B) $P = y$. (C) $P = \dfrac{2}{y}$. (D) $P = 2y$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^9$. Tính $f^{(5)}(0)$.

(A) $f^{(5)}(0) = \dfrac{201}{20}$. (B) $f^{(5)}(0) = 144720$. (C) $f^{(5)}(0) = 1206$. (D) $f^{(5)}(0) = 15120$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm phương trình $2f'(x) - x \cdot f''(x) - 6 = 0$?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 25. Cho hàm số $y = \cot^2(\cos x) + \sqrt{\sin x - \dfrac{\pi}{2}}$. Khi đó $y' = ?$

(A) $y' = 2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

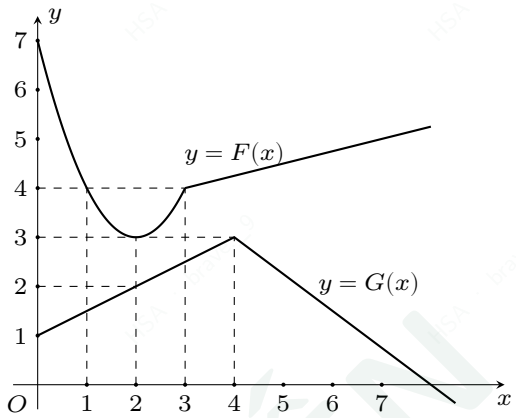
(B) $y' = 2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

(C) $y' = -2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)} + \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

(D) $y' = -2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

Câu 26.
Nếu $y = F(x)$ và $y = G(x)$ là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên. Đặt $P(x) = F(x) \cdot G(x)$. Tính $P'(2)$.



A $\dfrac{5}{2}$. **B** $\dfrac{3}{2}$.

C 4. **D** 6.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$. Tìm x để $f'(x) < 0$.

A $x \in (0; 2)$. **B** $x \in (-2; 0)$.

C $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **D** $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Câu 28. Tìm số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

A 2. **B** 3. **C** 0. **D** 1.

Câu 29. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là

A $y = -6x + 8$. **B** $y = -6x + 6$. **C** $y = -6x - 8$. **D** $y = -6x - 6$.

Câu 30. Xét các mệnh đề sau

(1) Hàm số $f(x) = |x|$ có $f'(0) = 0$;

(2) Hàm số $f(x) = |x^{2017}|$ có $f'(0) = 0$;

(3) Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 1|$ bằng 0 tại ba điểm phân biệt.

Những mệnh đề đúng là

A (2); (3). **B** (1); (2). **C** (2). **D** (1); (2); (3).

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) là

A $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x + \dfrac{22}{3}$. **B** $y = -2x - 10; y = -2x - \dfrac{22}{3}$.

C $y = -2x - \dfrac{10}{3}; y = -2x - 22$. **D** $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x - \dfrac{22}{3}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M, biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình $y = -x - 2$ và $x_M > 0$.

(A) $y = -9x + 14$. (B) $y = -9x - 12$. (C) $y = -9x - 14$. (D) $y = -9x + 12$.

Câu 33. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ có đạo hàm cấp hai. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $y^2y'' + y' = 1$. (B) $y^3y'' + 1 = 0$. (C) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x - x^2}}$. (D) $y^2 + y' - y'' = 1$.

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)(x-2017)$ tại $x = 0$.

(A) $y'(0) = -2017!$. (B) $y'(0) = 2017!$. (C) $y'(0) = 0$. (D) $y'(0) = 2017$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$.

(A) $m = -3$. (B) $m = -\dfrac{3}{2}$. (C) $m = \dfrac{1}{2}$. (D) $m = 1$.

Câu 36. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$

(A) $\dfrac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2}$. (B) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{(n+1)}} + \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

(C) $(-1)\cdot\dfrac{(1)^n n!}{(x-1)^{(n+1)}} + 2\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. (D) $(-1)\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + 2\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn phát biểu đúng

(A) $4y - y'' = 0$. (B) $4y + y'' = 0$. (C) $y^2 + (y')^2 = 4$. (D) $y = y' \tan 2x$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ bằng

(A) $S = \emptyset$. (B) $S = (0; +\infty)$. (C) $S = (-\infty; +\infty)$. (D) $S = [-2; 2]$.

Câu 39. Đạo hàm cấp n (với n là số nguyên dương) của hàm số $y = \dfrac{1}{x + 2016}$ là

(A) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2016)^{n+1}}$. (B) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2016)^n}$. (C) $\dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2016)^n}$. (D) $\dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2016)^{n+1}}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(2x) = 4f(x)\cos x - 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

(A) $y=-x$. (B) $y=2-x$. (C) $y=2x-1$. (D) $y=x$.

Câu 41. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x+2$ tại điểm $M(2;12)$ là

(A) $y=21x-30$. (B) $y=21x+12$. (C) $y=21x+30$. (D) $y=21x-42$.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc $k=1$ là

(A) $y=x-2, y=x+6$. (B) $y=x+2, y=x-6$.

(C) $y=x+2, y=x+6$. (D) $y=x-2, y=x-6$.

Câu 43. Hàm số $y=-x^3+3x^2+2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;4)$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A, B. Diện tích của tam giác OAB là

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ có đạo hàm cấp hai. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $y^2y''+y'=1$. (B) $y^2+y'-y''=1$. (C) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}$. (D) $y^3y''+1=0$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}(m-1)x^3-(m-2)x^2+(m-3)x+(m^2+m+1)$ với m là tham số. Tìm m để phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1+x_2+x_1x_2<1$.

(A) $m>2$. (B) $m>3$. (C) $1<m<2$. (D) $1<m<3$.

Câu 46. Cho $f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x-2x$. Phương trình $f'(x)=0, x\in[0;2\pi]$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Câu 47. Cho đồ thị hàm số $(C)\colon y=x^4-4x^2+2017$ và đường thẳng $d\colon y=\dfrac{1}{4}x+1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d?

(A) 3 tiếp tuyến. (B) Không có tiếp tuyến nào.

(C) 2 tiếp tuyến. (D) 1 tiếp tuyến.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+12$. Tìm x để $f'(x)<0$.

(A) $x\in(0;2)$. (B) $x\in(-2;0)$.

C $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$. **D** $x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$.

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$, $(x_N < 0)$ là các điểm trên đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M, N song song với nhau, đồng thời khoảng cách giữa hai tiếp tuyến này là lớn nhất. Tính $x_N^2 + x_M^2$.

A 8. **B** 16. **C** $\sqrt{8}$. **D** 0.

Câu 50. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Biết rằng, tại điểm M thuộc (C) tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất. Tìm phương trình tiếp tuyến đó.

A $y = 3x + 1$. **B** $y = -3x - 1$. **C** $y = -3x + 1$. **D** $y = 3x - 1$.

Câu 51. Điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ là

A $M(-2;0)$. **B** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C** $M\left(-3;\dfrac{-16}{3}\right)$. **D** $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{8}\right)$.

Câu 52. Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Chọn khẳng định đúng?

A $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 1$. **B** $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 1$.

C $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 0$. **D** $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 0$.

Câu 53. Biết rằng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 5}$ song song với trục hoành. Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến d bằng

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** -1.

Câu 54. Tính $S = C_{2017}^1 - 2^2 C_{2017}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2017}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2017}^4 + \cdots - 2016 \cdot 2^{2015} C_{2017}^{2016} + 2017 \cdot 2^{2016} C_{2017}^{2017}$.

A $S = -2017$. **B** $S = -2016$. **C** $S = 2017$. **D** $S = 2016$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ khác hàm hằng, xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Xét 4 mệnh đề sau:

(I) Số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ luôn bé hơn số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

(II) Nếu $y = f(x)$ là hàm số chẵn thì $y = f'(x)$ là hàm số lẻ.

(III) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 có hệ số góc $k = f'(x_0)$.

(IV) Nếu $f'(x_1) = f'(x_2)$ và $x_1 \neq x_2$ thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 song song với nhau.

Số mệnh đề đúng là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 56. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Nghiệm của phương trình $y'\cdot y=2x+1$ là

(A) $x=-1$. (B) $x=1$. (C) Vô nghiệm. (D) $x=2$.

Câu 57. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1,d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x),g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

(A) 45°. (B) 60°. (C) 90°. (D) 30°.

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$, $m\neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\left(f\left(\dfrac{x}{m}\right)\right)'=f'(x)$. (B) $\left(f\left(\dfrac{x}{m}\right)\right)'=mf'(x)$.

(C) $\left(f\left(\dfrac{x}{m}\right)\right)'=\dfrac{1}{m}f'\left(\dfrac{x}{m}\right)$. (D) $\left(f\left(\dfrac{x}{m}\right)\right)'=mf'\left(\dfrac{x}{m}\right)$.

Câu 59. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$ là

(A) $f'(0)=-2$. (B) $f'(0)=0$. (C) Không tồn tại. (D) $f'(0)=1$.

Câu 60. Cho hàm số $y=\sin 3x\cos x-\sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây?

(A) 454492. (B) 454491. (C) 454490. (D) 454493.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{-x+1}$. Tính $f^{(30)}(x)$.

(A) $f^{(30)}(x)=-30!(1-x)^{-31}$. (B) $f^{(30)}(x)=30!(1-x)^{-31}$.

(C) $f^{(30)}(x)=-30!(1-x)^{-30}$. (D) $f^{(30)}(x)=30!(1-x)^{-30}$.

Câu 62. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+6x+2$ có đồ thị (C). Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C). Giá trị lớn nhất của k là

(A) 6. (B) -6. (C) -10. (D) 10.

Câu 63. Cho $f(x)=(1+x)\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Giá trị $f'(0)$ bằng

(A) n. (B) $\dfrac{1}{n}$. (C) 0. (D) 1.

Câu 64. Biết hàm số $f(x)-f(2x)$ có đạo hàm bằng 5 tại $x=1$ và đạo hàm bằng 7 tại $x=2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)-f(4x)$ tại $x=1$.

(A) 12. (B) 8. (C) 16. (D) 19.

Câu 65. Cho đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon y=-4x+3$.

(A) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$. (B) $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7}{4}$.

(C) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$. (D) $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 66. Cho đồ thị hàm số $(C)\colon y=\dfrac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M=2-\sqrt{3}$ thuộc (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại M lần lượt cắt Ox, Oy tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

(A) $S_{\triangle OAB}=1$. (B) $S_{\triangle OAB}=4$.

(C) $S_{\triangle OAB}=2$. (D) $S_{\triangle OAB}=2+\sqrt{3}$.

Câu 67. Cho hàm số $y=x^3-mx^2-mx+2m-3$ có đồ thị là (C), với m là tham số thực. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương. Tính tổng các phần tử của T.

(A) -3. (B) 6. (C) 3. (D) -6.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\tan 3x$. Tính $\dfrac{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

(A) $\dfrac{-2}{3}$. (B) $\dfrac{-1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Câu 69. Cho $(C_m)\colon y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3m+4}{2}x^2+3m+3$. Gọi $A\in(C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d\colon y=6x+2017$?

(A) $m=-3$. (B) $m=3$. (C) $m=5$. (D) $m=0$.

Câu 70. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=\dfrac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$.

A $3 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + 4 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$.

B $4 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + 3 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$.

C $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$.

D $3 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$.

Câu 71. Từ điểm $M(-1;-9)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$?

A 2. **B** 1. **C** 0. **D** 3.

Câu 72. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{với } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A 18. **B** 17. **C** 20. **D** 25.

Câu 73. Gọi $M \in (C)\colon y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Hãy tính diện tích tam giác OAB.

A $\dfrac{123}{6}$. **B** $\dfrac{125}{6}$. **C** $\dfrac{121}{6}$. **D** $\dfrac{119}{6}$.

Câu 74. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx^3}{3} - \dfrac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A $0 < m < \dfrac{12}{5}$. **B** $0 \leq m < \dfrac{12}{5}$. **C** $m < \dfrac{12}{5}$. **D** $m < 0$.

Câu 75. Khai triển $(1+x+x^2-x^3)^{10} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{30} x^{30}$. Tính tổng $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + 30a_{30}$.

A $5 \cdot 2^{10}$. **B** 0. **C** 4^{10}. **D** 2^{10}.

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, biết $f(x) = m\cos x + 2\sin x - 3x + 1$.

A $m < 0$. **B** $|m| \geq \sqrt{5}$. **C** $m > 0$. **D** $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$.

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 0$ là:

A -2. **B** -4. **C** 2. **D** không tồn tại.

Câu 78. Cho hàm số $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính đạo hàm cấp 101 của hàm

số đã cho.

A $y^{(101)} = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

B $y^{(101)} = -2^{101} \cdot \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

C $y^{(101)} = -\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

D $y^{(101)} = 2^{101} \cdot \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f'(x) \le 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, biết $f(x) = -\dfrac{mx^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$.

A $m \in (0; +\infty)$. **B** $m \in \left[0; \dfrac{12}{5}\right]$. **C** $m \in [0; +\infty)$. **D** $m \in \left[\dfrac{12}{5}; +\infty\right)$.

Câu 80. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$. Giá trị của a và b là

A $a = 2; b = 2$. **B** $a = 1; b = 1$. **C** $a = 1; b = 2$. **D** $a = 2; b = 1$.

Câu 81. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A $y + 16 = -9(x+3)$.

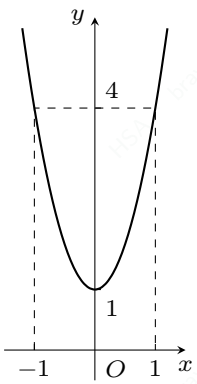
B $y - 16 = -9(x-3)$.

C $y = -9(x+3)$.

D $y - 16 = -9(x+3)$.

Câu 82.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.



A $H = 51$. **B** $H = 64$. **C** $H = 58$. **D** $H = 45$.

Câu 83. Cho đồ thị hàm số $(C)\colon y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Từ điểm $A\left(\dfrac{19}{12}; 4\right)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến tới (C)?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Câu 84. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì (Δ) vuông góc với

đường thẳng $(d)\colon y=\dfrac{1}{4}x-2016$?

A $m=-1$. **B** $m=1$. **C** $m=0$. **D** $m=2$.

Câu 85. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon y=3x+2018$.

A $m=2$. **B** $m=1$. **C** $m=-\dfrac{1}{3}$. **D** $m=\dfrac{7}{3}$.

Câu 86. Đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 x-\cot^2 x$ có dạng $y'=a\left(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right)+b\left(\tan^3 x+\dfrac{1}{\tan^3 x}\right)$. Khi đó $a-b$ bằng

A -2. **B** 4. **C** 2. **D** 0.

Câu 87. Một viên đạn được bắn lên trời từ một vị trí cách mặt đất 1000m theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $v_0=294$m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Hỏi khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất và sẽ bắt đầu rơi thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A 4307,5m. **B** 4062,5m. **C** 5410m. **D** 4410m.

Câu 88. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+12t^2$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động được trong t giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=10$ giây.

A 90 m/s. **B** 100 m/s. **C** 70 m/s. **D** 80 m/s.

Câu 89. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

A $x+y-2=0$. **B** $3x+3y+8=0$. **C** $3x+3y-8=0$. **D** $x+y+2=0$.

Câu 90. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x)=0$.

A $S=\{-1;1\}$. **B** $S=\emptyset$. **C** $S=\{0;1\}$. **D** $S=\{0\}$.

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)=(x-2)\sqrt{x^2+1}$. Khi đó $y'=?$

A $y'=\dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. **B** $y'=\dfrac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

C $y'=\dfrac{2x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **D** $y'=\dfrac{2x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 92. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{3-4x}{2x-1}$ đi qua điểm $M(0;1)$.

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Câu 93. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị hàm số $(C)\colon y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

(A) $M\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$. (B) $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. (C) $M(-2;0)$. (D) $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{8}\right)$.

Câu 94. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$ (với m là tham số). Tìm m để $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=10$.

(A) $m=-3$. (B) $m=1; m=-3$. (C) $m=1$. (D) $m=1; m=3$.

Câu 95. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ là

(A) 3. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

(A) $y'+y\cdot y''=1$. (B) $(y')^2+2\cdot y\cdot y''=1$.

(C) $(y')^2-y\cdot y''=1$. (D) $(y')^2+y\cdot y''=1$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$ bằng

(A) $S=(-\infty;+\infty)$. (B) $S=[-2;2]$. (C) $S=\emptyset$. (D) $S=(0;+\infty)$.

Câu 98. Cho hàm số $y=x+\dfrac{4}{x-3}$ có đồ thị (C). Tìm điểm M nằm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d\colon y=-3x+2$.

(A) $M_1(2;-2), M_2(4;8)$. (B) $M_1(2;-2), M_2(5;7)$.

(C) $M_1(4;8), M_2(0;2)$. (D) $M_1(0;2), M_2(5;7)$.

Câu 99. Tính đạo hàm của hàm số $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)(x-2017)$ tại $x=0$.

(A) $y'(0)=-2017!$. (B) $y'(0)=2017!$. (C) $y'(0)=2017$. (D) $y'(0)=0$.

Câu 100. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục tung và trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB cân.

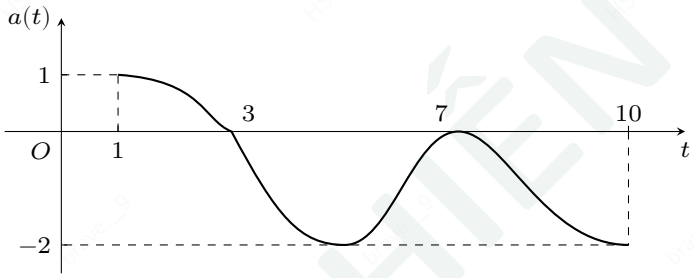
A $y = x - 2$. **B** $y = -x + 2$. **C** $y = x + 2$. **D** $y = -x - 2$.

Câu 101. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm bất phương trình $f'(x) \le f(x)$ là

A $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **C** $x < 0$. **D** $x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 102.

Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc vật thể chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?



A giây thứ 10. **B** giây thứ 3. **C** giây thứ 7. **D** giây thứ nhất.

Câu 103. Nếu đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{2017}$ thì số tiếp tuyến đó là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Câu 104. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

A -9 m/s^2. **B** -12 m/s^2. **C** 9 m/s^2. **D** 12 m/s^2.

Câu 105. Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. **B** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C $x = \pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. **D** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 106. Cho hàm số $y = x \sin x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A $xy' + yy'' - xy'' = 2\sin x$. **B** $xy'' + y' - xy = 2\cos x + \sin x$.

C $xy'' + yy' - xy' = 2\sin x$. **D** $xy'' - 2y' + xy = -2\sin x$.

Câu 107. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức New-tơn của $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^n$, $(x \neq 0)$, biết rằng $1 \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 + 3 \cdot \mathrm{C}_n^3 + \cdots + n \cdot \mathrm{C}_n^n = 256n$, ($\mathrm{C}_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

A 48988. **B** 49888. **C** 489888. **D** 4889888.

Câu 108. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$ tại điểm có hoành độ $\dfrac{7\pi}{6}$ là

A $y = 2x - \dfrac{7\pi}{3} - 1$. **B** $y = 2x + \dfrac{7\pi}{3} + 1$.

C $y = -6x - 7\pi + 1$. **D** $y = -6x + 7\pi - 1$.

Câu 109. Đạo hàm cấp n (với n là số nguyên dương) của hàm số $y = \dfrac{1}{x + 2016}$ là

A $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2016)^{n+1}}$. **B** $\dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2016)^n}$. **C** $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2016)^n}$. **D** $\dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(x+2016)^{n+1}}$.

Câu 110. Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A 12 m/s. **B** -3 m/s. **C** 3 m/s. **D** -12 m/s.

Câu 111. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$, $m \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $f'_x\left(\dfrac{x}{m}\right) = f'(x)$. **B** $f'_x\left(\dfrac{x}{m}\right) = \dfrac{1}{m} f'\left(\dfrac{x}{m}\right)$.

