

TUYỂN CHỌN BẤT ĐẲNG THỨC NĂM 2016

Giáo viên: Mẫn Ngọc Quang

§1: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG

Bài 1: Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$

Bài giải

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x + y)(2 - xy) - 3xy$$

$$\text{Đặt } t = x + y. \text{ ĐK: } |t| \leq 2, xy = \frac{t^2 - 2}{2}$$

$$P = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3, \text{ với } |t| \leq 2$$

$$\text{Xét } f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3 \text{ trên } [-2, 2] \Rightarrow f'(t) = -3t^2 - 3t + 6; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(1) = \frac{13}{2}; f(2) = 1; f(-2) = (-7)$$

$$\max_{[-2, 2]} f(t) = \frac{13}{2} \text{ khi } t = 1 \text{ nên } \max P = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\min_{[-2, 2]} f(t) = -7 \text{ khi } t = -2 \text{ nên } \min P = -7 \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$$

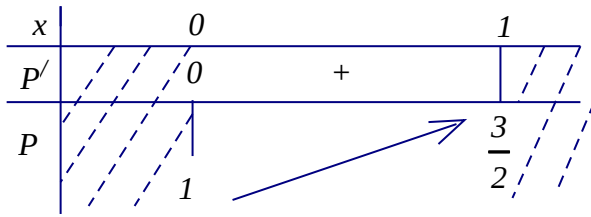
Bài 2: Cho $x \geq 0$ và $y \geq 0$ thỏa điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + \frac{1}{xy + 1}$.

Bài giải

Ta có $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$. Đặt $t = xy$, điều kiện $0 \leq t \leq 1$ khi đó

$$P = f(t) = t + \frac{1}{t+1} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$$

Bảng biến thiên



Vậy GTLN $P = \frac{3}{2}$ Khi $x = 1; y = 1$

Bài 3: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $2(a^2 + b^2) = a^2b^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

Bài giải

Ta có $a^2b^2 = 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Rightarrow ab \geq a+b$

$$a^2 + b^2 + 1 = (a+b)^2 - 2ab + 1 \leq (a+b)^2 - 2(a+b) + 1 = (a+b-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq |a+b-1|$$

$$P = \left(\frac{a}{b+1} + 1 \right) + \left(\frac{b}{a+1} + 1 \right) - 2 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

$$= (a+b+1) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} - 2$$

$$\geq (a+b+1) \frac{4}{a+b+2} + \frac{1}{|a+b-1|} - 2$$

Đặt $t = a+b$, ta có

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = (ab)^2 \leq \frac{(a+b)^4}{16} \Rightarrow a+b \geq 4$$

Xét $f(t) = \frac{4(t+1)}{t+2} + \frac{1}{t-1} - 2; t \geq 4$ ta được

$$\min P = M \inf(x) = \frac{5}{3} \text{ khi } x = y = 2$$

Bài 4: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} + \frac{xy}{x+y} - (x^2 + y^2)$$

Bài giải

$$\text{Đặt } t = x+y \Rightarrow xy = 3-t; x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = t^2 - 2(3-t) = t^2 + 2t - 6$$

$$\text{Ta có } xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \Rightarrow 3-t \leq \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{3(x^2 + y^2) + 3(x + y)}{xy + x + y + 1} + \frac{xy}{x + y} - (x^2 + y^2) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2} \text{ với } t \geq 2$$

Ta có $f'(t) = -2t + 1 - \frac{2}{t^2} < 0, \forall t \geq 2$. Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến với $t \geq 2$

$$\Rightarrow P \leq f(t) \leq f(2) = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = 1$.

Bài 5: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^2 + y^2)^2 - 2(x + y)^2 - xy(3xy - 4) + 2015$.

Bài giải

Với mọi số thực x, y ta luôn có $(x + y)^2 \geq 4xy$, nên từ điều kiện suy ra

$$(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq (x + y)^3 + 4xy \geq 2 \Rightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 1$$

$$P = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + 2xy) - xy(3xy - 4) + 2015$$

$$= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 2015 \quad (3)$$

$$\text{Do } x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \text{ nên từ (3) suy ra } P \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 2015.$$

$$\text{Đặt } x^2 + y^2 = t \text{ thì } t \geq \frac{1}{2} \text{ (do } x + y \geq 1).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 2015 \text{ với } t \geq \frac{1}{2}, \text{ có } f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \text{ với } t \geq \frac{1}{2} \text{ nên hàm số } f(t) \text{ đồng biến}$$

$$\text{trên } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right). \text{ Suy ra } \min_{t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{32233}{16}.$$

$$\text{Do đó GTNN của P bằng } \frac{32233}{16}, \text{ đạt được khi và chỉ khi } x = y = \frac{1}{2}$$

Bài 6: Cho các số dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x + y)^3}.$$

Bài giải

$$\text{Xét biểu thức } P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} - \frac{2}{3(x + y)^3}$$

$$\text{Trước hết ta chứng minh } \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \leq \frac{2}{x + y}$$

Suy ra: $P = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2}{2xy + 1} = \frac{-7t^2 + 2t + 1}{4(2t + 1)}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-7t^2 + 2t + 1}{4(2t + 1)}$ có $f'(t) = \frac{7(-t^2 - t)}{2(2t + 1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1(l) \end{cases}$

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}; f(0) = \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$, giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2}{15}$

Bài 8: Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn $3(x + y)^2 = 4(x^2 + y^2 + 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x + 2y}{x^2 + 2y^2} + \frac{2x + y}{2x^2 + y^2}$

Bài giải

Ta có $\frac{x + 2y}{x^2 + 2y^2} - \frac{1}{x + y} = \frac{xy}{(x^2 + y^2) + y^2} \cdot \frac{3}{x + y} \leq \frac{xy}{2xy + y^2} \cdot \frac{3}{x + y} = \frac{x}{2x + y} \cdot \frac{3}{x + y}$

Tương tự, ta cũng có $\frac{2x + y}{2x^2 + y^2} - \frac{1}{x + y} \leq \frac{y}{x + 2y} \cdot \frac{3}{x + y}$

Mặt khác, ta cũng có $\frac{x}{2x + y} + \frac{y}{x + 2y} \leq \frac{2}{3}$, vì bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{x^2 + y^2 + 4xy}{2x^2 + 2y^2 + 5xy} \leq \frac{2}{3}, \text{ hay } (x - y)^2 \geq 0$$

Từ đó ta có $P - \frac{2}{x + y} \leq \left(\frac{x}{2x + y} + \frac{y}{x + 2y} \right) \cdot \frac{3}{x + y} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{x + y} = \frac{2}{x + y}$. Suy ra $P \leq \frac{4}{x + y}$ (1)

Từ giả thiết ta lại có $3(x + y)^2 = 4(x^2 + y^2) + 4 \geq 2(x + y)^2 + 4$

Suy ra $(x + y)^2 \geq 4$, hay $x + y \geq 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \leq 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2, đạt được khi $x = y = 1$

Bài 9: Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x + 1)\left(1 + \frac{1}{y}\right) + (y + 1)\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Bài giải

Đặt $x + y = t \Rightarrow xy = \frac{t^2 - 1}{2}$ Biến đổi $P = x + y + \frac{x^2 + y^2 + x + y}{xy} + 2 = t + \frac{2(t + 1)}{t^2 - 1} + 2 = t + \frac{2}{t - 1} + 2$

Có $(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow t^2 \geq 4 \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow t^2 \leq 2$

Lại có $0 < x, y < 1 \Rightarrow x > x^2, y > y^2 \Rightarrow x + y > 1$. vậy $1 < t \leq \sqrt{2}$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{2}{t-1} + 2$ trên nửa khoảng $(1; \sqrt{2}]$

$$\text{Có } f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$$

$$\text{Kết luận: } \min P = \min_{(1; \sqrt{2}]} f(t) = 4 + 3\sqrt{2}$$

Bài 10: Cho x và y là hai số thực dương thay đổi thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ và $x+y=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2y + xy^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$.

Bài giải

$$\text{Ta có: } 4xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{1}{4}.$$

$$x, y \in (0; 1] \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0 \Rightarrow 1 - (x+y) + xy \geq 0 \Rightarrow 1 - 4xy + xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}.$$

$$P = x^2y + xy^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = xy(x+y) - \frac{1}{6}\left[\frac{(x+y)^2 - 2xy}{(xy)^2}\right] = 4(xy)^2 + \frac{1}{3xy} - \frac{8}{3}.$$

$$\text{Đặt } t = xy \text{ thì } P = t^2 + \frac{1}{3t} - \frac{8}{3} = f(t) \text{ với } t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right].$$

$$f'(t) = 8t - \frac{1}{3t^2} = \frac{24t^3 - 1}{3t^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right] \text{ suy ra } f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right].$$

$$\text{Do đó } f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right), \forall t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right].$$

$$\max P = -\frac{13}{12} \text{ đạt được khi và chỉ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\min P = -\frac{11}{9} \text{ đạt được khi và chỉ khi } x = 1; y = \frac{1}{3} \text{ hoặc } x = \frac{1}{3}; y = 1.$$

Bài 11: Cho hai số thực thỏa mãn $x \geq 1; y \geq 1$ và $3(x+y) = 4xy$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right)$

Bài giải

$$\text{Đặt } t = xy \text{ vì } x \geq 1 \text{ nên } 3(x+y) = 4x.y \Leftrightarrow 3x^2 + 3xy = 4x^2y \Leftrightarrow xy = \frac{3x^2}{4x-3}$$

$$\text{Có } 3(x+y) = 4x.y \Leftrightarrow x = \frac{3y}{4y-3} \text{ (vì } y \geq 1). \text{ Xét hàm số } f(y) = \frac{3y}{4y-3} \text{ trên } [1; +\infty) \text{ có}$$

$$f'(y) = \frac{-9}{(4y-3)^2} < 0, \forall y \in [1; +\infty) \Rightarrow f(y) \leq f(1) = 3 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2}{4x-3}$ trên $[1;3] \Rightarrow \frac{9}{4} \leq g(x) \leq 3$. Vậy $t \in [\frac{9}{4}; 3]$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= (x^3 + y^3) \left(1 + \frac{3}{x^3 y^3} \right) = \left[(x+y)^3 - 3xy(x+y) \right] \left(1 + \frac{3}{(xy)^3} \right) \\ &= \left[\left(\frac{4xy}{3} \right)^3 - 3xy \cdot \frac{4xy}{3} \right] \left(1 + \frac{3}{(xy)^3} \right) = \left(\frac{64t^3}{27} - 4t^2 \right) \left(1 + \frac{3}{t^3} \right) = \frac{64t^3}{27} - 4t^2 - \frac{12}{t} + \frac{64}{9} \end{aligned}$$

Xét hàm số $P(t) = \frac{64t^3}{27} - 4t^2 - \frac{12}{t} + \frac{64}{9}$ với $t \in [\frac{9}{4}; 3]$

Ta có $P'(t) = \frac{64t^2}{9} - 8t^2 - \frac{12}{t^2} = 8t \left(\frac{8}{9}t - 1 \right) + \frac{12}{t^2} > 0, \forall t \in [\frac{9}{4}; 3]$

Vậy $\text{Max} P = P(3) = \frac{280}{9}$ tại $t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

$\text{Min} P = P\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{304}{36}\right)$ tại $t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{9}{4} \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2}$

Bài 12: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

Bài giải

Ta có $P = xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq xy + \frac{2}{xy}$

Đặt $t = xy$ ta có $0 < t = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

Khi đó: $P = t + \frac{2}{t} = 32t + \frac{2}{t} - 31t \geq 2\sqrt{32 \cdot 2} - \frac{31}{4} = 16 - \frac{31}{4} = \frac{33}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Vậy $\min A = \frac{33}{4}$

Bài 13: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2).$$

Bài giải

Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$

$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6.$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0; 8]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Ta có $f(0) = 6$, $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$, $f(8) = 398$. Suy ra $A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Bài 14: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^5b + ab^5 + 2 \leq (ab+1)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{8ab+1}{2+4ab}$$

Bài giải

Ta có $(ab+1)^2 \geq a^5b + b^5a + 2 \geq 2 + ab(a^4 + b^4) \geq 2 + 2a^3b^3 \Rightarrow 1 \geq ab \geq \frac{1}{2}$

Khi đó ta có BĐT quen thuộc : $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$

$\Rightarrow P \leq \frac{2}{1+ab} + \frac{8ab+1}{2+4ab}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{1+t} + \frac{8t+1}{4t+2}$ với $t = ab; t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$\Rightarrow f(t)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P_{\max} = \frac{31}{12} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 15: Cho x, y là các số thực thuộc $(0;1)$ thỏa mãn $\frac{(x^3 + y^3)(x+y)}{xy} = (1-x)(1-y)$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + 4xy - x^2 - y^2$

Bài giải

Ta có: $(1-x)(1-y) = \frac{(x^3 + y^3)(x+y)}{xy} \Leftrightarrow 1 + xy - x - y \geq 4xy \Leftrightarrow 1 \geq 3xy + x + y \geq 3xy + 2\sqrt{xy}$

Xét $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + 4xy - x^2 - y^2 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + 2xy \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}} + 2xy$ vì

$x, y \in (0;1) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ (*)

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy) \leq 2(1+x^2)(1+y^2) \Leftrightarrow (x-y)^2(1-xy) \geq 0$. Luôn đúng vì $x, y \in (0;1)$

Suy ra $P \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}} + 2xy, xy \in \left(0; \frac{1}{9}\right]$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t}} + 2t, t \in \left(0; \frac{1}{9}\right]$. Có $f' = \frac{-1}{(1+t)\sqrt{1+t}} + 2 > 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{9}\right]$

Vậy $P \leq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{56}{9\sqrt{10}}$ nên $\max P = \frac{56}{9\sqrt{10}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$

Bài 15b: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^5b + ab^5 + 2 \leq (ab+1)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{8ab+1}{2+4ab}$

Bài giải

Ta có $(ab+1)^2 \geq a^5b + b^5a + 2 \geq 2 + ab(a^4 + b^4) \geq 2 + 2a^3b^3 \Rightarrow 1 \geq ab \geq \frac{1}{2}$

Khi đó ta có BĐT quen thuộc : $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$

$\Rightarrow P \leq \frac{2}{1+ab} + \frac{8ab+1}{2+4ab}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{1+t} + \frac{8t+1}{4t+2}$ với $t = ab; t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$\Rightarrow f(t)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P_{\max} = \frac{31}{12} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG

Bài 16: cho x, y là số không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm GTLN và nhỏ nhất của:

$$P = 5(x^5 + y^5) + x^2y^2(5\sqrt{2xy+2} - 4xy + 12)$$

Bài giải

Ta có $0 \leq x, y \leq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x - \sqrt{2}) \leq 0 \\ y^2(y - \sqrt{2}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 \leq \sqrt{2}(x^2 + y^2) = 2\sqrt{2}$

$$4 = (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \Rightarrow 2 \geq x + y$$

$$\Rightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x + y)(x^3 + y^3) \geq (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y^3})^2 = 4 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq 2$$

Đặt $t = x^3 + y^3$. Ta có : $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$$\text{Ta có } 2 = (x^2 + y^2)^3 = x^6 + y^6 + 3x^2y^2(x^2 + y^2) = x^6 + y^6 + 6x^2y^2 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^2y^3 + 6x^2y^2$$

$$\Rightarrow 2x^3y^3 - 6x^2y^2 = t^2 - 8$$

$$2(x^3 + y^3) = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = x^5 + y^5 + x^2y^3 + x^3y^2 = x^5 + y^5 + x^2y^2(x + y)$$

$$\Rightarrow x^5 + y^5 + x^2y^2(x + y) = 2t$$

$$P = 5(x^5 + y^5) + x^2y^2(5\sqrt{2xy+2} - 4xy + 12)$$

$$= -4x^3y^3 + 12x^2y^2 + 5(x^5 + y^5) + 5x^2y^2\sqrt{2+2xy}$$

$$= -2(2x^3y^3 - 6x^2y^2) + 5(x^5 + y^5) + 5x^2y^2\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}$$

$$= -2(t^2 - 8) + 5\left[\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} + x^2y^2(x + y)\right] = -2t^2 + 10t + 16 = f(t)$$

$$f'(t) = -4t + 10; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \in [2; 2\sqrt{2}]$$

$$\text{Ta có: } f(2) = 28, f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{57}{2} \text{ và } f(2\sqrt{2}) = 20\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \min_{[2; 2\sqrt{2}]} f(t) = f(2) = 28 \text{ và } \max P = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{57}{2}$$

Bài 17: Cho $2 \leq x \leq 3 \leq y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy}$

Bài giải

Xét hàm số $g(y): \frac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy} = \frac{2(x+1)}{y} + \frac{y+1}{x}$ với $2 \leq x \leq 3 \leq y$ (0.25đ)

$$g'(y) = \frac{-2(x+1)}{y^2}, g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2x(x+1)} \quad (0.25đ)$$

$$\text{Thấy min } g(y) = g(\sqrt{2x(x+1)}) = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \frac{1}{x}$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \frac{1}{x}, 2 \leq x \leq 3$ có $f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2\sqrt{\frac{1}{x}+1}} - \frac{1}{x^2} < 0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $[2;3]$

$$\text{do đó min } f(x) = f(3) = \frac{4\sqrt{6}+1}{3} \quad (0.25đ)$$

Do đó $B \geq \frac{4\sqrt{6}+1}{3}$, dấu “=” xảy ra khi $x = 3$ và $y = 2\sqrt{6}$

$$\text{Vậy min } B = \frac{4\sqrt{6}+1}{3}$$

Bài 18: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x + 3y \leq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt[3]{8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)}$$

Bài giải

Ta có: $6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \leq \left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2 \leq 36 \Rightarrow x+y+xy \leq 5$

Ta có $5(x^2 + y^2) \geq (2x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{5(x^2 + y^2)} \geq 2x+y$ và

$$(x+y-3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3) \geq 8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)$$

Suy ra $P \geq 2(xy+x+y) - 24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t = x+y+xy, t \in (0;5], P \geq f(t) = 2t - 24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t) = 2 - \frac{24 \cdot 2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}} = 2 - \frac{\sqrt[3]{(2t+6)^2} - 8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} < 0, \forall t \in (0;5]$

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $(0;5]$

Suy ra min $f(t) = f(5) = 10 - 48\sqrt[3]{2}$

Vậy min $P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$, khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 19: Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $4x^2 + y^2 \leq 8$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$P = \frac{(2x+6)^2 + (y+6)^2 + 4xy - 32}{2x+y+6}$$

Bài giải

Ta có $8 \geq 4x^2 + y^2 \geq \frac{(2x+y)^2}{2} \Leftrightarrow (2x+y)^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq 2x+y \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq 2x+y+6 \leq 10$

Ta có : $P = 2x+y+6 + \frac{4}{2x+y+6}$. Đặt $t = 2x+y+6, t \in [2;10]$

Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{4}{t}; t \in [2;10] \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2(\text{loại}) \end{cases}$

Ta có : $f(2) = 4, f(10) = \frac{52}{5}$

Vậy GTLN của P bằng $\frac{52}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy GTNN của P bằng $4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Bài 20: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + \frac{2}{(x+y)^2}$.

Bài giải

Từ giả thiết ta có $y \geq 0$ và $\frac{x^2}{2} \leq -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{6}{5}$ và $x^2 + y^2 \leq x^2 + (-2x^2 + 3x)^2 = 2x^2(2x^2 - 6x + 5)$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2(2x^2 - 6x + 5); x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta được $\underset{\left[0; \frac{6}{5}\right]}{\text{Max}} f(x) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

$$P = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{(x+y)^2} \geq (x^2 + y^2)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Đặt $t = x^2 + y^2 \Rightarrow P \geq \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, 0 < t \leq 2$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}, t \in (0; 2] \Rightarrow g'(t) = t - \frac{2}{t^2} = \frac{t^3 - 2}{t^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$

Lập bảng biến thiên ta có $\text{Min } P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ khi $x = y = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$

Bài 21: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + 2b = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^2}$$

Bài giải

Từ giả thiết và bất đẳng thức CôSi ta có:

$$a^2 + 2b = 12 \Leftrightarrow a^2 + 4 + 2b = 16 \Leftrightarrow 4a + 2b \leq 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{4a \cdot 2b} \leq 16 \Leftrightarrow 0 < ab \leq 8$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{a^2 b^2}{64} \left(\frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} \right) + \frac{ab}{8} \cdot \frac{5}{8(a-b)^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ (t > 2), \text{ ta có } P \geq \frac{1}{16} t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{16} t^2 + \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8} \text{ trên } (2; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{8} t - \frac{5}{64} \cdot \frac{1}{(t-2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên

t	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{27}{64}$	$+\infty$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có } \min_{(2; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{64}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{27}{64}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = 2, b = 4.$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{27}{64} \text{ khi } a = 2, b = 4.$$

Bài 22: Cho x, y là các số thực thỏa: $x + y = 26\sqrt{x-3} + 3\sqrt{y-2013} + 2016$ Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \frac{2016 + 2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$.

Bài giải

$$M = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 2 + \frac{2016}{\sqrt{x+y+1}} = (x+y+1)^2 - 4(x+y+1) + 5 + \frac{2016}{\sqrt{x+y+1}} \text{ Đặt } t = \sqrt{x+y+1} \text{ thì}$$

$$\text{ta được } M = t^4 - 4t^2 + 5 + \frac{2016}{t}$$

$$\text{Điều kiện của } t. \text{ Đặt } a = \sqrt{x-3}; b = \sqrt{y-2013} \text{ ta được } x = a^2 + 3; y = b^2 + 2013 \text{ và}$$

$$a^2 + 3 + b^2 + 2013 = 26a + 3b + 2016$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 26a + 3b \leq \sqrt{(26^2 + 3^2)(a^2 + b^2)}$$

$$\text{Hay } 0 \leq a^2 + b^2 \leq \sqrt{685}$$

$$\text{Từ đó ta được } x + y + 1 = a^2 + b^2 + 2017 \in [2017; 2072] \text{ nên } t \in D = [\sqrt{2017}; \sqrt{2072}]$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t^2 + 5 + \frac{2016}{t}; t \in D$

$$f'(t) = 4t^3 - 8t - \frac{2016}{t^2} = \frac{4t^5 - 8t^4 - 2016}{t^2} = \frac{4t^4(t-2) - 2016}{t^2} > 0 \forall t \in [\sqrt{2017}; \sqrt{2072}]$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên D

$$\max M = f(\sqrt{2072}) = 4284901 + \frac{36}{37} \text{ khi } t = \sqrt{2072} \text{ ta được } \begin{cases} a^2 + b^2 = 685 \\ \frac{a}{26} = \frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 26 \\ b = 3 \end{cases} \text{ hay}$$

$$x = 679; y = 2022$$

$$\min M = f(\sqrt{2017}) = 4060226 + \frac{2016}{2017} \text{ khi } t = \sqrt{2017} \text{ hay } x = 3; y = 2013$$

Bài 23: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{y + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (x + y)^2 - \sqrt{9 - x - y} + \frac{1}{\sqrt{x + y}}$.

Bài giải

Điều kiện: $x \geq 2; y \geq -1; 0 < x + y \leq 9$;

Ta có

$$0 \leq x + y - 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x - 2} + 1 \cdot \sqrt{y + 1} \leq \sqrt{3(x + y - 1)} \Rightarrow (x + y - 1)^2 \leq 3(x + y - 1) \\ \Rightarrow 0 \leq x + y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 4.$$

Đặt $t = x + y, t \in [1; 4]$, ta có $S = t^2 - \sqrt{9 - t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$S'(t) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{9-t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} > 0, \forall t \in [1; 4]. \text{ Vậy } S(t) \text{ đồng biến trên } [1; 4].$$

$$S_{\max} = S(4) = 4^2 - \sqrt{9-4} + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{33-2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 4; y = 0;$$

$$S_{\min} = S(1) = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2; y = -1.$$

Bài 24: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b = 2\sqrt{a+2} + 3\sqrt{b-2014} + 2012$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T = (a-1)^2 + (b-1)^2 + \frac{2015 + 2ab\sqrt{a+b+1}}{\sqrt{a+b+1}}$.

