

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH GIA LAI
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2025 - 2026

Môn thi: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi thứ nhất: 18/10/2025
Đề thi gồm 01 trang, 03 câu

Câu 1 (7,0 điểm)

Cho dãy số thực dương (a_n) thỏa mãn $a_{n+1} - \frac{4}{a_{n+1}} = a_n + \frac{4}{a_n}, \forall n \geq 1$. Đặt $y_n = a_n^2 + \frac{16}{a_n^2}, \forall n \geq 1$.

a) Chứng minh $a_n + \frac{4}{a_n} = \sqrt{y_1 + 16n - 8}, \forall n \geq 1$.

b) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$.

Câu 2 (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC có trục tâm H . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC . Đường thẳng qua O và song song với BC tương ứng cắt các đường thẳng HB, HC tại các điểm E và F . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AH , các đường thẳng KE, KF tương ứng cắt đường thẳng BC tại các điểm M và N . Gọi P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng KB và KC . Đường thẳng qua B , song song với KF cắt đường thẳng qua C , song song với KE tại điểm G .

a) Chứng minh đường thẳng KB vuông góc với đường thẳng KF , đường thẳng KC vuông góc với đường thẳng KE .

b) Giả sử hai đường thẳng MQ và NP cắt nhau tại điểm T , chứng minh ba điểm T, G, K thẳng hàng.

Câu 3 (6,0 điểm)

Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa các điều kiện sau:

(i) $f(x+1) \geq f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R};$

(ii) $f(xy) \geq f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$

a) Tính $f(0), f(1)$.

b) Chứng minh $f(x) = x, \forall x \leq 0$.

----- HẾT -----

* Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;

* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
TỈNH GIA LAI
NĂM HỌC 2025 - 2026

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: **19/10/2025**

Đề thi gồm 01 trang, 03 câu

Câu 4 (6,0 điểm)

Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc $n > 2$. Biết rằng phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$ có đúng n^3 nghiệm thực đôi một phân biệt, gọi S là tập nghiệm đó.

a) Chứng minh $P(P(P(x))) - P(x)$ chia hết cho $P(x) - x$ và phương trình $P(x) = x$ có đúng n nghiệm thực đôi một phân biệt.

b) Ta định nghĩa trung bình cộng của một tập hợp $X = \{x_1; x_2; \dots; x_k\} \subset \mathbb{R}$ là số thực

$$m(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i. \text{ Gọi } S_1, S_2 \text{ tương ứng là tập nghiệm của các đa thức } P(x) - x \text{ và } P(P(x)) - x.$$

Chứng minh $m(S_1) = m(S_2 \setminus S_1) = m(S \setminus S_2)$.

Câu 5 (7,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, t) thỏa mãn $\frac{n^2 + 1}{t} = [\sqrt{n}]^2 + 2$, trong đó $[r]$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá r .

Câu 6 (7,0 điểm)

Xét n -giác đều P , tại mỗi đỉnh của P , ta ghi một trong hai số 1 hoặc -1 . Xét phép biến đổi T : Chọn một đa giác đều (có đỉnh là đỉnh của P , tâm trùng với tâm của P) hoặc một đoạn thẳng (có hai đầu mút là hai đỉnh của P , trung điểm là tâm của P), sau đó tiến hành đổi dấu cho các số ghi tại mỗi đỉnh của đa giác hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng được chọn, nghĩa là số 1 đổi thành số -1 và ngược lại.

Chứng minh rằng, tồn tại một cách ghi số ban đầu cho các đỉnh của P để sau hữu hạn lần dùng phép biến đổi T liên tiếp ta không thể thu được trạng thái mà tại tất cả các đỉnh của P đều là số 1 trong mỗi trường hợp sau:

a) Khi $n = 6$.

b) Khi $n = 30$.

----- HẾT -----

* Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;

* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.