C $f'_x\left(\dfrac{x}{m}\right) = m f'\left(\dfrac{x}{m}\right)$. **D** $f'_x\left(\dfrac{x}{m}\right) = m f'(x)$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Tính đạo hàm cấp 81 của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = \pi$.

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $-\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 113. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + mx - 4$ (với m là tham số). Tìm m để $y' > 0$ với mọi x.

A $m \in (0; +\infty)$. **B** $m \in \mathbb{R}$. **C** $m \in (-\infty; 0)$. **D** $m \in \emptyset$.

Câu 114. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 3x$. Tìm $f'(x)$.

A $f'(x) = -3\sin 6x$.
B $f'(x) = -\sin 6x$.
C $f'(x) = 3\sin 6x$.
D $f'(x) = \sin 6x$.

Câu 115. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Câu 116. Phương trình nào sau đây là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{4} - x + 1$ biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(2; -1)$?

A $y = -2x + 3$. **B** $y = x - 3$. **C** $y = 3x - 7$. **D** $y = -1$.

Câu 117. Cho $[(2x-1)^2 \cdot (2-3x)]' = ax^2 + bx + c$. Tính $S = a + b + c$.

A $S = -87$. **B** $S = 17$. **C** $S = -7$. **D** $S = -47$.

Câu 118. Cho đồ thị hàm số $(C)\colon y = \dfrac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M = 2 - \sqrt{3}$ thuộc (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại M lần lượt cắt Ox, Oy tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB.

A $S_{\triangle OAB} = 1$.
B $S_{\triangle OAB} = 4$.
C $S_{\triangle OAB} = 2$.
D $S_{\triangle OAB} = \sqrt{3} + 2$.

Câu 119. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x + 2$ tại điểm $M(2; 12)$ là

A $y = 21x - 30$. **B** $y = 21x + 30$. **C** $y = 21x - 42$. **D** $y = 21x + 12$.

Câu 120. Trong mặt phẳng Oxy, có bao nhiêu điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ sao cho hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau?

A vô số. **B** 2. **C** 0. **D** 1.

Câu 121. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

A $y = 7x - 14$. **B** $y = -x - 7$. **C** $y = -x + 9$. **D** $y = 7x - 7$.

Câu 122. Cho hàm $y = -\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M với đồ thị (C) lần lượt cắt trục Ox, Oy tại A, B. Tính diện tích tam giác AOB.

A 4. **B** 2. **C** $4\sqrt{2}$. **D** $2\sqrt{2}$.

Câu 123. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A $2x - y - 4 = 0$. **B** $x - y - 3 = 0$. **C** $x - y - 1 = 0$. **D** $2x - y = 0$.

Câu 124. Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x + x^5 - 2018$ xác định trên $\mathbb{R}$. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $f^{(10)}(x) + 1024 = 0$.

A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 10.

Câu 125. Cho hàm số $f(x) = (2018 + x)(2017 + 2x)(2016 + 3x) \cdots (1 + 2018x)$. Tính $f'(1)$.

A $2019 \cdot 2018^{1009}$. **B** $2018 \cdot 2019^{1009}$. **C** $2018 \cdot 1009^{2019}$. **D** $1009 \cdot 2019^{2018}$.

Câu 126. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$ là:

A $y' = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{x^3}$. **B** $y' = \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{x^3}$. **C** $y' = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x^3}$. **D** $y' = -\dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}$.

Câu 127. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon y = -4x + 3$.

A $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$ và $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4}$. **B** $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{4}$.

C $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$ và $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$. **D** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$.

Câu 128. Tìm trên đường thẳng $x = 3$ điểm M có tung độ là số nguyên nhỏ nhất mà qua đó ta có thể kẻ tới đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đúng 3 tiếp tuyến phân biệt.

A $M(3; 1)$. **B** $M(3; -5)$. **C** $M(3; -6)$. **D** $M(3; 2)$.

Câu 129. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x}$.

A 6. **B** 1. **C** 5. **D** 4.

Câu 130. Đạo hàm bậc 21 của hàm số $f(x) = \cos(x + a)$ là

A $f^{(21)}(x) = \cos\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **B** $f^{(21)}(x) = -\cos\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

C $f^{(21)}(x) = -\sin\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **D** $f^{(21)}(x) = \sin\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 131. Cho hàm số $y = \cos(x+2)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính đạo hàm cấp 52 của hàm số đã cho.

A $y^{(52)} = \cos(x+2)$.
B $y^{(52)} = 2^{52} \cdot \cos(x+2)$.
C $y^{(52)} = -\cos(x+2)$.
D $y^{(52)} = -2^{52} \cdot \cos(x+2)$.

Câu 132. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$. Giá trị của a và b là

A $a = 2; b = 2$.
B $a = 1; b = 2$.
C $a = 2; b = 1$.
D $a = 1; b = 1$.

Câu 133. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

A $y = 7x + 14$.
B $y = 7x - 14$.
C $y = 7x + 2$.
D $y = 7x$.

Câu 134. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$. Xác định các giá trị của m để $f'(x) > 0, \forall x$.

A $m > 3$.
B $0 < m < 3$.
C $-3 < m < 3$.
D $m > 0$.

Câu 135. Cho hàm $y = -\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M với đồ thị (C) lần lượt cắt trục Ox, Oy tại A, B. Tính diện tích tam giác AOB.

A $4\sqrt{2}$.
B 2.
C 4.
D $2\sqrt{2}$.

Câu 136. Trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ tại các điểm nào mà tiếp tuyến với đồ thị hàm số tạo với 2 trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A $(-3;0)$ và $(-1;2)$.
B $(1;-1)$.
C $\left(1;\dfrac{4}{3}\right)$.
D $(-1;2)$ và $\left(1;\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 137. Giá trị của tổng $S = 1 \cdot C_{2018}^1 + 2 \cdot C_{2018}^2 + 3 \cdot C_{2018}^3 + \cdots + 2018 \cdot C_{2018}^{2018}$ bằng

A $2017 \cdot 2^{2017}$.
B $2018 \cdot 2^{2018}$.
C $2017 \cdot 2^{2018}$.
D $2018 \cdot 2^{2017}$.

Câu 138. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+2}$. Biết tiếp tuyến đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{5}x + 2017$. Tìm tất cả các hoành độ tiếp điểm x_0.

A $x_0 = -1; x_0 = 2$.
B $x_0 = 3$.

C $x_0 = -1$. **D** $x_0 = -1; x_0 = -3$.

Câu 139. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến phân biệt của (C) có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2017 \cdot OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn?

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

Câu 140. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động được trong t giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ giây.

A 80 m/s. **B** 70 m/s. **C** 100 m/s. **D** 90 m/s.

Câu 141. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A 243 (m/s). **B** 144 (m/s). **C** 27 (m/s). **D** 36 (m/s).

Câu 142. Đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 x - \cot^2 x$ có dạng $y' = a\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) + b\left(\tan^3 x + \frac{1}{\tan^3 x}\right)$. Khi đó $a - b$ bằng

A 4. **B** 2. **C** 0. **D** -2.

Câu 143. Cho $(C_m)\colon y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3m+4}{2}x^2 + 3m + 3$. Gọi $A \in (C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d\colon y = 6x + 2017$?

A $m = -3$. **B** $m = 5$. **C** $m = 0$. **D** $m = 3$.

Câu 144. Trên đồ thị $(C)\colon y = \frac{x-1}{x-2}$, có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d\colon x + y = 1$?

A 0. **B** 4. **C** 2. **D** 1.

Câu 145. Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A 3 m/s. **B** -12 m/s. **C** -3 m/s. **D** 12 m/s.

Câu 146. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

(A) $1 + \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. (B) $\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$. (C) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. (D) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^n}$.

Câu 147. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.

(B) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

(C) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

(D) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 148. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$ (với m là tham số). Tìm m để $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

(A) $m = 1$. (B) $m = 1; m = -3$. (C) $m = 1; m = 3$. (D) $m = -3$.

Câu 149. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Hệ thức liên hệ giữa y và y' không phụ thuộc vào x là

(A) $(y')^2 + (1-2y)^2 = 1$. (B) $(y')^2 + 4y^2 = 4$.

(C) $2(y')^2 + 4y^2 = 1$. (D) $4(y')^2 + y^2 = 4$.

Câu 150. Nếu đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{2017}$ thì số tiếp tuyến đó là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Câu 151. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ x+1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Khẳng định nào là đúng về đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$?

(A) $f'(0) = 1$. (B) Không tồn tại.. (C) $f'(0) = 0$. (D) $f'(0) = -1$.

Câu 152. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \cos^2 2x}$ bằng

(A) $y' = \dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$. (B) $y' = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

(C) $y' = \dfrac{-\sin^2 2x}{\sqrt{2+\cos^2 2x}}$.

(D) $y' = \dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{2+\cos^2 2x}}$.

Câu 153. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \tan 3x$. Tính $\dfrac{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

(A) $\dfrac{-2}{3}$.

(B) $\dfrac{2}{3}$.

(C) $\dfrac{1}{3}$.

(D) $\dfrac{-1}{3}$.

Câu 154. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số song song đường thẳng $y = -2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) là

(A) $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x - \dfrac{22}{3}$.

(B) $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x - 22$.

(C) $y = -2x - \dfrac{10}{3}; y = -2x + \dfrac{22}{3}$.

(D) $y = -2x - 10; y = -2x - \dfrac{22}{3}$.

Câu 155. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M, biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình $y = -x - 2$ và $x_M > 0$.

(A) $y = -9x - 14$.

(B) $y = -9x + 12$.

(C) $y = -9x - 12$.

(D) $y = -9x + 14$.

Câu 156. Cho $P(x) = (1 + 3x - 2x^2)^{20}$. Khai triển $P(x)$ thành đa thức ta được $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{40}x^{40}$. Tính $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + 40a_{40}$.

(A) $S = -5 \cdot 2^{19}$.

(B) $S = 5 \cdot 2^{21}$.

(C) $S = -5 \cdot 2^{21}$.

(D) $S = 5 \cdot 2^{20}$.

Câu 157. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}(m-1)x^3 - (m-2)x^2 + (m-3)x + (m^2+m+1)$ với m là tham số. Tìm m để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$.

(A) $1 < m < 2$.

(B) $m > 2$.

(C) $m > 3$.

(D) $1 < m < 3$.

Câu 158. Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ có phương trình là

(A) $y = 2x$.

(B) $y = 6x - 4$.

(C) $y = 9x - 7$.

(D) $y = -2x + 4$.

Câu 159. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f'(x) \le 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, biết $f(x) = -\dfrac{mx^3}{3} + \dfrac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$.

(A) $m \in \left[\dfrac{12}{5}; +\infty\right)$.

(B) $m \in \left[0; \dfrac{12}{5}\right]$.

(C) $m \in [0; +\infty)$.

(D) $m \in (0; +\infty)$.

Câu 160. Cho hàm số $y = \sqrt{1 + 3x - x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$.
(B) $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$.
(C) $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.
(D) $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$.

Câu 161. Cho hàm số $y = \dfrac{3\sin x}{\sin x + \cos x}$ xác định với mọi $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $y^2 = y' \sin^2 x$.
(B) $y^2 = 3y' \sin^2 x$.
(C) $y^2 = -3y' \sin^2 x$.
(D) $y^2 = -y' \sin^2 x$.

Câu 162. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề **sai** là

(A) $f'(2) = 4$.
(B) $f'(1) = 2$.
(C) f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
(D) $f'(0) = 2$.

Câu 163. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{x-2} - 27$ song song với trục hoành là

(A) 2.
(B) 0.
(C) 1.
(D) 3.

Câu 164. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$ tại điểm có hoành độ $\dfrac{7\pi}{6}$ là

(A) $y = 2x + \dfrac{7\pi}{3} + 1$.
(B) $y = -6x - 7\pi + 1$.
(C) $y = -6x + 7\pi - 1$.
(D) $y = 2x - \dfrac{7\pi}{3} - 1$.

Câu 165. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 1}$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$.

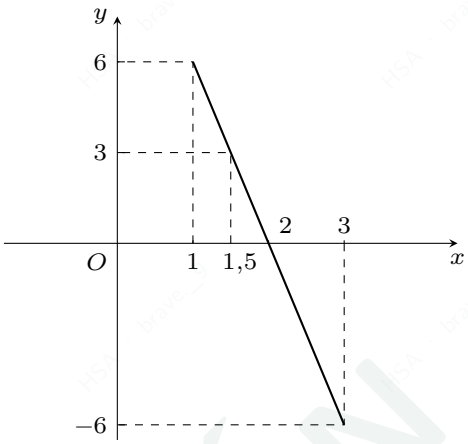
(A) $S = \{0\}$.
(B) $S = \{0; 1\}$.
(C) $S = \emptyset$.
(D) $S = \{-1; 1\}$.

Câu 166. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên (C) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng có phương trình $x + 2y = 0$.

(A) $m > \dfrac{2}{3}$.
(B) $m \leq 0$ hoặc $m > \dfrac{2}{3}$.
(C) $m < 0$ hoặc $m > \dfrac{2}{3}$.
(D) $m \leq 0$ hoặc $m \geq \dfrac{2}{3}$.

Câu 167.

Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc vật thể chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất?



A giây thứ 2. **B** giây thứ 3.

C giây thứ 1,5. **D** giây thứ nhất.

Câu 168. Cho đồ thị $(C)\colon y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng $x = 2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Câu 169. Biết đường thẳng $y = x$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 + bx + c$ tại điểm $M(1;1)$. Tìm các số thực b, c.

A $b = -1, c = 1$. **B** $b = 1, c = -1$. **C** $b = 1, c = 1$. **D** $b = -1, c = -1$.

Câu 170. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 + mx + 1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị m để tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất đi qua gốc tọa độ O.

A 3. **B** Vô số. **C** 1. **D** 2.

Câu 171. Cho $(C)\colon y = 3x - 4x^2$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(1;3)$?

A 3. **B** 0. **C** 2. **D** 1.

Câu 172. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm bất phương trình $f'(x) \le f(x)$ là

A $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$ **B** $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$ **C** $x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D** $x < 0$.

Câu 173. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1;2)$ là

A $y = -6x - 6$. **B** $y = -6x + 6$. **C** $y = -6x - 8$. **D** $y = -6x + 8$.

Câu 174. Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 1$.

(A) $y=-2x+1$. (B) $y=-x+1$. (C) $y=2x+1$. (D) $y=x+1$.

Câu 175. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

(A) 0. (B) -3. (C) 3. (D) -4.

Câu 176. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+mx-4$ (với m là tham số). Tìm m để $y'>0$ với mọi x.

(A) $m\in(0;+\infty)$. (B) $m\in(-\infty;0)$. (C) $m\in\emptyset$. (D) $m\in\mathbb{R}$.

Câu 177. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+2}$. Biết tiếp tuyến đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{5}x+2017$. Tìm tất cả các hoành độ tiếp điểm x_0.

(A) $x_0=-1;x_0=-3$. (B) $x_0=3$.

(C) $x_0=-1$. (D) $x_0=-1;x_0=2$.

Câu 178. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

(A) $y=-x+2$. (B) $y=x-2$. (C) $y=-x-2$. (D) $y=x+2$.

Câu 179. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+1)x-m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y=2x-3$.

(A) $m=-\dfrac{3}{2}$. (B) $m=\dfrac{1}{2}$. (C) $m=-3$. (D) $m=1$.

Câu 180. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3x+1$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y=3x+2018$?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Câu 181. Biết rằng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+2x-5}$ song song với trục hoành. Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến d bằng

(A) -1. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Câu 182. Cho hàm số $y=3x-4x^3$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với (C)?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Câu 183. Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}$.

(A) $T=1$. (B) $T=\dfrac{1}{3}$. (C) $T=0$. (D) $T=3$.

Câu 184. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại A và B sao cho $AB=\sqrt{2}OA>0$.

(A) $y=-x+4$. (B) $y=-x$. (C) $y=-x+8$. (D) $y=-x-8$.

Câu 185. Cho $(C)\colon y=3x-4x^2$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(1;3)$?

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Câu 186. Từ điểm $A(0;2)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=|x|^3-3|x|+2$?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 187. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-x^2+2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=5x+5$.

(A) $y=5x-\dfrac{121}{27}$. (B) $y=5x-5$.

(C) $y=5x-\dfrac{121}{27}, y=5x+5$. (D) $y=5x+\dfrac{121}{27}$.

Câu 188. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+x+1$ có đồ thị (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

(A) $y=-11x+9$. (B) $y=16x-19$. (C) $y=37x+87$. (D) $y=-8x+5$.

Câu 189. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ là

(A) 2. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) 3.

Câu 190. Cho $[(2x-1)^2\cdot(2-3x)]'=ax^2+bx+c$. Tính $S=a+b+c$.

(A) $S=-7$. (B) $S=-47$. (C) $S=17$. (D) $S=-87$.

Câu 191. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0<x<x_0 \\ x^2+12 & \text{khi } x\geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Tính giá trị $S=x_0+a$.

A $2(3-4\sqrt{2})$. **B** $2(3+2\sqrt{2})$. **C** $2(2+4\sqrt{2})$. **D** $2(3-2\sqrt{2})$.

Câu 192. Tính đạo hàm của hàm số $y=(x^3-3x^2)^{2017}$.

A $y'=2017(x^3-3x^2)^{2016}(x^2-3x)$. **B** $y'=6051(x^3-3x^2)^{2016}(x^2-2x)$.

C $y'=2017(x^3-3x^2)^{2016}$. **D** $y'=2017(x^3-3x^2)^{2016}(3x^2-6x)$.

Câu 193. Tìm m để phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm. Biết $f(x)=m\cos x+2\sin x-3x+1$.

A $m<0$. **B** $m>0$. **C** $|m|\geq\sqrt{5}$. **D** $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$.

Câu 194. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{nếu } x\geq 0 \\ ax-b-1 & \text{nếu } x<0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+2b$.

A $T=-4$. **B** $T=-6$. **C** $T=4$. **D** $T=0$.

Câu 195. Gọi $M(x_M;y_M)$ là một điểm thuộc $(C)\colon y=x^3-3x^2+2$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm $N(x_N;y_N)$ (khác M) sao cho $P=5x_M^2+x_N^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính OM.

A $OM=\dfrac{10\sqrt{10}}{27}$. **B** $OM=\dfrac{7\sqrt{10}}{27}$. **C** $OM=\dfrac{\sqrt{10}}{27}$. **D** $OM=\dfrac{5\sqrt{10}}{27}$.

Câu 196. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}$ có đồ thị là (C) và điểm $A\left(-\dfrac{27}{16};-\dfrac{15}{4}\right)$. Biết có 3 điểm $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), M_3(x_3;y_3)$ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm đó đều đi qua A. Tính $S=x_1+x_2+x_3$.

A $S=-3$. **B** $S=\dfrac{7}{4}$. **C** $S=\dfrac{5}{4}$. **D** $S=-\dfrac{5}{4}$.

Câu 197. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$.

A 2. **B** 0. **C** 1. **D** 3.

Câu 198. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon y=3x+2018$.

(A) $m = 1$. (B) $m = -\dfrac{1}{3}$. (C) $m = \dfrac{7}{3}$. (D) $m = 2$.

Câu 199. Cho hàm số $y = \dfrac{x+b}{ax-2}$, $(ab \neq -2)$. Biết rằng a và b là các giá trị thoả mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-2)$ song song với đường thẳng $d\colon 3x+y-4=0$. Khi đó giá trị của $a-3b$ bằng

(A) 4. (B) 5. (C) -1. (D) -2.

Câu 200. Biết $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+2018\cdot 2^{2017} = a\cdot 2^{2018}+b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $S = a+b$.

(A) $S = 2019$. (B) $S = 2020$. (C) $S = 2017$. (D) $S = 2018$.