Bài giải

$$T = (a+b+1)^2 - 4(a+b+1) + 5 + \frac{2015}{\sqrt{a+b+1}}$$

$$\text{Max} = T = 4096577 + \frac{2015}{\sqrt{2026}}$$

$$\text{Min} = T = 4044122 + \frac{2015}{\sqrt{2013}}$$

Bài 25: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $4(x^3 + 8y^6) = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(x + 2y^2 + 2)^3}{5(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 3}$$

Bài giải

$$\forall a, b > 0 \text{ ta có: } 4(a^3 + b^3) > (a + b)^3 \quad (1)$$

$$\text{Thật vậy } 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Leftrightarrow 3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Vì $a, b > 0$ nên (2) luôn đúng. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Suy ra (1) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (1) với $a = x; b = 2y^2$, ta có:

$$1 = 4(x^3 + 8y^6) = 4[x^3 + (2y^2)^3] \geq (x + 2y^2)^3 \Rightarrow x + 2y^2 \leq 1$$

$$\text{Lại có: } 5(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 3 = 5x^2 - 5x + 5y^2 - 5y + 3$$

$$= 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 5\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) - \frac{10}{4} + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{(x + 2y^2 + 2)^3}{5(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 3} \leq \frac{(1 + 2)^3}{\frac{1}{2}} = 54. \text{ Ta có: } P = 54 \text{ khi } \begin{cases} 4(x^3 + 8y^6) = 1 \\ x = 2y^2 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $P_{\max} = 54$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 26: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x^4(xy + 1)^2}{2y^2 + 2xy + 1}.$$

Bài giải

Từ giả thiết $x^2 + y^2 = 1$, P được viết lại như sau:

$$P = \frac{y^4 + (xy + 1)^2}{2y^2 + 2xy + 1} = \frac{y^2(x^2 + y^2) + 2xy + x^2 + y^2}{2y^2 + 2xy + x^2 + y^2} = \frac{2y^2 + 2xy + x^2}{3y^2 + 2xy + x^2}$$

$$\text{Với } y = 0, y \neq 1 \text{ thì } y = \frac{2}{3}; \text{ với } x \neq 0, \text{ đặt } y = tx. \text{ Khi đó: } P = \frac{2t^2 + 2t + 1}{3t^2 + 2t + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2t^2 + 2t + 1}{3t^2 + 2t + 1} \text{ ta có TXĐ: } f'(t) = \frac{-2t^2 - 2t}{(3t^2 + 2t + 1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 - 2t = 0 \left[\begin{matrix} t = 0 \\ t = -1 \end{matrix} \right]; f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{2}{3}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra:

$$P_{\min} = \frac{1}{2} \text{ đạt được khi } t = -1 \text{ hay } \begin{cases} y = -x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$P_{\max} = 1 \text{ đạt được khi } t = 0 \text{ hay } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bài 27: Cho x và y là các số thực dương thay đổi sao cho $\log_2(x+y) = 3 + \log_2 x + \log_2 y$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{3^{2x} + 3^{-2y}}}{3^{x+1} + 3^{-y}}$.

Bài giải

Từ giả thiết $\log_2(x+y) = 3 + \log_2 x + \log_2 y$ suy ra $x+y = 8xy \leq 2(x+y)^2 \Rightarrow x+y \geq \frac{1}{2}$

Ta có: $P = \frac{\sqrt{3^{2x} + 3^{-2y}}}{3^{x+1} + 3^{-y}} = \frac{\sqrt{3^{2x+2y} + 1}}{3 \cdot 3^{x+y} + 1}$. Đặt $t = 3^{x+y}$. Vì $x+y \geq \frac{1}{2}$ nên $t \geq \sqrt{3}$

Lúc đó $P = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{3t + 1} = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{3t + 1}$ trên $[\sqrt{3}; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{t-3}{(3t+1)^2 \sqrt{t^2 + 1}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\frac{2}{3\sqrt{3}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{3}$

Vậy $P \geq \frac{1}{\sqrt{10}}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=8xy \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ y=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Bài 28: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2}$.

Bài giải

Ta dễ dàng CM được BĐT sau $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}; \forall \begin{cases} a_1, a_2, b_1, b_2 \in R \\ b_1+b_2 > 0 \end{cases}$.

(tuyệt phẩm Svac-xơ)

Ta có $3\sqrt{1+2x^2} = 3\sqrt{\frac{3^2}{9} + \frac{4x^2}{2}} \geq 3\sqrt{\frac{(3+2x)^2}{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}(3+2x)$. (1)

$2\sqrt{40+9y^2} = 2\sqrt{\frac{40^2}{40} + \frac{36y^2}{4}} \geq 2\sqrt{\frac{(40+6y)^2}{44}} = \frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow P \geq \frac{3\sqrt{11}}{11}(3+2x) + \frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y) = \frac{\sqrt{11}}{11}(49+6x+6y) = 5\sqrt{11}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}$

Bài 29: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2xy$$

Bài giải

Ta có: $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2xy = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + 2 + 2xy = \left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right)^2 + 2 + 2xy = \frac{1}{x^2 y^2} + 2xy + 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{x^2 y^2} + 2xy + 2 = \frac{1}{x^2 y^2} + xy + xy + 2 \geq 3 + 5 = 5$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; y = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Bài 30: Cho các số thực x, y với $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^6 + 4y^6$$

Bài giải

Ta có: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$ $P = x^6 + 4y^6 = x^6 + 4(1 - x^2)^3$

Đặt $t = x^2$ với $0 \leq t \leq 1$. Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4(1 - t)^3$. $f'(t) = 3t^2 - 12(1 - t)^2$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	4	$\frac{4}{9}$	1

Vậy GTNN $P = \frac{4}{9}$ khi $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

Bài 31: Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + (3x - 2)(y - 1) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + x + y + 8\sqrt{4 - x - y}$

Bài giải

Ta có giả thiết $x^2 + y^2 + (3x - 2)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = -xy - y$

Vì x, y không âm nên $-xy - y \leq 0$. Suy ra $(x + y)^2 - 3(x + y) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 2$

Đặt $t = x + y$, khi đó $t \in [1; 2]$

Ta có $P = x^2 + y^2 + x + y + 8\sqrt{4 - x - y} \leq (x + y)^2 + (x + y) + 8\sqrt{4 - (x + y)} = t^2 + t + 8\sqrt{4 - t}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + 8\sqrt{4 - t}$ với $t \in [1; 2]$

Ta có $f'(t) = 2t + 1 - \frac{4}{\sqrt{4 - t}}$, với mọi $t \in (1; 2)$. Chú ý rằng $f'(t) > 3 - \frac{4}{\sqrt{2}} > 0$ với mọi $t \in (1; 2)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$. Do đó $\max_{[1; 2]} f(t) = f(2) = 6 + 8\sqrt{2}$. Suy ra $P < 6 + 8\sqrt{2}$, dấu đẳng thức

xảy ra khi $\begin{cases} xy = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = 0$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $6 + 8\sqrt{2}$, đạt khi $x = 2; y = 0$

Bài 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$$

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $6x + 2y = x^2 + y^2 + 5$ (1) và $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ (2)

Do (1) nên: $P = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = x + 2y + \frac{4}{x + 2y + 1}$

Đặt $t = x + 2y \Rightarrow P = t + \frac{4}{t + 1}$. Theo bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\left[(x-3) + 2(y-1) \right]^2 \leq 5 \left[(x-3)^2 + (y-1)^2 \right] = 25 \quad (4) \Rightarrow -5 \leq (x-3) + 2(y-1) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq t \leq 10 \quad (1)$$

Do (1) nên theo bất Cauchy ta có: $t+1 + \frac{4}{t+1} \geq 4 \Rightarrow P \geq 3$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $t+1 = \frac{4}{t+1} \Leftrightarrow (t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow t=1$

$$\text{Khi đó:} \begin{cases} x+2y=1 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ (-2y-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 5y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=0 \\ x=\frac{17}{5}; y=-\frac{6}{5} \end{cases} \cdot \text{Vậy } P_{\min} = 3 \text{ đạt được khi } x=1; y=0 \text{ hoặc } x=-\frac{6}{5}; y=\frac{17}{5}$$

Bài 33: Cho các số thực x, y, z dương và thỏa mãn $4(x^2 - x + 1) \leq 16\sqrt{x^2 z} - 3x(y+z)^2$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $T = \frac{y+3x(x+1)}{x^2 z} + \frac{16}{(y+1)^3} - 10\sqrt{3} \sqrt{\frac{y}{x^3+2}}$

Bài giải

Cách 1:

Từ giả thiết ta có:

$$4(x^2 - x + 1) \leq 16x\sqrt{yz} - 3x(y+z)^2 \Rightarrow 4\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \leq 16\sqrt{yz} - 3(y+z)^2 \leq 16\sqrt{yz} - 3.4yz$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{yz} - 3yz \geq x + \frac{1}{x} - 1 \geq 1, t = \sqrt{yz} > 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 \leq 0 \Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow yz \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \geq y$$

$$T = \frac{y+3x(x+1)}{x^2 z} + \frac{16}{(y+1)^3} - 10\sqrt{3} \sqrt{\frac{y}{x^3+2}} = \frac{y^2+3xy}{x^2 yz} + \frac{3}{z} + \frac{16}{(y+1)^3} - 10\sqrt{3} \sqrt{\frac{y}{x^3+2}}$$

$$\text{Ta có } yz \leq 1 \Rightarrow \frac{y^2+3xy}{x^2 yz} \geq \frac{y^2+3xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\frac{y}{x}$$

$$\frac{3}{z} + \frac{16}{(y+1)^3} \geq 3y + \frac{16}{(y+1)^3} = (y+1) + (y+1) + (y+1) + \frac{16}{(y+1)^3} - 3 \geq 4.2 - 3 = 5$$

$$-10\sqrt{3} \sqrt{\frac{y}{x^3+2}} \geq -10\sqrt{3} \sqrt{\frac{y}{x^3+1+1}} \geq -10\sqrt{3} \sqrt{\frac{y}{3x}} = -10\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\text{Từ đó: } T \geq \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\frac{y}{x} - 10\sqrt{\frac{y}{x}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{y}{x}} > 0 \Rightarrow T \geq f(x) = t^4 + 3t^2 - 10t + 5$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 4t^3 + 6t - 10 = 2(t-1)(2t^2 + 2t + 5); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t=1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	5	-1	$+\infty$

Suy ra $T \geq -1 \Rightarrow \min_{t>0} T = -1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Cách 2:

Ta có $\sqrt{\frac{y}{x^3+2}} = \sqrt{\frac{y}{x^3+1+1}} \leq \sqrt{\frac{y}{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot 1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{y}{x}+1}{2}$; $\frac{y^2}{x^2} + 1 \geq 2 \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} \geq 2 \frac{y}{x} - 1$

Suy ra: $T \geq 2 \frac{y}{x} - 1 + 3 \frac{y}{x} + 5 - 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{y}{x}+1}{2} \Rightarrow T \geq -1$

$\Rightarrow \min T = -1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Cách 3. Chỉ thông qua BĐT bunhiacopxki đánh giá xử lí 2 đại lượng căn đầu tiên .

Ta có $xy \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \leq \sqrt{(x^2 y^2 + 1^2 + 1^2)(1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{3(x^2 y^2 + 2)} \Rightarrow \sqrt{x^2 y^2 + 2} \geq \frac{xy + 2}{\sqrt{3}}$

Tương tự $\sqrt{z^4 + 2} \geq \frac{z^2 + 2}{\sqrt{3}}$

Bài 34: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{27x^3 + 10}{9y} + \frac{3y^2 + 4}{8x}$$

Bài giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $(x; y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức AM-CM ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3x^3}{y} + \frac{y}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3y^2}{8x} + \frac{3x}{2}\right) + \left(\frac{9x}{8} + \frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{5y}{8} + \frac{10}{9y}\right) - \frac{21}{8}x - \frac{9}{8}y - \frac{2}{3} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x^3}{y} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{3y^2}{8x} \cdot \frac{3x}{2}} + 2\sqrt{\frac{9x}{8} \cdot \frac{1}{2x}} + 2\sqrt{\frac{5y}{8} \cdot \frac{10}{9y}} - \frac{21}{8}x - \frac{9}{8}y - \frac{2}{3} \\ &= 3x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{3} - \frac{21}{8}x - \frac{9}{8}y - \frac{2}{3} = \frac{3}{8}(x + y) + \frac{5}{2} \geq \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Vậy $\min P = \frac{13}{4}$

§2: BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN ĐỐI XỨNG

ĐIỂM RƠI ĐẸP

Bài 1: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy}$

Bài giải

Ta có: $P = \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{x^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}$ (*)

Nhận thấy: $x^2 + y^2 - xy \geq xy \forall x, y \in \mathbb{R}$. Do đó: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \forall x, y > 0$ hay $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y \forall x, y > 0$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \geq y + z \forall y, z > 0$, $\frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{z} \geq z + x \forall x, z > 0$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức vừa nhận được ở trên, kết hợp với (*), ta được:

$P \geq 2(x+y+z) = 2 \forall x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$

Hơn nữa, ta lại có $P = 2$ khi $x+y+z = \frac{1}{3}$. Vì vậy $\min P = 2$

Bài 2: Chứng minh $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$

Bài giải

Ta có x, y, z và $xyz = 1$ nên luôn tồn tại hai số cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc hai số cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là x, y

$\Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow x+y \leq xy+1$

$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{2}{(1+x)(1+y)} = \frac{2}{1+x+y+xy} \geq \frac{2}{2+2xy} = \frac{1}{1+xy} = \frac{z}{z+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2}$

Ta có: $\frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{3}{4} = \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$

Bài 3: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) \leq \frac{3}{4}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$

Bài giải

Ta có $9 = \left(\sqrt{a+1} \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{b+1} \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \sqrt{c+1} \frac{1}{\sqrt{c+1}} \right)^2 \leq P.(a+b+c+3) \Rightarrow P \geq \frac{9}{a+b+c+3}$

Giả thiết $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c) \leq \frac{4}{3} \quad (1)$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ nên nếu đặt $t = a+b+c$ thì $\frac{1}{3}t^2 - t \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 0 < t \leq 4$

Xét hàm số $f(t) = \frac{9}{t+3}$ trên $(0;4]$ ta có: $f'(t) = \frac{-9}{(t+3)^2} < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;4] \Rightarrow \min_{(0;4]} f(t) = f(4) = \frac{9}{7}$

GTNN của P là $\frac{9}{7}$ khi $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a+1=b+1=c+1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{4}{3}$

Bài 4: Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ CMR: $P = \frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)} + \frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)} + \frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)} \geq \frac{1}{3}$

Lời giải

Ta viết lại $P = \sum \frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{4}{9} \sum \left(\frac{a}{ab+1} \right)^2$

Đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \Rightarrow P \geq \frac{4}{9} \sum \left(\frac{a}{ab+1} \right)^2 = \frac{4}{9} \sum \left[\frac{xz}{y(y+z)} \right]^2$

Lại có $\sum \left[\frac{xz}{y(y+z)} \right]^2 \stackrel{Cauchy-Schwarz}{\geq} \frac{1}{3} \left[\sum \frac{xz}{y(y+z)} \right]^2$

Tiếp $\sum \frac{xz}{y(y+z)} \stackrel{Cauchy-Schwarz}{\geq} \frac{(xy+yz+xz)^2}{2xyz(x+y+z)} \geq \frac{3}{2}$

Truy hồi ta được $P \geq \frac{1}{3}$

Bài 5: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác thỏa mãn $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 1$

Chứng minh BĐT: $\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^5 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Bài giải

Đặt $\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ c+a-b=z \end{cases} \Rightarrow a = \frac{x+z}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{z+y}{2}$ và $xyz = 1$

BĐT trở thành: $\left(\frac{x+y+z}{3} \right)^5 \geq \frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz}{6} = \frac{(x+y+z)^2 - (xy+yz+xz)}{6}$

Ta có : $xy + yz + xz \geq 3 \Rightarrow \frac{(x+y+z)^2 - (xy + yz + xz)}{6} \leq \frac{(x+y+z)^2 - 3}{6}$

Vậy ta cần chứng minh : $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5 \geq \frac{(x+y+z)^2 - 3}{6}$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^5 - \frac{t^2 - 3}{6}$ với $t = x + y + z \geq 3 \Rightarrow f(t) \geq f(3) = 0$

Vậy BĐT ban đầu được chứng minh.

Bài 6: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} + \frac{x(yz+1)^2}{z^2(xz+1)} + \frac{y(xz+1)^2}{x^2(xy+1)}$$

Bài giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } P &\geq 3\sqrt[3]{\frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} \cdot \frac{x(yz+1)^2}{z^2(xz+1)} \cdot \frac{y(xz+1)^2}{x^2(xy+1)}} = 3\sqrt[3]{\frac{(xy+1)(yz+1)(zx+1)}{xyz}} \\ &\Rightarrow P \geq 3\sqrt[3]{\left(xy + \frac{1}{4x}\right) + \frac{63}{64xyz} + \left(y + \frac{1}{4y}\right) + \left(z + \frac{1}{4z}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{27.63}{64(x+y+z)^3} + 1 + 1 + 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{9}{x+y+z}\right)} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{27.63}{64 \cdot \frac{27}{8}} + 3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{3}} = \frac{15}{2} \Rightarrow P_{\min} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 7: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a\sqrt{3}}{b^2 + c^2} + \frac{b\sqrt{3}}{c^2 + a^2} + \frac{c\sqrt{3}}{a^2 + b^2}$$

Bài giải

Ta có : $\frac{a\sqrt{3}}{b^2 + c^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4 - a^2}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau $\frac{a\sqrt{3}}{4 - a^2} \geq \frac{9}{16}a^2$ (1)

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow (a\sqrt{3} - 2)^2(3a^2 + 4a\sqrt{3}) \geq 0$ (Luôn đúng $\forall a > 0$)

$$\Rightarrow P \geq \frac{9}{16}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{9}{4}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Bài 8: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a+b+c) \left(\frac{3a-b}{a^2+b} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca} \right)$$

Bài giải

$$\text{Ta có } (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} \geq \frac{3a-b}{a(a+b)}$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \frac{3a-b}{a^2+ab} = \frac{3a-b}{a} + \frac{c(3a-b)}{a(a+b)} \leq 3 - \frac{a}{b} + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow P \leq 9 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) = 9$$

Bài 9: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$$

Bài giải

$$\text{Ta có } \sqrt{1+xy+x+y} = \sqrt{(x+1)(y+1)} \leq \frac{x+y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$$

$$z+xy = x+y+1+xy = (x+1)(y+1) \leq \frac{(z+1)^2}{4}$$

$$\text{Lại có } \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} = \frac{x^4}{x^2+xyz} + \frac{y^4}{y^2+xyz} \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+(x^2+y^2)z}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} \geq \frac{(x+y)^2}{2(1+z)} = \frac{(z-1)^2}{2(z+1)}$$

$$\Rightarrow P \geq f(z) = \frac{(z-1)^2}{2(z+1)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2}$$

$$\text{Đạo hàm và lập BBT } \Rightarrow f(z) \geq f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{53}{8} \Rightarrow P_{\min} = \frac{53}{8} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}; z = \frac{5}{3}$$

Bài 10: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} + \frac{c^2(3+a)}{a}$$

Bài giải

$$\text{Ta có } \sqrt{2a^2+7b^2+16ab} \leq \sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{4a+6b}{2} = 2a+3b$$

$$\Rightarrow \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} \geq \frac{25a^2}{2a+3b}$$

Tương tự ta có $\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2 + 7c^2 + 16bc}} \geq \frac{25a^2}{2b + 3c}$

Lại có : $\frac{c^2(3+a)}{a} = \frac{3c^2}{a} + c^2 + 2c - 2c = c^2(\frac{9}{3a} + \frac{4}{2c}) + c^2 - 2c \geq \frac{25c^2}{2c + 3a} + c^2 - 2c$

$\Rightarrow P \geq 25 \sum (\frac{a^2}{2a + 3b}) + c^2 - 2c \geq 25 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} + (c-1)^2 - 1 \geq 14$

Vậy $P_{\min} = 14 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 11: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{xy} \sqrt{x^2 y^2 + 2} + \frac{1}{z} \sqrt{z^4 + 2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}$$

Bài giải

Ta có $\sqrt{x^2 y^2 + 2} = \sqrt{x^2 y^2 + 1 + 1} \geq \frac{xy + 1 + 1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{z^4 + 2} = \sqrt{z^4 + 1 + 1} \geq \frac{z^2 + 1 + 1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} &\geq \sqrt{\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \Rightarrow P \geq \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{xy+1+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2+1+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \\ &\geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{18}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &\geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\frac{x+y+z}{12}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{12}} + \frac{3}{2(x+y+z)} + \frac{1}{x+y+z} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \right) \\ &\geq 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \right) = 1 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = 1 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 12: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$

Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$

Bài giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{(a+b+c)^4}{27} \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \geq \frac{(a+b+c)^4}{3} - \frac{25(a+b+c)^2}{3} + 48 \Rightarrow 16 \geq (a+b+c)^2 \geq 9$$

$\Rightarrow a+b+c \geq 3$. Khi đó $P \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} \geq 1$

Vậy $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Câu 13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$

Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{a^2}{(1-a)^2 + 5bc} + \frac{16b^2 - 27(a+bc)^2}{36(a+c)^2}$

Bài giải

$$\text{Ta có } P = \frac{a^2}{(1-a)^2 + 5bc} + \frac{16b^2 - 27(a+bc)^2}{36(a+c)^2} = \frac{a^2}{(1-a)^2 + 5bc} + \frac{16b^2 - 27[a(a+b+c) + bc]^2}{36(a+c)^2}$$

$$= \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{16b^2 - 27(a+b)^2(a+c)^2}{36(a+c)^2} = \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{4b^2}{9(a+c)^2} - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\text{Mặt khác } \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} \geq \frac{a^2}{(b+c)^2 + \frac{5}{4}(b+c)^2} = \frac{4a^2}{9(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} \right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 \geq \frac{2}{9} \left(\frac{(a+b)^2}{ab+ac+ba+bc} \right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\geq \frac{2}{9} \left(\frac{(a+b)^2}{2ab+(a+b)c} \right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 \geq \frac{2}{9} \left(\frac{(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{2} + (a+b)c} \right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\geq \frac{2}{9} \left(\frac{(1-c)^2}{\frac{(1-c)^2}{2} + (1-c)c} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{1+c} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2$$

$$\text{Xét hàm số } f(c) = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{1+c} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 \text{ với } c \in (0;1) \Rightarrow f(c) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{9}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{-1}{9} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Câu 14: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$.

Chứng minh bất đẳng thức $P = \sum \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{bc}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c} \Rightarrow P = \sum \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + yz}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x^2 + yz} + \sqrt{y^2 + xz} + \sqrt{z^2 + xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz)}}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3[(x+y+z)^2 - (xy+yz+xz)]}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{3(x+y+z)^2 - 9}} \quad (\text{Do } xy+yz+xz \geq 3)$$

$$\text{Đặt } (x+y+z)^2 = t \Rightarrow P^2 \geq \frac{t^2}{3(t-3)} = \frac{3t+15}{12} + \frac{t-3}{12} + \frac{3}{t-3} \geq \frac{3.9+15}{12} + 2\sqrt{\frac{3}{12}} = \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 15: Cho ba số thực dương x, y, z sao cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{(1-x^4)^2} + \frac{y}{(1-y^4)^2} + \frac{z}{(1-z^4)^2} \geq \frac{81\sqrt{3}}{64}$$

(Trích đề thi thử trường chuyên Hà Nội Amsterdam)

Lời giải

Để cho tiện tính “nhằm” ta chuyển $(x, y, z) \rightarrow (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ thế thì $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{a}{(9-a^4)^2} + \frac{b}{(9-b^4)^2} + \frac{c}{(9-c^4)^2} \geq \frac{3}{64}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b^2+c^2)^2(2a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{b}{(c^2+a^2)^2(2b^2+c^2+a^2)^2} + \frac{c}{(a^2+b^2)^2(2c^2+a^2+b^2)^2} \geq \frac{3}{64}$$

Áp

dụng BĐT am-gm:

$$\frac{a}{(b^2+c^2)^2(2a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{a^3(b^2+c^2)}{128} + \frac{a^2(b^2+c^2)}{128} + \frac{2a^2(2a^2+b^2+c^2)}{256} \geq \frac{5a^2}{64}$$

$$\text{Đánh giá tương tự rồi cộng lại chú ý } \sum_{a,b,c} \left(\frac{a^2(b^2+c^2)}{128} + \frac{2a^2(2a^2+b^2+c^2)}{256} \right) = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{64} = \frac{9}{64}$$

$$\text{Ta được } \frac{a}{(9-a^4)^2} + \frac{b}{(9-b^4)^2} + \frac{c}{(9-c^4)^2} \geq \frac{3}{32} - \frac{a^3(b^2+c^2) + b^3(c^2+a^2) + c^3(a^2+b^2)}{128}$$

$$\text{Chú ý } \sum_{a,b,c} a^3(b^2+c^2) = \sum_{a,b,c} a^3(3-a^2) = \sum_{a,b,c} [-a^2(a-1)^2(a+2) + 2a^2] \leq 2 \sum_{a,b,c} a^2 = 6$$

$$\text{Từ đó Ta có ĐPCM dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 16: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$ tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} + \frac{c^2(a+3)}{a}$$

Lời giải

Ta có

$$2a^2 + 7b^2 + 16ab \leq 2a^2 + 7b^2 + 2(a^2 + b^2) + 12ab = 4a^2 + 9b^2 + 12ab = (2a+3b)^2 \Rightarrow \sqrt{2a^2+7b^2+16ab} \leq 2a+3b$$

Tương tự: $\sqrt{2b^2 + 7c^2 + 16bc} \leq 2b + 3c$ từ đó suy ra :

$P \geq \frac{25a^2}{2a+3b} + \frac{25b^2}{2b+3c} + \frac{c^2(a+3)}{a}$. Bây giờ dùng phương pháp ‘tiếp tuyến’ ta sẽ thiết lập được:

$$\frac{25a^2}{2a+3b} \geq 8a-3b \text{ và } \frac{25b^2}{2b+3c} \geq 8b-3c \text{ nên } \frac{25a^2}{2a+3b} + \frac{25b^2}{2b+3c} \geq 8a+5b-3c \text{ do đó}$$

$$P \geq 8a+5b-3c + \frac{c^2(a+3)}{a} = 15-8c+3a+c^2 + \frac{3c^2}{a} = (c-1)^2 + \frac{3(c-a)^2}{a} + 14 \geq 14$$

Vậy $\min P = 14$ khi $a = b = c = 1$

Bài 17: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = xyz$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+xz} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + 1$

Thật vậy $\sqrt{a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc} = \sqrt{a^2+a(b+c)+bc} \geq \sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$

$\Rightarrow \sqrt{a+bc} \geq a + \sqrt{bc}$. Tương tự $\sqrt{b+ac} \geq b + \sqrt{ac}$ và $\sqrt{c+ab} \geq c + \sqrt{ab}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + a + b + c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ac} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3$

Bài 18: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, x > 0, y > 0$.

$$S = \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) \Rightarrow S \geq \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a}$$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} = a$, nên $\frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} = 2\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}\right) = 2\left(a + \frac{3}{a}\right) \geq 4\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 19: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức : } P = (x+y)(y+z)(z+x) + \frac{48}{\sqrt{x+y+z+3}}$$

Bài giải

Ta có $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - 8$

Mặt khác $(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z) = 24(x+y+z) \Rightarrow xy+yz+zx \geq 2\sqrt{6(x+y+z)}$

Do đó $P \geq 2(x+y+z)\sqrt{6(x+y+z)} + \frac{48}{\sqrt{x+y+z+3}} - 8$

Đặt $t = x+y+z \Rightarrow t \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 6 \Rightarrow P \geq f(t) = 2t\sqrt{6t} + \frac{48}{\sqrt{3+t}} - 8 \Rightarrow f'(t) = \frac{3\sqrt{6t(t+3)^3} - 24}{\sqrt{(t+3)^3}} > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến $\Rightarrow f(t) \geq f(6) = 80$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 80, dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 2$

Bài 20: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$

Bài giải

Ta có $P+2 = (a+b+2c+1)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right) + 6\ln(a+b+2c)$

Mặt khác $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{3+ab} \geq \frac{4}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16}{(a+b+2c)^2}$

Đặt $t = a+b+2c \Rightarrow P \geq f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t$ với $t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = \frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$

$\Rightarrow P \geq f(t) \geq f(4) = 5 + 6\ln 4$

Vậy, GTNN của P là $5 + 6\ln 4$ khi $a = b = c = 1$.

Bài 31: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

Bài giải

Ta có: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b) + abc = ab(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$

Tương tự ta có $\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$

Bài 32: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn: $a+b+c=1$

Chứng minh rằng: $\frac{a+b^2}{b+c} + \frac{b+c^2}{c+a} + \frac{c+a^2}{a+b} \geq 2$

Bài giải

Ta có: $VT = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b} \right) = A + B$

$$A + 3 = \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right] \geq \frac{1}{2} 3\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} 3\sqrt{\frac{1}{a+b} \frac{1}{b+c} \frac{1}{c+a}} = \frac{9}{2}$$

$$1^2 = (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \right) (a+b+b+c+c+a)$$

Từ đó ta có $VT \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 = VP$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 33: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 3\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$$

Bài giải

Ta có: $(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \stackrel{Cauchy}{\geq} 3\sqrt{x^2 y^2 z^2} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}} = 9$

$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{9}{xy + yz + zx}$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Do đó: $P \geq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{9}{xy + yz + zx} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{7}{xy + yz + zx}$
 $\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)}} + \frac{7}{xy + yz + zx}$

Mặt khác: $\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)} \stackrel{Cauchy}{\leq} \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}{3} = \frac{(x + y + z)^2}{3} = 9$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq 3xy + 3yz + 3zx$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 3xy + 3yz + 3zx \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 9$$

Suy ra: $P \geq \frac{3}{9} + \frac{7}{9} = \frac{10}{9}$. Vậy $\min P = \frac{10}{9}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \sqrt{3}$

Bài 34: Cho 3 số thực dương x, y, z thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{yz} \right) + y \left(\frac{y^2}{3} + \frac{2}{zx} \right) + z \left(\frac{z^2}{3} + \frac{2}{xy} \right)$$

Bài giải

Ta có: $P = \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right) + 2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$

Áp dụng bất đẳng thức: $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + 2 \frac{xy + yz + zx}{xyz} \Rightarrow P \geq \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} \right) + \left(\frac{y^3}{3} + \frac{2}{y} \right) + \left(\frac{z^3}{3} + \frac{2}{z} \right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{2}{t}$ với $t > 0 \Rightarrow f'(t) = t^2 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^4 - 2}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{2}$

Vậy $P \geq 4\sqrt[4]{8}$ đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \sqrt[4]{2}$. Hay $P_{\min} = 4\sqrt[4]{8}$

Bài 35: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4(b+1)(c+1)} + \frac{1}{b^4(c+1)(a+1)} + \frac{1}{c^4(a+1)(b+1)} \geq \frac{3}{4}$$

Bài giải

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ khi đó vế phải trở thành $\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y+1}{8} + \frac{z+1}{8} \geq \frac{3x}{4}; \quad \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{x+1}{8} + \frac{z+1}{8} \geq \frac{3y}{4}; \quad \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} + \frac{x+1}{8} + \frac{y+1}{8} \geq \frac{3z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Bài 36: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương

Ta có $\sqrt{x+y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{(x+y) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x+y+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x+y+\frac{4}{3} \right)$

Tương tự: $\sqrt{y+z} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(y+z+\frac{4}{3} \right); \quad \sqrt{z+x} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(z+x+\frac{4}{3} \right)$

Suy ra: $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (2x+2y+2z+4) = 2\sqrt{3}.$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{2}{3}.$

Vậy $\text{Max} S = 2\sqrt{3}$ khi $x = y = z = \frac{2}{3}.$

Bài 37: Cho các số thực $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{y^2+2} + \frac{1}{z^2+2}$$

Bài giải

Không mất tổng quát, giả sử x là số lớn nhất trong 3 số x, y, z , suy ra $yz \leq 1 \leq x$

Ta chứng minh $\frac{1}{y^2+2} + \frac{1}{z^2+2} \leq \frac{2}{yz+2}$ với mọi y, z dương thỏa mãn $yz \leq 2$. Thật vậy

$$\frac{1}{y^2+2} + \frac{1}{z^2+2} \leq \frac{2}{yz+2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{yz+2} + \frac{1}{z^2+2} - \frac{1}{yz+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{y(z-y)}{(y^2+2)(yz+2)} + \frac{z(y-z)}{(z^2+2)(yz+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-y}{yz+2} \left(\frac{y}{y^2+2} - \frac{z}{z^2+2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(z-y)^2(yz-2)}{(yz+2)(y^2+2)(z^2+2)} \leq 0$$

BĐT này đúng, do y, z dương và $yz \leq 1 < 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = z$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{x^2+2} + \frac{2}{yz+2} = \frac{1}{x^2+2} + \frac{2x}{1+2x}$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy, ta có $x^2+2 = (x^2+1)+1 \geq 2x+1$, dấu bằng xảy ra khi $x = 1$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{x^2+2} + \frac{2x}{1+2x} \leq \frac{1}{2x+1} + \frac{2x}{1+2x} = 1$$

Vậy, GTLN của P bằng 1, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 38: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Bài giải

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{xyz} + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{xyz} \text{ ta có } 0 < t = \sqrt[3]{xyz} < \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó: } P \geq 3t + \frac{3}{t} = 12t + \frac{3}{t} - 9t \geq 2\sqrt{36} - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{15}{2}$$

Bài 40: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$$

Bài giải

$$\text{Ta có } 1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$ Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c = 1$

Mặt khác $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \stackrel{B.C.S}{\leq} 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Suy ra $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Vậy $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}$; $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$ $f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$

Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi a, b, c thỏa điều kiện đề bài.

Hơn nữa, với $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ và $A = \frac{324}{7}$

Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Bài 41: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2 \leq 4abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c}}{c + \sqrt{ab}}$$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$P \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}} + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ca}}} + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ca}} \right)$$

Với các số thực x, y, z ta có $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

Do đó $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ca}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}} \leq \frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$. Suy ra $P \leq \frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$

Từ giả thiết, ta có $a + b + c \leq 4032\sqrt{abc}$. Do đó $P \leq 2016$

Với $a = b = c = \frac{1}{1344^2}$, ta có $P = 2016$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2016

Bài 42: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (x-1)(y-1)(z-1)$$

Bài giải

Từ giả thiết ta có $x < xyz \Rightarrow yz > 1$ tương tự cũng có: $zx > 1, xy > 1$. Do đó có tối đa 1 trong 3 số x, y, z bé hơn 1.

TH1: Có đúng 1 số bé hơn 1, chẳng hạn: $x < 1; y \geq 1; z \geq 1$ khi đó $P \leq 0$

TH2: $x \geq 1; y \geq 1; z \geq 1$

Đặt $x-1 = a, y-1 = b, z-1 = c$. Với $a, b, c > 0$

Giả thiết bài toán trở thành $a+b+c+3=(a+1)(b+1)(c+1) \Leftrightarrow ab+bc+ca+abc=2$ (*)

Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$, ta có: $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3t^2$ (**)

Từ (*), (**) suy ra: $t^3+3t^2 \leq 2 \Leftrightarrow (t+1)(t+1+\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3}) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq \sqrt{3}-1$

Do đó $\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow abc \leq (\sqrt{3}-1)^3$ hay: $(x-1)(y-1)(z-1) \leq (\sqrt{3}-1)^3$

Dấu bằng xảy ra khi: $x=y=z=\sqrt{3}$ Vậy $\max P = (\sqrt{3}-1)^3$

Bài 43: Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn: $\log_2 a + \log_8 b^3 + \log_{32} c^5 = 0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$

Bài giải

Từ giả thiết suy ra $a, b, c > 0$ và $abc=1$, không mất tính tổng quát ta giả sử $a = \max\{a, b, c\} \Rightarrow 0 < bc \leq 1$

Ta chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+bc}}$ (1) và $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+bc}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (2)

với (1) ta có: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^2 \leq \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = \frac{1+b^2+1+c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}$

$= 1 + \frac{1-(bc)^2}{(1+b^2)(1+c^2)} \leq 1 + \frac{1-(bc)^2}{(1+bc)^2} = \frac{2}{1+bc}$ hay $\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right)^2 \leq \frac{4}{1+bc} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+bc}}$

với (2) ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+bc}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+a} + \frac{2}{\sqrt{1+bc}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+bc}} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{1+a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+bc}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+3a}{2(1+a)} - \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{1+a}} = \frac{1+3a-2\sqrt{2a}\sqrt{1+a}}{2(1+a)}$

$= \frac{(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a})^2}{2(1+a)} \geq 0$ đúng Suy ra $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+bc}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ dấu bằng khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 44: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm GTNN của biểu thức

$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} + \frac{c^3(3+a)}{a}$

Bài giải

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2+b^2$. Nên ta sẽ có:

$\sqrt{2a^2+7b^2+16ab} = \sqrt{2a^2+7b^2+2ab+14ab} \leq \sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{4a+6b}{2} = 2a+3b$

Vậy ta sẽ có: $\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} \geq \frac{25a^2}{2a+3b}$ (1) Tương tự ta cũng có: $\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}} \geq \frac{25b^2}{2b+3c}$

Mặt khác theo Cauchy – shwarz Ta có: $\frac{3c^2}{a} + 2c = c^2 \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} \right) \geq \frac{25c^2}{3a+2c}$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta sẽ có:

$$P \geq 25 \left(\frac{a^2}{2a+3b} + \frac{b^2}{2b+3c} + \frac{c^2}{2c+3a} \right) + c^2 - 2c \geq 25 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} + c^2 - 2c = 5(a+b+c) + c^2 - 2c$$

+ Mà $a+b+c=3$ theo giả thiết nên ta sẽ có: $P \geq c^2 - 2c + 15 = (c-1)^2 + 14 \geq 14$

Vậy GTNN của $P=14$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 45: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$

Bài giải

Đặt $A=P^3$ Ta có $A = \left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right) = \frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân có :

$$1-ab \geq 1 - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4} = \frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4} \geq \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$$

Tương tự có: $1-bc \geq \frac{(1+a)\sqrt{(1+c)(1+b)}}{2}$; $1-ca \geq \frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$

Do đó $A \geq \frac{1}{8} \left(\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \right)^2$. Mà $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 4^3$

Do đó min $P = 8$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 46: Cho $x, y, z > 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{xy} \sqrt{x^2 y^2 + 2} + \frac{1}{z} \sqrt{z^4 + 2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}$$

Bài giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \sqrt{x^2 y^2 + 2} + \frac{1}{z} \sqrt{z^4 + 2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{2}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{2}{z^2}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} \\ &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}, (2xy+z^2 \leq x^2+y^2+z^2=3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \frac{162}{(x+y+z)^2}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \\
 &\geq \sqrt{\frac{(x+y+z + \frac{9}{x+y+z} + \frac{9}{x+y+z})}{3}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \\
 &\geq \frac{x+y+z}{3} + \frac{6\sqrt{3}}{x+y+z} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}} \\
 t &= \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}, (t \leq 1)
 \end{aligned}$$

$$P \geq \sqrt{3}t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{t^2} + t \geq 1 + 2\sqrt{3}$$

Dấu “=” khi : $x = y = z = 1$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2y^2+2} = \sqrt{x^2y^2+1+1} \geq \frac{xy+1+1}{\sqrt{3}}; \sqrt{z^4+2} = \sqrt{z^4+1+1} \geq \frac{z^2+1+1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} \geq \sqrt{\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\Rightarrow p \geq \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{xy+1+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2+1+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{18}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

$$\text{Khi đó : } P \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{3}(x+y+z)} + \sqrt{\frac{x+y+z}{12}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{12}} + \frac{3}{2(x+y+z)} + \frac{1}{x+y+z} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\geq 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \right) = 1 + 3\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 1 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 47: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{7z + 3x^2}$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$$F^2 \leq 3[6x^2 + 12(y+z)] \leq 18 \left[x^2 + 2\sqrt{2(y^2+z^2)} \right] = 18 \left[x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)} \right]$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)}$ trên miền xác định $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{\sqrt{2(3-x^2)}} (\forall x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})) \quad f'(x) = 0 \text{ trên } (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}; \quad f(\pm\sqrt{3})=3, f(0)=2\sqrt{6}, f(\pm 1)=5$$

$$\Rightarrow \max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} f(x) = 5 \Rightarrow F^2 \leq 18.5 = 90 \Rightarrow F \leq 3\sqrt{10}. \text{ Dấu bằng khi } x=y=z=1$$

$$\max F = 3\sqrt{10} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 48: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Bài giải

$$\text{Ta có } 1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7[1-(a^2+b^2+c^2)]}$$

$$\text{Đặt } t = a^2+b^2+c^2 \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow P = f(t) = \frac{7}{t} - \frac{121}{7(1-t)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$$

$$\text{Suy ra } f(t) \geq \frac{324}{7}; \quad \forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right). \text{ Vậy } A \geq \frac{324}{7} \text{ với mọi } a, b, c \text{ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với}$$

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{3} \text{ thì } \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = \frac{7}{18} \\ a+b+c = 1 \end{cases} \text{ và } A = \frac{324}{7}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{324}{7}$$

Bài 49: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Bài giải

Áp dụng Bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta có:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc > 0 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3\sqrt{abc}$$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3, \forall a, b, c > 0$. Thật vậy:

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc \geq 1 + 3\sqrt{abc} + 3\sqrt[3]{(abc)^2} + abc = (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{2}{3(1+\sqrt{abc})} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}} = Q. \text{ Đặt } \sqrt[3]{abc} = t. \text{ Vì } a, b, c > 0 \text{ nên } 0 < abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$$

Xét hàm số $Q = \frac{2}{3(1+t^3)} + \frac{t^2}{1+t^2}$, $t \in (0;1] \Rightarrow Q'(t) = \frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} \geq 0, \forall t \in (0;1]$

Do hàm số đồng biến trên $(0;1]$ nên $Q = Q(t) \leq Q(1) = \frac{5}{6}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $P \leq \frac{5}{6}$

Vậy $\max P = \frac{5}{6}$, đạt được khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$.

Bài 50: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$.

Bài giải

Ta có $\frac{x}{z} + xz \geq 2x; \frac{z}{y} + yz \geq 2z \Rightarrow P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2x - xz + 2z - yz + 3y$

$= 2(x+z) + y(x+y+z) - xz - yz = 2(x+z) + y^2 + x(y-z)$

Do $x > 0$ và $y \geq z$ nên $x(y-z) \geq 0$. Từ đây kết hợp với trên ta được

$P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y \geq 2(x+z) + y^2 = 2(3-y) + y^2 = (y-1)^2 + 5 \geq 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt khi $x = y = z = 1$

Bài 51: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right)}$.

Bài giải

Đặt $A = P^3$ Ta có $A = \left(\frac{1}{ab}-1\right)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\left(\frac{1}{ca}-1\right) = \frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân có :

$1-ab \geq 1 - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4} = \frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4} \geq \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$

Tương tự có: $1-bc \geq \frac{(1+a)\sqrt{(1+c)(1+b)}}{2}; 1-ca \geq \frac{(1+b)\sqrt{(1+c)(1+a)}}{2}$

Do đó $A \geq \frac{1}{8} \left(\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \right)^2$. Mà $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 4^3$

Do đó $\min P = 8$ đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 52: Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4}} - \frac{9}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(z+2)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y+z+2)^2$$

$$(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \leq \frac{1}{2}(x+y)(x+y+4z) = \frac{1}{6}(3x+3y)(x+y+4z) \leq \frac{2}{3}(x+y+z)^2$$

Suy ra $P \leq \frac{8}{x+y+z+2} - \frac{27}{2(x+y+z)^2}$. Đặt $t = x+y+z$, $t > 0$ Khi đó $P \leq \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}$ với $t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3} = 0 \Leftrightarrow t = 6$, $f(6) = \frac{5}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $P \leq f(t) \leq \frac{5}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=2$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{5}{8}$. Khi $x=y=z=2$

Bài 53: Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng
 $a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2(a+b+c)}$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{ab+ca} + \sqrt{b}\sqrt{bc+ab} + \sqrt{c}\sqrt{ca+bc}\right)^2$$

$$\leq (a+b+c)2(ab+bc+ca) = 2(a+b+c) \Rightarrow \text{bất đẳng thức cần chứng minh}$$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 54: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x+y^2} + \frac{y^2}{y+z^2} + \frac{z^2}{z+x^2}$$

Bài giải

$$P = \frac{x^2}{x+y^2} + \frac{y^2}{y+z^2} + \frac{z^2}{z+x^2} = \left(x - \frac{xy^2}{x+y^2}\right) + \left(y - \frac{yz^2}{y+z^2}\right) + \left(z - \frac{zx^2}{z+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow P = x+y+z - \left(\frac{xy^2}{x+y^2} + \frac{yz^2}{y+z^2} + \frac{zx^2}{z+x^2}\right)$$

Ta có $x+y^2 \geq 2y\sqrt{x} \Rightarrow \frac{xy^2}{x+y^2} \leq \frac{xy^2}{2y\sqrt{x}} = \frac{y\sqrt{x}}{2}$; $\frac{yz^2}{y+z^2} \leq \frac{yz^2}{2z\sqrt{y}} = \frac{z\sqrt{y}}{2}$; $\frac{zx^2}{z+x^2} \leq \frac{zx^2}{2x\sqrt{z}} = \frac{x\sqrt{z}}{2}$

$$\Rightarrow P \geq (x+y+z) - \left(\frac{y\sqrt{x}}{2} + \frac{z\sqrt{y}}{2} + \frac{x\sqrt{z}}{2}\right)$$

Mặt khác $y\sqrt{x} \leq y \frac{x+1}{2} = \frac{xy+y}{2}$; $z\sqrt{y} \leq z \frac{y+1}{2} = \frac{yz+z}{2}$; $x\sqrt{z} \leq x \frac{z+1}{2} = \frac{xz+x}{2}$

$$\Rightarrow P \geq x+y+z - \frac{x+y+z+xy+yz+zx}{4} \Rightarrow P \geq \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{1}{4}(xy+yz+zx) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}(xy+yz+zx)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3 \Rightarrow P \geq \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Dấu = xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài 55: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 24$

Bài giải

Ta sử dụng bất đẳng thức cơ bản với 2 số bất kỳ x, y ta có $(x+y)^2 \geq 4xy$ dấu bằng khi $x=y$

Ta có: $(1+a)^2(1+b)^2 = [(1+a)(1+b)]^2 = [(1+ab) + (a+b)]^2 \geq 4(1+ab)(a+b)$

$$\text{Suy ra: } \frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} \geq \frac{4(1+ab)(a+b)}{1+c^2} = \frac{4a(1+b^2) + 4b(1+a^2)}{1+c^2} = 4a \frac{1+b^2}{1+c^2} + 4b \frac{1+a^2}{1+c^2}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} \geq 4b \frac{1+c^2}{1+a^2} + 4c \frac{1+b^2}{1+a^2}; \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 4c \frac{1+a^2}{1+b^2} + 4a \frac{1+c^2}{1+b^2}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\text{Vế trái: } \geq 4a \left(\frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+b^2} \right) + 4b \left(\frac{1+a^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2} \right) + 4c \left(\frac{1+b^2}{1+a^2} + \frac{1+a^2}{1+b^2} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+b^2} \geq 2; \frac{1+a^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2} \geq 2; \frac{1+b^2}{1+a^2} + \frac{1+a^2}{1+b^2} \geq 2 \quad a, b, c \text{ dương}$$

Suy ra: vế trái $\geq 8(a+b+c) \geq 24$ điều phải chứng minh

Dấu bằng khi $a=b=c=1$

Bài 56: cho các số thực dương a, b sao cho $2(a^2+b^2)+a+b=6$

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P = 6 \left(\frac{a^2+1}{a^2+a} + \frac{b^2+1}{b^2+b} \right) + \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+5}}$

Lời giải:

Chú ý là : $6 = 2(a^2+b^2)+a+b \geq (a+b)^2 + (a+b) \Rightarrow (a+b-2)(a+b+3) \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 2$.

quay lại bài

toán : áp dụng bất am-gm:

$$6 \left(\frac{a^2+1}{a^2+a} + \frac{b^2+1}{b^2+b} \right) \geq 12 \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab(a+1)(b+1)}} \geq 12 \sqrt{\frac{2a \cdot 2b}{ab(a+1)(b+1)}} = \frac{24}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{48}{a+b+2}$$

$$P \geq \frac{48}{a+b+2} + \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+5}} = \frac{48}{t+2} + \frac{t}{\sqrt{t^2+5}} \quad \text{với } t = a+b \leq 2$$

Xét $f(t) = \frac{48}{t+2} + \frac{t}{\sqrt{t^2+5}}$ ta có $f'(t) = \frac{5}{\sqrt{(t^2+5)^3}} - \frac{48}{(t+2)^2} \leq \frac{5}{\sqrt{125}} - \frac{48}{16} < 0$.