BÙI QUANG CHIẾN © brave_9

Chương 16

BÀI TẬP VỀ CHỦ ĐỀ MŨ VÀ LOGARIT

Câu 1. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn đồng thời $\begin{cases} \log_a b + \log_b c + \log_c a = 3 \\ a^2 b - c = 0 \end{cases}$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đ	S
a	Phương trình $\log_a x + \log_b x = 2$ luôn có nghiệm thực duy nhất $x > 0$.	○	○
b	Giá trị của biểu thức $P = \log_a(bc) + \log_b(ca)$ là một số nguyên dương.	○	○
c	Không tồn tại bộ số (a, b, c) thỏa mãn điều kiện bài toán nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.	○	○

Câu 2. Cho hai số thực $a, b > 1$. Biết rằng các số $\log_a 2; \log_b 8; \log_a 128$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết rằng mối quan hệ giữa hai cơ số là $a = b^k$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3k$.

KQ: | | | | |

Câu 3. Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn hệ thức $\log_a(a^2 b) + \log_b(ab^3) = 10$. Tính giá trị của biểu thức $P = |\log_a b - \log_b a|$.

(A) $\sqrt{21}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) 5. (D) $\sqrt{29}$.

Câu 4. Trong một nghiên cứu kỹ thuật, độ suy giảm tín hiệu L của một sợi cáp quang được biểu diễn dưới dạng $L = \log_{15} 40$. Biết rằng $\log_2 5 = a$ và $\log_2 3 = b$. Hãy biểu diễn L theo a và b.

(A) $L = \dfrac{a+3}{ab+1}$. (B) $L = \dfrac{b(a+3)}{ab+1}$. (C) $L = \dfrac{b(a+3)}{a+b}$. (D) $L = \dfrac{ab+3}{b+1}$.

Câu 5. Tốc độ tăng trưởng của một quần thể vi khuẩn sau x giờ với $x \in [2;3]$ được mô tả bởi hàm số $f(x) = e^x - m\ln x$. Biết rằng trong suốt khoảng thời gian từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 3 thì tốc độ này luôn tăng. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn điều kiện trên?

KQ: | | | | |

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x\ln x - m(x-1)$ với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đ	S
a	Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \ln x + 1 - m$.	◯	◯
b	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ khi và chỉ khi $m \le 2$.	◯	◯
c	Với $m = 1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;e]$ bằng 1.	◯	◯

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đồ thị hàm số lần lượt là $(C_1): y = \sqrt{3}\ln x$ và $(C_2): y = -\sqrt{3}\ln x$. Gọi A và B là hai điểm lần lượt nằm trên (C_1) và (C_2) sao cho A và B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác OAB là tam giác đều. Biết hoành độ x_0 của A thỏa mãn phương trình $x_0 = 3\ln x_0$. Diện tích của tam giác OAB bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}x_0^2$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_0^2$. (C) $3\sqrt{3}x_0^2$. (D) $\dfrac{x_0^2}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ với mọi $x > 1$. Gọi $S = e^{f(2)+f(3)+\cdots+f(2026)}$. Biết rằng $S = \dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản (với p, q là các số nguyên dương). Tính giá trị của biểu thức $T = p + q$.

KQ: | | | | |

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Thiết lập dãy hàm số $f_1(x) = f(x)$ và $f_n(x) = f\left(f_{n-1}(x)\right)$ với mọi $n \ge 2$. Tính giá trị của $f_{2026}(1)$.

(A) $\dfrac{1}{2026}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{2027}}$. (C) $\dfrac{1}{2027}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt{2026}}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ và hàm số hợp $g(x) = \sqrt{f\left(x^2+2x\right) - m}$, với m là tham số. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đ	S
a	Đặt $t = x^2 + 2x$ thì tập giá trị của t khi x chạy trên $\mathbb{R}$ là $[-1;+\infty)$.	◯	◯
b	Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \le 3$.	◯	◯

	Mệnh đề	Đ	S
c	Với $m=-2$ thì hàm số $g(x)$ xác định trên toàn bộ trục số $\mathbb{R}$.	◯	◯

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đồ thị hàm số lần lượt là $(C_1): y=\log_3 x$ và $(C_2): y=3^x$. Gọi $B\in(C_1)$ và $C\in(C_2)$ là hai điểm đối xứng với nhau qua đường phân giác $y=x$. Biết trung điểm M của đoạn thẳng BC có tọa độ là $(2;2)$. Tích hoành độ của hai điểm B và C bằng

A 3. **B** 4. **C** 2. **D** 1.

Câu 12. Cho hàm số liên tục $f(x)=\sin x+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[f^2(x)-2mf(x)+m^2-1\right]\left[f(x)-3\right]\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A $m\in[-1;3]$. **B** $m\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

C $m\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **D** $m\in[0;2]$.

Câu 13. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $(\log_2 x-2)(x-m)<0$ có đúng 3 nghiệm nguyên x. KQ: | | | | |

Câu 14. Cho ba số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $a\cdot b\cdot c=e^3$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\ln a\cdot\ln b+\ln b\cdot\ln c+\ln c\cdot\ln a$ bằng

A 3. **B** 9. **C** 1. **D** 6.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in(2;4]$

$$(\log_2 x-m)(\log_2 x-m-3)\le 0$$

A $m\in[1;2]$. **B** $m\in[-1;1]$. **C** $m\in[0;3]$. **D** $m\in[-3;0]$.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A 4. **B** 6. **C** 5. **D** 7.

Chương 17

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $2\sin x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Câu 2. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ của phương trình $\dfrac{\sin 2x}{\cos x + 1} = 0$.

(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $2\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ trong $[0; 2018\pi]$ là

(A) 2017. (B) 2018. (C) 1009. (D) 1008.

Câu 4. Tìm số nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x - 2 = 0$ trong $[0; 2\pi]$.

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Câu 5. Cho phương trình $\dfrac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} + 1 = 0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Điều kiện xác định của phương trình là $\cos x(3 + 4\cos^2 x) \neq 0$.

(B) Phương trình đã cho vô nghiệm.

(C) Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

(D) Phương trình tương đương với phương trình $(\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$.

Câu 6. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $\cos x + \sin x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Câu 7. Trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin^2 4x+3\sin 4x\cdot\cos 4x-4\cos^2 4x=0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Câu 8. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\cot 2x(\sin^6 x+\cos^6 x)=\dfrac{1}{2}\sin 4x$ trên đường tròn lượng giác là

(A) 0. (B) 4. (C) 6. (D) 2.

Câu 9. Gọi T là tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{2}\sin^2 x-\dfrac{3}{4}\cos 2x+3$. Tìm tổng các giá trị nguyên của T.

(A) 6. (B) 4. (C) 7. (D) 3.

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ thuộc đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Câu 11. Số nghiệm chung của hai phương trình $4\cos^2 x-3=0$ và $2\sin x+1=0$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ bằng

(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Câu 12. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}(\sin x+2\cos x)=m(\sin x+3\cos x)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình trên có nghiệm duy nhất $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

(A) 2016. (B) 4036. (C) 2015. (D) 2018.

Câu 13. Tìm nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\cos x=0$ thỏa mãn điều kiện $0<x<\pi$.

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}$. (B) $x=0$. (C) $x=2$. (D) $x=\pi$.

Câu 14. Cho phương trình $\sin^{2018} x+\cos^{2018} x=2\left(\sin^{2020} x+\cos^{2020} x\right)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0;2018)$.

(A) $(643)^2\pi$. (B) $\left(\dfrac{1285}{4}\right)^2\pi$. (C) $(642)^2\pi$. (D) $\left(\dfrac{1285}{2}\right)^2\pi$.

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sin x+\sqrt{2}\cos 2x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

(A) $4-\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) $4\sqrt{2}$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

(A) $-1<m\le -\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}\le m<1$. (C) $-1<m\le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $0\le m<1$.

Câu 17. Tìm số nghiệm thuộc $\left[\dfrac{-3\pi}{2};\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)$.

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Câu 18. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $2\sin x-1=0$.

(A) $(-2;-1)$. (B) $(1;2)$. (C) $(0;1)$. (D) $(-1;0)$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của m để phương trình $\cos x+\sin^{2018}5x+m=0$ có nghiệm là

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Câu 20. Phương trình $\sin x=\cos x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Câu 21. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $m\sin x-3\cos x=5$ có nghiệm.

(A) $m\le -4$ hoặc $m\ge 4$. (B) $m\ge\sqrt{34}$.

(C) $m\ge 4$. (D) $-4\le m\le 4$.

Câu 22. Tìm m để phương trình $\sin x+(m-1)\cos x=2m-1$ có nghiệm.

(A) $-\dfrac{1}{3}\le m\le 1$. (B) $m\ge\dfrac{1}{2}$. (C) $\left[\begin{array}{l} m>1\\ m<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$. (D) $-\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{1}{3}$.

Câu 23. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có tập giá trị là $T=[a;b]$. Giá trị của $b-a$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) 4. (D) 1.

Câu 24. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm là

(A) 4. (B) 2. (C) 5. (D) 6.

Câu 25. Giải phương trình $\cos 3x\cdot\tan 4x=\sin 5x$.

A $x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k3\pi}{8}$.

B $x = \dfrac{k\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k3\pi}{8}$.

C $x = \dfrac{k2\pi}{3}, x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$.

D $x = k\pi, x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$.

Câu 26. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$?

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

Câu 27. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của con kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức: $h = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) + 3$.

Thời điểm mực nước của kênh cao nhất là

A $t = 16$. **B** $t = 15$. **C** $t = 14$. **D** $t = 13$.

Câu 28. Tìm m để phương trình $\sin 4x = m \cdot \tan x$ có nghiệm $x \neq k\pi$.

A $-\dfrac{1}{2} \leq m < 4$. **B** $-\dfrac{1}{2} < m < 4$. **C** $-1 < m < 4$. **D** $-\dfrac{1}{2} \leq m \leq 4$.

Câu 29. Phương trình $2\sin^2 x + 3\sin x + m = 0$ có nghiệm khi

A $m \geq \dfrac{9}{8}$. **B** $m \leq -5$. **C** $m \leq 1$. **D** $-5 \leq m \leq \dfrac{9}{8}$.

Câu 30. Cho phương trình $\dfrac{2\left(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ có x_0 là nghiệm dương lớn nhất trên khoảng $(0; 100\pi)$ và có dạng $x_0 = a\pi + \dfrac{\pi}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính tổng $T = a + b$.

A $T = 102$. **B** $T = 100$. **C** $T = 103$. **D** $T = 101$.

Câu 31. Tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$ trên $\left(0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ là

A 2π. **B** $\dfrac{7\pi}{2}$. **C** $\dfrac{7\pi}{6}$. **D** $\dfrac{7\pi}{3}$.

Câu 32. Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số thực m để phương trình $\sin^2 x + \sin x \cos x = m$ có nghiệm.

A $\left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

B $\left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right]$.

C $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

D $\left[\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x - 4\cos x + 6$ là

(A) 3. (B) 6. (C) 11. (D) 5.

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x + 3}$ lần lượt là

(A) 1 và 2. (B) -1 và 2. (C) -1 và $\dfrac{1}{2}$. (D) $-\dfrac{1}{2}$ và 1.

Câu 35. Phương trình $4\sin^2 2x - 3\sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Câu 36. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$ là

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) 5. (C) 3. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Câu 37. Từ các số $1;2;3;4$ ta lập số gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi. Tổng của tất cả các số lập được là

(A) 66660. (B) 5660. (C) 3660. (D) 6660.

Câu 38. Tìm m để phương trình $(\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 - m\cos x) - m\sin^2 x = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

(A) $0 < m \le \dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2} < m \le 1$. (C) $-1 < m \le -\dfrac{1}{2}$. (D) $-1 < m \le 1$.

Câu 39. Phương trình $\sin 5x + \sin 9x + 2\sin^2 x - 1 = 0$ có một họ nghiệm là

(A) $x = \dfrac{\pi}{42} + \dfrac{k2\pi}{3}$. (B) $x = \dfrac{\pi}{42} + \dfrac{k2\pi}{7}$. (C) $x = \dfrac{\pi}{5} + k2\pi$. (D) $x = \dfrac{3\pi}{7} + k\pi$.

Câu 40. Cho phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ khi

(A) $-1 < m \le -\dfrac{1}{2}$. (B) $m \ge -1$. (C) $-1 \le m \le 1$. (D) $m > -1$.

Câu 41. Xét phương trình $\sin 3x - 3\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x + 3\cos x = 2$. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình đã cho?

(A) $(2\sin x - 1)(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 0$. (B) $(2\sin x - 1)(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$.

(C) $(2\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$. (D) $(2\sin x - 1)(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 42. Phương trình $\dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là bao nhiêu?

A 2. **B** 4. **C** 1. **D** 3.

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ bằng

A 1. **B** 4. **C** 2. **D** 3.

Câu 44. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

A $S = \dfrac{11\pi}{6}$. **B** $S = \dfrac{7\pi}{6}$. **C** $S = 5\pi$. **D** $S = 4\pi$.

Câu 45. Phương trình $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[0; 2\pi]$.

A 4. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Câu 46. Cho phương trình $(1 + \sin 2x)\cos x - (1 + \cos 2x)\sin x = \sin 2x$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0; \pi)$.

A 0. **B** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C** π. **D** $\dfrac{3\pi}{2}$.

Câu 47. Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2$ có nghiệm?

A 4. **B** 2. **C** $\dfrac{8}{3}$. **D** $\dfrac{11}{3}$.

Câu 48. Phương trình $(1 + \cos 4x)\sin 2x = 3\cos^2 2x$ có tổng các nghiệm trong đoạn $[0; \pi]$ là.

A $\dfrac{3\pi}{2}$. **B** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C** $\dfrac{\pi}{2}$. **D** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $(\sin x - 1)\left(2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m\right) = 0$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

A 1. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Câu 50. Cho phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là nghiệm lớn nhất và nhỏ nhất của phương trình đã cho trong đoạn $[0; 2018\pi]$. Tính tổng $x_1 + x_2$.

A $x_1 + x_2 = \dfrac{12107\pi}{6}$. **B** $x_1 + x_2 = \dfrac{12103\pi}{6}$.

C $x_1 + x_2 = \dfrac{12109\pi}{6}$.

D $x_1 + x_2 = \dfrac{12111\pi}{6}$.

Câu 51. Tìm m để phương trình $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{\sin x + \dfrac{1}{2}} = m$ có nghiệm.

A $\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

B $0 \le m \le 1$.

C $0 \le m \le \sqrt{3}$.

D $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \le m \le \sqrt{3}$.

Câu 52. Có bao nhiêu số nguyên m sao cho phương trình $m\sin x + 4\cos x = 4$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right)$?

A 3.

B 5.

C 2.

D 4.

Câu 53. Nghiệm của phương trình $\cos 2x - 5\cos x + 4 = 0$ là

A $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 54. Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là:

A $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

B $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

C $x = \dfrac{\pi}{2}$.

D $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\cos 2x - 4\cos x - m = 0$ có nghiệm?

A 6.

B 8.

C 9.

D 7.

Câu 56. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

A 2π.

B 3π.

C π.

D 0.

Câu 57. Cho phương trình $\dfrac{m\sin x + \cos x}{2 + \sin x + \cos x} = 1$. Tìm tất cả giá trị tham số m để phương trình có nghiệm.

A $-1 \le m \vee m > 1$.

B $m < -1 \vee m > 3$.

C $m \le -1 \vee m \ge 3$.

D $-1 \le m \le 3$.

Câu 58. Phương trình $\cos(2x - 30^\circ) = \dfrac{1}{2}$ có các họ nghiệm là

A $x = \pm 15^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

B $x = \pm 30^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -15^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

D $\left[\begin{array}{l} x = 45^\circ + k180^\circ \\ x = -15^\circ + k180^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 59. Cho góc tù x thỏa mãn $14\cos^2 x + \sin 2x = 2$. Khi đó $\cos x$ bằng

(A) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. (B) $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (C) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (D) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 60. Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h(m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t(h) được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

(A) $t = 22$(h). (B) $t = 14$(h). (C) $t = 15$(h). (D) $t = 10$(h).

Câu 61. Phương trình $\cos 2x \sin 5x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Câu 62. Phương trình $2\cos^2 x = 1$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác.

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 63. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 0$ trên đoạn $[0; 2018\pi]$ là

(A) $\dfrac{4075351\pi}{2}$. (B) $\dfrac{4071315\pi}{2}$. (C) $\dfrac{4067281\pi}{2}$. (D) $\dfrac{8142627\pi}{2}$.

Câu 64. Cho phương trình $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2} = 0$. Tính tổng tất cả các nghiệm trong đoạn $[0; 2018\pi]$ của phương trình trên

(A) 1018081π. (B) 1018018π. (C) 1020100π. (D) 1018080π.

Câu 65. Phương trình $\sqrt{4 - x^2} \cdot \cos 3x = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 7.

Câu 66. Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 10\pi]$ của phương trình

$$\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0.$$

(A) $\dfrac{105}{2}\pi$. (B) $\dfrac{299\pi}{4}$. (C) $\dfrac{297\pi}{4}$. (D) $\dfrac{105}{4}\pi$.

Câu 67. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0; 30\pi]$ của phương trình $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$. Khi đó giá trị của S bằng

(A) $S = 622\pi$. (B) $S = \dfrac{1335}{2}\pi$. (C) $S = \dfrac{1365}{2}\pi$. (D) $S = \dfrac{1215}{2}\pi$.

Câu 68. Tìm m để phương trình $\cos 2x + 2(m+1)\sin x - 2m - 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm $x \in (0;\pi)$.

(A) $0 \le m < 1$. (B) $-1 < m < 1$. (C) $0 < m \le 1$. (D) $0 < m < 1$.

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\cos 2x - 4\cos x - m = 0$ có nghiệm?

(A) 0. (B) 8. (C) 9. (D) 7.

Câu 70. Tính tổng các nghiệm S của phương trình $8\cos x \cdot \cos 2x(2\cos^2 2x - 1) = 1$ trên đoạn $[0;\pi]$.

(A) $S = \dfrac{220}{63}\pi$. (B) $S = \dfrac{536}{63}\pi$. (C) $S = \dfrac{788}{63}\pi$. (D) $S = \dfrac{914}{63}\pi$.

Câu 71. Số nghiệm của phương trình $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ thuộc đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Câu 72. Từ phương trình $(1+\sqrt{3})(\sin x - \cos x) + \sin 2x - 1 - \sqrt{3} = 0$ ta tìm được $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 73. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m\sin x - (m+1)\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

(A) 8. (B) 5. (C) 7. (D) 6.

Câu 74. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\sin x \cdot \sin 2x + 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3}\cos 2x$ trong khoảng $(-\pi;\pi)$ là

(A) 2. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Câu 75. Phương trình $\cos 5x \cdot \cos 3x = \sin 5x \cdot \sin 3x$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\sin 8x = 0$. (B) $\sin 2x = 0$. (C) $\cos 2x = 0$. (D) $\cos 8x = 0$.

Câu 76. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ trên đoạn $[\pi;5\pi]$. Tính số phần tử của S.

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 77. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình $\cos x+\sin 2x=0$

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Câu 78. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+|\sin x+\cos x|=1$ trên khoảng $(0;2\pi)$ bằng bao nhiêu?

(A) 4π. (B) 3π. (C) 2π. (D) π.

Câu 79. Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1?

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Câu 80. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1$ là

(A) $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. (B) $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

(C) $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. (D) $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 81. Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sqrt{2}$. Tính $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(A) $\dfrac{-9+4\sqrt{2}}{7}$. (B) $\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$. (C) $\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}$. (D) $\dfrac{-9-4\sqrt{2}}{7}$.

Câu 82. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 6x=0$ là

(A) $-\dfrac{\pi}{12}$. (B) $-\dfrac{\pi}{4}$. (C) $-\dfrac{\pi}{6}$. (D) $-\dfrac{\pi}{8}$.

Câu 83. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=2-3\sin 3x+4\cos 3x$ trên $\mathbb{R}$.

(A) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=3$. (B) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=9$. (C) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=7$. (D) $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$.

Câu 84. Phương trình $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2\pi;2\pi]$?