Do đó $f(t)$ nghịch biến $\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \frac{38}{3}$. vậy $\min P = \frac{38}{3}$. khi $a = b = 1$

Bài 57: Cho x, y, z là ba số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}.$$

Bài giải

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có $\sqrt{(1-x) \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{1-x + \frac{2}{3}}{2} = \frac{5-3x}{6}$

Tương tự, ta thu được $\sqrt{(1-x) \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{(1-y) \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{(1-z) \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{5-3x}{6} + \frac{5-3y}{6} + \frac{5-3z}{6} = 2 \Rightarrow P \leq \sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

§3: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ QUEN THUỘC

Bài 1: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$

Bài giải

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1$

$$1 + a^2(b+c) \geq abc + a^2(b+c) = a(ab+bc+ca) = 3a \Rightarrow \frac{1}{1+a^2(b+c)} \leq \frac{1}{3a} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{1+b^2(c+a)} \leq \frac{1}{3b} \quad (2); \quad \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{3c} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế với vế ta có:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{ab+bc+ca}{3abc} = \frac{1}{abc}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $abc = 1, ab + bc + ac = 3 \Rightarrow a = b = c = 1, (a, b, c > 0)$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương. tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$

Bài giải

$$\text{Ta có } P+11 = \left(\frac{3b+3c}{2a} + 2 \right) + \left(\frac{4a+3c}{3b} + 1 \right) + \left(\frac{12b-12c}{2a+3c} + 8 \right) = (4a+3b+3c) \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} + \frac{4}{2a+3c} \right)$$

Với mọi $x, y > 0$, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y > 0$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: } \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq \frac{4}{2a+3b}; \quad \frac{4}{2a+3b} + \frac{4}{2a+3c} \geq \frac{16}{4a+3b+3c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} + \frac{4}{2a+3b} \geq \frac{16}{4a+3b+3c}. \text{ Do đó } P+11 \geq 16 \Leftrightarrow P \geq 5$$

Vậy min $P = 5$, đạt được khi $2a = 3b = 3c$

Bài 3: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 2012xyz$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$

Bài giải

Chứng minh bổ đề: $(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4; \forall x, y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad (*)$ Dấu “=” có khi $x = y$.

Giả thiết $xy + yz + zx = 2012xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2012$

Ta có $\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ (1)

Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{1}{x+2y+z} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$ (2) và $\frac{1}{x+y+2z} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$ (3)

Cộng vế với vế (1); (2) và (3) ta nhận được:

$$A = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2012}{4} = 503$$

A lớn nhất = 503 đạt được khi $x = y = z = \frac{3}{2012}$

Bài 4: Cho 2 số x, y thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x > 0 > y \\ \frac{x^2}{2y} - 3x + 6y - \frac{4y^2}{x} - 4 \leq \frac{6}{xy} \end{cases}$

Tìm GTNN của biểu thức: $P = 2x^4 + 32y^4 + 4x^2y^2 - 2x^2 - 8y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4y^2} - 5$

Bài giải

Do (1) nên (2) $\Rightarrow x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 - 8xy \geq 12 \Leftrightarrow (x-2y)^3 - 8xy \geq 12$ (3)

Đặt $2y = -u$, $u > 0$, (3) trở thành $12 \leq (x+u)^3 + 4xu \leq (x+u)^3 + (x+u)^2 \Rightarrow 2 \leq x+u$

Ta có $P = 2(x^4 + u^4) + x^2u^2 - 2(x^2 + u^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{u^2} \right) - 5$ (0.25đ)

Ta có: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{u^2} \geq \frac{4}{x^2 + u^2}$ (4); dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = u$. Từ (4) suy ra

$$\begin{aligned} P &= 2(x^2 + u^2)^2 - 2(x^2 + u^2) - 3x^2u^2 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{u^2} \right) - 5 \geq 2(x^2 + u^2)^2 - 2(x^2 + u^2) - \frac{3}{4}(x^2 + u^2)^2 + \frac{4}{x^2 + u^2} - 5 \\ &= \frac{5}{4}(x^2 + u^2)^2 - 2(x^2 + u^2) + \frac{4}{x^2 + u^2} - 5 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + u^2 \Rightarrow P \geq f(t) = \frac{5}{4}t^2 - 2t + \frac{4}{t} - 5, t \geq 2$ (Do $x+u \geq 2$)

$f(t)$ liên tục trên $[2; +\infty)$, $f'(t) = \frac{5t^2 - 4t^2 - 8}{2t^2} = \frac{4t^2(t-1) + t^2 - 8}{2t^2} > 0, \forall t > 2$ nên

Bài 5: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(ab+2)(2ab+1)} + \frac{b^2}{(bc+2)(2bc+1)} + \frac{c^2}{(ac+2)(2ac+1)} \geq \frac{1}{3}$$

Bài giải

Ta có $P = \frac{1}{\left(b + \frac{2}{a}\right)\left(2b + \frac{1}{a}\right)} + \frac{1}{\left(c + \frac{2}{b}\right)\left(2c + \frac{1}{b}\right)} + \frac{1}{\left(a + \frac{2}{c}\right)\left(2a + \frac{1}{c}\right)}$

Vì a, b, c dương và $abc = 1$ nên đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$ với $x, y, z > 0$

Khi đó $VT = \frac{1}{\left(\frac{y}{x} + 2\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x} + 2\frac{y}{x}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{z}{y} + 2\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y} + 2\frac{z}{y}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{x}{z} + 2\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z} + 2\frac{x}{z}\right)}$

$$= \frac{x^2}{(y+2z)(z+2y)} + \frac{y^2}{(z+2x)(x+2z)} + \frac{z^2}{(x+2y)(y+2x)}$$

Ta có: $(y+2z)(z+2y) = yz + 2y^2 + 2z^2 + 4yz = 2(y+z)^2 + 5yz \leq \frac{9}{2}(y^2 + z^2)$

Suy ra $\frac{x^2}{(y+2z)(z+2y)} \geq \frac{2}{9} \frac{x^2}{y^2 + z^2}$ (1)

Tương tự có: $\frac{y^2}{(z+2x)(x+2z)} \geq \frac{2}{9} \frac{y^2}{x^2 + z^2}$ (2) ; $\frac{z^2}{(x+2y)(y+2x)} \geq \frac{2}{9} \frac{z^2}{y^2 + x^2}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) về theo vế ta được $VT \geq \frac{2}{9} \left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + x^2} \right)$

Lại có $\left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + x^2} \right) = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + x^2} \right) - 3$

$$= \frac{1}{2} \left((x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) \right) \left(\frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + x^2} \right) - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$$

Bài 6: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn : $x + y + z \geq 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{8+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{8+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{8+z^3}}$

Bài giải

Lại có $\sqrt{8+x^3} = \sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)} \leq \frac{6-x+x^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

$\sqrt{8+y^3} = \sqrt{(2+y)(4-2y+y^2)} \leq \frac{6-y+y^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases}$

$\sqrt{8+z^3} = \sqrt{(2+z)(4-2z+z^2)} \leq \frac{6-z+z^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} z=1 \\ z=2 \end{cases}$

$P \geq 2 \cdot \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz) - (x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 + 18} = 2 \cdot \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 - (x+y+z) + 18}$

Đặt $t = x + y + z$ điều kiện $t \geq 3$. Ta có $P \geq \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ với $t \geq 3$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$ trên $[3; +\infty)$

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 36 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 2$

Bài 7: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, x > 0, y > 0$.

$$S = \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) \Rightarrow S \geq \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a}.$$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} = a$, nên $\frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} = 2\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}\right) = 2\left(a + \frac{3}{a}\right) \geq 4\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $4\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 8: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$.

Bài giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

Đặt $d = \frac{1}{b}$, khi đó ta có: $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$ trở thành $a^2 + c^2 + d^2 \leq 3d$

$$\text{Mặt khác } P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{d}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{64}{\left(a + \frac{d}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{256}{(2a + d + 2c + 10)^2}$$

Mà: $2a + 4d + 2c \leq a^2 + 1 + d^2 + 4 + c^2 + 1 = a^2 + d^2 + c^2 + 6 \leq 3d + 6$ Suy ra: $2a + d + 2c \leq 6$

Do đó: $P \geq 1$ nên GTNN của P bằng 1 khi $a = 1, c = 1, b = \frac{1}{2}$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Bài giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = a + b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + 5y - 3z \\ b = x - 2y + z \\ c = -y + z \end{cases}$$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x}\right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y}\right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17;$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = (1 + \sqrt{2})a, c = (4 + 3\sqrt{2})a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$.

Bài 10: Cho a, b, c là 3 cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{(b+c-a)^3}{3a} + \frac{(c+a-b)^3}{3b}$$

Bài giải

Áp dụng BPT CAUCHY ta có

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{c}{3} + \frac{1}{3} \geq 3\sqrt{\frac{(a+b-c)^3}{3c} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{3}} = a+b-c \Rightarrow \frac{(a+b-c)^3}{3c} \geq a+b - \frac{4c}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{(b+c-a)^3}{3a} \geq b+c - \frac{4a}{3} - \frac{1}{3}; \quad \frac{(c+a-b)^3}{3b} \geq c+a - \frac{4b}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{2}{3}(a+b+c) - 1 = 1$$

$P = 1$ khi $a = b = c = 1$

Vậy $\min P = 1$ khi $a = b = c = 1$

Bài 11: Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}}$$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Cô-si, với $x > 0$, ta có:

$$\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \leq \frac{(1+x) + (1-x+x^2)}{2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Áp dụng kết quả trên với $a > 0, b > 0$ và $c > 0$, ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{b^2 + c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$; $\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng về theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(a+b)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 1 khi $a=b=c$.

Bài 12: Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} - \frac{3}{4}(a+b)^2.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức cosin, ta có $\frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} \geq \frac{a^2}{(b+c)^2 + \frac{5}{4}(b+c)^2} = \frac{4a^2}{9(b+c)^2}.$

Tương tự, ta có $\frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} \geq \frac{4b^2}{9(c+a)^2}$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(b+c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2 + 5ca} &\geq \frac{4}{9} \left(\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{2}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \right)^2 \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{a^2 + b^2 + c(a+b)}{ab + c(a+b) + c^2} \right)^2 \geq \frac{2}{9} \left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) + c^2} \right)^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{2(a+b)^2 + 4c(a+b)}{(a+b)^2 + 4c(a+b) + 4c^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Vì $a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - c$ nên

$$P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{2(1-c)^2 + 4c(1-c)}{(1-c)^2 + 4c(1-c) + 4c^2} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2$ với $c \in (0;1)$.

Ta có $f'(c) = \frac{16}{9} \left(1 - \frac{2}{c+1} \right) \cdot \frac{2}{(c+1)^2} - \frac{3}{2}(c-1)$; $f'(c) = 0 \Leftrightarrow (c-1)(64 - (3c+3)^3) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(c) \geq -\frac{1}{9}$ với mọi $c \in (0;1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq -\frac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 13: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$

Bài giải

$$P+2 = \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c) = (a+b+2c+1)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right) + 6\ln(a+b+2c)$$

Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (1); \quad \sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Thật vậy, +)} \quad \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (2+a+b)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1) \geq 0 \text{ luôn đúng vì } ab \geq 1. \text{ Dấu "=" khi } a=b \text{ hoặc } ab=1$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)^2 \geq 0. \text{ Dấu "=" khi } ab=1.$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{3+ab} \geq \frac{4}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16}{(a+b+2c)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = a+b+2c, t > 0 \text{ ta có } P+2 \geq f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t, t > 0$$

$$f'(t) = \frac{6}{t} - \frac{16(t+1)}{t^3} = \frac{6t^2 - 16t - 32}{t^3} = \frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$$

Vậy, GTNN của P là $3+6\ln 4$ khi $a=b=c=1$

Bài 14: Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}.$$

Bài giải

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{ab}{1-ab} = \frac{2ab}{2a^2+2b^2+2c^2-2ab} \leq \frac{2ab}{a^2+b^2+2c^2}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki } \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \geq \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \geq \frac{4ab}{a^2+b^2+2c^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{ab}{1-ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right).$$

$$\text{Tương tự } \frac{bc}{1-bc} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{b^2+a^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right), \quad \frac{ac}{1-ac} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+b^2} \right).$$

$$\text{Cộng lại ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng khi } a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

§4: BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN KHÔNG ĐỐI XỨNG

Bài 1: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2(2x + y - 3)} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Bài giải

Đặt $a = x - 2, b = y - 1, c = z \Rightarrow a, b, c > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$. Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$

Đặt $t = a+b+c+1 > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1; f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4} = \frac{81t^2 - (t+2)^4}{t^2(t+2)^4}$$

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 81t^2 - (t+2)^4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (do $t > 1$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

Bảng biến thiên

t	1	4	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{8}$	0

Từ BBT Ta có $\max f(x) = f(4) = \frac{1}{8}$

Vậy mà $xP = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Rightarrow x=3; y=2; z=1$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Bài giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a+2b+c \\ y = a+b+2c \\ z = a+b+3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x+5y-3z \\ b = x-2y+z \\ c = -y+z \end{cases}$$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x}\right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y}\right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17;$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = (1+\sqrt{2})a, c = (4+3\sqrt{2})a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$.

Bài 3: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $\frac{2}{3x+2y+z+1} + \frac{2}{3x+2z+y+1} = (x+y)(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x+3)^2 + y^2 + z^2 - 16}{2x^2 + y^2 + z^2}$.

Bài giải

$$\text{Ta có: } (x+y)(x+z) \leq \frac{(x+y+x+z)^2}{4} = \frac{(2x+y+z)^2}{4}; \quad 2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1} + \frac{1}{3x+2z+y+1}\right) \geq \frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \frac{8}{3(2x+y+z)+2} \leq \frac{(2x+y+z)^2}{4}$$

$$\text{Đặt } 2x+y+z = t \ (t > 0) \Rightarrow \frac{8}{3t+2} \leq \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow (t-2)(3t^2+8t+16) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 \Rightarrow 2x+y+z \geq 2$$

$$\text{Mà: } 4 \leq (2x+y+z)^2 \leq (2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2} = 1 + \frac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2} \leq 1 + \frac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = 1 + \frac{36x+6}{3x^2+2} \text{ với } x > 0. \quad f'(x) = \frac{-36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 10 \end{cases}$$

Suy ra: $f(x) \leq 10 \Rightarrow P \leq 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10. Dấu “=” xảy ra khi: $x = \frac{2}{3}, y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{2a}{a+2} + \frac{3b}{b+3} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$

Bài giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{a+2}{4} - \frac{2a}{a+2}\right) + \left(\frac{b+3}{4} - \frac{3b}{b+3}\right) + \left(\frac{c+1}{4} - \frac{c}{c+1}\right) \geq \frac{a+b+c+6}{4} - \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{4(a+2)} + \frac{(b-3)^2}{4(b+3)} + \frac{(c-1)^2}{4(c+1)} \geq \frac{(a+b+c-6)^2}{4(a+b+c+6)} \Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{a+2} + \frac{(b-3)^2}{b+3} + \frac{(c-1)^2}{c+1} \geq \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$VT(2) \geq \frac{[(a-2) + (b-3) + (c-1)]^2}{(a+2) + (b+3) + (c+1)} = \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6} = VP(2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=3; c=1$.

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Bài 5: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+2b > c$ và $a^2 + b^2 + c^2 - 2 = ab + bc + ca$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1} - \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}$.

Bài giải

$$2 + ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc \Rightarrow 2ab + ac + 1 \geq a^2 + ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow 2ab + ac + 1 \geq a + b + a + c \Rightarrow ab + ac + 1 \geq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} \Rightarrow a + b + c + a + b + 1$$

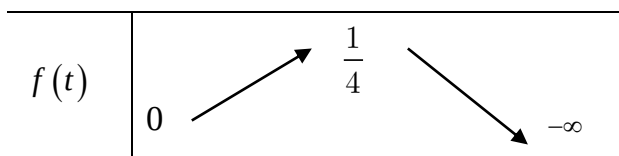
$$\geq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + a + b \Rightarrow a + b + c + a + b + 1 \geq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c+2}{2} \Rightarrow \frac{a+c+2}{a+b+c+a+b+1} \leq \frac{2}{a+b}$$

$$a + c + a + 2b - c \leq \frac{1}{4} (a + c + a + 2b - c)^2 = (a + b)^2 \Rightarrow \frac{a+b+1}{a+c+a+2b-c} \geq \frac{a+b+1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{(a+b)^2}$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{2}{a+b} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{(a+b)^2}; t = \frac{1}{a+b} > 0$$

Xét hàm số $f(t) = t - t^2; t > 0, f'(t) = 1 - 2t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	-



Kết luận: $\text{Max}P = \frac{1}{4}$, khi $a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $b = c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Bài 6: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $8(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a + b + c)^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a(1 - a^3) + b(1 - b^3) + c$.

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $5c^2 - 6(a+b)c + (a+b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(a+b) \leq c \leq a+b$.

Ta có $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4 \forall a, b \Rightarrow P \leq 2(a+b) - \frac{1}{8}(a+b)^4$

Xét $f(t) = 2t - \frac{t^4}{8}$ ($t \geq 0$), $f'(t) = 2 - \frac{t^3}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{4}$

BBT:...

t	0	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$	

$$+) \text{Max}P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \\ c = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Bài 7: Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 27$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^4 - b^4 - c^4 + ab(a^2 - b^2) + ac(a^2 - c^2) - bc(b^2 + c^2)$.

Bài giải

$$P = a^4 - b^4 - c^4 + a^3b - ab^3 + a^3c - ac^3 - b^3c - bc^3 = a^3(a + b + c) - b^3(b + a + c) - c^3(c + a + b) = 3(a^3 - b^3 - c^3)$$

$$(a^3 - b^3 - c^3) = a^3 - (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$$

$$b + c = 3 - a; \quad bc = \frac{1}{2}[(b + c)^2 - (b^2 + c^2)] = \frac{1}{2}[(3 - a)^2 - (27 - a^2)] = a^2 - 3a - 9$$

$$\text{Do đó } a^3 - b^3 - c^3 = a^3 - (3 - a)(27 - a^2 - a^2 + 3a + 9) = -a^3 + 9a^2 + 27a - 108$$

$$\text{Ta có } b + c = 3; \quad bc = a^2 - 3a - 9$$

Ta luôn có $(b+c)^2 \geq 4bc, \forall b, c$. Do đó $(3-a)^2 \geq 4(a^2 - 3a - 9) \Leftrightarrow a \in [-3; 5]$

Ta có $P = -3a^3 + 27a^2 + 81a - 324$

Xét hàm số $f(a) = -3a^3 + 27a^2 + 81a - 324$ xác định và liên tục trên $[-3; 5]$

$$f'(a) = -9a^2 + 54a + 81; \quad f(-3) = -243$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 3\sqrt{2} \notin [-3; 5]; & f(5) = 381 \\ a = 3 - 3\sqrt{2} \in [-3; 5] & f(3 - 3\sqrt{2}) = 81 - 324\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy GTLN của $f(a)$ bằng 381 khi $a = 5$

Do đó GTLN của P bằng 381 khi $a = 5; b = c = -1$

Bài 8: Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a^4 + 1}{a^2} + \frac{108b^5 + 1}{b^2} + \frac{16c^6 + 1}{c^2}.$$

Bài giải

Viết lại giả thiết về dạng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 7$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $A = 8a^2 + \frac{1}{2a^2} \geq 4, "=" \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$$B = 54b^3 + 54b^3 + \frac{2}{9b^2} + \frac{2}{9b^2} + \frac{2}{9b^2} \geq 10, "=" \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}; \quad C = 16c^4 + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{4c^2} \geq 3, "=" \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Từ đó, với $D = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3b^2} + \frac{1}{2c^2}$, theo bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacopsky- Schwarz, thì

$$P = A + B + C + D \geq 4 + 10 + 3 + \frac{1}{2+3+2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 24, "=" \Leftrightarrow a = c = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}.$$

Bài 9: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$.

Bài giải

$$\text{Đặt } t = b+c; y = c+a; z = a+b \Rightarrow a = \frac{-x+y+z}{2}; b = \frac{x-y+z}{2}; c = \frac{x+y-z}{2}$$

Do a, b, c > 0 nên x, y, z > 0. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} &= \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{4(x-y+z)}{2y} + \frac{9(x+y-z)}{2z} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - 2 - \frac{9}{2} \right) + \left(\frac{y}{2x} + \frac{2x}{y} \right) + \left(\frac{z}{2x} + \frac{9x}{2z} \right) + \left(\frac{2z}{y} + \frac{9y}{2z} \right) \geq -7 + 2 + 3 + 6 = 4. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 2(b+c) \\ a + b = 3(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 0 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy đẳng thức không xảy ra, tdo đó ta có đpcm.

Bài 10: Cho ba số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3$

Bài giải

Có $x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y) \Rightarrow P = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = 3xyz$

Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy + z^2 = 2 \Rightarrow 2z^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = z^2 - 1$

Vậy $P = 3z(z^2 - 1)$

Do $2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 = \frac{3}{2}z^2 \Rightarrow -\sqrt{\frac{4}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$

Đặt $P = f(z) = 3z^3 - 3z$ với $z \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right] = K$

Có $f'(z) = 9z^2 - 3, f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in K \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} \in K \end{cases}$

Ta có: $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

Do vậy $\max P = \frac{2}{\sqrt{3}}$ khi $z = \frac{2}{\sqrt{3}}; x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 11: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 1, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Bài giải

Đặt $a = x - 2, b = y - 1, c = z$

Ta có $a, b, c > 0$ và $P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$

Khi đó: $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Đặt $t = a+b+c+1 \Rightarrow t > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1; f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4};$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+2)^4 = 81t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (do } t > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

Từ bảng biến thiên ta có

$$\max f(t) = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow t = 4$$

$$\max P = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a + b + c + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = 3; y = 2; z = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$, đạt được khi $(x; y; z) = (3; 2; 1)$

Bài 12: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$$

Bài giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = a + b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + 5y - 3z \\ b = x - 2y + z \\ c = -y + z \end{cases}$$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} \right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} \right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = (1 + \sqrt{2})a, c = (4 + 3\sqrt{2})a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$

Bài 13: Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+c=1$. Chứng minh bất đẳng

thức: $\frac{2a}{a^2+1} + \frac{2b}{b^2+1} + \frac{c^2-1}{c^2+1} \leq \frac{3}{2}$

Bài giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta có $a^2+1 = a^2+ab+bc+ca = a(a+b)+c(b+a) = (a+b)(a+c)$.

Tương tự $b^2+1 = (b+c)(b+a)$ và $c^2+1 = (c+a)(c+b)$.

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} = \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} = \frac{1+ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}$$

$$= \frac{1+ab}{\sqrt{(1+ab)^2 + (a-b)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}$$

$$\text{Hay } \frac{2a}{a^2+1} + \frac{2b}{b^2+1} + \frac{c^2-1}{c^2+1} \leq \frac{2}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c^2-1}{c^2+1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{c^2+1}} - \frac{2}{c^2+1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 1 + \frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} \text{ trên } [1; +\infty) \text{ có } f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{4}{t^3}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có: } \max_{[1; +\infty)} f(t) = f(2) = \frac{3}{2} \text{ hay } 1 + \frac{2}{\sqrt{c^2+1}} - \frac{2}{c^2+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 14: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$

Bài giải

$$\text{Đặt } x = b+c; y = c+a; z = a+b \Rightarrow a = \frac{-x+y+z}{2}; b = \frac{x-y+z}{2}; c = \frac{x+y-z}{2}$$

Do a, b, c > 0 nên x, y, z > 0. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} &= \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{4(x-y+z)}{2y} + \frac{9(x+y-z)}{2z} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - 2 - \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{y}{2x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{z}{2x} + \frac{9x}{2z}\right) + \left(\frac{2z}{y} + \frac{9y}{2z}\right) \geq -7 + 2 + 3 + 6 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+a = 2(b+c) \\ a+b = 3(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 0 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy đẳng thức không xảy ra, do đó ta có điều phải chứng minh

Bài 15: Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + xz + 1 = x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (xy + xz + 2) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

Bài giải

Cách 1

$$\text{Từ giả thiết ta có: } y + z + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow z < 1 \Rightarrow 1 - \frac{4}{3z} < 0 \text{ và: } 1 - z \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} \geq \frac{2}{1-z}$$

$$\text{Lại có: } (xy + xz + 2) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = (x+1) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq \left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \Rightarrow P \leq \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(z) = \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3z}\right) \text{ với } z \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow f'(z) = \left(1 + \frac{2}{1-z}\right) \left(\frac{4}{(1-z)^2} \left(1 - \frac{4}{3z}\right) + \frac{4}{3z^2} \left(1 + \frac{2}{1-z}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f(z)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-125}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{-125}{3} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(4; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

Cách 2

$$xy + xz + 1 = x \Rightarrow y + z + \frac{1}{x} = 1. \text{ Đặt } a = x, b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \text{ Nên } a, b, c > 1$$

$$-3P = -(xy + yz + 2) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(3 - \frac{4}{z}\right) = (x+1) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{4}{z} - 3\right) = (a+1)(b+1)(4c-3)$$

$$\text{Ta có: } \frac{c-1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2c}{c-1} = 2 + \frac{2}{c-1}. \text{ Lại đặt: } t = c-1 > 0. \text{ Ta có:}$$

$$(a+1)(b+1)(4c-3) \geq (4c-3)(1+\sqrt{ab})^2 \geq (4c-3)\left(3 + \frac{2}{c-1}\right)^2 = (4t+1)\left(3 + \frac{2}{t}\right)^2 = f(t)$$

$$f'(t) = 4\left(3 + \frac{2}{t}\right) \frac{t(3t+2) - 4t - 1}{t^2} = 4\left(3 + \frac{2}{t}\right) \frac{(t-1)(3t+1)}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (do: } t > 1) \text{ bằng bảng biến thiên suy ra: } f(t) \geq f(1) = 125$$

$$-3P \geq 125 \Rightarrow P \leq \frac{-125}{3}. \text{ Max} = \frac{-125}{3} \text{ khi } (a, b, c) = (4, 4, 2) \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(4; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

Cách 3

$$\text{Ta có: } xy + xz + 1 = x \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{xz}{y} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} \geq \frac{xz}{y} + 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{y}} = z \cdot \frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{x}{y}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{x}{y}} > 0$$

$$\Rightarrow t^2 \geq zt^2 + 2t \Rightarrow t(1-z) \geq 2(*) \Rightarrow 1-z > 0 \Rightarrow 0 < z < 1$$

$$\text{Khi đó: } P = -(xy + xz + 2) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{4}{3z} - 1\right) = -\frac{(x+1)(y+1)}{y} \cdot \frac{1+3(1-z)}{3z} = -\left(x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1\right) \cdot \frac{1+3(1-z)}{3z}$$

$$\leq -\left(\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 1\right) \frac{1+3(1-z)}{3z} = -(t^2 + 2t + 1) \frac{1+3(1-z)}{3z}$$

$$\text{Theo (*) ta có: } t \geq \frac{2}{1-z} \Rightarrow t^2 \geq \frac{4}{(1-z)^2} \Rightarrow P \leq -\left(\frac{4}{(1-z)^2} + \frac{4}{1-z} + 1\right) \cdot \frac{1+3(1-z)}{3z}$$

$$\left(\frac{4}{(1-z)^2} + \frac{4}{1-z} + 1\right) \left(\frac{1+3(1-z)}{3(1-z)-3}\right) = \left(\frac{4}{t^2} + \frac{4}{t} + 1\right) \cdot \frac{1+3t}{3t-3} = f(t). \text{ Với } t = 1-z \Rightarrow 0 < t < 1$$

$$\text{Xét sự biến thiên của hàm số dễ dàng suy ra được hàm số đã cho có GTLN là } -\frac{125}{3} \text{ khi } t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \max P = -\frac{125}{3} \text{ khi } (x; y; z) = \left(4; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

Bài 16 : Cho các số thực dương x, y, z thuộc thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$

Bài giải

Cách 1

Ta có: $x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{16x}{x+y+z} \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} = \frac{16}{1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}}$

$$\Leftrightarrow 16 = \left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \right) = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1$$

$$= 3 + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) \geq 3 + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y}} + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = 3 + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + 2\sqrt{\frac{z}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{z}}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{z}} > 0$. Khi đó ta có: $16 \geq 3 + \frac{1}{t^2} + t^2 + 2t \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - 13t^2 + 2t + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 \left(t + \frac{1}{t} - 3 \right) \left(t + \frac{1}{t} + 5 \right) \leq 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \leq 3 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Ta có $P = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} = \left(1 - \frac{y}{x} \right) \left(1 - \frac{z}{y} \right) \left(1 - \frac{x}{z} \right) = \left(1 - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \right) \left(1 - \frac{x}{z} \right)$

$$= \left(1 + \frac{z}{x} - \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) \left(1 - \frac{x}{z} \right) \leq \left(1 + \frac{z}{x} - 2\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x}} \right) \left(1 - \frac{x}{z} \right) = \left(1 + \frac{z}{x} - 2\sqrt{\frac{z}{x}} \right) \left(1 - \frac{x}{z} \right) = \left(1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \right) (1 - t^2)$$

$$= 2 \left(t - \frac{1}{t} \right) - \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) = f(t)$$

Xét $f'(t) = 2 + \frac{2}{t^2} - 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{-2(t-1)^2(t^2+t+1)}{t^3} = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Ta có bảng biến thiên:

t	1
f'(t)	- 0 -
f(t)	↘ 0 ↗

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\text{Max } P = \text{Max } f(t) = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{4}{7-3\sqrt{5}} - \frac{8}{3-\sqrt{5}} - 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{z}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y^2 = xz \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{7-3\sqrt{5}} \cdot x \\ y = \sqrt{\frac{2}{7-3\sqrt{5}}} \cdot x \end{cases}$$

Cách 2

Giả sử b nằm giữa a và c . Đặt: $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$; $B = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \rightarrow A+B=13$. Ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) = (A^2 - 2B) + (B^2 - 2A) = (A+B)^2 - 2(A+B) - 2AB = 143 - 2AB \text{ và}$$

$$16 = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)] \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)\right]}$$

$$\geq \sqrt{(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} + 2\sqrt{(ab+bc+ca) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} + 8 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \leq 64$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) \leq 61 \Leftrightarrow AB \geq 41. \text{ Ta có:}$$

$$P^2 = \left[\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right]^2 = (A-B)^2 = (A+B)^2 - 4AB \leq 13^2 - 4 \cdot 41 = 5 \Rightarrow P \leq \sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca) \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = 2abc(a+b+c) \\ (a-b)(b-c)(c-a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \sqrt{bc} = \sqrt{a}(\sqrt{c} + \sqrt{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a(1+\sqrt{5})^2}{4} \\ c = a+b \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) = 16. \text{ Suy ra dấu "="}.$$

Cách 3

$$GT \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = 13$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x}{z}} + \sqrt{\frac{z}{x}}\right) + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq 13$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x}{z}} = t (t > 0) \Rightarrow (t^2 + 5t + 1)(t^2 - 5t + 1) < 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Xét } |P| = \left| \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} \right|$$

$$G/S \quad x \geq y \Rightarrow |P| = \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(\frac{y}{z} - 1\right) \left(1 - \frac{z}{x}\right) = \left[\frac{x}{z} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) + 1\right] \left(1 - \frac{z}{x}\right) \leq \left(\frac{x}{z} - 2\sqrt{\frac{x}{z}} + 1\right) \left(1 - \frac{z}{x}\right)$$

$$= (t-1)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = f(t)$$

$$f(t) \leq f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5} \Rightarrow f_{\max} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x:y:z = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{4} : 1 : \frac{(3+\sqrt{5})}{2}$$

Cách 4

Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, rõ ràng ta chỉ cần xét điều kiện $a \geq c \geq b$

Đặt $\frac{a}{c} = x, \frac{c}{b} = y$. Từ giả thiết ra suy ra

$$13 = xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + x + y + \frac{1}{xy} \geq xy + \frac{1}{xy} + 2\left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) \leq 15 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{xy} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ta có: $P = (1-x)(1-y) \left(1 - \frac{1}{xy}\right) \leq (1-\sqrt{xy})^2 \left(1 - \frac{1}{xy}\right)$

Đặt $\sqrt{xy} = t \in \left[1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, ta có:

$$P = f(t) = t^2 - 2t + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}; f'(t) = \frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{t^3} \geq 0$$

Vậy $P \leq f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$. Đẳng thức đạt được khi $a:b:c = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{4} : 1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Cách 5:

Từ giả thiết, ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} = 13$

$$\frac{x^2 + yz}{xy} + \frac{x^2 + yz}{xz} + \frac{y^2 + z^2}{yz} = 13 \Leftrightarrow \frac{(x^2 + yz)(y+z)}{xyz} = 13 - \frac{y^2 + z^2}{yz}$$

Mà $P = \frac{x^2 + yz - x(y+z)}{xyz} (z-y) = \left(\frac{x^2 + yz}{xyz} - \frac{y+z}{yz}\right) \cdot (z-y)$

$$= \left[\frac{13}{y+z} - \frac{y^2 + z^2}{yz(y+z)} - \frac{y+z}{yz} \right] \cdot (z-y) = \frac{13\left(1 - \frac{y}{z}\right)}{\frac{y}{z} + 1} + \frac{\left(\frac{y}{z} - 1\right) \left[\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1\right]}{\frac{y}{z} \left(\frac{y}{z} + 1\right)} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^2 - 1}{\frac{y}{z}} \dots$$

Bài 17: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a.b.c = 1$ và $1 \leq c \leq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}$

Bài giải

Áp dụng (*) ta có $Q = \frac{2}{1+ab} + \frac{1}{1+c^2} = \frac{2c}{c+1} + \frac{1}{1+c^2}$

Xét hàm $f(c) = \frac{2c}{c+1} + \frac{1}{1+c^2}$ trên $[1;4]$

Ta có $f'(c) = \frac{2c}{(c+1)^2} - \frac{2c}{(c^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{c^4 - c^3 - c + 1}{(c+1)^2(c^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{(c-1)^2(c^2+c+1)}{(c+1)^2(c^2+1)^2} > 0$ trên $[1;4]$

$\Rightarrow f(c)$ đồng biến trên $[1;4]$; $f(c) = f(4) = \frac{8}{5} + \frac{1}{17} = \frac{141}{85}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} c = 4 \\ abc = 1 \\ \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{2} \\ c = 4 \\ a = b = -\frac{1}{2} \\ c = 4 \end{cases}$

Bài 18: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = 3c^2 + 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(b+c)^2(a-c)}{a+c} + \frac{(a+c)^2(b-c)}{b+c} - c^3$$

Bài giải

Đặt $x = a + c$, $y = b + c$, $x, y > 0$ ta có:

$$P = \frac{x^2(x-2c)}{x} + \frac{y^2(y-2c)}{y} - c^3 = x^2 + y^2 - 2c\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}\right) - c^3 \quad (0.5)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x + y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y \Leftrightarrow a = b$, nên: $P \leq x^2 + y^2 - 2c(x + y) - c^3 \quad (0.5)$

Nhưng $x^2 + y^2 - 2c(x + y) = a^2 + b^2 - 2c^2 = (a^2 + b^2 - 3c^2) + c^2 = 4 + c^2$

nên $P \leq -c^3 + 4 + c^2 \quad (0.5)$

Xét hàm số $U = f(t) = -t^3 + t^2 + 4, t \in (0; +\infty)$; $f'(t) = -3t^2 + 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$

Từ đó ta có: $P \leq \frac{112}{27}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $c = \frac{2}{3}$

Bài 19: Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ 2(a^2 + 1) \geq b^2 + c^2 + 4bc \end{cases}$ CMR: $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + c^2 + 1} \leq \frac{8}{4a^2 + (b+c)^2 + 4}$

Bài giải

$$BDT \Leftrightarrow [4(a^2 + 1) + (b + c)^2][2(a^2 + 1) + (b + c)^2 - 2bc] \leq 8[(a^2 + 1)^2 + (a^2 + 1)(b^2 + c^2) + b^2c^2]$$

$$\Leftrightarrow [4(a^2 + 1) + (b + c)^2][2(a^2 + 1) + (b + c)^2 - 2bc] \leq 8[(a^2 + 1)^2 + (a^2 + 1)(b^2 + c^2) - 2bc(a^2 + 1) + b^2c^2]$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a^2 + 1 \\ y = (b + c)^2 \Rightarrow 2x \geq y + 2z \Leftrightarrow 2x - y \geq 2z > 0 \\ z = bc \end{cases}$$

$$BDT \Leftrightarrow [4x + y][2x + y - 2z] \leq 8[x^2 + xy - 2xz + z^2] \Leftrightarrow 8x^2 + 6xy - 8zx + y^2 - 2yz \leq 8x^2 + 8xy - 16xz + 8z^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 8zx - y^2 + 2yz + 8z^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(xy - 4xz - 3yz + 12z^2) + 8yz - 16z^2 - y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 3z)(y - 4z) - (y - 4z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 4z)(2x + z - y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq 4z \Leftrightarrow (b + c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow b = c$$

Bài 20: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \min\{a, b, c\}$

Bài giải

Giả sử $c = \min(a, b, c)$

$$\text{Khi đó } P = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - c = a + b + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\text{Lại có } (a + 1)(b + 1)(c + 1) = 5 \Rightarrow a + b + ab + 1 = \frac{5}{c + 1}$$

$$\text{Mặt khác } 5 \geq (c + 1)(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{5}{c + 1}}$$

$$\text{Từ đó } \Rightarrow P \leq a + b + ab + 1 + 2\sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \leq \frac{5}{c + 1} + 2\sqrt{\frac{5c}{c + 1}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(c) = \frac{5}{c + 1} + 2\sqrt{\frac{5c}{c + 1}} \Rightarrow f(c)_{\max} = f\left(\frac{1}{4}\right) = 6$$

Vậy $P_{\max} = 6$ tại $(a, b, c) = (1, 1, \frac{1}{4})$ và các hoán vị.

Bài 21: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{a + c}} + \sqrt{\frac{b}{b + c}} - \frac{9\sqrt{(a + c)(b + c)}}{8c}$$

Bài giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{a}{a + c}} = 2\sqrt{\frac{a}{a + c}} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{a}{a + c} + \frac{1}{4} \Rightarrow P \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{a + c} + \frac{b}{b + c} - \frac{9\sqrt{c^2 + 1}}{8c}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{a}{a + c} + \frac{b}{b + c} = 2 - c\left(\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c}\right) \leq 2 - \frac{2c}{\sqrt{(a + c)(b + c)}} = 2 - \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c} \right) \leq \frac{1}{2} + 2 - 3 = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{3}{\sqrt{7}} \right)$$

Câu 22: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + 2b > c$ và $a^2 + b^2 + c^2 - 2 = ab + bc + ca$. Tìm giá trị lớn nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1} - \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}$$

Bài giải

$$\text{Ta có : } 2 + ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc \Rightarrow 2(ab + ac + 1) \geq a^2 + ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow 2(ab + ac + 1) \geq (a+b)(a+c) \Rightarrow ab + ac + 1 \geq \frac{(a+b)(a+c)}{2}$$

$$\Rightarrow a(b+c) + a + b + 1 \geq \frac{(a+b)(a+c)}{2} + (a+b)$$

$$\Rightarrow a(b+c) + a + b + 1 \geq \frac{(a+b)(a+c+2)}{2} \Rightarrow \frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1} \leq \frac{2}{a+b}$$

$$\text{Lại có : } (a+c)(a+2b-c) \leq \frac{1}{4}(a+c+a+2b-c)^2 = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)} \geq \frac{a+b+1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{(a+b)^2} \Rightarrow P \leq \frac{2}{a+b} - \frac{1}{(a+b)} - \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{(a+b)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{a+b} (t > 0) \text{ Xét hàm } f(t) = t - t^2 (t > 0) \Rightarrow f'(t) = 1 - 2t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}; b=c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Câu 23: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

Bài giải

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(1+2b)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2b} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$$

$$\text{Đặt } d = \frac{1}{b} \text{ mà } a^2b^2 + c^2b^2 + 1 \leq 3b \Rightarrow a^2 + c^2 + d^2 \leq 3d$$

$$\text{Lại có } P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{d}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq \frac{64}{\left(a + \frac{d}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{256}{(2a + d + 2c + 10)^2}$$

Do $2a + 4d + 2c \leq a^2 + 1 + d^2 + 4 + c^2 + 1 = a^2 + c^2 + d^2 + 6 \leq 3d + 6 \Rightarrow 2a + d + 2c \leq 6 \Rightarrow P \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1; c = 1; b = \frac{1}{2}$

Bài 24: cho các số thực dương a, b, c và $c = a^2 + ab + b^2$ tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} - \frac{3(ab + 2)\sqrt{2c^2 + 36}}{4ab(2c + 3)^2}$$

Bài giải

Bài này khá hack não thì phải. Trước tiên lưu ý

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} - \frac{1}{2} = \frac{4 - a^2b^2}{(a^2 + 2)(b^2 + 2)} = \frac{(2 - ab)(2 + ab)}{2(a^2 + 2)(b^2 + 2)}$$
 ta sẽ chứng minh :

$$\frac{(2 - ab)(2 + ab)}{2(a^2 + 2)(b^2 + 2)} - \frac{3(ab + 2)\sqrt{2c^2 + 36}}{4ab(2c + 3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2ab(2 - ab)}{(a^2 + 2)(b^2 + 2)} \leq \frac{3\sqrt{2c^2 + 36}}{(2c + 3)^2}$$
 chú ý là:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2) = a^2b^2 + 4 + 2(a^2 + b^2) \geq 2(a^2 + ab + b^2) + 3 = 2c + 3$$

Ngoài ra $ab(2 - ab) = 1 - (ab - 1)^2 \leq 1$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2}{2c + 3} \leq \frac{3\sqrt{2(c^2 + 18)}}{(2c + 3)^2} \Leftrightarrow (c - 12)^2 \geq 0 : \text{đúng từ đó } P \leq \frac{1}{2} \text{ dấu bằng xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = \left(\frac{\sqrt{13} + 3}{2}; \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{13} - 3}{2}; \frac{\sqrt{13} + 3}{2} \right) \text{ vậy } \max P = \frac{1}{2}$$

Bài 25: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 26$ tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \frac{2(x + y)}{8x^2 + y^2 + 2x + 29} - \frac{3}{(x + z + 1)^2} + 10\sqrt{(x + z)(y + 2)} - xz - 2y$$

Bài giải

$$(*) \text{Ta có } 2(xz + 2y) + 30 = 2xz + 4y + x^2 + y^2 + z^2 + 4 = (x + z)^2 + (y + 2)^2 \geq 2(x + z)(y + 2)$$

$$\Rightarrow xz + 2y \geq (x + z)(y + 2) - 15. \text{ mặt khác } (x + z)(y + 2) + 25 \geq 10\sqrt{(x + z)(y + 2)}$$

$$\text{Từ đó } 10\sqrt{(x + z)(y + 2)} - xz - 2y \leq 10\sqrt{(x + z)(y + 2)} - (x + z)(y + 2) + 15 \leq 40$$

$$(*) \text{Tiếp theo ta sẽ chứng minh } \frac{2(x + y)}{8x^2 + y^2 + 2x + 29} \leq \frac{1}{x + z + 1} \Leftrightarrow 2(x + y)(z + x + 1) \leq 8x^2 + y^2 + 2x + 29$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + xy + yz + zx) + 2(x + y) \leq 8x^2 + y^2 + 2x + (x^2 + y^2 + z^2) + 3$$

$$\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) + 2y \leq 7x^2 + 2y^2 + z^2 + 3. \text{ áp dụng BĐT am-gm :}$$

$$2z(x + y) \leq z^2 + (x + y)^2 \Rightarrow 2(xy + yz + zx) \leq z^2 + x^2 + 4xy + y^2 \text{ ta chỉ cần có:}$$

$$z^2 + x^2 + 4xy + y^2 + 2y \leq 7x^2 + 2y^2 + z^2 + 3 \Leftrightarrow 6x^2 + y^2 - 4xy - 2y + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 + (y - x - 2)^2 \geq 0 : \text{đúng. Từ đây suy ra :}$$

$$\frac{2(x + y)}{8x^2 + y^2 + 2x + 29} - \frac{3}{(z + x + 1)^2} \leq \frac{1}{z + x + 1} - \frac{3}{(z + x + 1)^2} = \frac{1}{12} - 3\left(\frac{1}{z + x + 1} - \frac{1}{6}\right)^2 \leq \frac{1}{12}$$

Từ các đánh giá trên ta có: $P \leq \frac{1}{12} + 40$ dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 3, 4)$. vậy $\max P = \frac{1}{12} + 40$

Bài 26: Cho các số dương a, b, c sao cho $a + b + c \leq 6$ tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \frac{abc(5ab + 8ca + 9bc)}{(4a + 3b)(5b + 4c)(3c + 5a)}$$

Bài giải

Trước hết ta viết lại P dưới dạng : $P = \frac{abc(5ab + 8ca + 9bc)}{(4a + 3b)(5b + 4c)(3c + 5a)} = \frac{\frac{5}{c} + \frac{8}{b} + \frac{9}{a}}{\left(\frac{4}{b} + \frac{3}{a}\right)\left(\frac{5}{c} + \frac{4}{b}\right)\left(\frac{3}{a} + \frac{5}{c}\right)}$

Đặt $x = \frac{3}{a}$; $y = \frac{4}{b}$ và $z = \frac{5}{c}$ giả thiết $\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} \leq 6$ và cần tìm $\max P = \frac{3x + 2y + z}{(x + y)(y + z)(z + x)}$

Ta có $36 \geq \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z}\right)^2 = \frac{9}{x^2} + \frac{16}{y^2} + \frac{25}{z^2} + \frac{24}{xy} + \frac{30}{xz} + \frac{40}{yz}$ áp dụng bất am-gm:

$9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{18}{zx}$ và $16\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \frac{32}{yz}$ nên $\frac{9}{x^2} + \frac{16}{y^2} + \frac{25}{z^2} \geq \frac{18}{zx} + \frac{32}{yz}$ từ đó

$36 \geq \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z}\right)^2 \geq \frac{24}{xy} + \frac{48}{xz} + \frac{72}{yz} = \frac{24(3x + 2y + z)}{xyz} \Rightarrow \frac{3x + 2y + z}{xyz} \leq \frac{3}{2}$ mặt khác

$P = \frac{3x + 2y + z}{(x + y)(y + z)(z + x)} \leq \frac{3x + 2y + z}{2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx}} = \frac{3x + 2y + z}{8xyz} \leq \frac{3}{16}$

Dấu= xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2 \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}\right)$ vậy $\max P = \frac{3}{16}$

Bài 27: Cho ba số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = x^3 + y^3 + z^3$.

Bài giải

Có $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y) \Rightarrow P = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = 3xyz$

Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 2 \Rightarrow 2z^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = z^2 - 1$

Vậy $P = 3z(z^2 - 1)$

Do $2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 + z^2 = \frac{3}{2}z^2 \Rightarrow -\sqrt{\frac{4}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$

Đặt $P = f(z) = 3z^3 - 3z$ với $z \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right] = K$

$$\text{Có } f'(z) = 9z^2 - 3, f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in K \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} \in K \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do vậy } \max P = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ khi } z = \frac{2}{\sqrt{3}}; x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 28: Cho a, b, c thuộc đoạn $[1, 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{4b+4c} + \frac{(b+c)^2 + 2bc}{c^2 + 4bc}$$

Bài giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{a}{4b+4c} + \frac{b^2}{c^2+4bc} + 1 = \frac{a^2}{4ab+4ac} + \frac{b^2}{c^2+4bc} + 1$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{(a+b)^2}{c^2+4ab+4c(a+b)} + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{c^2+(a+b)^2+4c(a+b)} + 1 = \frac{t^2}{t^2+4t+1}, t = \frac{a+b}{2} \in [1; 4]$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2}{t^2+4t+1}. \text{ Khi đó } f'(t) = \frac{2t+4t^2}{(t^2+4t+1)^2} > 0$$

$$P \geq f(1) = \frac{1}{6}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a = b = \frac{c}{2}.$$

Bài 29: Cho x, y, z là các số thực dương $x + y + z^2 = xy + 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x}{x^2+y^2+18} + \frac{y}{x+y+4z} - \frac{4(x+y)}{25z}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy = 2(x + y + z^2 - 5) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10 \geq 2(x + y + z^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 18 \geq 2(x + y) + 2(z^2 + 4) \geq 2(x + y) + 8z = 2(x + y + 4z)$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{2x}{x^2+y^2+18} \leq \frac{2x}{2(x+y+4z)} = \frac{x}{x+y+4z}$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{x}{x+y+4z} + \frac{y}{x+y+4z} - \frac{4(x+y)}{25z}$$

$$= \frac{x+y}{x+y+4z} - \frac{4(x+y)}{25z} = \frac{\frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z}+4} - \frac{4(x+y)}{25z} = f(t) = \frac{t}{t+4} - \frac{4t}{25}$$

$$\text{Với } t = \frac{x+y}{z} > 0 \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{t}{t+4} - \frac{4t}{25}, \text{ có}$$

$$f'(t) = \frac{4}{(t+4)^2} - \frac{4}{25}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t+4)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Do đó suy ra } f(t) \leq f(1) = \frac{1}{25} \Rightarrow P_{\max} = \frac{1}{25}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + y = z; x = y \\ x + y + z^2 = xy + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{25}$.