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Câu 85. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\cot x}{2\sin x-1}$

(A) $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D** $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 86. Phương trình $(\sin x - \cos x)(\sin x + 2\cos x - 3) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$?

A 1. **B** 0. **C** 2. **D** 3.

Câu 87. Cho phương trình $4\cos^2 2x + 16\sin x \cos x - 7 = 0$. (1)
Xét các giá trị: (I) $\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; (II) $\frac{5\pi}{12} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; (III) $\frac{\pi}{12} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Trong các giá trị trên, giá trị nào là nghiệm của phương trình (1)?

A Chỉ (I). **B** Chỉ (III). **C** (II) và (III). **D** Chỉ (II).

Câu 88. Có bao nhiêu số nguyên m sao cho phương trình $m\sin x + 5\cos x = 5$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$?

A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Câu 89. Tập giá trị của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

A $T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B** $T = [-1; 1]$.

C $T = (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **D** $T = [-2; 1]$.

Câu 90. Số giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ là

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Câu 91. Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 3$. Tính tổng các phần tử của S.

A $\frac{7525\pi}{3}$. **B** $\frac{7400\pi}{3}$. **C** $\frac{7550\pi}{3}$. **D** $\frac{7375\pi}{3}$.

Câu 92. Xét năm mệnh đề sau, với (u_n) là một cấp số cộng vô số phần tử, u_1 là một số hạng có giá trị xác định. Biết dãy (u_n) có một số hạng bằng $0, u_1 \neq 0$.

(1) Mọi số hạng của (u_n) đều bằng 0.

(2) Mọi số hạng khác của (u_n) đều là số dương.

(3) Mọi số hạng khác của (u_n) đều là số âm.

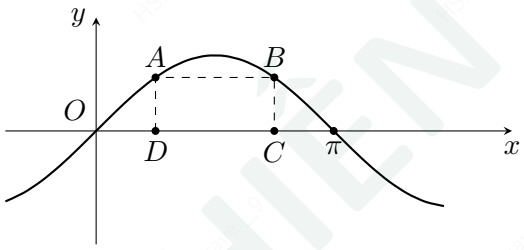
(4) Chỉ có một số hữu hạn số hạng là số âm.

(5) Chỉ có một số hữu hạn số hạng là số dương.

Trong năm mệnh đề trên, số mệnh đề **sai** là

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

Câu 93.
Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \dfrac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.



A $\dfrac{1}{2}$. **B** 1. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 94. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $x \in [0; 2\pi]$.

A 2. **B** Vô số. **C** 1. **D** 0.

Câu 95. Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $\cos^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x + 1 = 0$ là

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Câu 96. Số nghiệm của phương trình $1 + \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x + \cos^2 x = 0$ thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ là

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Câu 97. Phương trình $2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 2 = 0$ có hai họ nghiệm dạng $x = \alpha + k\pi, x = \beta + k\pi$ $(0 < \alpha, \beta < \pi)$. Tính $T = \alpha \cdot \beta$.

A $T = \dfrac{5\pi^2}{144}$. **B** $T = -\dfrac{5\pi^2}{144}$. **C** $T = \dfrac{5\pi^2}{36}$. **D** $T = -\dfrac{5\pi^2}{36}$.

Câu 98. Nghiệm của phương trình $\dfrac{\cos 2x + 3\sin x - 2}{\cos x} = 0$

A $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. **B** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. **D** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 99. Số nghiệm của phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{\sin^2 2x + 1}{2}$ trong đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

Câu 100. Tìm m để phương trình $3\sin(-x) + 4\cos x + 1 = m$ có nghiệm.

(A) $m \in [-6; 8]$. (B) $m \in [2; 8]$. (C) $m \in [0; 6]$. (D) $m \in [-4; 6]$.

Câu 101. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

(A) $M = -3$. (B) $M = -2$. (C) $M = 3$. (D) $M = 1$.

Câu 102. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Câu 103. Tìm nghiệm của phương trình $\dfrac{\cos x - \sqrt{3}\sin x}{2\sin x - 1} = 0$.

(A) $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \dfrac{7\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 104. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $5\sin x - 12\cos x = m$ có nghiệm?

(A) 27. (B) 26. (C) Vô số. (D) 13.

Câu 105. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x - \sin 4x + \sin 5x = 0$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{3}$. (B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, x = k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. (D) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 106. Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{8}$.

(A) $\dfrac{9\pi}{8}$. (B) 4π. (C) $\dfrac{9\pi}{4}$. (D) $\dfrac{7\pi}{3}$.

Câu 107. Biểu diễn nghiệm của phương trình $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sin 4x\left(\sqrt{3} - 1 - \tan 2x \tan x\right) = 3$ trên đường tròn lượng giác. Số điểm biểu diễn là

(A) 8. (B) 10. (C) 6. (D) 12.

Câu 108. Hàm số $y = 3\sin(x+2018) - 4\cos(x+2018) + m$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0. Tìm giá trị của m.

(A) $m = -7$. (B) $m = -5$. (C) $m = 5$. (D) $m = 7$.

Câu 109. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2\left(m+1-\sin^2 x\right) - (4m+1)\cos x = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

(A) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. (D) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 110. Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Câu 111. Phương trình $\cos x - \cos 2x - \cos 3x + 1 = 0$ có mấy nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\pi; 0)$?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Câu 112. Tìm S là tổng các nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$.

(A) $S = 2\pi$. (B) $S = 5\pi$. (C) $S = 3\pi$. (D) $S = 4\pi$.

Câu 113. Phương trình: $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$ có bao nhiêu nghiệm $x \in (-2\pi; 7\pi)$?

(A) 19. (B) 20. (C) 18. (D) 16.

Câu 114. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

(A) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 115. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$ là

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{3}{4}$. (D) $\frac{3}{4}$.

Câu 116. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của a để phương trình $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2$ có nghiệm.

(A) $a = 3$. (B) $a = -1$. (C) $a = 1$. (D) $a = 2$.

Câu 117. Giá trị m để phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$ có nghiệm $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là

(A) $-1\le m<0$. (B) $-1<m<0$. (C) $0\le m<1$. (D) $0<m\le 1$.

Câu 118. Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $M+m$.

(A) -1. (B) $1+\sqrt{2}$. (C) 1. (D) 0.

Câu 119. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}$ lần lượt là

(A) $m=-\dfrac{1}{2};M=1$. (B) $m=-1;M=\dfrac{1}{2}$. (C) $m=1;M=2$. (D) $m=-1;M=2$.

Câu 120. Phương trình $\dfrac{(1-2\cos x)(1+\cos x)}{(1+2\cos x)\cdot\sin x}=1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2018\pi)$.

(A) 3026. (B) 3027. (C) 3028. (D) 3025.

Câu 121. Tổng các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{3}{\sin 2x}$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

(A) $\dfrac{\pi}{6}$. (B) $\dfrac{2\pi}{3}$. (C) π. (D) $\dfrac{5\pi}{6}$.

Câu 122. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $8\sin^2 x+(m-1)\sin 2x+2m-6=0$ có nghiệm?

(A) 6. (B) 2. (C) 5. (D) 3.

Câu 123. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$.

(A) $x=-\pi+k2\pi;x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$. (B) $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

(C) $x=k2\pi;x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$. (D) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Câu 124. Cho phương trình $\dfrac{(1+\cos x)(\cos 2x-\cos x)-\sin^2 x}{\cos x+1}=0$. Tính tổng các nghiệm nằm trong khoảng $(0;2018\pi)$ của phương trình đã cho.

(A) 1019090π. (B) 1017072π. (C) 2037171π. (D) 2035153π.

Câu 125. Tính tổng tất cả T các nghiệm thuộc đoạn $[0;200\pi]$ của phương trình $\cos 2x-3\cos x-4=0$.

A $T = 10000\pi$. **B** $T = 5100\pi$. **C** $T = 10100\pi$. **D** $T = 5151\pi$.

Câu 126. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}}$.

A $\mathscr{D} = \{k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$. **B** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

C $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 127. Để phương trình $\dfrac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số a phải thỏa mãn điều kiện

A $a \neq \pm\sqrt{3}$. **B** $|a| \geq 1$. **C** $\begin{cases} |a| \geq 1 \\ |a| \neq \sqrt{3} \end{cases}$. **D** $|a| \geq 4$.

Câu 128. Tập tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0$ là

A $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 129. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - \sin 2x + 5$ là

A $6 + \sqrt{2}$. **B** $6 - \sqrt{2}$. **C** $-\sqrt{2}$. **D** $\sqrt{2}$.

Câu 130. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\tan x + \cot x - \sqrt{3} - 1 = 0$ là

A $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. **B** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. **D** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 131. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ là

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Chương 18

BÀI TẬP CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Cho bốn số thực a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Biết tổng của chúng bằng 4 và tổng các bình phương của chúng bằng 24. Tính $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

(A) $P = 79$. (B) $P = 16$. (C) $P = 80$. (D) $P = 64$.

Câu 2. Dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 3n - 2$, với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

(A) $S = 145$. (B) $S = 320$. (C) $S = 160$. (D) $S = 150$.

Câu 3. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Số hạng x_{2018} bằng

(A) $x_{2018} = \dfrac{4035}{2018}$. (B) $x_{2018} = \dfrac{4037}{2018}$. (C) $x_{2018} = \dfrac{4034}{2018}$. (D) $x_{2018} = \dfrac{4036}{2018}$.

Câu 4. Một người thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích của mặt trên cùng.

(A) 12 m^2. (B) 10 m^2. (C) 6 m^2. (D) 8 m^2.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{1001}^2$ bằng

(A) 1002002. (B) 1001002. (C) 1002001. (D) 1001001.

Câu 6. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng.

(A) $u_n = \dfrac{1}{n}$. (B) $u_n = -n$. (C) $u_n = n$. (D) $u_n = (-1)^n n$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} + 4u_n = 4 - 5n \end{cases}$ $(n \geq 1)$. Tính tổng $S = u_{2018} - 2u_{2017}$.

(A) $S = 2015 - 3 \cdot 4^{2017}$.
(B) $S = 2015 + 3 \cdot 4^{2017}$.
(C) $S = 2016 - 3 \cdot 4^{2018}$.
(D) $S = 2016 + 3 \cdot 4^{2018}$.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên là 24850. Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{48} u_{49}} + \dfrac{1}{u_{49} u_{50}}$.

(A) $S = \dfrac{9}{246}$.
(B) $S = \dfrac{4}{23}$.
(C) $S = \dfrac{49}{246}$.
(D) $S = 123$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

(A) $u_n = 5 + \dfrac{(n-1)n}{2}$.
(B) $u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
(C) $u_n = 5 + \dfrac{(n+1)n}{2}$.
(D) $u_n = \dfrac{5 + (n+1)(n+2)}{2}$.

Câu 10. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó.

(A) $\dfrac{4}{25}$.
(B) $\dfrac{16}{25}$.
(C) $\dfrac{64}{25}$.
(D) $\dfrac{52}{25}$.

Câu 11. Một đa giác lồi có 10 cạnh và các góc trong của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 4^\circ$. Tìm góc trong nhỏ nhất của đa giác đó.

(A) 26°.
(B) 162°.
(C) 60°.
(D) 126°.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 12 \\ \dfrac{u_3}{u_8} = 243 \end{cases}$. Tìm u_9.

(A) $u_9 = \dfrac{2}{2187}$.
(B) $u_9 = \dfrac{4}{6563}$.
(C) $u_9 = \dfrac{4}{2187}$.
(D) $u_9 = 78732$.

Câu 13. Cho các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) Mọi số hạng của một cấp số cộng với công sai dương đều là số dương.

(II) Mọi số hạng của một cấp số nhân với công bội dương đều là số dương.

(III) Dãy số được xác định bởi $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ là một dãy bị chặn.

(IV) Dãy số được xác định bởi $a_n = 1 - n^2$ là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

A 1. **B** 4. **C** 3. **D** 2.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \cos\alpha\,(0 < \alpha < \pi) \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm u_{2017}.

A $u_{2017} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{2017}}\right)$. **B** $u_{2017} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{2017}}\right)$.

C $u_{2017} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{2016}}\right)$. **D** $u_{2017} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{2016}}\right)$.

Câu 15. Cho hai cấp số cộng (u_n) và (v_n) có tổng của n số hạng đầu tiên lần lượt là S_n, T_n. Biết $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{4n+1}{6n+2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tính $\dfrac{u_{17}}{v_{17}}$.

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{69}{103}$. **D** $\dfrac{133}{200}$.

Câu 16. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{3n(n+3)}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào dưới đây là đúng và đầy đủ nhất?

A (x_n) là cấp số nhân với công bội dương. **B** (x_n) là cấp số cộng với công sai dương.

C (x_n) là cấp số nhân với công bội âm. **D** (x_n) là cấp số cộng với công sai âm.

Câu 17. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính $S = \dfrac{1}{u_1 \cdot u_2} + \dfrac{1}{u_2 \cdot u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{49} \cdot u_{50}}$.

A $S = 123$. **B** $S = \dfrac{49}{246}$. **C** $S = \dfrac{4}{23}$. **D** $S = \dfrac{9}{246}$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 2018 của dãy số trên.

A $u_{2018} = 6 \times 2^{2018} + 5$. **B** $u_{2018} = 6 \times 2^{2018} - 5$.

C $u_{2018} = 6 \times 2^{2017} + 1$. **D** $u_{2018} = 6 \times 2^{2017} - 5$.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n), thỏa mãn $S_8 = 92$, $S_{16} = 376$. Tính S_{24}.

(A) 756. (B) 946. (C) 468. (D) 852.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}$. Tính $\dfrac{u_{18}}{u_{17}}$.

(A) $\dfrac{35}{33}$. (B) $\dfrac{1225}{1089}$. (C) $\dfrac{9}{7}$. (D) $\dfrac{18}{17}$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1, u_2=2, u_{n+1}=2u_n-u_{n-1}+1, \forall n\geq 2$. Tính u_{2018}.

(A) 2018. (B) 2035154. (C) 4608289. (D) 2017.

Câu 22. Cho cấp số cộng có công sai $d=-2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8=72$. Số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

(A) $u_1=-16$. (B) $u_1=16$. (C) $u_1=\dfrac{1}{16}$. (D) $u_1=-\dfrac{1}{16}$.

Câu 23. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng $\dfrac{1}{4}$, tổng ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng $\dfrac{7}{27}$. Tổng của số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{9}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Câu 24. Xác định số hạng u_{2018} của dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_n=u_{n-1}+2n+1 \end{cases}, \forall n\geq 2$.

(A) $u_{2018}=4076359$. (B) $u_{2018}=4067395$. (C) $u_{2018}=8152718$. (D) $u_{2018}=3541657$.

Câu 25. Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ bảy gấp 243 lần số hạng thứ hai. Tìm các số hạng còn lại của cấp số nhân đó.

(A) $u_1=\dfrac{2}{9}; u_2=\dfrac{2}{3}; u_3=2; u_5=18; u_6=54; u_7=162$.

(B) $u_1=\dfrac{2}{7}; u_2=\dfrac{2}{3}; u_3=2; u_5=18; u_6=54; u_7=162$.

(C) $u_1=\dfrac{2}{9}; u_2=\dfrac{2}{3}; u_3=2; u_5=21; u_6=54; u_7=162$.

(D) $u_1=\dfrac{2}{9}; u_2=\dfrac{2}{3}; u_3=2; u_5=18; u_6=54; u_7=162$.

Câu 26. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-20x^2+(m-1)^2=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

(A) 2. (B) 7. (C) -2. (D) Đáp án khác.

Câu 27. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_{n+1} = q \cdot a_n + 3$ với mọi $n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $q \neq 0, q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n = \alpha \cdot q^{n-1} + \beta \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha + 2\beta$.

(A) 11. (B) 13. (C) 16. (D) 9.

Câu 28. Cho hai cấp số cộng (x_n): $4, 7, 10, 13, \ldots$ và (y_n): $1, 6, 11, 16, \ldots$ Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

(A) 404. (B) 673. (C) 672. (D) 403.

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

(A) $u_1 = 3; d = 2$. (B) $u_1 = 2; d = 3$. (C) $u_1 = 2; d = 2$. (D) $u_1 = 2; d = 4$.

Câu 30. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là $1, 8, 22, 43, \ldots$ Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng $7, 14, 21, \ldots, 7n$. Số 35351 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số đã cho?

(A) 101. (B) 57. (C) 80. (D) 200.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \, (n \geq 1) \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy là

(A) $u_n = 2 \cdot 3^n + 1$. (B) $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

(C) $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$. (D) $u_n = 2 \cdot 3^n - 1$.

Câu 32. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào bị chặn?

(A) $u_n = 2^n + 1$. (B) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. (C) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. (D) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 1$, $S_n = 55$, $d = 1$. Khi đó giá trị của n là bao nhiêu?

(A) $n = 10$. (B) $n = 9$. (C) $n \in \{10; -11\}$. (D) $n = 11$.

Câu 34. Trong các dãy số sau đây, với giả thiết $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

$$(u_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n; \quad (u_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n; \quad (u_n) = \sin n + \cos n$$

Số dãy số bị chặn là

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** 3.

Câu 35. Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

A 570. **B** 800. **C** 630. **D** 600.

Câu 36. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} + 4u_n = 4 - 5n \quad (n \geq 1) \end{cases}$.

Tính tổng $S = u_{2018} - 2u_{2017}$.

A $S = 2015 - 3 \cdot 4^{2017}$. **B** $S = 2016 + 3 \cdot 4^{2018}$.

C $S = 2016 - 3 \cdot 4^{2018}$. **D** $S = 2015 + 3 \cdot 4^{2017}$.

Câu 37. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A Dãy số tăng là dãy số bị chặn dưới.

B Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.

C Dãy số giảm là dãy số bị chặn trên.

D Dãy số bị chặn là dãy số không tăng, cũng không giảm.

Câu 38. Xác định a, b để phương trình $x^3 + ax + b = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A $b = 0, a > 0$. **B** $b = 0, a = 1$. **C** $b = 0, a < 0$. **D** $b > 0, a < 0$.

Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tìm tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n).

A $S_{10} = 290$. **B** $S_{10} = 45$. **C** $S_{10} = 145$. **D** $S_{10} = 154$.

Câu 40. Cho hai cấp số cộng (u_n): $1; 6; 11; \ldots$ và (v_n): $4; 7; 10; \ldots$ Mỗi cấp số có 2018 số. Hỏi có bao nhiêu số có mặt trong cả hai dãy số trên?

A 672. **B** 403. **C** 402. **D** 504.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log(u_1^2 + u_2^2 + 10) - \log(2u_1 + 6u_2) = 0$ và $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$ là

(A) 99. (B) 100. (C) 101. (D) 102.

Câu 42. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -\dfrac{1}{2}$; $u_7 = -32$. Khi đó, công bội q của cấp số nhân là

(A) ± 4. (B) $\pm\dfrac{1}{2}$. (C) $\pm\dfrac{1}{4}$. (D) ± 2.

Câu 43. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

(A) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

(B) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

(C) $u_n = |5 - n|$.

(D) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 4n + 3, \forall n \geq 1$. Biết

$$\lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \cdots + \sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \cdots + \sqrt{u_{2^{2018}n}}} = \frac{a^{2019} + b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b < 2019$. Tính giá trị $S = a + b - c$.

(A) 0. (B) -1. (C) 2017. (D) 2018.

Câu 45. Dãy số (u_n) thỏa mãn $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n^2$. Tính u_{12}.

(A) $u_{12} = 23$. (B) $u_{12} = 121$. (C) $u_{12} = 144$. (D) $u_{12} = 20$.

Câu 46. Cho dãy (u_n) có tổng của n số hạng đầu cho bởi công thức: $S_n = 3^n - 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $u_9 = 13122$.

(B) $u_{10} + u_{11} = 157464$.

(C) $\dfrac{u_{2018}}{u_{2017}} = \dfrac{1}{3}$.

(D) Dãy trên là một cấp số nhân.

Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Số hạng thứ 21 bằng

(A) 41. (B) 45. (C) 43. (D) 42.

Câu 48. Xác định (x, y) để các số $x + 6y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và các số $x - \dfrac{5}{3}y; y - 1; 2x - 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

A $(x;y) \in \left\{(-3;-1);\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$.

B $(x;y) \in \left\{(-3;-1);\left(-1;\frac{1}{3}\right)\right\}$.

C $(x;y) \in \left\{(3;1);\left(1;\frac{1}{3}\right)\right\}$.

D $(x;y) \in \left\{(-3;-1);\left(1;\frac{1}{3}\right)\right\}$.

Câu 49. Biết $\lim \dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4+1} = \dfrac{b}{a}$ $(a,b \in \mathbb{N}, a \neq 0)$, đồng thời $\dfrac{b}{a}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a^2+b^2$ là

A 73. **B** 51. **C** 99. **D** 33.

Câu 50. Biết $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x + x\cos x - \sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{a} - \dfrac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2+b^2+c^2$.

A $T = 16$. **B** $T = 50$. **C** $T = 69$. **D** $T = 59$.

Câu 51. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

A Dãy số tăng, bị chặn.

B Dãy số giảm, bị chặn trên.

C Ba phương án đều sai.

D Dãy số tăng, bị chặn dưới.

Câu 52. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân?

A $m = 1$. **B** $m = -3$. **C** $m = 3$. **D** $m = -4$.

Câu 53. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = n - \sqrt{n^2-1}$.

A Ba phương án đều sai.

B Dãy số tăng.

C Dãy số không tăng không giảm.

D Dãy số giảm.

Câu 54. Cho một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc của tứ giác đó lập thành một cấp số cộng và góc nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{5}$ góc lớn nhất. Tìm số đo góc nhỏ nhất của tứ giác đã cho.

A 20°. **B** 30°. **C** 50°. **D** 40°.

Câu 55. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).

A -274. **B** -285. **C** -253. **D** -244.

Câu 56. Cho một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc của tứ giác đó lập thành một cấp số cộng và góc nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{5}$ góc lớn nhất. Tìm số đo góc nhỏ nhất của tứ giác đã cho.

A 40°. **B** 30°. **C** 50°. **D** 20°.

Câu 57. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là

A $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **B** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C** $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **D** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Câu 58. Giá trị của tổng $4 + 44 + 444 + \cdots + 44\ldots4$ (tổng có 2018 số hạng) bằng

A $\dfrac{40}{9}(10^{2018} - 1) + 2018$. **B** $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019} - 10}{9} + 2018\right)$.

C $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$. **D** $\dfrac{4}{9}(10^{2018} - 1)$.

Câu 59. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{2}$. **B** $u_n = 3^{n+1} - 1$.

C $u_n = n + 1$. **D** $u_n = 1 + 2^{n-1}$.

Câu 60. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

A $u_n = |5 - n|$. **B** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$.

C $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$. **D** $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q. Giá trị của q^2 bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **C** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 62. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190$.

(A) $n = 2018$. (B) $n = 2017$. (C) $n = 2020$. (D) $n = 2019$.

Câu 63. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng $\frac{2}{3}$ diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là 6144 m^2. Tính diện tích mặt trên cùng.

(A) 8 m^2. (B) 4 m^2. (C) 12 m^2. (D) 6 m^2.

Câu 64. Xét các số thực dương a, b sao cho $-25, 2a, 3b$ là cấp số cộng và $2, a+2, b-3$ là cấp số nhân. Khi đó $a^2 + b^2 - 3ab$ bằng

(A) 89. (B) 59. (C) 76. (D) 31.

Câu 65. Cho ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $s \neq 0$. Tính $\frac{a}{s}$.

(A) $\frac{4}{9}$. (B) 3. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 9.

Câu 66. Với $n \geq 0$

Dãy số **Fibonacci** được **Leonardo Fibonacci**, một nhà toán học người Ý, công bố vào năm 1202 trong cuốn sách "Liber Abacci"- Sách về toán đố qua hai bài toán: "*Bài toán con thỏ*" và bài toán "*số các cụ tổ của một ong đực*". Dãy số này hầu như biến hóa vô tận. Chính điều đó làm cho nhiều nhà Toán học (chuyên nghiệp lẫn nghiệp dư) và cả những người bình thường nghiên cứu, khám phá về nó. Người ta chứng minh được rằng công thức tổng quát cho dãy Fibonacci là:

$$F_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Số **Lucas** là một dãy số được đặt tên nhằm vinh danh nhà Toán học **Francois Edouard Anatole Lucas**, người đã nghiên cứu dãy số Fibonacci, dãy số Lucas và các dãy tương tự. Dãy số gồm thương giữa hai số Lucas liền nhau sẽ hội tụ đến giới hạn bằng **tỉ lệ vàng** $\left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$. Công thức tổng quát của số **Lucas**:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Số **Lucas** liên hệ với số Fibonacci bởi hằng đẳng thức sau:

$$L_n = F_{n-2} + F_n$$

Hãy tìm tổng $S_{(n)} = F_{n-2} + F_{n-1} + F_n + F_{n+1}$, biết $L_n = 18$.

A 8. **B** 29. **C** 47. **D** 13.

Câu 67. Cho biết a, b, c là ba cạnh của một tam giác và theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $ac = b^2$. **B** $(1-a)(c-1) = (b-1)^2$.

C $\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{b}$. **D** $(a+1)(c+1) = (b+1)^2$.

Câu 68. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{2}$. **B** $u_n = n + 1$.

C $u_n = 3^{n+1} - 1$. **D** $u_n = 1 + 2^{n-1}$.

Câu 69. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = n + u_n, \forall n \geq 1$. Tính giá trị của u_{218}.

A 23436. **B** 2381. **C** 23653. **D** 46872.

Câu 70. Tìm x biết $1, x^2, 6 - x^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

A $x = \pm\sqrt{2}$. **B** $x = \pm\sqrt{3}$. **C** $x = \pm 1$. **D** $x = \pm 2$.

Câu 71. Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

A $k = 4, k = 5$. **B** $k = 7, k = 8$. **C** $k = 3, k = 9$. **D** $k = 4, k = 8$.

Câu 72. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = -2, u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2$. Xác định số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

A $u_n = -\dfrac{5}{2} \cdot 3^n + \dfrac{3}{2}$. **B** $u_n = -\dfrac{5}{2} \cdot 3^n + \dfrac{1}{2}$.

C $u_n = \dfrac{5}{2} \cdot 3^n + \dfrac{1}{2}$.

D $u_n = \dfrac{5}{2} \cdot 3^n + 2$.

Câu 73. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích S_1. Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2. Tiếp tục như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5 \ldots$. Tính $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{100}$.

A $S = \dfrac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}$.

B $S = \dfrac{a(2^{100} - 1)}{2^{99}}$.

C $S = \dfrac{2^{100} - 1}{2^{99}a^2}$.

D $S = \dfrac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{99}}$.

Câu 74. Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$), có cạnh đáy BC, đường cao AH, cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tính công bội q của cấp số nhân đó.

A $\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

B $\sqrt{2}+1$.

C $\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

D $\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

Câu 75. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_3 + u_4 + u_5 = -3 \\ 3u_5 - 2u_7 = 5 \end{cases}$. Tìm u_3.

A $u_3 = -2$.

B $u_3 = 5$.

C $u_3 = 1$.

D $u_3 = 3$.

Câu 76. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_3 + u_4 + u_5 = -3 \\ 3u_5 - 2u_7 = 5 \end{cases}$. Tìm u_3.

A $u_3 = -2$.

B $u_3 = 1$.

C $u_3 = 5$.

D $u_3 = 3$.

Câu 77. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và số ván các vận động viên nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

A 182.

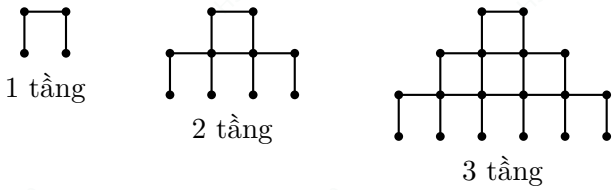
B 168.

C 156.

D 132.

Câu 78.

Bạn An chơi trò chơi xếp các que diêm thành hình tháp theo qui tắc thể hiện như hình vẽ. Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần dùng dùng bao nhiêu que diêm?



A 39.

B 210.

C 270.

D 100.

Câu 79. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n.

(A) $n = 12$. (B) $n = 11$. (C) $n = 10$. (D) $n = 9$.

Câu 80. Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lần lượt nằm trên các cạnh B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ sao cho $A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả các diện tích của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$ biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\dfrac{9}{16}$. Tìm số nguyên dương n sao cho $S = \dfrac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

(A) $n = 30$. (B) $n = 2018$. (C) $n = 28$. (D) $n = 29$.

Câu 81. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính giá trị của tổng

$$S = \frac{1}{u_2\sqrt{u_1} + u_1\sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3\sqrt{u_2} + u_2\sqrt{u_3}} + \cdots + \frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}} + u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}$$

(A) 2018. (B) $\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{6052}}\right)$. (C) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{6052}}$. (D) 1.

Câu 82. Cho năm số a, b, c, d, e khác 0, theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân. Biết $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e} = 10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị của $|S|$ với $S = abcde$.

(A) $|S| = 32$. (B) $|S| = 62$. (C) $|S| = 52$. (D) $|S| = 42$.

Câu 83. Cho bốn số a, b, c, d theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng của ba số hạng đầu bằng $\dfrac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T = a - b + c - d$.

(A) $T = \dfrac{101}{27}$. (B) $T = \dfrac{100}{27}$. (C) $T = -\dfrac{100}{27}$. (D) $T = -\dfrac{101}{27}$.

Câu 84. Cho hai cấp số cộng $(a_n) : a_1 = 4; a_2 = 7; \dots, a_{100}$ và $(b_n) : b_1 = 1; b_2 = 6; \dots, b_{100}$. Hỏi có bao nhiêu số có mặt đồng thời trong hai dãy trên.

(A) 33. (B) 53. (C) 20. (D) 32.

Câu 85. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

(A) $q=-3$. (B) $q=\pm 3$. (C) $q=3$. (D) $q=\dfrac{1}{3}$.

Câu 86. Xác định số hạng u_{2018} của dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1=-2 \\ u_n=3u_{n-1}-1 \end{cases}, \forall n\geq 2.$$

(A) $u_{2018}=(-5)\cdot 3^{2017}+13$. (B) $u_{2018}=5\cdot 3^{2017}-17$.

(C) $u_{2018}=-\dfrac{2}{3}\cdot 3^{2017}$. (D) $u_{2018}=-\dfrac{5}{2}\cdot 3^{2017}+\dfrac{1}{2}$.

Câu 87. Phương trình $x^3+ax+b=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng. Chọn khẳng định đúng.

(A) $b=0, a<0$. (B) $b=-2, a=1$. (C) $b=0, a=1$. (D) $b=1, a=-2$.

Câu 88. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10 \\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Công sai của cấp số đó bằng

(A) $d=2$. (B) $d=4$. (C) $d=5$. (D) $d=3$.

Câu 89. Vào đầu mỗi tháng chị Liên gửi tiết kiệm 3 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi $0,6\%$/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (kể từ tháng đầu tiên) thì chị Liên nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi vượt qua 100 triệu đồng?

(A) 29 tháng.. (B) 32 tháng.. (C) 31 tháng.. (D) 30 tháng..

Câu 90. Cho hình lập phương $A_1B_1C_1D_1.A_1'B_1'C_1'D_1'$ tâm O có cạnh bằng 1. Gọi $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1}; A_{i+1}', B_{i+1}', C_{i+1}', D_{i+1}'$ lần lượt là trung điểm của $OA_i, OB_i, OC_i, OD_i; OA_i', OB_i', OC_i', OD_i'$ với $i\in\mathbb{N}^*$. Gọi V_i, S_i lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của khối lập phương $A_iB_iC_iD_i.A_i'B_i'C_i'D_i'$. Tìm $\dfrac{S_{2018}}{V_{2018}}$.

(A) $6\cdot 2^{2018}$. (B) $\dfrac{3}{2^{2016}}$. (C) 6. (D) $3\cdot 2^{2018}$.

Câu 91. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=2018$ và $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n<\dfrac{1}{2018}$ bằng

(A) 4072326. (B) 4072325. (C) 4072324. (D) 4072327.

Câu 92. Trong các nhận định sau, có bao nhiêu nhận định **sai**?

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2},(\forall n\in\mathbb{N})$.

(2) $u_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ là một dãy số tăng.

(3) $u_n=-\sin n$ là một dãy số tăng.

A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Câu 93. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=2u_n+5\end{cases}$. Tính số hạng thứ 2018 của dãy.

A $u_{2018}=3\cdot 2^{2018}+5$. **B** $u_{2018}=3\cdot 2^{2017}+1$.

C $u_{2018}=3\cdot 2^{2018}-5$. **D** $u_{2018}=3\cdot 2^{2017}-5$.

Câu 94. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là $1,8,22,43,\ldots$ Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng: $7,14,21,\ldots,7n$. Hỏi số 35351 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số đã cho.

A 100. **B** 102. **C** 103. **D** 101.

Câu 95. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng -9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29.

A $-4;-3;-2$. **B** $-3;-2;-1$. **C** $1;2;3$. **D** $-2;-1;0$.

Câu 96. Cho dãy số xác định bởi $u_1=1,u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{n-1}{n^2+3n+2}\right),n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng

A $\dfrac{2^{2017}}{3^{2016}}+\dfrac{1}{2019}$. **B** $\dfrac{2^{2018}}{3^{2017}}+\dfrac{1}{2019}$. **C** $\dfrac{2^{2017}}{3^{2018}}+\dfrac{1}{2019}$. **D** $\dfrac{2^{2016}}{3^{2017}}+\dfrac{1}{2019}$.

Câu 97. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1=1,S_n=55,d=1$. Khi đó giá trị của n là bao nhiêu?

A $n=9$. **B** $n=10$. **C** $n=11$. **D** $n\in\{10;-11\}$.

Câu 98. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-2$ và công sai $d=3$. Số hạng u_2 là

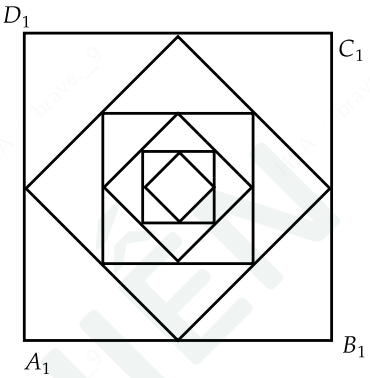
A $u_2=4$. **B** $u_2=-6$. **C** $u_2=-5$. **D** $u_2=1$.

Câu 99. Có bao nhiêu cấp số nhân có 5 số hạng? Biết rằng tổng 5 số hạng đó là 31 và tích của

chúng là 1024?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Câu 100.
Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$ thứ tự là trung điểm các cạnh $A_kB_k; B_kC_k; C_kD_k; D_kA_k$ (với $k = 1, 2, \dots$). Chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ là



(A) $\frac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2^{2017}}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2^{2018}}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2^{1006}}$.

Câu 101. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

(A) (x_n) là cấp số nhân.. (B) $\lim x_n = 2$.

(C) $\lim x_n = +\infty$. (D) (x_n) là dãy số giảm..

Câu 102. Dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 3n - 2$, với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

(A) $S = 145$. (B) $S = 320$. (C) $S = 160$. (D) $S = 150$.

Câu 103. Cho các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng; các số $(y+1)^2$, $xy + 1$, $(x-1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm $(x; y)$.

(A) $(x;y) = (0;0), \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10}\right)$. (B) $(x;y) = (0;0), \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10}\right)$.

(C) $(x;y) = (0;0), \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{13}{4}; -\frac{13}{10}\right)$. (D) $(x;y) = (0;0), \left(\frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10}\right)$.

Câu 104. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

(A) $S_{100} = -14400$. (B) $S_{100} = -14250$. (C) $S_{100} = -15450$. (D) $S_{100} = -14650$.

Câu 105. Tính tổng $S = 1 + 11 + \cdots + \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ số } 1}$.

(A) $\frac{1}{81}(10^{n-1} - 1) - \frac{n}{9}$. (B) $\frac{10}{81}(10^n - 1) - \frac{n}{9}$.

(C) $\frac{10}{81}(10^{n-1} - 1) - \frac{n}{9}$. (D) $\frac{10}{81}(10^{n-1} - 1) + \frac{n}{9}$.

Câu 106. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Có bao nhiêu giá trị của a để $u_{2018} = 0$?

(A) $2^{2017} + 1$. (B) 3. (C) $2^{2018} + 1$. (D) $2^{2016} + 1$.

Câu 107. Dãy số (u_n) thỏa mãn $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n^2$. Tính u_{12}.

(A) $u_{12} = 121$. (B) $u_{12} = 20$. (C) $u_{12} = 144$. (D) $u_{12} = 23$.

Câu 108. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó.

(A) $\dfrac{64}{25}$. (B) $\dfrac{52}{25}$. (C) $-\dfrac{16}{25}$. (D) $\dfrac{4}{25}$.

Câu 109. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là $1, 8, 22, 43, \dots$ Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng: $7, 14, 21, \dots, 7n$. Hỏi số 35351 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số đã cho.

(A) 101. (B) 100. (C) 103. (D) 102.

Câu 110. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2}-1)u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính u_{2018}.

(A) $u_{2018} = 7 - 5\sqrt{2}$. (B) $u_{2018} = 7 + 5\sqrt{2}$. (C) $u_{2018} = 2$. (D) $u_{2018} = 7 + \sqrt{2}$.

Câu 111. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số tăng?

(A) $u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$. (B) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$. (C) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$. (D) $u_n = n^2 + 2n$.

Câu 112. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{x}{y}$ ($x, y \in \mathbb{N}$, phân số tối giản), tính giá trị $x + y$.

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Câu 113. Cho tổng $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Khi đó, công thức của S_n là

(A) $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (B) $S_n = \dfrac{n+1}{2}$.

(C) $S_n = \dfrac{n(2n+1)(3n+1)}{6}$. (D) $S_n = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$.

Câu 114. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào bị chặn?

(A) $u_n = 3 \cdot 2^n$. (B) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. (C) $u_n = \sqrt{n^2+1}$. (D) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Câu 115. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d. Tìm điều kiện của d để (u_n) là dãy số tăng.

(A) $|d| \geq 1$. (B) $d > 1$. (C) $d < 0$. (D) $d > 0$.

Câu 116. Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ bảy gấp 243 lần số hạng thứ hai. Tìm các số hạng còn lại của cấp số nhân đó.

(A) $u_1 = \dfrac{2}{9}; u_2 = \dfrac{2}{3}; u_3 = 2; u_5 = 21; u_6 = 54; u_7 = 162$.

(B) $u_1 = \dfrac{2}{9}; u_2 = \dfrac{2}{3}; u_3 = 2; u_5 = 18; u_6 = 54; u_7 = 162$.

(C) $u_1 = \dfrac{2}{9}; u_2 = \dfrac{2}{3}; u_3 = 2; u_5 = 18; u_6 = 56; u_7 = 162$.

(D) $u_1 = \dfrac{2}{7}; u_2 = \dfrac{2}{3}; u_3 = 2; u_5 = 18; u_6 = 54; u_7 = 162$.

Câu 117. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2$, $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$ $\forall n \geq 2$. Biết rằng công thức tổng quát của dãy số đã cho có dạng $u_n = a \cdot 2^n + bn + c$ $\forall n \geq 2$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Khi đó, tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

(A) -3. (B) -4. (C) 3. (D) 4.

Câu 118. Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải học phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng với số tiền 10 triệu đồng với lãi suất 4% một năm. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm học, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

(A) 41600000 đồng.. (B) 44163000 đồng.. (C) 42465000 đồng.. (D) 46794000 đồng..

Câu 119. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{30}$.

(A) -1222. (B) -1242. (C) -1276. (D) -1286.