§5: BẤT ĐẲNG THỨC DÒN VỀ TỔNG A+B+C

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số, ba số ta được:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} &= \frac{2}{a + \sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2b} + \sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{4c}}} \geq \frac{2}{a + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + 2b\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{4} + b + c\right)} \\ &= \frac{3}{2(a+b+c)} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}} \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{a+b+c}} > 0$ thì $P \geq f(t)$, với $f(t) = \frac{3t^2}{2} - 3t$.

Ta có $f(t) = \frac{3}{2}(t-1)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow P \geq -\frac{3}{2}$.

$$\text{Min } P = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 2b \\ b = 4c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{21} \\ b = \frac{4}{21} \\ c = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Bài 2: Cho các số thực dương a, b, c thỏa: $4(a^3 + b^3) + c^3 = 2(a+b+c)(ac+bc-2)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2a^2}{3a^2 + b^2 + 2a(c+2)} + \frac{b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b)^2 + c^2}{16}$

Bài giải

Áp dụng BĐT: $x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3$; $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, $\forall x, y > 0$, kết hợp với giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3 \leq (a+b)^3 + c^3 \leq 4(a^3 + b^3) + c^3 = 2(a+b+c)(c(a+b)-2)$$

$$\leq 2(a+b+c) \left(\frac{(a+b+c)^2}{4} - 2 \right) \Rightarrow a+b+c \geq 4$$

dấu “=” xảy ra khi $a+b=c>0$

Khi đó sử dụng BĐT AM–GM ta có:

$$\frac{2a^2}{3a^2 + b^2 + 2a(c+2)} = \frac{a}{a+c+2 + \left(\frac{b^2}{2a} + \frac{a}{2}\right)}$$

$$\leq \frac{a}{a+c+2 + 2\sqrt{\frac{b^2}{2a} \cdot \frac{a}{2}}} = \frac{a}{a+b+c+2} \quad \text{dấu "=" xảy ra khi } a=b>0$$

$$\text{Và } (a+b)^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \Rightarrow P \leq \frac{a+b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b+c)^2}{32}$$

$$\text{Đặt } t = a+b+c \geq 4 \Rightarrow P \leq f(t) = \frac{t}{t+2} - \frac{t^2}{32}$$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+2)^2} - \frac{t}{16} = \frac{32 - t(t+2)^2}{16(t+2)^2} < 0, \forall t \geq 4$$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[4; +\infty)$.

Do đó $P \leq f(t) \leq f(4) = \frac{1}{6}$. Vậy GTLN của P bằng $\frac{1}{6}$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b, a+b=c \\ a+b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1, c=2$$

Bài 3: Cho a, b, c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Bài giải

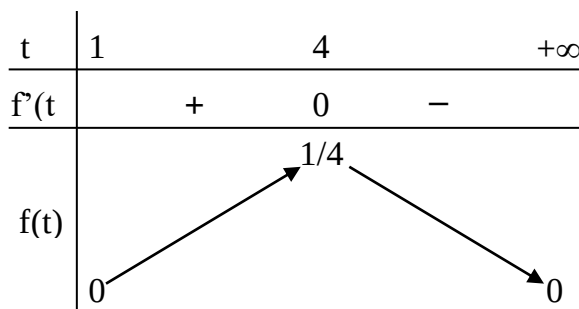
$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (c+1)^2] \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{2}{a+b+c+1} - \frac{54}{(a+b+c+3)^3}$$

$$= \frac{2}{t} - \frac{54}{(t+2)^3} = f(t) \quad \text{với } t = a+b+c+1 \quad (t > 1)$$

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{162}{(t+2)^4}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=1(\text{loại}) \end{cases}$$



Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 4 : Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\text{Đặt } t = a+b+c, t > 0. \text{ Khi đó ta có: } P \geq \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}} \text{ với } t > 0 \text{ ta có } f'(t) = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Do đó ta có } \min_{t>0} f(t) = -\frac{3}{2} \text{ khi và chỉ khi } t = 1$$

$$\text{Vậy ta có } P \geq -\frac{3}{2}, \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } -\frac{3}{2} \text{ khi và chỉ khi } (a, b, c) = \left(\frac{16}{21}, \frac{4}{21}, \frac{1}{21}\right).$$

Bài 5 : Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{3a^4 + 3b^4 + 25c^3 + 2}{(a+b+c)^3}$

Bài giải

$$\text{Áp dụng BĐT Cô - Si ta có: } 2a^4 + (a^4 + 1) \geq 2a^4 + 2a^2 \geq 4a^3 \text{ hay } 3a^4 + 1 \geq 4a^3.$$

Tương tự $3b^4 + 1 \geq 4b^3 \Rightarrow M \geq \frac{4a^3 + 4b^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3}$

Mà $(a-b)^2(a+b) \geq 0 \Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

$\Rightarrow M \geq \frac{(a+b)^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3} = \left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^3 + 25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3 = \left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right)^3 + 25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$

Đặt $t = \frac{c}{a+b+c}$ ($0 < t < 1$)

Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 25t^3$ ($0 < t < 1$) có: $f'(t) = -3[(1-t)^2 - (5t)^2]$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy $\min f(t) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36}$ khi $t = \frac{1}{6}$ hay $\min M = \frac{25}{36}$ $a=b=1, c=\frac{2}{5}$.

Bài 6 : Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 5(a+b+c) - 2ab$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c + 48\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\right)$

Bài giải

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 5(a+b+c) - 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 + c^2 = 5(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$(a+b)^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \leq 5(a+b+c) \Rightarrow 0 < a+b+c \leq 10$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a+10}{3}}}; \sqrt{\frac{a+10}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+10}{3}} \cdot 4 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a+10}{3} + 4\right) = \frac{a+22}{12}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} \geq \frac{12}{a+22}$

$\sqrt[3]{b+c} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(b+c) \cdot 8 \cdot 8} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{b+c+8+8}{3} = \frac{b+c+16}{12} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} \geq \frac{12}{b+c+16}$

$\Rightarrow P \geq a+b+c + 48 \cdot 12 \left(\frac{1}{a+22} + \frac{1}{b+c+16}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\frac{1}{a+22} + \frac{1}{b+c+16} \geq \frac{4}{a+b+c+38} \Rightarrow P \geq a+b+c + \frac{2304}{a+b+c+38}$$

Đặt $t = a+b+c \Rightarrow t \in (0;10] \Rightarrow P \geq t + \frac{2304}{t+38}$. Xét hàm $f(t) = t + \frac{2304}{t+38}$ trên $(0;10]$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{2304}{(t+38)^2} = \frac{(t-10)(t+86)}{(t+38)^2} \Rightarrow f'(t) \leq 0 \forall t \in (0;10]$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0;10] \Rightarrow f(t) \geq f(10), \forall t \in (0;10]; f(10) = 58 \Rightarrow P \geq 58$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b+c=10 \\ a+b=c \\ \frac{a+10}{3}=4 \\ b+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy Min } P = 58, \text{ đạt được khi } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$$

Bài 7: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a^2+a+4} + \sqrt{b^2+b+4} + \sqrt{c^2+c+4}$$

Bài giải

Ta chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{x^2+x+4} \leq \frac{2x+6}{3} \forall x \in [0;3]$

Bình phương rồi biến đổi tương đương ta được $5x(x-3) \leq 0$ đúng $\forall x \in [0;3]$

Lần lượt cho $x=a; b; c$ rồi cộng các vế của bất đẳng thức ta được

$$P \leq \frac{2(a+b+c)+18}{3} = 8$$

Bài 8: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn: $5a+5b+5c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{1}{\sqrt[3]{2a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2c+3a}}$$

Bài giải

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{2a+3b} = \sqrt[3]{(2a+3b)1.1} \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{2a+3b+1+1}{3} = \frac{2a+3b+2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2a+3b}} \geq \frac{3}{2a+3b+2} \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: } 2a+3b=1$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{\sqrt[3]{2b+3c}} \geq \frac{3}{2b+3c+2} \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: } 2b+3c=1$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2c+3a}} \geq \frac{3}{2c+3a+2} \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: } 2c+3a=1$$

Với $x > 0, y > 0, z > 0$, ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \stackrel{\text{cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &\geq 3\left(\frac{1}{2a+3b+2}+\frac{1}{2b+3c+2}+\frac{1}{2c+3a+2}\right) \\ &\geq \frac{27}{2a+3b+2+2b+3c+2+2c+3a+2} = \frac{27}{5a+5b+5c+6} = 3 \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 3$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1/5$

Bài 9: Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2} + \frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2} + \frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2} \geq 1$$

Bài giải

$$\text{Ta có } (y+\sqrt{zx}+z)^2 = (\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{z})^2 \leq (y+x+z)(y+z+z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y+\sqrt{zx}+z)^2} \geq \frac{1}{(x+y+z)(y+2z)} \Leftrightarrow \frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2} \geq \frac{2x^2+xy}{(x+y+z)(y+2z)}$$

$$= \frac{1}{(x+y+z)} \left(\frac{2x^2+xy}{y+2z} + x - x \right) = \frac{1}{(x+y+z)} \left(\frac{2x^2+2xy+2xz}{y+2z} - x \right) = \frac{2x}{y+2z} - \frac{x}{x+y+z}$$

Tương tự, cộng lại ta được:

$$\text{VT (1)} \geq \frac{2x}{y+2z} + \frac{2y}{z+2x} + \frac{2z}{x+2y} - 1 = 2 \left(\frac{x^2}{xy+2xz} + \frac{y^2}{yz+2yx} + \frac{z^2}{zx+2zy} \right) - 1 \geq \frac{2(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} - 1$$

Chứng minh được $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$. Suy ra VT (1) $\geq 2 - 1 = 1$

Đẳng thức xảy ra $x = y = z$

Bài 10: Cho a, b, c là các dương thỏa mãn: $2(a^2+b^2+c^2) = ab+bc+ca+3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a+b+c+3}$$

Bài giải

$$\text{Với } a, b, c \text{ là các dương ta có: } (a^2+b^2+c^2) \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \text{ và } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\text{Bởi vậy: } \frac{2(a+b+c)^2}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 9, \text{ từ đó: } 0 < a+b+c \leq 3$$

$$\text{Ta có: } 2(a^2+b^2+c^2) = ab+bc+ca+3 \leq ab+bc+ca+3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3$$

$$\text{Nên } (a^2+b^2+c^2) \leq \frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{3}{2}$$

Bởi vậy: $S = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a+b+c+3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6} - \frac{1}{a+b+c+3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{t+3} + \frac{3}{2}$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{t+3} + \frac{3}{2}$ với $0 < t \leq 3$ và $f'(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{(t+3)^2} > 0, \forall t \in (0; 3)$

Bởi vậy: $f(t) \leq f(3), \forall t \in (0; 3]$ hay $f(t) \leq \frac{17}{6}$

Suy ra: $S \leq \frac{17}{6}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $\max S = \frac{17}{6}$ khi $a=b=c=1$

Bài 11: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 18$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x+y+z)^4}{3(x^2+y^2+z^2)}$.

Bài giải

Từ giả thuyết ta có $0 \leq x, y, z \leq 3$ và $x+y+z > 0$

Suy ra $x^2 \leq 3x, y^2 \leq 3y, z^2 \leq 3z$. Do đó $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3(x+y+z)$.

Khi đó $P \leq 3(x+y+z) - \frac{(x+y+z)^4}{9(x+y+z)} = 3(x+y+z) - \frac{1}{9}(x+y+z)^3$. (1)

Đặt $t = x+y+z, t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = 3t - \frac{1}{9}t^3$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 3 - \frac{1}{3}t^2; f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 3$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(t) \leq f(3) = 6$ với mọi $t > 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \leq 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=3, y=z=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 6, đạt được khi $x=3, y=z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 12: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $4(a^3+b^3)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)} + \frac{b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b)^2+c^2}{16}$

Bài giải

Ta có: $a^3+b^3 = (a+b)\left[\frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2\right] \geq \frac{(a+b)^3}{4}$ Dấu “=” khi $a=b$

$\Rightarrow 4(a^3+b^3)+c^3 \geq (a+b)^3+c^3 \geq \frac{(a+b+c)^3}{4}$

$2(a+b+c)(ca+cb-2) = 2(a+b+c)[c(a+b)-2] \leq 2(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^2}{4} - 2\right]$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^3}{4} \leq 2(a+b+c) \left[\frac{(a+b+c)^2}{4} - 2 \right] \Rightarrow a+b+c \geq 4$$

$$\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)} = \frac{2a^2}{2a^2+2ac+(b^2+a^2)+4a} = \frac{a}{4a+c+\left(\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}\right)} \leq \frac{a}{a+b+c+2}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{a}{a+b+c+2} + \frac{b+c}{a+b+c+2} = \frac{a+b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b)^2+c^2}{16}$$

$$\leq \frac{a+b+c}{a+b+c+2} - \frac{(a+b+c)^2}{32} = f(t) = \frac{t}{t+2} - \frac{t^2}{32}$$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+2)^2} - \frac{t}{16} = \frac{32-t(t+2)^2}{16(t+2)^2} < 0 \quad \forall t \geq 4$$

$$\Rightarrow f(t) < f(4) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{1}{6} \text{ khi } a=b=1; c=2$$

Bài 13: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$

Bài giải

$$\text{Ta có } 1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2$. Vì $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$ nên $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$

Suy ra $t = a^2+b^2+c^2 < a+b+c = 1$

$$\text{Mặt khác } 1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \stackrel{B.C.S}{\leq} 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\text{Suy ra } t = a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}. \text{ Vậy } t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}; t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \quad f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$$

Suy ra $f(t) \geq \frac{324}{7}; \forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$. Vậy $A \geq \frac{324}{7}$ với mọi $a; b; c$ thỏa điều kiện đề bài. Hơn nữa, với

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{3} \text{ thì } \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = \frac{7}{18} \\ a+b+c = 1 \end{cases} \text{ và } A = \frac{324}{7}$$

Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Bài 14: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8+a+2b+3c} + \frac{1}{4+b+2c}$$

Bài giải

Ta có $2\sqrt{2bc} \leq b+2c \Rightarrow \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} \geq \frac{1}{4a+4b+4c}$ và $\frac{-4}{8+a+2b+3c} \geq \frac{-1}{4+a+b+c} + \frac{-1}{4+b+2c}$

Suy ra $P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} + \frac{-1}{4+(a+c+b)}$, Đặt $t = a+b+c, t > 0$

xét $f(t) = \frac{1}{4t} + \frac{-1}{4+t}, t > 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{(4+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b = 2c \\ a+b+c = b+2c \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases} \\ a+b+c = 4 \end{cases}$

Bài 15: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $9ab+17bc+14ac+12c-18 > 0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{8(7+ab)\sqrt{5}}{3\sqrt{9ab+17bc+14ac+12c-18}} + \frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$

Bài giải

$$a^2+b^2+c^2=14 \Leftrightarrow 14+2ab = (a+b)^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

Ta lại có: $(a+b-c)^2 + (3b-2c)^2 + (3a-c)^2 + 4(c-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5(a+b+c)^2 \geq 9ab+17bc+14ac+12c-18$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{2}(a+b+c) + \frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

Đặt $t = a+b+c, t \in (0; \sqrt{42}] \Rightarrow P \geq f(t) = \frac{3}{2}t + \frac{36}{\sqrt{t+3}} = f(t)$

$$f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{18}{(t+3)\sqrt{t+3}} = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

Vẽ bảng biến thiên thấy $\min P = f(6) = 16$

Câu 16 : Cho các số thực dương a, b, c . Tìm GTNN của

$$P = \frac{1}{3a+2b+6\sqrt{abc}} + \frac{1}{7+b+5c} - \frac{4}{14+a+2b+6c}$$

Ta có : $6\sqrt[3]{abc} = 6\sqrt[3]{\frac{a}{2}b(2c)} \leq 6\frac{\frac{a}{2}+b+2c}{3} = a+2b+4c \Rightarrow \frac{1}{3a+2b+6\sqrt{abc}} \geq \frac{1}{4(a+b+c)}$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} + \frac{4}{4(7+b+5c)} - \frac{4}{14+a+2b+6c} \geq \frac{9}{4(7+a+2b+6c)} - \frac{4}{14+a+2b+6c} = f(a+2b+6c)$$

$$\geq f(14) = \frac{-1}{28} \Rightarrow P_{\min} = \frac{-1}{28} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+6c=14 \\ \frac{a}{2}=b=2c \end{cases}$$

§6: BẤT ĐẲNG THỨC XỬ LÝ CỤM $X^2Y+Y^2Z+Z^2X$

Bài 1: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$P = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}(a^2b + b^2c + c^2a) \leq 17$$

Bài giải

$$\text{Ta có : } a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + abc = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{a^2b^2c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{27}}$$

$$\Rightarrow 4 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

$$\text{Giả sử : } a \leq c \leq b \Rightarrow a(c-a)(c-b) \leq 0 \Leftrightarrow ac^2 + a^2b \leq abc + a^2c \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \leq abc + a^2c + b^2c$$

$$\text{Mặt khác : } 4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq \frac{1}{2}(b^2 + a^2) + \frac{1}{2}(b^2 + a^2) + c^2 \geq 3\sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)^2}{4}} \Rightarrow c(a^2 + b^2) \leq \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow P \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}(abc + c(a^2 + b^2)) \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}[4 - (a^2 + b^2 + c^2)] + 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - \frac{3\sqrt{3}}{16}t + \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 \text{ với } t = a^2 + b^2 + c^2; 4 \geq t \geq 3 \Rightarrow f(t)_{\max} = f(4) = 17$$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^4b + b^4c + c^4a$

Bài giải

Trong 3 số a, b, c có 1 số nằm giữa 2 số chẳng hạn là b nên ta có $c(b-a)(b^3 - c^3) \leq 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow b^4c + c^4a \leq c^4b + ab^3c \Leftrightarrow S = a^4b + b^4c + c^4a \leq b(a^4 + c^4 + b^2ac) \leq b(a^4 + c^4 + (a+c)^2ac) \leq b(a+c)^4$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4b(a+b) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{4b + (a+c) + (a+c) + (a+c) + (a+c)}{5} \right]^5 = 256 \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra ở (2) $\Leftrightarrow a = 4; b = 1; c = 0$

Vậy GTLN của $F(a; b; c) = 256$ đạt được khi $a = 4; b = 1; c = 0$

Bài 3: Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\begin{cases} y \geq x \\ z^2(4-y) + 4y(z-2) \geq y^3 \end{cases}$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{zy^3 + xz^3 + xyz - yz^3}{y+1} - \left(\frac{xyz}{4\sqrt{2}} \right)^2$$

Bài giải

$$z^2(4-y) + 4y(z-2) \geq y^3 \Rightarrow 4z(y+z) \geq y(y^2 + z^2 + 8) \geq 4y(y+z) \Rightarrow z \geq y$$

Từ đây ta có: $0 < x \leq y \leq z$ với đk này ta có bổ đề sau: $\frac{zy^3 + xz^3 + xyz - yz^3}{y+1} \leq xyz$, Thật vậy ta có:

$$z(y-x)(y^2 - z^2) \leq 0 \Leftrightarrow zy^3 + z^3x - yz^3 \leq xy^2z \Leftrightarrow zy^3 + z^3x - yz^3 + xyz \leq (y+1)xyz$$

Áp dụng bổ đề ta có: $P \geq xyz - \left(\frac{xyz}{4\sqrt{2}}\right)^2 = 8 - \frac{1}{32}(xyz - 16)^2 \leq 8$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 4 \\ y = z = 2 \end{cases}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$$

Bài giải

Đặt $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$. Ta có:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}); x = x_2 = \frac{1}{6}(y + \sqrt{y^2 + 6z^2})$$
 Nhận xét:

$x_1 \notin (0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2 \in (0;1)$ hay $x_2 \notin (0;1)$ thì $\max_{x \in [0;1]} f(x) = \max\{f(0); f(1)\}$.

Mà $f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \leq 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2 \quad (1)$$

Lại đặt $g(y) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2$,

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1; g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1 = \frac{1}{6}(z - \sqrt{z^2 + 6}); y = y_2 = \frac{1}{6}(z + \sqrt{z^2 + 6})$$

Nhận xét tương tự suy ra $\max_{y \in [0;1]} g(y) = \max\{g(0); g(1)\}$.

Lại có $g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \leq 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1)$. Suy ra

$$g(y) \leq g(1) = 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \quad (2)$$

Cuối cùng đặt $h(z) = 2z^3 - z^2 - z + 3$ với $z \in [0;1]$, $h'(z) = 6z^2 - 2z - 1$.

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}; z_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}. \text{ Lập bảng biến thiên suy ra: } \max_{z \in [0;1]} h(z) = h(1) = 3 \quad (3)$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$$

Bài giải

Đặt $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$. Ta có:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}); x = x_2 = \frac{1}{6}(y + \sqrt{y^2 + 6z^2})$$
 Nhận xét:

$x_1 \notin (0;1)$, lập bảng biến thiên ta thấy khi $x_2 \in (0;1)$ hay $x_2 \notin (0;1)$ thì $\max_{x \in [0;1]} f(x) = \max\{f(0); f(1)\}$.

$$\text{Mà } f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \leq 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2 \quad (1)$$

$$\text{Lại đặt } g(y) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2,$$

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1; g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1 = \frac{1}{6}(z - \sqrt{z^2 + 6}); y = y_2 = \frac{1}{6}(z + \sqrt{z^2 + 6})$$

Nhận xét tương tự suy ra $\max_{y \in [0;1]} g(y) = \max\{g(0); g(1)\}$.

$$\text{Lại có } g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \leq 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1). \text{ Suy ra}$$

$$g(y) \leq g(1) = 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \quad (2)$$

$$\text{Cuối cùng đặt } h(z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \text{ với } z \in [0;1], h'(z) = 6z^2 - 2z - 1.$$

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}; z_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}. \text{ Lập bảng biến thiên suy ra: } \max_{z \in [0;1]} h(z) = h(1) = 3 \quad (3)$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$

Bài 6: Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 < x \leq y \leq z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{6}.$$

Bài giải

Vì $0 < x \leq y \leq z$ nên

$$x(x - y)(y - z) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - xy)(y - z) \geq 0 \Leftrightarrow x^2y - x^2z - xy^2 + xyz \geq 0 \Leftrightarrow x^2y + xyz \geq x^2z + xy^2$$

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz = (x^2z + xy^2) + yz^2 - xyz \leq (x^2y + xyz) + yz^2 - xyz = y(x^2 + z^2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y(x^2 + z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2y^2(x^2 + z^2)(x^2 + z^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2y^2 + (x^2 + z^2) + (x^2 + z^2)}{3}\right)^3} = 2\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3}$$

$$\text{Do đó } P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{6} \leq 2\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)} (t > 0). \text{ Ta có } P \leq f(t) = 2t^3 - \frac{3}{2}t^4. f'(t) = 6t^2 - 6t^3 = 6t^2(1 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên của hàm } f(t) \text{ suy ra được } f(t) \leq f(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}.$$

Ta thấy $P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\text{Max } P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 7: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2\ln(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{a^2b + b^2c + c^2a - 2} - 2(ab + bc + ca)$$

Bài giải

$$\begin{aligned} 3(a^2b + b^2c + c^2a) &\leq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a \\ &\leq a^3 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + b^3 + bc^2 + ca^2 + cb^2 + c^3 \\ &\Leftrightarrow (a^3 + ab^2 - 2a^2b) + (b^3 + bc^2 - 2b^2c) + (ac^2 + c^3 - 2c^2a) \geq 0 \Leftrightarrow a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow (a^2b + b^2c + c^2a) \leq a^2 + b^2 + c^2 \text{ dấu bằng khi: } a = b = c \\ a + b + c = 3 &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 9 \Rightarrow -2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 - 9 \\ P &\geq 2\ln(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 - 2} + a^2 + b^2 + c^2 - 9 \\ t = a^2 + b^2 + c^2 &\geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3 \\ \text{Xét } f(t) &= 2\ln t + \frac{1}{t-2} + t - 9 \\ \Rightarrow f'(t) &= \frac{2}{t} + 1 - \frac{1}{(t-2)^2} = \frac{2(t-2)^2 + t(t-2)^2 - 1}{t(t-2)^2} > 0 \\ \Rightarrow f(t) &\text{ đồng biến } \Rightarrow f(t)_{\min} = f(3) = 2\ln 3 - 5 \\ \text{Dấu bằng xảy ra khi: } &a = b = c = 1 \end{aligned}$$

Bài 8: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a \geq b \geq c \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$ tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = 2(a + b + c - abc) + \frac{5}{a^3b + b^3c + c^3a} - \frac{5c^2}{6}$$

Bài giải

Ta có $a^3b + b^3c + c^3a \leq a^3b + b^3a + c^2ab = ab(a^2 + b^2 + c^2) = 3ab$ từ đó

$$P \geq 2(a + b + c - ab) + \frac{5}{3ab} - \frac{5c^2}{6} = f(a, b) \text{ bây giờ ta sẽ thực hiện phép dồn biến:}$$

$$\begin{aligned} f(a, b) - f\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right) &= 2\left(a + b - \sqrt{2(a^2 + b^2)}\right) + \frac{5}{3ab} - \frac{10}{3(a^2 + b^2)} + \frac{c(a^2 + b^2 - 2ab)}{2} \\ &= \frac{5(a-b)^2}{3ab(a^2 + b^2)} + \frac{c(a-b)^2}{2} - \frac{2(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \geq \frac{5(a-b)^2}{3ab(a^2 + b^2)} - \frac{(a-b)^2}{a+b} \text{ chú ý là:} \end{aligned}$$

$$3ab(a^2+b^2) \leq \frac{3(a+b)}{2} \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^3}{2}} \text{ và từ } c^2 \geq \frac{1}{5} \Rightarrow a^2+b^2 = 3-c^2 \leq \frac{14}{5} \text{ do đó}$$

$$\frac{5(a-b)^2}{3ab(a^2+b^2)} - \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq \frac{20(a-b)^2}{3(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)^3}} - \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq \frac{20(a-b)^2}{3(a+b)\sqrt{2\left(\frac{14}{5}\right)^3}} - \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq 0$$

$$\text{Ta được } P \geq f\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}; \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right) = 2\sqrt{2(a^2+b^2)} + \frac{10}{3(a^2+b^2)} + 2c - c(a^2+b^2) - \frac{5c^2}{6}$$

$$= 2\sqrt{2(3-c^2)} + \frac{10}{3(3-c^2)} + c(c^2-1) - \frac{5c^2}{6} = g(c). \text{ trong đó } \frac{1}{\sqrt{5}} \leq c \leq 1$$

$$g'(c) = 3c^2 - 1 - 2\sqrt{\frac{2}{3-c^2}} + \frac{20c}{3(3-c^2)^2} - \frac{5c}{3} \text{ chú ý rằng: } \frac{20c}{3(3-c^2)^2} - \frac{5c}{3} \leq \frac{20c}{3 \cdot (3-1)^2} - \frac{5c}{3} = 0$$

$$\text{Và: } 3c^2 - 1 - 2\sqrt{\frac{2}{3-c^2}} = 3c^2 - 1 - \frac{4}{\sqrt{2(3-c^2)}} \leq 3c^2 - 1 - \frac{8}{5-c^2} = \frac{(c^2-1)(13-c^2)}{5-c^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow g'(c) \leq 0 \rightarrow g(c) \geq g(1) = \frac{29}{6}. \text{ Vậy } \min P = \frac{29}{6} \text{ khi: } a = b = c = 1$$

§7: BẤT ĐẲNG THỨC XỬ LÝ CỤM XYZ

Bài 1: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{81abc + 2}{9} + b + c + 3(2a^3 + b^3 + c^3)$

Bài giải

Ta có bổ đề sau: $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz$

Chứng minh $\sqrt{(x + y - z)(z + x - y)} \leq \frac{x + y - z + z + x - y}{2} = x$ tương tự vs 2 biểu thức còn lại, ta có đpcm

Áp dụng kết hợp: $a + b + c = 1$ Ta có: $(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \leq abc \Leftrightarrow 9abc + 1 \geq 2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$ (*)

Mặt khác theo AM - GM ta có: $3\left(a^3 + \frac{1}{27} + \frac{1}{27}\right) \geq a$ (**)

Từ (*) và (**) ta có: $\frac{81abc + 2}{9} + b + c + 3a^3 \geq 9abc + a + b + c = 9abc + 1 \geq 2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$

Theo Bunhiacopski ta lại có: $3(a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)^2$

Từ đây ta sẽ có: $P \geq 2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \frac{5}{3} + 3\left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \geq \frac{5}{3}$

Dấu bằng khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 2: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \left(\frac{1}{xz} + \frac{x}{6yz} + \frac{z}{6xy}\right)(3 - y) + 2\sqrt[3]{xyz}$ Ta có

Bài giải

$$\left(\frac{1}{xz} + \frac{x}{6yz} + \frac{z}{6xy}\right)(3 - y) = \frac{1}{3} \left(\frac{x + y + z}{xz} + \frac{x}{2yz} + \frac{z}{2xy}\right)(z + x) = \frac{1}{3} \frac{(y + z)^2 + (y + x)^2}{2xyz} (x + z)$$

$$\geq \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{3xyz} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq \frac{1}{3} \left(2 + 2 \cdot \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{14}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 2: Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\begin{cases} y \geq x \\ z^2(4-y) + 4y(z-2) \geq y^3 \end{cases}$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{zy^3 + xz^3 + xyz - yz^3}{y+1} - \left(\frac{xyz}{4\sqrt{2}} \right)^2$$

Bài giải

$$z^2(4-y) + 4y(z-2) \geq y^3 \Rightarrow 4z(y+z) \geq y(y^2 + z^2 + 8) \geq 4y(y+z) \Rightarrow z \geq y$$

Từ đây ta có: $0 < x \leq y \leq z$ với đk này ta có bổ đề sau $\frac{zy^3 + xz^3 + xyz - yz^3}{y+1} \leq xyz$

$$\text{Thật vậy ta có: } z(y-x)(y^2 - z^2) \leq 0 \Leftrightarrow zy^3 + z^3x - yz^3 \leq xy^2z \Leftrightarrow zy^3 + z^3x - yz^3 + xyz \leq (y+1)xyz$$

$$\text{Áp dụng bổ đề ta có: } P \geq xyz - \left(\frac{xyz}{4\sqrt{2}} \right)^2 = 8 - \frac{1}{32}(xyz - 16)^2 \leq 8$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 4 \\ y = z = 2 \end{cases}$$

Bài 4: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm GTNN của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y^2z^2$

Bài giải

$$\text{Giả sử } x = \min\{x, y, z\} \Rightarrow x \in [0; 1]$$

$$\text{Ta có } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3(xy + yz + xz) \right] + 3xyz = 27 - 9(xy + yz + xz) + 3xyz$$

$$P = x^3 + y^3 + z^3 = 27 - 9(xy + yz + xz) + 3xyz + x^2y^2z^2$$

$$= (xyz - 1)^2 - 1 + 27 + 5xyz - 9(xy + yz + xz) \geq 26 + 5xyz - 9(xy + yz + xz) = 26 - 9(xy + xz) - yz(9 - 5x)$$

$$\text{Do } x \in [0; 1] \Rightarrow 9 - 5x > 0 \Rightarrow -yz(9 - 5x) \geq -\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 (9 - 5x) = -\left(\frac{3-x}{2} \right)^2 (9 - 5x)$$

$$\Rightarrow P \geq 26 - 9x(3-x) - \left(\frac{3-x}{2} \right)^2 (9 - 5x) = \frac{5x^3 - 3x^2 - 9x + 23}{4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 - 9x + 23}{4} \text{ với } x \in [0; 1] \Rightarrow f(x)_{\min} = f(1) = 4$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4 \text{ tại } x = y = z = 1$$

Bài 5: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016} \right)^2 \leq 4abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c}}{c + \sqrt{ab}}$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$P = \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c}}{c + \sqrt{ab}} \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}} + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ca}}} + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ca}} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

$$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}} \leq \frac{a + b + c}{2\sqrt{abc}}$$

$$\text{Lại có: } \left(\frac{a + b + c}{2016} \right)^2 \leq 4abc \Leftrightarrow a + b + c \leq 4032\sqrt{abc}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{4032}{2} = 2016. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a = b = c \\ \left(\frac{a + b + c}{2016} \right)^2 \leq 4abc \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{1344^2}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = 2016 \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{1344^2}$$

Bài 5 : cho các thực dương x, y, z sao cho $xy + yz + zx = 2$ tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{x^2 + y^2 + 8zx + 4yz + 2x + 4z}{z(x^2 + y^2 + 2x)} - \frac{yz(1 - 5xyz) + 3\sqrt{1 + 5x^2y^2z^2}}{xyz}$$

Bài giải

Kết cấu bài toán khá công kênh và dễ làm ta rối loạn . nhưng hãy để ý hệ số ‘đặc biệt’ :

$$3\sqrt{1 + 5x^2y^2z^2} = \sqrt{(4 + 5)(1 + 5x^2y^2z^2)} \geq 2 + 5xyz \text{ các hệ số có gì đó gợi mở bài toán}$$

Đề bài là $xy + yz + zx = 2$.ở P lại có $x^2 + y^2$ ta sẽ thử đánh giá về $2xy$ xem..và điều bất ngờ sẽ tới :

$$\frac{x^2 + y^2 + 8zx + 4yz + 2x + 4z}{z(x^2 + y^2 + 2x)} = \frac{1}{z} + \frac{8zx + 4yz + 4z}{z(x^2 + y^2 + 2x)} \leq \frac{1}{z} + \frac{8zx + 4yz + 4z}{2zx(y + 1)} = \frac{1}{z} + \frac{4}{y + 1} + \frac{2}{x}$$

$$\text{Ngoài ra chú ý ở trên thì : } 3\sqrt{1 + 5x^2y^2z^2} = \sqrt{(4 + 5)(1 + 5x^2y^2z^2)} \geq 2 + 5xyz \text{ nên}$$

$$\frac{yz(1 - 5xyz) + 3\sqrt{1 + 5x^2y^2z^2}}{xyz} \geq \frac{yz(1 - 5xyz) + 2 + 5xyz}{xyz} = \frac{yz + 2}{xyz} = \frac{2yz + x(y + z)}{xyz} = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\text{Từ đó } P \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{z} + \frac{4}{y + 1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{4}{y + 1} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{(y - 1)^2}{y(y + 1)} \leq 1$$

$$\text{Max } P = 1 \text{ khi } (x, y, z) = \left(1; 1; \frac{1}{2} \right)$$

Bài 6 : Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0$; $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2b^2c^2$.

Bài giải

$$\text{Từ gt ta có: } \begin{cases} b + c = -a \\ bc = a^2 - 3 \end{cases} \text{ Hệ có nghiệm khi } a^2 \geq 4(a^2 - 3) \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 \in [0; 4]$$

$$F = a^2 b^2 c^2 = a^2 (a^2 - 3)^2 = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad t = a^2 \in [0; 4]; \quad F'_t = 3t^2 - 12t + 9; \quad F'_t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [0; 4] \\ t = 3 \in [0; 4] \end{cases}$$

$$F(0) = F(3) = 0; \quad F(1) = F(4) = 4$$

Suy ra $\max F = 4$ khi $(a; b; c) = (2; -1; -1)$ hoặc các hoán vị hoặc $(a; b; c) = (-2; 1; 1)$ hoặc các hoán vị.

Bài 7: Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 < x \leq y \leq z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{6}.$$

Bài giải

Vì $0 < x \leq y \leq z$ nên

$$x(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - xy)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 y - x^2 z - xy^2 + xyz \geq 0 \Leftrightarrow x^2 y + xyz \geq x^2 z + xy^2$$

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz = (x^2 z + xy^2) + yz^2 - xyz \leq (x^2 y + xyz) + yz^2 - xyz = y(x^2 + z^2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y(x^2 + z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2y^2(x^2 + z^2)(x^2 + z^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2y^2 + (x^2 + z^2) + (x^2 + z^2)}{3} \right)^3} = 2 \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3}$$

$$\text{Do đó } P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{6} \leq 2 \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)} (t > 0). \text{ Ta có } P \leq f(t) = 2t^3 - \frac{3}{2}t^4; \quad f'(t) = 6t^2 - 6t^3 = 6t^2(1-t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên của hàm } f(t) \text{ suy ra được } f(t) \leq f(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta thấy } P = \frac{1}{2} \text{ khi } x = y = z = 1. \text{ Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là } \max P = \frac{1}{2} \text{ khi } x = y = z = 1.$$

Bài 8: Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{7x + y + 4\sqrt{xy} + 18\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + 2.$$

Bài giải

$$\text{Ta có: } 4\sqrt{xy} = 2\sqrt{x \cdot 4y} \leq x + 4y; \quad 18\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 9z} \leq x + 4y + 9z$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 4y = 9z$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{1}{x + y + z} + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + 2$$

$$\text{Đặt } t = x + y + z, (t > 0), \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + 2 \quad (t > 0)$$

$$\text{Lập bảng biến thiên tìm được } \min f(t) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $\min P = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{36}{49}; y = \frac{9}{49}; z = \frac{4}{49}$

Bài 9: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài giải

Áp dụng bất Cossi cho 3 số dương $\frac{1}{2xyz}, \frac{1}{2xyz}, \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ ta được:

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{1}{2xyz} + \frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{\sqrt{x^2 y^2 z^2 (x+y)(y+z)(z+x)}}$$

Ta có: $x^2 y^2 z^2 (x+y)(y+z)(z+x) = xyz(zx + yz)(xy + zx)(yz + xy)$

Áp dụng bất Cossi cho 3 số dương xy, yz, zx : $xy \cdot yz \cdot zx \leq \left(\frac{xy + yz + zx}{3} \right)^3 = 1 \Rightarrow x^2 y^2 z^2 \leq 1 \Rightarrow xyz \leq 1$ (1)

Áp dụng bất Cossi cho 3 số dương $zx + yz, xy + zx, yz + xy$:

$$(zx + yz)(xy + zx)(yz + xy) \leq \left[\frac{(zx + yz) + (xy + zx) + (yz + xy)}{3} \right]^3 = 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 y^2 z^2 (x+y)(y+z)(z+x) \leq 8$

Vậy: $\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Bài 10: Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi sao cho $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

Bài giải

Không mất tính tổng quát, giả sử z là số nhỏ nhất. Lúc đó $0 < z < 1$ (vì $z \geq 1$ thì $x + y + z > 2$).

Ta có $F = (x+y)^2 + z^2 + 2xy(z-1) = (2-z)^2 + z^2 - 2xy(1-z)$

Mặt khác $xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \left(\frac{2-z}{2} \right)^2$ nên $-2xy(1-z) \geq -2 \left(\frac{2-z}{2} \right)^2 (1-z)$.

Từ đó $F \geq \frac{1}{2}(z^3 - z^2 + 4)$ (1). Xét $f(z) = \frac{1}{2}(z^3 - z^2 + 4)$ với $0 < z < 1$.

Ta có $f'(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 2z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2}{3} \in (0; 1)$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(z) \geq \frac{52}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $F \geq \frac{52}{27}$. Vậy $F_{\min} \geq \frac{52}{27}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Bài 11: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x + y + z)^2 - \frac{x^3 + y^3 + z^3}{9xyz} + \frac{3}{xy + yz + zx}.$$

Bài giải

$$\text{Ta có } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow (x + y + z)^2 = 3 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\text{Lại có } x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)[x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)] + 3xyz$$

$$= (x + y + z)[3 - (xy + yz + zx)] + 3xyz \text{ nên } \frac{x^3 + y^3 + z^3}{9xyz} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} \right) [3 - (xy + yz + zx)]$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta có } \begin{cases} xy + yz + zx \geq 3\sqrt{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt{\frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{9}{xy + yz + zx}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x^3 + y^3 + z^3}{9xyz} \geq \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) [3 - (xy + yz + zx)]$$

Từ đó ta có:

$$P \leq 3 + 2(xy + yz + zx) - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) [3 - (xy + yz + zx)] + \frac{3}{xy + yz + zx} = \frac{11}{3} + 2(xy + yz + zx)$$

$$\text{Do } 0 < xy + yz + zx \leq \frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2}{2} = 3 \text{ nên } P \leq \frac{11}{3} + 6 = \frac{29}{3}$$

$$\text{Từ đó suy ra GTLN của P là } \frac{29}{3} \text{ đạt khi } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy = yz = zx \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 12: Cho $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2}$

Bài giải

Cách 1

$$8(x^2 + y^2 + z^2) = 8xy + 8xz + 80yz \leq x^2 + 16y^2 + x^2 + 16z^2 + 40y^2 + 40z^2 \Rightarrow x^2 \leq 8y^2 + 8z^2$$

$$12yz = x^2 + (y + z)^2 - x(y + z)$$

$$12yz = \frac{1}{4}x^2 - x(y + z) + (y + z)^2 + \frac{3}{4}x^2 = \left(\frac{x}{2} - y - z \right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow x^2 \leq 16yz$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3}{2} - 24x = f(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$M \text{ in } f(x) = f(4) = -64$$

$$\text{Khi } x = 4, y = z = 1$$

Cách 2

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz \Rightarrow (y+z)^2 + x^2 = xy + xz + 16yz$$

$$= x(y+z) + 16yz \leq x(y+z) + 3(y+z)^2 \Rightarrow x^2 - x(y+z) - 2(y+z)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} \in [-1, 2], x, y, z > 0$$

$$\Rightarrow x \leq 2(y+z) \leq 2\sqrt{2(y^2+z^2)} \Rightarrow x^2 \leq 8(y^2+z^2) \Rightarrow y^2+z^2 \geq \frac{x^2}{8}$$

$$12yz = x^2 - x(y+z) + (y+z)^2 \Rightarrow x^2 \leq 16yz$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3}{2} - 24x = f(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$M \text{ in } f(x) = f(4) = -64$$

Bài 13 : Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 8xyz + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

Bài giải

Ta có $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$, đặt $t = \sqrt[3]{xyz} > 0$. Mà $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow P \geq 8t^3 + \frac{3}{t^2}. \text{ Xét hàm số } f(t) = 8t^3 + \frac{3}{t^2}.$$

$$\text{Ta có } \forall t \neq 0, f'(t) = 24t^2 - \frac{6}{t^3}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}.$$

Từ bảng ta có $f(t) \geq 13$ với mọi giá trị t thỏa mãn $0 < t \leq \frac{1}{2}$

Suy ra $P \geq 13$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{1}{2}$ hay $x = y = z = \frac{1}{2}$ Kl: $\text{Min}P = 13$.

§7: BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3}{2}$$

Bài giải

$$\begin{aligned} c^3 &= \frac{c^3 + c^3 + 1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3c^2 - 1}{2}; a^4 + 1 \geq 2a^2 \Rightarrow \frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \\ &\leq \frac{a^3}{(b-1)^2 + 2} + \frac{2b^3}{(a-1)^2 + \frac{3}{2}(c-1)^2 + 4} + \frac{3c^3}{3(a-1)^2 + (b^2-1)^2 + 6} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 2: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a \geq b \geq c \end{cases}$

Tìm GTNN của biểu thức: $M = \frac{a}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{7}{8}\sqrt{1+c^2}$

Bài giải

Ta có: $\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{5}{8}a - \frac{3}{8}b$ và dấu “=” xảy ra khi a = b

CM: $8a^4 \geq (5a - 3b)(a+b)(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^4 + 3b^4 \geq 2ab^2 + 2a^3b + 2ab^3 \Rightarrow$ đúng

Ta có: $\frac{b^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a$ và dấu “=” xảy ra khi a = b

CM: $3b^3 \geq (2b - a)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow b^3 + a^3 \geq a^2b + ab^2$ đúng $\forall a, b > 0$

$\Rightarrow M \geq \frac{5}{8}a - \frac{3}{8}b + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{7}{8}\sqrt{1+c^2} \Leftrightarrow M \geq \frac{7}{24}a + \frac{7}{24}b + \frac{7}{8}\sqrt{1+c^2}$

Do $a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - c \Rightarrow M \geq \frac{7}{8}\left(\frac{1-c}{3} + \sqrt{1+c^2}\right)$

Đặt $f(c) = \frac{1}{3} - \frac{c}{3} + \sqrt{1+c^2}$ với $0 < c \leq \frac{1}{3}$ (do $\begin{cases} a \geq b \geq c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c < c \leq \frac{1}{3}$)

‘(vì $c \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3c \leq 1$ và $\sqrt{1+c^2} > 1$)

Suy ra hàm số f(c) liên tục và nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{3}\right]$

$\Rightarrow f(c) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow M \geq \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$

KL: GTNN của M là : $\frac{7}{8} \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{10}}{3} \right)$ khi $c = \frac{1}{3} = a = b$

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Tìm GTNN của biểu thức : $S = 8(a + b + c) + 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Bài giải

Nhận xét: $8a + \frac{5}{a} \geq \frac{3a^2 + 23}{2}$ (1) với mọi $0 < a < \sqrt{3}$ dấu bằng khi $a = 1$, thật vậy

$$8a + \frac{5}{a} \geq \frac{3a^2 + 23}{2} \Leftrightarrow 3a^3 - 16a^2 + 23a - 10 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(3a-10) \leq 0 \text{ luôn đúng}$$

với $0 < a < \sqrt{3}$ dấu bằng khi $a=1$

Tương tự $8b + \frac{5}{b} \geq \frac{3b^2 + 23}{2}$ (2) dấu bằng khi $b = 1$

$8c + \frac{5}{c} \geq \frac{3c^2 + 23}{2}$ (3) dấu bằng khi $c = 1$

Từ (1),(2),(3) suy ra $S = 8(a + b + c) + 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) + 69}{2} = 39$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Vậy GTNN của $S = 39$ đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Chú ý: để tìm ra vế phải của (1) ta sử dụng phương pháp tiếp tuyến.