Câu 120. Cho dãy hình vuông $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n, P_n, S_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích của hình vuông H_n. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (P_n) cũng là cấp số cộng..

B Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (S_n) cũng là cấp số cộng..

C Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (P_n) cũng là cấp số nhân..

D Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (S_n) cũng là cấp số nhân..

Câu 121. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và biết tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính $S = \dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{49} u_{50}}$.

A $S = 123$. **B** $S = \dfrac{49}{246}$. **C** $S = \dfrac{9}{246}$. **D** $S = \dfrac{4}{23}$.

Câu 122. Ba số phân biệt có tổng bằng 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A 21. **B** 20. **C** 42. **D** 17.

Câu 123. Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q. Tìm q.

A $q = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$. **B** $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C** $q = \dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. **D** $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 124. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào bị chặn?

A $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **B** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. **C** $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. **D** $u_n = 3.2^n$.

Câu 125. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = -5; u_6 = 135$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Khi đó, giá trị của S_{10} là

A $\dfrac{49205}{9}$. **B** $\dfrac{49205}{18}$. **C** $\dfrac{-147620}{9}$. **D** $\dfrac{73810}{9}$.

Câu 126. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A $S_{100} = -14250$. **B** $S_{100} = -15480$. **C** $S_{100} = -14650$. **D** $S_{100} = -14400$.

Câu 127. Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: "Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 thì lại gấp đôi ô thứ 2,...ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước". Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan nhận được từ n ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến

ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là

(A) $n = 21$. (B) $n = 19$. (C) $n = 20$. (D) $n = 18$.

Câu 128. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

(A) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng..

(B) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương..

(C) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân..

(D) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng..

Câu 129. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an-1}{n+2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

(A) $a > 2$. (B) $a > -\dfrac{1}{2}$. (C) $a < -\dfrac{1}{2}$. (D) $a < -2$.

Câu 130. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$ thứ tự là trung điểm các cạnh $A_kB_k, B_kC_k, C_kD_k, D_kA_k$ (với $k = 1, 2, \ldots$). Tính chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2018}}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1006}}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2017}}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.

Câu 131. Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên dương (n, k) biết $n < 20$ và các số $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng.

(A) 2. (B) 4. (C) 0. (D) 1.

Câu 132. Cho ba số a, b, c, d theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết tổng ba số hạng đầu bằng $\dfrac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T = a - b + c - d$.

(A) $T = \dfrac{101}{27}$. (B) $T = \dfrac{100}{27}$. (C) $T = -\dfrac{100}{27}$. (D) $T = -\dfrac{101}{27}$.

Câu 133. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính số hạng u_{50}.

(A) 4024. (B) 2402. (C) 2240. (D) 2024.

Câu 134. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều dương và $\begin{cases} u_1+u_2+\cdots+u_n=2017 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}=2018 \end{cases}$. Tính tích $u_1 \cdot u_2 \ldots u_n$.

(A) $\left(\dfrac{2018}{2017}\right)^n$. (B) $\sqrt{\left(\dfrac{2018}{2017}\right)^n}$. (C) $\sqrt{\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^n}$. (D) $\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^n$.

Câu 135. Cho tam giác ABC cân tại A. Biết độ dài cạnh BC, trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự lập thành một cấp số cộng có công bội q. Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

(A) $q=\dfrac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$. (B) $q=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

(C) $q=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. (D) $q=\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$.

Câu 136. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

(A) $\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{1}{3};1;\dfrac{5}{3}$. (C) $\dfrac{3}{4};1;\dfrac{5}{4}$. (D) $\dfrac{1}{4};1;\dfrac{7}{4}$.

Câu 137. Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Biết rằng $\dfrac{S_p}{S_q}=\dfrac{p^2}{q^2}$ với $p\neq q, p, q\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{u_{2017}}{u_{2018}}$.

(A) $\dfrac{4034}{4035}$. (B) $\dfrac{4033}{4035}$. (C) $\dfrac{4031}{4033}$. (D) $\dfrac{4031}{4035}$.

Câu 138. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1=x$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 lên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 lên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 lên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 lên CA, ... và cứ tiếp tục như thế. Hãy tìm giá trị của x theo a sao cho $A_{2018}\equiv A_1$.

(A) $x=\dfrac{a}{3}$. (B) $x=\dfrac{a}{2}$. (C) $x=\dfrac{2a}{3}$. (D) $x=\dfrac{3a}{4}$.

Câu 139. Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ..., cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

(A) 76. (B) 78. (C) 77. (D) 79.

Câu 140. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số bị chặn.

(A) $u_n=\sqrt{n^2+1}$. (B) $u_n=\dfrac{n}{n+1}$. (C) $u_n=n+\dfrac{1}{n}$. (D) $u_n=2^n+1$.

Câu 141. Cho cấp số cộng $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ có số hạng tổng quát $u_n = 1 - 3n$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

(A) -59049. (B) -155. (C) -310. (D) -59048.

Câu 142. Thầy D gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý (1 quý: 3 tháng) trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768 đồng. Hỏi số tiền Thầy D gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

(A) 140 triệu và 180 triệu.. (B) 120 triệu và 200 triệu..

(C) 180 triệu và 140 triệu.. (D) 200 triệu và 120 triệu..

Câu 143. Cho dãy số (u_n). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Nếu tồn tại số $M > 0$ sao cho $|u_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số bị chặn..

(B) Nếu tồn tại cặp số m, M và tồn tại giá trị n sao cho $m \leq u_n \leq M$ thì (u_n) là dãy số bị chặn..

(C) Nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số bị chặn..

(D) Nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số bị chặn..

Câu 144. Tổng của n số hạng đầu tiên của một dãy số $(a_n), n \geq 1$ là $S_n = 2n^2 + 3n$. Khi đó

(A) (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 1.

(B) (a_n) là một cấp số nhân với công bội bằng 1.

(C) (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 4.

(D) (a_n) là một cấp số nhân với công bội bằng 4.

Câu 145. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

(A) $m = 1, m = 2$. (B) $m = -1$. (C) $m = 2$. (D) $m = 1$.

Câu 146. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $S_{2017} < 0$. **B** $S_{2020} = 0$. **C** $S_{2019} > 0$. **D** $S_{2018} = 0$.

Câu 147. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_{40} - u_{18} = 9$, $u_{40}^2 - u_{18}^2 = 153$. Tìm u_{29}.

A $u_{29} = 29$. **B** $u_{29} = \dfrac{17}{2}$. **C** $u_{29} = \dfrac{29}{2}$. **D** $u_{29} = 17$.

Câu 148. Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 32 và tổng các bình phương của chúng bằng 336. Tích của bốn số đó là

A 5760. **B** 15120. **C** 1920. **D** 1680.

Câu 149. Tìm tất cả các giá trị của x để ba số $1-x$, x^2, $1+x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

A $x = -1$. **B** $x = 1$. **C** $x = \pm 2$. **D** $x = \pm 1$.

Câu 150. Phương trình $x^3 + ax + b = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng. Chọn khẳng định đúng.

A $b = 0, a < 0$. **B** $b = 1, a = -2$. **C** $b = 0, a = 1$. **D** $b = -2, a = 1$.

Câu 151. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng theo hình thức gửi góp hàng tháng. Lãi suất tiết kiệm gửi góp cố định 0,55%/tháng. Lần đầu tiên người đó gửi 2.000.000 đồng. Cứ sau mỗi tháng người đó gửi nhiều hơn số tiền đã gửi tháng trước đó là 200.000 đồng. Hỏi sau 5 năm (kể từ lần gửi đầu tiên) người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A 618.051.620 đồng.. **B** 539.447.312 đồng..

C 597.618.514 đồng.. **D** 484.692.514 đồng..

Câu 152. Cho dãy (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số là

A $u_n = 1 + \dfrac{(n-1)n(2n+2)}{6}$. **B** $u_n = 1 + \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

C Tất cả các khẳng định A, B, C đều sai.. **D** $u_n = 1 + \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Câu 153. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{3n(n+3)}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào dưới đây là đúng và đầy đủ nhất?

A (x_n) là cấp số cộng với công sai âm..

B (x_n) là cấp số cộng với công sai dương..

C (x_n) là cấp số nhân với công bội âm..

D (x_n) là cấp số nhân với công bội dương..

Câu 154. Xác định số hạng u_{2018} của dãy (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \end{cases}, \forall n \geq 2.$

A $u_{2018} = 5 \cdot 2^{2017} - 6059.$

B $u_{2018} = 5 \cdot 2^{2018}.$

C $u_{2018} = 2^{2017}.$

D $u_{2018} = 5 \cdot 2^{2018} - 6059.$

Câu 155. Giải phương trình $1 + 8 + 15 + 22 + \cdots + x = 7944.$

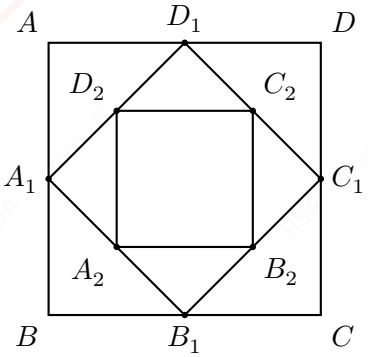
A $x = 351.$ **B** $x = 220.$ **C** $x = 407.$ **D** $x = 330.$

Câu 156. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A $q = -3.$ **B** $q = \dfrac{1}{3}.$ **C** $q = 3.$ **D** $q = \pm 3.$

Câu 157.

Cho hình vuông $ABCD$ có các cạnh bằng a, và có diện tích S_1. Nối bốn trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của bốn cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2. Tiếp tục làm quá trình trên ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích $S_3, \ldots$ và cứ tiếp tục làm như thế ta được các hình vuông lần lượt có diện tích $S_4, S_5, \ldots, S_{100}$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{100}$.



A $S = \dfrac{a^2(2^{200} - 1)}{2^{100}}.$

B $S = \dfrac{a^2(2^{200} - 1)}{2^{99}}.$

C $S = \dfrac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{98}}.$

D $S = \dfrac{a^2}{2^{200}}.$

Câu 158. Tính $S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 2018 \cdot 2^{2017}.$

A $2^{2018} + 1.$ **B** $2017 \cdot 2^{2018} - 1.$ **C** $2017 \cdot 2^{2018} + 1.$ **D** $2017 \cdot 2^{2018} - 1.$

Chương

19 BÀI TẬP ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

19.1 Tính đơn điệu của hàm số

Câu 1. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^2 + 2x + 1$. (B) $y = x - \sin x$. (C) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$. (D) $y = x^3 - 3x$.

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$ nghịch biến trên khoảng nào?

(A) $(2;3)$. (B) $(1;6)$. (C) $(-6;-1)$. (D) $(-3;-2)$.

Câu 3. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

BUI QUANG CHIẾN

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 5. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$?

A $y=\dfrac{x-2}{x-2}$. **B** $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$. **C** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **D** $y=\dfrac{x-1}{x-2}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+\dfrac{3}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9. Hàm số $y=2x^3+3$ đồng biến trên khoảng nào?

A $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **C** $(0;+\infty)$. **D** $(-\infty;0)$.

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

Câu 10. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.
(B) $y = x^3 - 3x$.
(C) $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$.
(D) $y = -4x + \cos x$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến, vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. $(I) : y = \dfrac{2x+1}{x+1}; (II) : y = -x^4 + x^2 - 2$ và $(III) : y = x^3 + 3x - 4$.

(A) $(I); (III)$.
(B) $(I); (II)$.
(C) $(II); (III)$.
(D) (II).

Câu 13. Cho hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 15. Cho các hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$; $y = \tan x$; $y = x^3 + x^2 + 4x - 2022$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m+6)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

A $-2 \le m \le 0$. **B** $-2 \le m < 0$. **C** $m \le -2$. **D** $m \ge -2$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A $(-2; 0)$. **B** $(0; 2)$. **C** $(2; +\infty)$. **D** $(-\infty; -2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. Chọn khẳng định đúng.

A Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **B** $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.

C $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D** $y = x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

Câu 21. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1; +\infty)$?

A $y = x^3 + 3x$. **B** $y = \dfrac{x-1}{x^2+2}$. **C** $y = -x^3 - x + 1$. **D** $y = \dfrac{x-3}{x-2}$.

Câu 22. Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

A $(\sqrt{2};+\infty)$.

B $(-\sqrt{3};0);\ (\sqrt{2};+\infty)$.

C $(-\sqrt{2};0);\ (\sqrt{2};+\infty)$.

D $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 23. Hàm số $y=x^3-3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1;1)$. **B** $(-\infty;1)$. **C** $(0;2)$. **D** $(2;+\infty)$.

Câu 24. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A $y=-x^3+3x^2$. **B** $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. **C** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Câu 25. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(1;3)$?

A $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

B $y=\dfrac{x+1}{x+2}$.

C $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

D $y=\sqrt{x^2+1}$.

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

B Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 27. Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A $\mathbb{R}$.

B $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

C $(-1;0)$.

D $(1;+\infty)$.

Câu 28. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=\dfrac{x+1}{x+1}$. **B** $y=x+1$. **C** $y=x^4+1$. **D** $y=x^2+1$.

Câu 29. Hàm số $y=x^4-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **B** $(-\infty;0)$. **C** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D** $(0;+\infty)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

D $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Câu 32. Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 33. Hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ nghịch biến trên?

A $(-1;0);(1;+\infty)$. **B** $(-1;1)$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $(-\infty;-1);(0;1)$.

Câu 34. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y=x^3+3x+1$. **B** $y=x^3-3x+1$. **C** $y=x^2+1$. **D** $y=-x\sqrt{2}+1$.

Câu 35. Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng

A $(-1;+\infty)$. **B** $(1;+\infty)$.

C $(-\infty;1);(1;+\infty)$. **D** $(3;+\infty)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 37. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$.

A $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(-3; 0)$. **D** $(0; 3)$.

Câu 38. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

A $y = x^4 + 2x^2 + 5$. **B** $y = -2x^3 - 3x + 5$.

C $y = -x^4 - x^2$. **D** $y = \dfrac{x+1}{x-3}$.

Câu 39. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

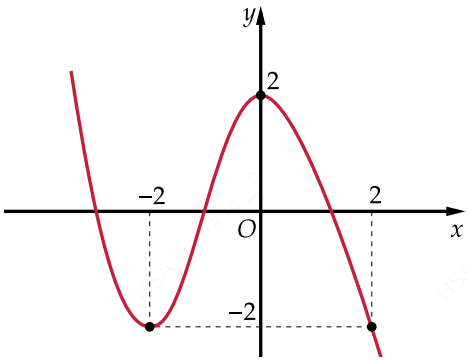
A $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. **B** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

C $y = x^4 + 2x^2 + 1$. **D** $y = -\dfrac{x^3}{3} + 3x + 2$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(3; +\infty)$. **B** $(-3; 0)$. **C** $(-\infty; -3)$. **D** $(-2; 2)$.

Câu 41.
Cho $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng



A $(1; 2)$. **B** $(-1; 0)$.

C $(0; 1)$. **D** $(-2; -1)$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} - 3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A $(-2; -1)$. **B** $(-1; 1)$. **C** $(1; 2)$. **D** $(2; 3)$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A 2012. **B** 2011. **C** 2009. **D** 2010.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A $(-\infty;-2)$. **B** $(-2;1)$. **C** $(0;2)$. **D** $(2;4)$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2-2x+3\right)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.

B Hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;2)$.

C Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.

D Hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(2;3)$.

Câu 46. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A $S=[-1;0]$. **B** $S=\emptyset$. **C** $S=\{-1\}$. **D** $S=\{1\}$.

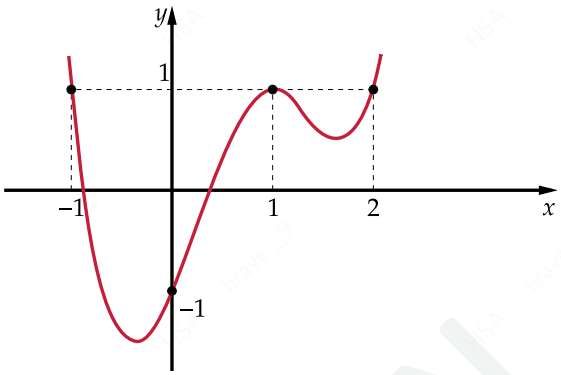
Câu 47. Tổng tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

A $\dfrac{5}{2}$. **B** -2. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;1)$. **B** $(-1;0)$. **C** $(-2;-1)$. **D** $(-2;0)$.

Câu 49.
Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



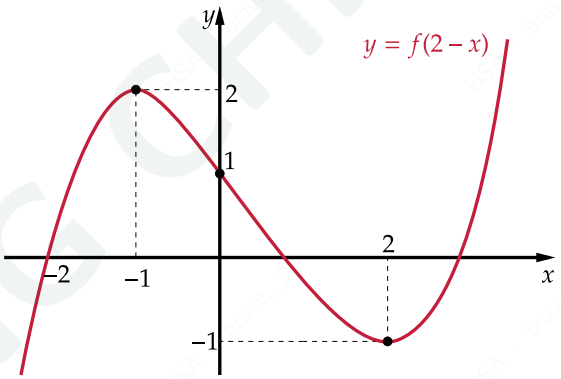
(A) $g(1)<g(-1)<g(2)$.

(B) $g(-1)<g(1)<g(2)$.

(C) $g(2)<g(1)<g(-1)$.

(D) $g(2)<g(-1)<g(1)$.

Câu 50.
Cho đồ thị hàm số $y=f(2-x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(0;1)$.

(B) $(1;3)$.

(C) $(-\infty;-1)$.

(D) $(-1;0)$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;1)$.

(B) $(-4;-3)$.

(C) $(0;1)$.

(D) $(-2;-1)$.

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x)\cdot f''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3,\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ và } g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x)\cdot f''(x).$$

Hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;1)$.

(B) $(2;+\infty)$.

(C) $(0;1)$.

(D) $(1;2)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là

một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(5;9)$. **B** $(1;2)$. **C** $(-\infty;9)$. **D** $(1;3)$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(x)>2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f(3-2f(x))-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

D Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-6x+m\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A 2016. **B** 2014. **C** 2012. **D** 2010.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2\left(x^2+2mx+1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 6.

Câu 57. Cho các hàm số $f(x)=x^3+4x+m$ và $g(x)=\left(x^2+2018\right)\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2020\right)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A 2005. **B** 2037. **C** 4016. **D** 4041.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A 18. **B** 17. **C** 16. **D** 20.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^2-4x+3\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+m\right)$ có 3 cực trị.

(A) 0. (B) 6. (C) 3. (D) 2.

Câu 60. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

(A) 4041. (B) 4042. (C) 2021. (D) 4039.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)\left(x^2+2mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-4\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;-1)$. (B) $(-3;-1)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(-2;0)$.

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên khoảng

(A) $(5;6)$. (B) $(-1;2)$. (C) $(2;3)$. (D) $(3;5)$.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x)=x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. (B) $(1;4)$. (C) $\left(\frac{1}{2};1\right)$. (D) $(0;1)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)=(m-1)x^3-3\left(m^2+m-1\right)x^2+3(m-1)x-m-1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng

(A) $4\sqrt{7}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 4. (D) $4\sqrt{6}$.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)=3m^2x^4-8mx^3+6x^2+12(2m-1)x+1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên đoạn $[a;b]$; với a,b là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ bằng

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{6}$.

Câu 67. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để hàm số $g(x)=\left|x^2-4mx+m-3\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$?

(A) 79. (B) 39. (C) 80. (D) 40.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10\le m\le 10$ và hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

(A) 5. (B) 4. (C) 6. (D) 1.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. (B) $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. (C) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. (D) $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Câu 70. Cho hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x + 3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A $(-\infty; -2)$. **B** $(-2; 1)$. **C** $(1; 2)$. **D** $(-1; +\infty)$.

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - 2m)x^3 + mx^2 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $m < 0$. **B** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$. **C** $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$. **D** $1 < m \leq 3$.

Câu 72. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{mx - 2}{-2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ là

A 4. **B** 3. **C** 5. **D** 2.

Câu 73. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A $m \in [-1; 1]$. **B** $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

C $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **D** $m \in (-1; 1)$.

Câu 74. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x + 1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A Với $m=-2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B Với $m=9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C Với $m=3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D Với $m=6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=(m+1)\sin x+(m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A $m\le -1$.
B $m=-1$.
C $m<-1$.
D Không tồn tại m.

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+x^2-mx+2m-1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

A $m\le -\dfrac{1}{6}$.
B $m\ge -\dfrac{1}{6}$.
C $m\le 8$.
D $m\ge 8$.

Câu 77. Tìm m để hàm số $y=-\dfrac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A $m<-\dfrac{1}{2}$.
B $-\dfrac{1}{2}<m\le 1$.
C $-\dfrac{1}{2}\le m<1$.
D $m\le 1$.

Câu 78. Cho hàm số $y=-\dfrac{mx^3}{3}-x^2+2x+1-m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
B $\{0\}$.
C $(-\infty;0)$.
D $\emptyset$.

Câu 79. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}-(m+1)x^2+\left(m^2+2m\right)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A 2.
B 1.
C 3.
D Vô số.

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000;1000)$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A 999.
B 1001.
C 1998.
D 998.

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;3]$.

A $m > 3$. **B** $0 < m < 2$. **C** $2 < m \leq 3$. **D** $m \leq 0$.

Câu 82. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A $[3; +\infty)$. **B** $[48; +\infty)$. **C** $[36; +\infty)$. **D** $[12; +\infty)$.

Câu 83. Cho hàm số $y = -x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ là $\left(-\infty; \dfrac{b}{a}\right]$ với $\dfrac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T = 2a + b$ bằng

A 19. **B** 14. **C** 13. **D** 17.

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = -(x+m)^3 - 8(x+m)^2 + 16$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$?

A 2. **B** 5. **C** 4. **D** 3.

Câu 85. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ đơn điệu trên khoảng $(1; 2)$?

A 37. **B** 16. **C** 35. **D** 21.

Câu 86. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + 3x - 6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A $(-\infty; 1]$. **B** $(-\infty; -2]$. **C** $(-\infty; 0]$. **D** $[2; +\infty)$.

Câu 87. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = -x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

A $m \geq 2$. **B** $m \leq \dfrac{11}{9}$. **C** $m \geq \dfrac{11}{9}$. **D** $m \leq 2$.

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2; 5)$.

A $m \leq 1$. **B** $m \leq 5$. **C** $m < 5$. **D** $m < 1$.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = -(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f\left(x^2 + 3x - m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A 18. **B** 17. **C** 16. **D** 20.

Câu 90. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

(A) 2034. (B) 2018. (C) 2025. (D) 2021.

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x + m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Câu 92. Hàm số $y = -\dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi?

(A) $m \le 0$. (B) $m < 0$. (C) $m \le 2$. (D) $m < 2$.

Câu 93. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -\dfrac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

(A) $m > 1$. (B) $m > \dfrac{1}{2}$. (C) $m \ge \dfrac{1}{2}$. (D) $m \ge 1$.

Câu 94. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = -\sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(A) 2028. (B) 2018. (C) 2020. (D) 2019.

Câu 95. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = -mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Câu 96. Cho hàm số $y = -(2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

(A) -4. (B) -5. (C) -3. (D) 0.

Câu 97. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ là

(A) $\left(-\infty; -\dfrac{8}{5}\right)$. (B) $\left[-3; -\dfrac{8}{5}\right]$. (C) $\left(-\dfrac{8}{5}; +\infty\right)$. (D) $\left[-\dfrac{8}{5}; +\infty\right)$.

Câu 98. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19; 19)$ để hàm số $y = -\dfrac{\tan x - 3m + 3}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A 17. **B** 10. **C** 11. **D** 9.

Câu 99. Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A 2019. **B** 2017. **C** 2021. **D** 2018.

Câu 100. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Câu 101. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=-m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A 7. **B** 16. **C** 15. **D** 6.

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A 3. **B** 4. **C** 2. **D** 1.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x)=-f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

A 1. **B** $1-\sqrt{3}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $1+\sqrt{3}$.

Câu 104. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{mx^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\leq 2020$.

A 4041. **B** 2027. **C** 2026. **D** 2015.

Câu 105. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$f(x) = -\dfrac{1}{5}m^2x^5 - \dfrac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)\,x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) -2. (C) $\dfrac{5}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì $f'(x) - 6x > 0$ với mọi $x \geq 2$?

(A) $m > \dfrac{1}{2}$. (B) $m < -\dfrac{1}{2}$. (C) $m > 1$. (D) $m \leq 0$.

Câu 107. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \geq -1$?

(A) $m \in \left(-\dfrac{7}{3}; +\infty\right)$. (B) $m \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right)$.

(C) $m \in \left(-\dfrac{7}{3}; \dfrac{5}{4}\right)$. (D) $m \in \left(-\dfrac{7}{3}; -1\right] \cup \left[-1; \dfrac{5}{4}\right)$.

Câu 108. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -(2m-2019)x - (2018-m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $m \leq 1$. (B) $m \leq \dfrac{4037}{3}$. (C) $m \geq 1$. (D) $m \geq -1$.

Câu 109. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = -\left|2x^3 - 2mx + 3\right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

(A) 12. (B) 8. (C) 11. (D) 7.

Câu 110. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -x^2(x-2)\left(x^2 - 6x + m\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = -f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

(A) 2012. (B) 2009. (C) 2011. (D) 2010.

Câu 111. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2(x+2)\left(x^2 + mx + 5\right)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = -f\left(x^2 + x - 2\right)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 7.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -x(x-1)^3\left(x^2 - 4x + m\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = -f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A 2020. **B** 2014. **C** 2019. **D** 2016.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = -f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$?

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	

A 8. **B** 6. **C** 7. **D** 5.

Câu 114. Giá trị $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-1)^4\left(x^2 + mx + 9\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = -f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A 6. **B** 5. **C** 7. **D** 8.

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = -f\left(x^2 + 4x + m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

Câu 116. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \dfrac{m}{x} + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

A $\left[-\dfrac{7}{3}; +\infty\right)$. **B** $\left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **C** $\left[-\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$. **D** $\left[\dfrac{2}{9}; +\infty\right)$.

Câu 117. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ để hàm số $f(x) = -x + a\sin x + b\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A 5. **B** 6. **C** 4. **D** 3.

19.2 Cực trị của hàm số

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-2018)(x-2019)(x-2020)^4$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Câu 2. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -3$. (D) $x = 3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-3)^3(2x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 5. Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là

(A) $x = \frac{1}{3}$. (B) $x = 0$. (C) $M(0;5)$. (D) $y = 5$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Câu 7. Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

(A) $M(0;1)$. (B) $Q(-1;10)$. (C) $P(1;0)$. (D) $N(1;-10)$.

Câu 9. Số nào sau đây là điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2$.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Câu 10. Cho $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x-3)^2$. Khi đó số cực trị của hàm số $y = f(2x+1)$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 11. Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \cdots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2018. (B) 1024. (C) 1. (D) 2019.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

(A) (-1; 0). (B) (-2; 0). (C) (0; 1). (D) (1; 0).

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \cdots + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

(A) 0. (B) 9. (C) 1. (D) 10.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)(3x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-9)(x^2-3x)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

(A) $T = f(0)$. (B) $T = f(9)$. (C) $T = f(-3)$. (D) $T = f(3)$.

Câu 16. Cho A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

(A) $\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{2} - 1$. (C) $\sqrt{2} - 2$. (D) 1.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

(A) $\sqrt{2}$. (B) 1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 4.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^3 - (3m+1)x^2 + (3m+7)x - 3$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Tích các phần tử của S là

(A) 1. (B) 6. (C) 0. (D) vô số.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x-3)^2$ và $f(3)=-2$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là

(A) $f(1)$. (B) $f(3)$. (C) $f(2)$. (D) $f(0)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

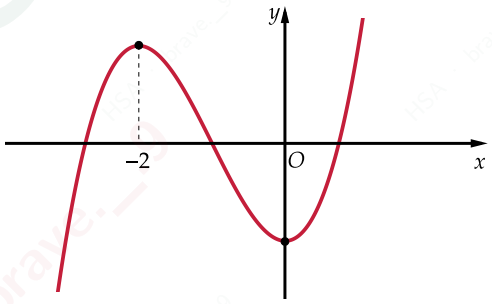
Câu 21. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\sin x-\dfrac{\pi}{4}\right|$ với mọi $x\in(-\pi;\pi)$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Câu 22. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Câu 23.
Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(-2x^2+4x\right)$ là



(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

Câu 24. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

(A) 12,4. (B) 6,4. (C) 4,4. (D) 27.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)\left(x^2-1\right)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

Câu 27. Hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+1}-m\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

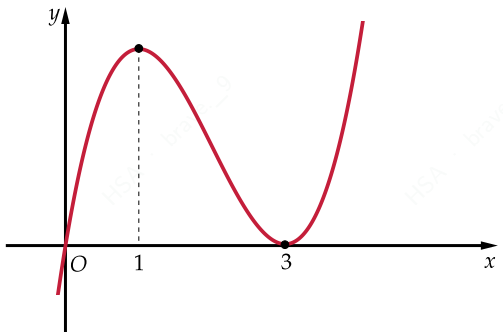
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

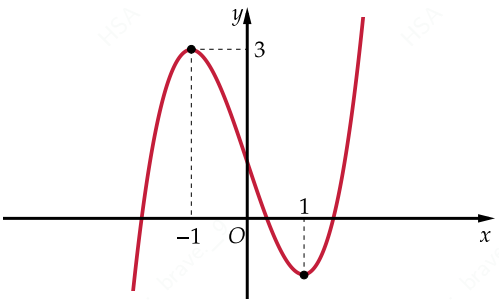
(A) 8. (B) 7. (C) 9. (D) 10.

Câu 31.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1)>1$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2021)$ để hàm số $g(x)=\left|f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m\right|$ có tất cả 9 điểm cực trị.



(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 4.

Câu 32.
Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = [xf(x-1)]^2$ là



(A) 9. (B) 7. (C) 6. (D) 5.

Câu 33. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;0)$. (B) $(1;2)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(-\infty;-2)$.

Câu 34. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.

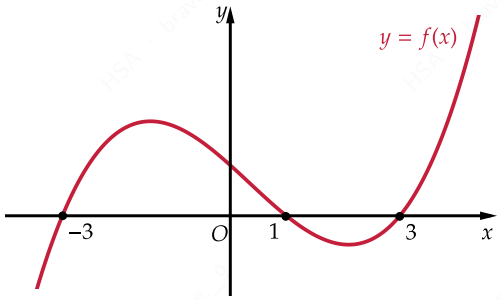
x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 \cdot [f(x)]^2$ là

(A) 9. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

Câu 35.

Cho đồ thị hàm đa thức $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) \cdot f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A 5. **B** 6. **C** 7. **D** 9.

Câu 36. Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	2	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 \cdot [f(x+2)]^6$ là

A 5. **B** 12. **C** 7. **D** 9.

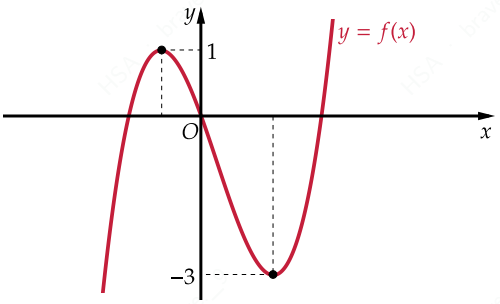
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f^3(x) - 3mf(x) + 11 - 2m$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

A 3. **B** 5. **C** 8. **D** 9.

Câu 38.

Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.



(A) $m \le -1$ hoặc $m \ge 3$.
(B) $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$.
(C) $m = -1$ hoặc $m = 3$.
(D) $-1 \le m \le 3$.

Câu 39. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có ba điểm cực trị?

(A) 4032.
(B) 4034.
(C) 4030.
(D) 4028.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + m|$ có 7 điểm cực trị.

(A) $(4; +\infty)$.
(B) $(0; 1)$.
(C) $(0; 4)$.
(D) $(1; +\infty)$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a > 0$, $d > 2018$, $a + b + c + d - 2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$.

(A) 3.
(B) 5.
(C) 2.
(D) 1.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

(A) 3.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 4.

Câu 43. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x + m|)$ có 7 điểm cực trị?

(A) $m < -1$.
(B) $m < 0$.
(C) $-1 < m < 2$.
(D) $m < 2$.

Câu 44. Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = 0$.
(B) $a \le 1$.
(C) $1 < a \le 3$.
(D) $a > 3$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của

tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. **B** $\dfrac{5}{4} < m < 2$. **C** $\dfrac{5}{4} \le m < 2$. **D** $-2 < m < \dfrac{5}{4}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị.

A $(-\infty; 0)$. **B** $(1; +\infty)$. **C** $(-\infty; 0]$. **D** $[0; +\infty)$.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng

A 5. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - mx^3 + \dfrac{3}{2}(m^2-1)x^2 + (1-m^2)x + 2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y = f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a < m^2 < b + 2\sqrt{c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Giá trị $T = a + b + c$ bằng

A 6. **B** 8. **C** 7. **D** 5.

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = \left|mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A 7. **B** 10. **C** 9. **D** 11.

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	0	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 7 điểm cực trị?

A 0. **B** 21. **C** 18. **D** 19.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y = f'(x) = x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|2x + m| - m)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

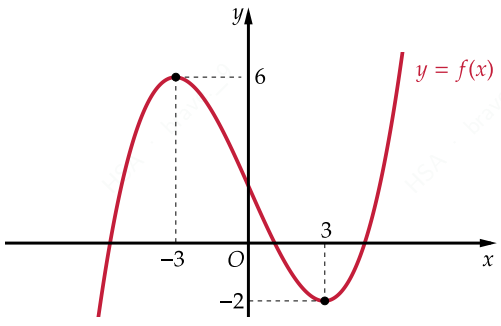
Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y = f'(x) = x(x-m)(x-6+m)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $y = f(|3x - 2| + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A 1. **B** 3. **C** 4. **D** 2.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x(x^2 - 2mx + 12 + m)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|2x - m^2| + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A 27. **B** 26. **C** 25. **D** 29.

Câu 54.
Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A 3. **B** 4. **C** 1. **D** 0.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 & \text{nếu } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 3 \\ 4x^2-2(m-a)x+b & \text{nếu } 1<x<3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 4.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx+n & \text{nếu } x<-1 \\ x^2+nx+m-9 & \text{nếu } x\ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A 6. **B** 36. **C** 11. **D** 5.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=2x^2-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(|x^2-4x+3|+mx)$ có 9 điểm cực trị?

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 31.

Câu 58. Cho hàm số $y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

A $x=2$. **B** $x=1$. **C** $x=-1$. **D** $x=0$.

Câu 59. Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|-m^2x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 5.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=|x+1|+3|x-2|+5|x-3|+mx$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A 17. **B** 15. **C** 16. **D** Vô số.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-n|$ với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

A 1010. **B** 1011. **C** 1009. **D** 2020.

Câu 62. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=|x^2-4x+3|+|x+1|$ là

A 0. **B** 3. **C** 2. **D** 1.

19.3 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019$ là

(A) 2017. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2019.

Câu 2. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m.

(A) $m=4$. (B) $m=2$. (C) $m=1$. (D) $m=3$.

Câu 3. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\dfrac{1}{6}$	↗	$+\infty$

(A) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập số thực bằng $-\dfrac{1}{6}$.

(B) Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

(C) Giá trị lớn nhất của hàm số trên tập số thực bằng 0.

(D) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

(A) 13. (B) -7. (C) -13. (D) -1.

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

(A) 1. (B) 3. (C) -1. (D) 7.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của

hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

(A) $M = 5m$. (B) $M = m + \dfrac{3}{2}$. (C) $M = m + \dfrac{2}{3}$. (D) $M = m + 1$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$.

(A) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{54+25\sqrt{5}}{20}$. (B) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$.

(C) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{10+5\sqrt{5}}{4}$. (D) $\min\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{56+25\sqrt{5}}{20}$.

Câu 8. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $\mathscr{D} = (-\infty;-1] \cup \left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị của $m \cdot M$.

(A) $T = \dfrac{3}{2}$. (B) $T = 0$. (C) $T = -\dfrac{3}{2}$. (D) $T = \dfrac{1}{9}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-\dfrac{25}{10};\dfrac{11}{10}\right)$. Tìm M.

(A) $M = 1$. (B) $M = \dfrac{129}{250}$. (C) $M = 0$. (D) $M = \dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

(A) 3. (B) 1. (C) -1. (D) 5.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^{20-m} - x^2 + 2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 6. (B) 25. (C) 7. (D) 10.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = x^{30-m} - x^6 + 1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 6. (B) 8. (C) 7. (D) 3.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = (m^2-3m)x^4 - mx^3 + x^2 - 3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

(A) 0. (B) 2. (C) Vô số. (D) 1.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = (m^3-m)x^{13} - mx^6 + x^4 + 1$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu

giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A 1. **B** 0. **C** 2. **D** 3.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-(m-1)x^2+2mx+1$. Để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A $(-3;-1)$. **B** $(1;3)$. **C** $(3;4)$. **D** $(-1;1)$.

Câu 16. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2mx^3+4mx^2-(2m+2)x-2021$ đạt tại $x_0=2$. Số phần tử của tập S là

A 1. **B** 0. **C** 2. **D** 12.

Câu 17. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=-x^4-2mx^3+3mx^2-2mx-2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$. Số phần tử của tập S là

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Câu 18. Cho $y=f(x)=|x^2-5x+4|+mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số các phần tử của tập hợp S.

A 8. **B** 7. **C** 6. **D** 5.

Câu 19. Cho ba số dương a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a^2+8bc+3}}{\sqrt{a^2+2ac+4bc+2c^2+1}}$ có dạng $x\sqrt{y}$, với $x,y\in\mathbb{N}$. Tính $x+y$.

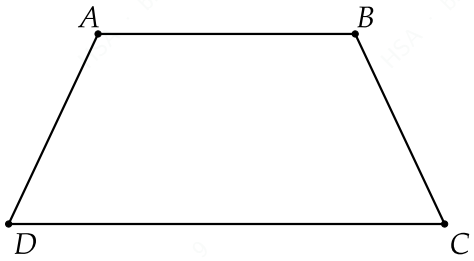
A 11. **B** 10. **C** 13. **D** 20.

Câu 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $x^6+3x^4-m^3x^3+4x^2-mx+2\geq 0$ đúng với mọi $x\in[1;3]$. Tổng của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

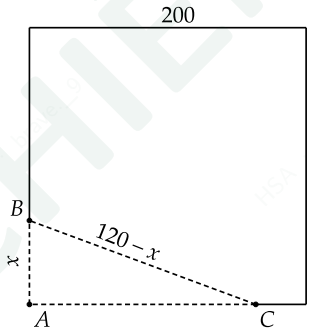
Câu 21.

Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 16 m và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (trong đó bờ sông là đường thẳng DC không phải rào và mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ấy có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



A $192\sqrt{3}$ m^2. **B** $194\sqrt{3}$ m^2. **C** $190\sqrt{3}$ m^2. **D** $196\sqrt{3}$ m^2.

Câu 22.
Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ một tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ bên. Biết $AB = x$ cm là một cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $(120 - x)$ cm. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



A 40 cm. **B** 30 cm. **C** 50 cm. **D** 20 cm.

Câu 23. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là

A $\max P = 16$. **B** $\max P = 8$. **C** $\max P = 12$. **D** $\max P = 4$.

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 2018|$ bằng

A $1008 \cdot 1009$. **B** 1009^2. **C** $1009 \cdot 2019$. **D** 2018^2.

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ sao cho hàm số $f(x) = m\sqrt{3} - \sin 2x + 4 \sin x$ không có cực trị trên $[-\pi; \pi]$?

A 2. **B** 5. **C** 4. **D** 3.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^3 + \sqrt{3x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}} \le \dfrac{m}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}\right)^2}$ có nghiệm.

A $m = 1$. **B** $m = 4$. **C** $m = 13$. **D** $m = 8$.

Câu 27. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $S=[a;b]$. Giá trị của $a\sqrt{8}+12b$ bằng

A 3. **B** 5. **C** 2. **D** 6.

Câu 28. Cho phương trình $(1-m)(x^2+1)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}+2x=0$. Biết $(a;b]$ là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó $b-a$ có giá trị là

A $2+2\sqrt{2}$. **B** $3+2\sqrt{2}$. **C** $\sqrt{2}-1$. **D** $\sqrt{2}+1$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A 1. **B** -3. **C** -8. **D** -5.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f'(x)\geq 3x^2+2x-5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)\geq m$ với mọi hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

A $m=25$. **B** $m=15$. **C** $m=20$. **D** $m=30$.

Câu 31. Cho a,b,c là các số thực dương khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8a+3b+4\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\right)}{1+(a+b+c)^2}$ gần với giá trị nào nhất trong các đáp án sau.

A 4,64. **B** 4,67. **C** 4,66. **D** 4,65.

Câu 32. Gọi T là tập các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{16x+m-4}=4x^2-18x+4-m$ có đúng một nghiệm. Tính tổng các phần tử của T.

A 20. **B** -20. **C** 0. **D** 10.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Bất phương trình $(x^2+1)f(x)\geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$ khi và chỉ khi

A $m < 27$. **B** $m < 10$. **C** $m \le 15$. **D** $m < 15$.

Câu 34. Cho x, y là hai số thực bất kỳ thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Tính $M + m$.

A $M + m = \dfrac{10}{3}$. **B** $M + m = \dfrac{16}{3}$. **C** $M + m = 3$. **D** $M + m = 5$.

Câu 35. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2y^2 - x + 1$.

A $\min P = \dfrac{17}{3}$. **B** $\min P = \dfrac{7}{3}$. **C** $\min P = 5$. **D** $\min P = \dfrac{115}{3}$.

Câu 36. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Giá trị của $A = M + 15m$ là

A $A = 17 + \sqrt{6}$. **B** $A = 17 - \sqrt{6}$. **C** $A = 17 - 2\sqrt{6}$. **D** $A = 17 + 2\sqrt{6}$.

Câu 37. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \le 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$.

A 4. **B** 12. **C** 0. **D** 8.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt[5]{m + 5\sqrt[5]{m + 5\cos x}} = \cos x$ có nghiệm.

A 11. **B** 9. **C** 8. **D** 10.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 - m - \sqrt[3]{3x - 5 + m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ sao cho $f(x) \ge 0\, \forall x \in [2;4]$?

A 4038. **B** 2020. **C** 2022. **D** 2021.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \ge 0$ với mọi giá trị $x \in [2;4]$?

A 2019. **B** 2021. **C** 4037. **D** 2020.

Câu 41. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1 - x} = 3\sqrt{1 - x} + 3(2y^2 + 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

(A) $P = 4$. (B) $P = 6$. (C) $P = 8$. (D) $P = 10$.

Câu 42. Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Lập Thạch - Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 đồng/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó mỗi khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó mỗi khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 đồng/kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

(A) 16000 đ. (B) 12000 đ. (C) 22000 đ. (D) 24000 đ.

Câu 43. Cho ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{a^2 + 8bc + 3}}{\sqrt{(a + 2c)^2 + 1}}$ có dạng $x\sqrt{y}$ $(x, y \in \mathbb{N})$. Hỏi $x + y$ bằng bao nhiêu?

(A) 7. (B) 9. (C) 13. (D) 11.

Câu 44.
Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh CD thì vận tốc là 40 km/h. Một người đi xe máy xuất phát từ A muốn đến B thì cần ít nhất bao nhiêu giờ?

(A) $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$. (B) $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{7}{2}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3} + 7}{4}$.

Câu 45. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C (với $A \in Oy$). Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho đoạn thẳng MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

(A) 12. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) 6.

Câu 46. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[4]{4\sin x + m} + \sin x = \sqrt{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8} + 2$ có nghiệm thực?

(A) 20. (B) 22. (C) 18. (D) 21.

Câu 47. Cho bất phương trình $m\sqrt{1 - x} + 12\sqrt{1 - x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1 + x} + 2m + 15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9; 9]$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$?

A 4. **B** 10. **C** 8. **D** 5.

Câu 48. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề sau đây đúng?

A $0 < m \leq 2$. **B** $4 < m \leq 8$. **C** $2 < m \leq 4$. **D** $m > 8$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2;4]$?

A 2019. **B** 4037. **C** 2020. **D** 2021.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y = m \\ (x^2 + 2x)(2x + y) = 9 \end{cases}$$

A $m \leq -10$. **B** $m \geq 6$.

C $-10 \leq m \leq 6$. **D** $m \leq -10$ hoặc $m \geq 6$.

Câu 51. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\dfrac{9a^3 + a}{b+1} = \sqrt{3b+2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 6a - b$ là

A $\dfrac{11}{3}$. **B** $\dfrac{17}{12}$. **C** $\dfrac{89}{12}$. **D** $\dfrac{82}{3}$.

Câu 52. Cho x, y là các số thực thoả mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$ là

A $2\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{114}{11}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** 3.

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị $x \in [2;4]$?

A 2020. **B** 4037. **C** 2019. **D** 2021.

Câu 54. Xét hai số thực thay đổi x, y thỏa mãn $x^3(x-2)^3 + x^2 + y^6 + y^2 = 2x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3x - 4y + 1$ là

A $3 + \sqrt{2}$. **B** $2 + 5\sqrt{2}$. **C** 9. **D** $7\sqrt{2} - 1$.

Câu 55. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$, tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

(A) 4. (B) 1. (C) -4. (D) 0.

Câu 56. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0; 2019]$ để bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \le 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số phần tử của tập S bằng

(A) 2019. (B) 1. (C) 2. (D) 2020.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(A) 2020. (B) 2019. (C) 2028. (D) 2018.

Câu 58. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - x^3) - m(x^3 - x^2) - x + e^{x-1} \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của S là

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Câu 59. Trong tất cả các hình thang cân có cạnh bên bằng 2 và cạnh đáy nhỏ bằng 4, tính chu vi P của hình thang có diện tích lớn nhất.

(A) $P = 10 + 2\sqrt{3}$. (B) $P = 12$. (C) $P = 5 + \sqrt{3}$. (D) $P = 8$.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} + \sqrt{m + \dfrac{1}{2}\cos 2x} = 3$ có nghiệm thực?

(A) 6. (B) 7. (C) 4. (D) 5.

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x + 1) = m$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Câu 62. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right)$ bằng

(A) $-\dfrac{23}{4}$. (B) -10. (C) $-\dfrac{21}{4}$. (D) $\dfrac{23}{4}$.

Câu 63. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho tồn tại các số thực không âm x, y

thỏa mãn đồng thời $x^3+y^3=1+xy$ và $x^2+y^2+xy=m$. Tìm số phần tử của S.

A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\sin x+\cos x+1}{\cos x+2}$ có giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ sao cho $y_{\min}<1$.

A $m\neq 0$. **B** $m\in[-1;1]$.

C $m\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. **D** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)=ax^3+cx+d$ $(a\neq 0)$ có $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;1]$.

A $8a-d$. **B** $24a+d$. **C** $d-16a$. **D** $d+16a$.

Câu 66. Biết m là giá trị để hệ bất phương trình $\begin{cases}0<x+y\leq 1\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1\end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $m\in\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **B** $m\in(-2;-1)$. **C** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$. **D** $m\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Câu 67. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\leq m^2-m+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;6]$ là $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$, khi đó kết quả của $a+b$ là

A -1. **B** 10. **C** 3. **D** 1.

Câu 68. Cho hàm số $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} y=y(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;3]$ bằng

A $d+8a$. **B** $d+2a$. **C** $d-16a$. **D** $d-11a$.

Câu 69. Lúc 10 giờ sáng trên sa mạc, một nhà địa chất đang ở tại vị trí A, anh ta muốn đến vị trí B (bằng ô tô) trước 12 giờ trưa, với $AB=70$ km. Nhưng trong sa mạc thì xe chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Cách vị trí A 10 km có một con đường nhựa chạy song song với đường thẳng nối từ A đến B. Trên đường nhựa thì xe có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Tìm thời gian ít nhất để nhà địa chất đến vị trí B.

A 1 giờ 58 phút. **B** 1 giờ 56 phút. **C** 1 giờ 52 phút. **D** 1 giờ 54 phút.

Câu 70. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc của dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A 6 km/h. **B** 12 km/h. **C** 9 km/h. **D** 15 km/h.

Câu 71. Cho phương trình $4\sin x + 3\cos x + \dfrac{1}{4\sin x + 3\cos x + 1} = m$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A $m \in \left(\dfrac{13}{4}; \dfrac{31}{6}\right)$. **B** $m \in (-1; 1)$. **C** $m \in (1; 3)$. **D** $m \in \left(1; \dfrac{31}{6}\right)$.

Câu 72. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m (biết $m \geq -2019$) để hệ phương trình sau có nghiệm thực?

$$\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2 - \sqrt[3]{y} - 2x^2 + x\sqrt[3]{y} = m \end{cases}$$

A 2020. **B** 2018. **C** 2019. **D** 2021.

Câu 73. Cho phương trình $(1-m)(x^2+1) + 2(x+1)\sqrt{x^2+1} + 2x = 0$. Biết $(a; b]$ là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó $b - a$ có giá trị là

A $2 + 2\sqrt{2}$. **B** $3 + 2\sqrt{2}$. **C** $\sqrt{2} - 1$. **D** $\sqrt{2} + 1$.

Câu 74. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A 1. **B** -3. **C** -8. **D** -5.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1; +\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x \in [3;10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

A $m = 25$. **B** $m = 15$. **C** $m = 20$. **D** $m = 30$.

Câu 76. Cho a, b, c là các số thực dương khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a + 3b + 4\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc}\right)}{1 + (a + b + c)^2}$$

gần với giá trị nào nhất trong các đáp án sau.

(A) 4,64. (B) 4,67. (C) 4,66. (D) 4,65.

Câu 77. Gọi T là tập các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{16x+m-4}=4x^2-18x+4-m$ có đúng một nghiệm. Tính tổng các phần tử của T.

(A) 20. (B) -20. (C) 0. (D) 10.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Bất phương trình $(x^2+1)f(x)\geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-1;2)$ khi và chỉ khi

(A) $m<27$. (B) $m<10$. (C) $m\leq 15$. (D) $m<15$.

Câu 79. Cho x,y là hai số thực bất kỳ thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$. Tính $M+m$.

(A) $M+m=\dfrac{10}{3}$. (B) $M+m=\dfrac{16}{3}$. (C) $M+m=3$. (D) $M+m=5$.

Câu 80. Cho x,y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2y^2-x+1$.

(A) $\min P=\dfrac{17}{3}$. (B) $\min P=\dfrac{7}{3}$. (C) $\min P=5$. (D) $\min P=\dfrac{115}{3}$.

Câu 81. Cho x,y là những số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A=M+15m$ là

(A) $A=17+\sqrt{6}$. (B) $A=17-\sqrt{6}$. (C) $A=17-2\sqrt{6}$. (D) $A=17+2\sqrt{6}$.

Câu 82. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x^2-xy+3=0\\2x+3y-14\leq 0\end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$.

(A) 4. (B) 12. (C) 0. (D) 8.

Câu 83. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt[5]{m+5\sqrt[5]{m+5\cos x}}=\cos x$ có nghiệm.

(A) 11. (B) 9. (C) 8. (D) 10.

Câu 84. Cho hàm số $f(x)=8x^3-36x^2+53x-25-m-\sqrt[3]{3x-5+m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ sao cho $f(x)\geq 0\,\forall x\in[2;4]$?

(A) 4038. (B) 2020. (C) 2022. (D) 2021.

Câu 85. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x)\geq mx^2\left(x^2-2\right)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

(A) 0. (B) Vô số. (C) 9. (D) 10.

Câu 86. Cho phương trình $5(5\cos x+5+m)=\left[(\cos x+1)^5-m\right]^5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực?

(A) 9. (B) 4. (C) 27. (D) 22.

Câu 87. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-1;7)$ để phương trình $(m-1)x+(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}=x^2+1$ có nghiệm?

(A) 5. (B) 7. (C) 6. (D) 1.

Câu 88. Số giá trị nguyên của $m\in(-2017;2017)$ để hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng 2 là

(A) 4033. (B) 1. (C) 2018. (D) 2017.

Câu 89. Bác An dự định xây dựng một bể chứa nước sạch cho gia đình sử dụng dạng hình hộp chữ nhật có tổng diện tích các mặt bằng 36 m^2 và độ dài đường chéo bằng 6 m. Bể nước đó có thể chứa được tối đa V m^3. Giá trị của V ở trong khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(12;13)$. (B) $(11;12)$. (C) $(9;10)$. (D) $(10;11)$.

Câu 90. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m+3\sqrt[3]{m+3\cos x}}=\cos x$ có nghiệm?

(A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.

Câu 91. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ là

(A) $\dfrac{\pi}{3}$. (B) $\dfrac{2}{\pi}$. (C) $\dfrac{3}{\pi}$. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 92. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}+3\right)+2\cos x-5=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ là nửa khoảng $(a;b]$. Tính $5a+7b$.

(A) $12+5\sqrt{2}$. (B) $6-5\sqrt{2}$. (C) $18+5\sqrt{2}$. (D) $18-5\sqrt{2}$.

Câu 93. Biết hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. Tính $|a|+|b|$.

(A) 5. (B) 7. (C) 8. (D) 3.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x}+1}$ với m là tham số thực, $m>1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 95. Cho bất phương trình $\sqrt[4]{x^2+x}+m-\sqrt[4]{2x^2+1}+x^2(x^2-1)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x>1$.

(A) $m\geq\dfrac{1}{2}$. (B) $m>1$. (C) $m>\dfrac{1}{2}$. (D) $m\geq 1$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đạo hàm trên từng khoảng xác định. Biết rằng hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-5		-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	7	$\searrow$		$\nearrow$	$-\infty$
			6				-6		

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, $(m\in(-12;12))$ để bất phương trình sau có nghiệm? $f(|f(x)|)\leq f\left(\dfrac{2^4}{m}\right)$.

(A) 17. (B) 16. (C) 15. (D) 14.

Câu 97. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [0;2018]$ để phương trình $(m-1)\sqrt{x^3+4x}-(x^2+2x)=mx+4$ có nghiệm là

(A) 2012. (B) 2010. (C) 2016. (D) 2014.

Câu 98.
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi phương trình $f(x-1)=-\dfrac{5}{x^2-6x+12}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[2;4]$?

x	1		2		3
y'		+	0	−	
y	-5	↗	-1	↘	-2

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 99. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số k để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(k-1)x^2-(k-3)x+8k^2$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Giả sử đồ thị của hàm số có 2 điểm cực trị là A, B và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+18c+12$.

(A) -2. (B) -24. (C) -36. (D) -12.

Câu 101. Cho hàm số f thỏa mãn $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x$, $\forall x \in (0;\pi)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(\sin^2 x\right)\cdot f\left(\cos^2 x\right)$ trên $\mathbb{R}$ là

(A) $\dfrac{19}{500}$. (B) $\dfrac{1}{25}$. (C) $\dfrac{6}{125}$. (D) $\dfrac{1}{20}$.

Câu 102. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có bốn nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S=a+b$.

(A) $S=\dfrac{47}{4}$. (B) $S=\dfrac{43}{4}$. (C) $S=\dfrac{3}{4}$. (D) $S=11$.

19.4 Đường tiệm cận

Bạn đọc hãy đợi nhé! Mình sẽ cập nhật những câu hỏi hay và chất hơn nữa!

19.5 Tương giao đồ thị

19.6 Tiếp tuyến

19.7 Biến đổi đồ thị và trị tuyệt đối

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

Chương

Tài Liệu Tham Khảo

Tài liệu này được biên soạn dựa trên nền tảng kiến thức từ chương trình Toán phổ thông của Việt Nam, bao gồm cả chương trình cơ bản lẫn nâng cao theo hệ cũ (trước cải cách GDPT 2018). Toàn bộ đề bài, bài tập được tham khảo và lấy tại website toanmath.com — một nguồn tài liệu toán học miễn phí, uy tín tại Việt Nam. Bạn đọc có thể **nhấn vào tên sách** để truy cập trực tiếp.

STT	Tên tài liệu	Tác giả	Nhà xuất bản
1	**Đại số 10** (Chương trình chuẩn, 175 tr.)	Trần Văn Hạo; Vũ Tuấn; Doãn Minh Cường; Đỗ Mạnh Hùng; Nguyễn Tiến Tài	NXB Giáo dục Việt Nam
2	**Đại số 10 Nâng cao** (238 tr.)	Đoàn Quỳnh; Nguyễn Huy Đoan; Nguyễn Xuân Liêm; Đặng Hùng Thắng; Trần Văn Vuông	NXB Giáo dục Việt Nam
3	**Đại số và Giải tích 11** (Chương trình chuẩn, 184 tr.)	Trần Văn Hạo; Nguyễn Mộng Hy; Trần Đức Huyên; Đinh Ngọc Hùng	NXB Giáo dục Việt Nam
4	**Đại số và Giải tích 11 Nâng cao** (240 tr.)	Đoàn Quỳnh; Nguyễn Huy Đoan; Nguyễn Tiến Tài; Đặng Hùng Thắng; Trần Phương Dung	NXB Giáo dục Việt Nam

STT	Tên tài liệu	Tác giả	Nhà xuất bản
5	**Giải tích 12** *Ch. I: Ứng dụng đạo hàm; Ch. II: Hàm số lũy thừa, mũ, logarit; Ch. III: Nguyên hàm, tích phân; Ch. IV: Số phức.* (164 tr.)	Trần Văn Hạo; Vũ Tuấn; Lê Thị Thiên Hương; Nguyễn Tiến Tài; Cấn Văn Tuất	NXB Giáo dục Việt Nam
6	**Giải tích 12 Nâng cao** *Nội dung mở rộng về khảo sát hàm số, hàm mũ–logarit, tích phân và số phức.* (236 tr.)	Đoàn Quỳnh; Nguyễn Huy Đoan; Trần Phương Dung; Nguyễn Xuân Liêm; Đặng Hùng Thắng	NXB Giáo dục Việt Nam
7	**Nắm trọn chuyên đề Vận dụng – Vận dụng cao Hàm số**	Nhiều tác giả	
8	**Các tài liệu, chuyên đề luyện thi THPT Quốc gia môn Toán**	Đỗ Văn Đức, Ái TDM, Ngọc Huyền LB	Lưu hành nội bộ / Internet
9	**Tuyển tập đề thi chính thức, đề tham khảo và đề thi thử THPT Quốc gia (2017 – 2026)**	Bộ Giáo dục và Đào tạo, Các Sở GD&ĐT, Các trường THPT	Bộ Giáo dục và Đào tạo

BÙI QUANG CHIẾN © brave._9

BÙI QUANG CHIẾN
© brave._.9

Thông tin liên hệ

https://www.facebook.com/buiquangchienhus

nhấn vào để truy cập link!

https://www.threads.com/@brave._.9

https://www.tiktok.com/@brave._.9

https://bravee9.github.io/bravemath/

quangchienb2005@gmail.com

Cuốn sách khó tránh khỏi những thiếu sót về kỹ thuật hay định nghĩa. Rất mong bạn đọc thông cảm và phản hồi lại qua các kênh liên hệ trên để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Ủng hộ mình qua mã QR ở ngay bên phải!

TECHCOMBANK

VIETQR napas 247

BUI QUANG CHIEN
888 2209 2005
TECHCOMBANK

Vào server của mình để hỏi bài

SCAN ME

https://discord.com/RF64JSxRKp