Bài 4 : Với a, b, c là các số thực dương, nhỏ hơn $\frac{3}{4}$ và thỏa mãn $a + b + c = 3$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(3b+3c-5)} + \frac{1}{b^2(3c+3a-5)} + \frac{1}{c^2(3a+3b-5)} \geq 3$$

Bài giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{1}{a^2(3(3-a)-5)} + \frac{1}{b^2(3(3-b)-5)} + \frac{1}{c^2(3(3-c)-5)} \geq a + b + c$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh khi ta có: $\frac{1}{a^2(4-3a)} \geq a$

Thật vậy, do $a < \frac{4}{3}$ nên bất đẳng thức trên tương đương với $1 \geq a^3(4-3a) \Leftrightarrow 3a^4 + 1 \geq 4a^3$

Từ $a > 0$ nên theo bất đẳng thức AM-GM ta nhận được $3a^4 + 1 = a^4 + a^4 + a^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot a^4} = 4a^3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 1$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 5 : Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

Bài giải

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+\sqrt{a(a+b+c)}}{b+c} + \frac{a+b+c+\sqrt{b(a+b+c)}}{c+a} + \frac{a+b+c+\sqrt{c(a+b+c)}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}}{\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}} + \frac{1+\sqrt{\frac{b}{a+b+c}}}{\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}} + \frac{1+\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}}{\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}$; $y = \frac{b}{a+b+c}$; $z = \frac{c}{a+b+c}$, ta có $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$

$$\text{Khi đó đpcm} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{y+z} + \frac{1+\sqrt{y}}{z+x} + \frac{1+\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{1+\sqrt{y}}{1-y} + \frac{1+\sqrt{z}}{1-z} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta cm: } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \geq \frac{9}{2} \quad (1) \quad \text{ta có} \Rightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \geq \frac{9}{(1-x)+(1-y)+(1-z)} = \frac{9}{2}$$

Từ đó suy ra (1) đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

$$\text{Ta cm: } \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{y}}{1-y} + \frac{\sqrt{z}}{1-z} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}(1-x)$ với $0 < x < 1$ Ta có $f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Suy ra $0 < f(x) < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{\sqrt{x}}{1-x} = \frac{x}{(1-x)\sqrt{x}} \geq \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x}{2} \text{ tương tự } \frac{\sqrt{y}}{1-y} \geq \frac{3\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{z}}{1-z} \geq \frac{3\sqrt{3}z}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{y}}{1-y} + \frac{\sqrt{z}}{1-z} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x+y+z) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Từ đó suy ra (2) đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Từ đó suy ra đpcm dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 6: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$$

Bài giải

gt $\Leftrightarrow 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 9(a^4 + b^4 + c^4)$ kết hợp với đẳng thức

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \text{ từ đó suy ra:}$$

$$25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{16}{3}$$

Ta có $14x + 2 \geq 25x^2 - 9x^4$ (*), $\forall x > 0$, " $=$ " $\Leftrightarrow x = 1$ thật vậy

(*) $\Leftrightarrow 9x^4 - 25x^2 + 14x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(9x^2 + 18x + 2) \geq 0$ luôn đúng. Vậy

$$\begin{cases} 14a + 2 \geq 25a^2 - 9a^4 \\ 14b + 2 \geq 25b^2 - 9b^4 \Rightarrow 14(a+b+c) + 6 \geq 25(a^2 + b^2 + c^2) - 9(a^4 + b^4 + c^4) = 48 \\ 14c + 2 \geq 25c^2 - 9c^4 \end{cases}$$

$\Rightarrow a + b + c \geq 3$, dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} \geq 1$$

Dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 7: Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của $P = \frac{11b^3 - a^3}{ab + 4b^2} + \frac{11c^3 - b^3}{bc + 4c^2} + \frac{11a^3 - c^3}{ca + 4a^2}$

Bài giải

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau : $\frac{11b^3 - a^3}{ab + 4b^2} \leq 3b - a$

Thật vậy : $\frac{11b^3 - a^3}{ab + 4b^2} \leq 3b - a \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow \frac{11b^3 - a^3}{ab + 4b^2} \leq 3b - a$

$$\Rightarrow P = \frac{11b^3 - a^3}{ab + 4b^2} + \frac{11c^3 - b^3}{bc + 4c^2} + \frac{11a^3 - c^3}{ca + 4a^2} \leq 3b - a + 3c - b + 3a - c = 2(a + b + c) = 6$$

Bài 8: Cho ba số thực dương a, b, c và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } S = \frac{a^3 + b^3}{a + 2b} + \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} + \frac{c^3 + a^3}{c + 2a}.$$

Bài giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT : $\frac{x^3 + 1}{x + 2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18} (x > 0)$ (*)

(*) $\Leftrightarrow 18(x^3 + 1) \geq (x + 2)(7x^2 + 5) \Leftrightarrow (x - 1)^2(11x + 8) \geq 0$ đúng với mọi $x > 0$, dấu " $=$ " xảy ra khi $x = 1$

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{a + 2b} \geq \frac{7a^2}{18} + \frac{5b^2}{18}; \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} \geq \frac{7b^2}{18} + \frac{5c^2}{18}; \frac{c^3 + a^3}{c + 2a} \geq \frac{7c^2}{18} + \frac{5a^2}{18};$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \geq \frac{12(a^2 + b^2 + c^2)}{18} = 2$

Vậy MinS = 2 khi $a = b = c = 1$

Bài 9 : Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Bài giải

Không giảm tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 9$$

$$\text{Với } f(x) = \frac{4}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x-x^2}, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta đánh giá } \frac{5x-1}{x-x^2} \leq 18x-3 \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 18(a+b+c) - 9 = 9$$

Bài 10: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{3}a}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{3}b}{c^2+a^2} + \frac{\sqrt{3}c}{a^2+b^2}.$$

Bài giải

Từ giả thiết $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ a, b, c > 0 \end{cases} \Rightarrow a, b, c \in (0; 2)$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4 - a^2 \dots$

$$\text{Do đó } P = \frac{\sqrt{3}a}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{3}b}{c^2+a^2} + \frac{\sqrt{3}c}{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{3}a}{4-a^2} + \frac{\sqrt{3}b}{4-b^2} + \frac{\sqrt{3}c}{4-c^2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4a-a^3} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4b-b^3} + \frac{\sqrt{3}c^2}{4c-c^3}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x - x^3$ với $x \in (0; 2)$. Có $f'(x) = 4 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 2)$ là

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{16\sqrt{3}}{9}. \text{ Từ bảng biến thiên ta có } 0 < f(x) \leq \frac{16\sqrt{3}}{9}, \forall x \in (0; 2).$$

$$\text{Tức } 0 < 4x - x^3 \leq \frac{16\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \frac{1}{4x-x^3} \geq \frac{9}{16\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x^2}{4x-x^3} \geq \frac{9\sqrt{3}x^2}{16\sqrt{3}}, \forall x \in (0; 2). \text{ Dấu "=" khi } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Áp dụng ta có } \frac{\sqrt{3}a^2}{4a-a^3} \geq \frac{9\sqrt{3}a^2}{16\sqrt{3}} = \frac{9a^2}{16}; \frac{\sqrt{3}b^2}{4b-b^3} \geq \frac{9\sqrt{3}b^2}{16\sqrt{3}} = \frac{9b^2}{16}; \frac{\sqrt{3}c^2}{4c-c^3} \geq \frac{9\sqrt{3}c^2}{16\sqrt{3}} = \frac{9c^2}{16}, (a, b, c \in (0; 2))$$

$$\text{Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được } P \geq \frac{9a^2}{16} + \frac{9b^2}{16} + \frac{9c^2}{16} = \frac{9}{16}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{9}{4}.$$

Và dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{9}{4}$ đạt được, khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a + b + c) \left(\frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca} \right).$$

Bài giải

Giả sử $a + b + c = k > 0$, đặt $a = kx, b = ky, c = kz \Rightarrow x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= k \left[\frac{k(3x - y)}{k^2(x^2 + xy)} + \frac{k(3y - z)}{k^2(y^2 + yz)} + \frac{k(3z - x)}{k^2(z^2 + zx)} \right] = \frac{3x - y}{x^2 + xy} + \frac{3y - z}{y^2 + yz} + \frac{3z - x}{z^2 + zx} \\ &= \frac{4x - (x + y)}{x(x + y)} + \frac{4y - (y + z)}{y(y + z)} + \frac{4z - (z + x)}{z(z + x)} = \frac{4}{x + y} - \frac{1}{x} + \frac{4}{y + z} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z + x} - \frac{1}{z} \\ &= \frac{4}{1 - z} - \frac{1}{x} + \frac{4}{1 - x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{1 - y} - \frac{1}{z} = \frac{5x - 1}{x - x^2} + \frac{5y - 1}{y - y^2} + \frac{5z - 1}{z - z^2}. \end{aligned}$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $b + c > a \Rightarrow y + z > x \Rightarrow 1 - x > x$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$, tức là $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Tương tự ta cũng có $y, z \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{5t - 1}{t - t^2} \leq 18t - 3$ (*) đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Thật vậy: } (*) \Leftrightarrow \frac{5t - 1}{t - t^2} - 18t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{18t^3 - 21t^2 + 8t - 1}{t - t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2t - 1)(3t - 1)^2}{t(1 - t)} \leq 0 (**)$$

(**) hiển nhiên đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Do đó (*) đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Áp dụng (*) ta được $P \leq 18x - 3 + 18y - 3 + 18z - 3 = 18(x + y + z) - 9 = 9$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 9 khi $a = b = c$.

Bài 12: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = 3(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài giải

$$\text{Ta chứng minh } 3a + \frac{2}{a} \geq \frac{a^2}{2} + \frac{9}{2}$$

$$\text{Với } 0 < a < \sqrt{3} \Rightarrow a^3 - 6a^2 + 9a - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a - 4) \leq 0 \text{ (đúng)}$$

$$\text{Tương tự } 3b + \frac{2}{b} \geq \frac{b^2}{2} + \frac{9}{2}; 3c + \frac{2}{c} \geq \frac{c^2}{2} + \frac{9}{2}$$

Vậy $3(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{2} = 15$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 13: Cho ba số thực dương a, b, c và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $S = \frac{a^3 + b^3}{a + 2b} + \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} + \frac{c^3 + a^3}{c + 2a}$

Bài giải

Trước tiên ta phải chứng minh BĐT $\frac{x^3 + 1}{x + 2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18} (x > 0) (*)$

$$(*) \Leftrightarrow 18(x^3 + 1) \geq (x + 2)(7x^2 + 5) \Leftrightarrow (x - 1)^2(11x + 8) \geq 0$$

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + 2b} \geq \frac{7a^2}{18} + \frac{5b^2}{18}; \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} \geq \frac{7b^2}{18} + \frac{5c^2}{18}; \frac{c^3 + a^3}{c + 2a} \geq \frac{7c^2}{18} + \frac{5a^2}{18}$$

Từ các đẳng thức trên suy ra $S \geq \frac{12(a^2 + b^2 + c^2)}{18} = 2$

Vậy $\min S = 2$ khi $a = b = c = 1$

Bài 14: Với a, b, c là các số thực dương, nhỏ hơn và thỏa mãn $a+b+c=3$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2(3b+3c-5)} + \frac{1}{b^2(3c+3a-5)} + \frac{1}{c^2(3a+3b-5)} \geq 3$$

Bài giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{1}{a^2(3(3-a)-5)} + \frac{1}{b^2(3(3-b)-5)} + \frac{1}{c^2(3(3-c)-5)} \geq a + b + c$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh khi ta có $\frac{1}{a^2(4-3a)} \geq a$

Thật vậy, do $a < \frac{4}{3}$ nên bất đẳng thức trên tương đương với $1 \geq a^3(4-3a) \Leftrightarrow 3a^4 + 1 \geq 4a^3$

Từ $a > 0$ nên theo bất đẳng thức AM-GM ta nhận được $3a^4 + 1 = a^4 + a^4 + a^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^4 \times a^4 \times a^4} = 4a^3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 1$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

§8: BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{4}{a+b-c}$. Tìm GTNN của

$$P = (a^5 + b^5 + c^5) \left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} \right)$$

Bài giải

Từ giả thiết ta có

$$(a+b-c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = 4 \Leftrightarrow 4 = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \left(\frac{a+b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) \leq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\sqrt{(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 7$$

Biểu thức

$$P = 3 + \frac{a^5 + b^5}{c^5} + c^5 \left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \right) + \frac{a^5}{b^5} + \frac{b^5}{a^5} \geq 3 + 2\sqrt{(a^5 + b^5) \left(\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \right)} + \frac{a^5}{b^5} + \frac{b^5}{a^5} = 3 + 2\sqrt{2 \frac{a^5}{b^5} + \frac{b^5}{c^5} + \frac{a^5}{b^5} + \frac{b^5}{a^5}}$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 7$ thì ta có $\frac{a^5}{b^5} + \frac{b^5}{a^5} = t^5 - 3t^3 + 5t \geq 15127 \forall t \geq 7 \Rightarrow P \geq 15376$

Dấu “=” xảy ra khi $a = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}b = c\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

Bài 2: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{c^2 + 3} + \frac{bc}{a^2 + 3} - \frac{a^3b^3 + b^3c^3}{24a^3c^3}$$

Bài giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{ab}{c^2 + 3} + \frac{bc}{a^2 + 3} &= \frac{ab}{(c^2 + a^2) + (c^2 + b^2)} + \frac{bc}{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2)} \\ &\leq \frac{ab}{2\sqrt{(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)}} + \frac{bc}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b^2}{c^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ab} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b}{2c} + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } (x^3 + y^3)(x + y) &\geq (x^2 + y^2)^2 \geq \frac{(x + y)^4}{4} \Rightarrow x^3 + y^3 \geq \frac{(x + y)^3}{4} \\ \Rightarrow \frac{a^3b^3 + b^3c^3}{a^3c^3} &\geq \frac{(ab + bc)^3}{4c^3a^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^3 \Leftarrow P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^3 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{t}{8} - \frac{t^3}{96}$ với $t > 0 \Rightarrow f(t)_{\max} = f(2) = \frac{5}{12}$

Vậy $P_{\max} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 3: Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\begin{aligned} \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} &= \frac{xy}{(z^2+x^2)+(z^2+y^2)} + \frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)} \\ &\leq \frac{xy}{2\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}} + \frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{z^2+x^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y}{2z} + \frac{y}{2x} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $x^3y^3 + y^3z^3 \geq \frac{1}{4}(xy + yz)^3$ nên

$$\frac{x^3y^3 + y^3z^3}{z^3x^3} \geq \frac{(xy + yz)^3}{4z^3x^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3 \text{ Suy ra } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} \right)^3$$

Đặt $t = \frac{y}{x} + \frac{y}{z}$, khi đó $t > 0$ và $P \leq -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$. Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$ với $t > 0$

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{8}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$, vì $t > 0$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \leq \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy giá

trị lớn nhất của P là $\frac{5}{12}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4: Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + z \leq 2y$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - y^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3} \right).$$

Bài giải

Từ giả thuyết ta có $\sqrt{xz} \leq y$.

Chú ý rằng, với mọi $x, y > 0$ và mọi a, b ta có $\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$. (1)

Thật vậy, (1) tương đương với $(ay - bx)^2 \geq 0$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - y^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3} \right) \leq \frac{(x+y)^2}{4(1+z^2)} + \frac{(y+z)^2}{4(1+x^2)} - y^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(x+y)^2}{4(x^2+z^2+y^2+z^2)} + \frac{(y+z)^2}{4(x^2+y^2+x^2+z^2)} - y^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{y^2+z^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right) - y^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3} \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) - \left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{y^3}{z^3} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) \left(\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^2 - 3 \frac{y^2}{xz} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) \frac{y^2}{xz} \\
&\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3 + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x}$, $t \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{xz}} = 2$. Khi đó $P \leq -\frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}$ với $t \geq 2$. Ta có $f'(t) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{8}t < 0$ với mọi $t \geq 2$.

Suy ra $\max_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = -\frac{3}{2}$.

Suy ra $P \leq -\frac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $-\frac{3}{2}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 5 : cho các số thực dương a,b,c sao cho $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 10$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{3}{ab+bc+ca} - \frac{4}{a^3+b^3+c^3}$$

(Trích đề thầy Trần Quốc Luật)

Lời giải:

Chú ý từ giả thiết ta có:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = 10abc \Rightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = 7abc = \frac{7(a+b+c)(ab+bc+ca)}{10}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ ta có :

$$10 = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b+c}\right)$$

$$\Rightarrow 10a(b+c) \geq (a+b+c)(4a+b+c) \Leftrightarrow (a-b-c)(4a-b-c) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b+c \text{ từ đây suy ra:}$$

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0 \Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 2abc (*)$$

$$\Leftrightarrow 4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+abc] \geq (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(a+b+c)(ab+bc+ca)}{5} \geq (a+b+c)^3 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq \frac{5(a+b+c)^2}{16}$$

$$\text{Mặt khác ta có } (*) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \leq 5abc = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2} \leq \frac{5(a+b+c)^3}{32}$$

$$\text{Từ các đánh giá trên ta có } P \leq \frac{48}{5(a+b+c)^2} - \frac{128}{5(a+b+c)^3} \leq \frac{1}{5} \text{ (dễ dàng chứng minh)} \quad \text{Max}$$

$$P = \frac{1}{5} \text{ khi } (a,b,c) = (2;1;1) \text{ và hoán vị}$$

Bài 6: Cho các số thực dương x,y,z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$ Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$$

(Trích đề thi thử sở Hà Tĩnh)

Bài giải

Bài này tính cả cách của mình thì có khoảng 7 lời giải nhưng có 4 lời giải có vẻ na ná giống nhau vì thế xin chỉ nêu các cách điển hình :

chú ý các đẳng thức sau:

$$16 = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \right) + 3 \text{ và :}$$

$$P = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} = \frac{(x^2z + y^2x + z^2y) - (x^2y + y^2z + z^2x)}{xyz} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) - \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \right)$$

Bây giờ đặt $A = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right); B = \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \right)$ thì $A+B=13$ và cần tìm max của $P=A-B$

$$\text{Áp dụng BĐT am-gm : } 16^2 = [x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)] \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \right]$$

$$\geq 4 \sqrt{2(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)$$

$$= 8 \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)} \cdot (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 32 \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \leq 64 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) + \left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} \right) \leq 61$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2B + B^2 - 2A \leq 61 \Leftrightarrow (A+B)^2 - 2AB - 2(A+B) \leq 61 \Leftrightarrow AB \geq 41 \text{ ta có :}$$

$$P^2 = (A-B)^2 = (A+B)^2 - 4AB \leq 169 - 4 \cdot 41 = 5 \Rightarrow P \leq \sqrt{5} \text{ đẳng thức có thể xảy ra khi :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx) \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyz(x + y + z) \text{ chẳng hạn như} \\ (x - y)(y - z)(z - x) > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \sqrt{yz} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ z \geq y \geq x \end{array} \right.$$

§8: BẤT ĐẲNG THỨC CÓ BIÊN BẰNG 0

Bài 1: Cho các số thực $x; y; z$ không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \right)$

Bài giải

Giả sử $z = \min(x; y; z)$. Khi đó ta có: $x + y \geq 2z \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \left(x + \frac{z}{2}\right) \left(y + \frac{z}{2}\right)$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{y^2 + z^2} \geq \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2}; \frac{1}{x^2 + z^2} \geq \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow P \geq \left(x + \frac{z}{2}\right) \left(y + \frac{z}{2}\right) \left[\frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{z}{2}\right)^2} \right]$$

Đặt $a = x + \frac{z}{2}; b = y + \frac{z}{2}$ ($a > 0, b > 0$ theo gt cho)

$$\text{Ta có : } P \geq ab \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \left[\frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \right] + \frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$ ($t > 0$) ta khảo sát hàm số:

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + 1} + t + \frac{1}{t} \quad (\text{với } t > 0)$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} + 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{-(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} + \frac{(t^2 - 1)}{t^2}$$

$$= (t^2 - 1) \left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t^2 + 1)} \right] = 0 \Leftrightarrow t = 1 (t > 0)$$

Bài 2: Cho $a; b; c$ là các số thực không âm đôi một khác nhau. Tìm Min

$$P = \left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \right] \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Bài giải

Giả sử $c = \min(a; b; c) \Rightarrow a - c \leq a; b - c \leq b \Rightarrow P \geq \left[(a+b)^2 + a^2 + b^2 \right] \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]$

$$= \frac{2(a^2 + b^2 + ab)}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{a^2} + \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{b^2}$$

$$= 2 \left[\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2} + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right] = f(t) = 2 \left[\frac{t+1}{t-2} + t^2 + t \right] \text{ với } P = \frac{x^2(y+z)}{yz} \quad t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

$$f'(t) = \frac{-3}{(t-2)^2} + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}$$

Lập bảng biến thiên ta có ngay $\min f(t) = \frac{59 + 11\sqrt{33}}{8}$

$\Rightarrow P \geq \frac{59 + 11\sqrt{33}}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow c = 0; \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}$ và các hoán vị của chúng.

Bài 3: Cho a, b, c là các số không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} + \frac{a + b + c}{(a + b)c} + 2\sqrt{a + b + c}$$

Bài giải

Ta có $P = \frac{2a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} + \frac{a + b + c}{(a + b)c} + 2\sqrt{a + b + c} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c} + 2\sqrt{a + b + c}$

Vì $0 \leq a < b \leq c$ nên $a^2 + b^2 \leq ab + b^2 \leq \left(\frac{a}{2} + b \right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 0$

Tương tự: $a^2 + c^2 \leq \left(\frac{a}{2} + c \right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 0$

Nên: $P \geq \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + b \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + c \right)^2} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c} + 2\sqrt{a + b + c}$ dấu bằng xảy ra khi $a = 0$

Áp dụng các bất đẳng thức: với $x > 0, y > 0$ ta có:

- $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2}$ dấu bằng xảy ra khi $x = y$. (phải chứng minh)
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Ta có: $P \geq \frac{8}{(a + b + c)^2} + \frac{4}{a + b + c} + 2\sqrt{a + b + c}$

Đặt $t = 2\sqrt{a + b + c}$ với $t > 0$

Xét hàm số $f(t) = \frac{8}{t^4} + \frac{4}{t^2} + 2t$ với $t > 0$

Ta có: $f'(t) = -\frac{32}{t^5} - \frac{8}{t^3} + 2 = \frac{2t^5 - 8t^2 - 32}{t^5}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^5 - 8t^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow 2(t-2)(t^4 + 2t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bài 4: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{1+2a^2} + \sqrt{1+2b^2} + \sqrt{1+2c^2} = 5$

Chứng minh rằng: $4\sqrt{2}a^3 + b^6 + c^6 \leq 64$

Bài giải

Áp dụng (1) ta có

$$5 = \sqrt{1+2a^2} + \sqrt{1+2b^2} + \sqrt{1+2c^2} \geq 1 + \sqrt{1+2a^2+2b^2} + \sqrt{1+2c^2} \geq 2 + \sqrt{1+2a^2+2b^2+2c^2}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$ hay $b^2 + c^2 \leq 4 - a^2$ (2)

Khi đó $4\sqrt{2}a^3 + b^6 + c^6 \leq 4\sqrt{2}a^3 + (b^2 + c^2)^3$

Từ (2) và do a, b, c không âm ta có $0 \leq a \leq 2$

Xét hàm số $f(a) = 4\sqrt{2}a^3 + (4 - a^2)^3$ trên $[0; 2]$. Ta có:

$$f'(a) = 12\sqrt{2}a^2 - 6a(4 - a^2)^2 = 6a(a - \sqrt{2})[a(6 - a^2) + \sqrt{2}(8 - a^2)]$$

Với $a \in [0; 2]$, $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0; a = \sqrt{2}$

Có $f(0) = 64$; $f(\sqrt{2}) = 24$; $f(2) = 32\sqrt{2} \Rightarrow f(a) \leq 64$; với $\forall a \in [0; 2]$

Vậy $4\sqrt{2}a^3 + b^6 + c^6 \leq 64$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 0, c = 2$ hoặc $a = c = 0, b = 2$.

Bài 5: Với các số thực: $0 \leq a, b, c \leq 2$ thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c}$

Bài giải

Ta chứng minh: $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$ (*). Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow 1+a+1+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1+1+a+b+2\sqrt{1+a+b}$$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b) \geq 1+a+b \Leftrightarrow ab \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

Suy ra: $1 \leq c \leq 2$. Theo (*) ta có: $P \geq 1 + \sqrt{1+a+b} + \sqrt{1+c} = 1 + \sqrt{4-c} + \sqrt{1+c}$

Xét hàm: $f(c) = 1 + \sqrt{4-c} + \sqrt{1+c}; 1 \leq c \leq 2$

$$\text{Ta có } f'(c) = -\frac{1}{2\sqrt{4-c}} + \frac{1}{2\sqrt{1+c}}; f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có: } f(1) = f(2) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}; f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \sqrt{10}. \text{ Vậy: } P \geq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Vậy GTNN của P là: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Bài 6: Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm min của

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} + \frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1)$$

Bài giải

Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Đặt $x + \frac{z}{2} = u \geq 0, y + \frac{z}{2} = v \geq 0$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &\leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 = u^2, y^2 + z^2 \leq \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = v^2 \\ x^2 + y^2 &\leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = u^2 + v^2 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} &\geq \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right)$$

$$\frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{2uv} + \frac{6}{(u+v)^2} \geq \frac{4}{(u+v)^2} + \frac{6}{(u+v)^2} = \frac{10}{(x+y+z)^2}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = xyz + (xy + yz + zx) + (x + y + z) + 1 = xyz + x + y + z + 2 \geq x + y + z + 2$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{10}{(x+y+z)^2} + \frac{5}{2}(x+y+z) + 5$$

$$\text{Các BĐT phụ đã dùng } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \geq \frac{1}{2uv}, \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Bài 7: Cho các số thực không âm a, y, z biết $x = \min\{x, y, z\}$. tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{32(x + \sqrt{yz})^2}{x(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 + 4[(y + \sqrt{xz})(z + \sqrt{xy}) + 1]} - (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$

Bài giải

Ta có các đánh giá sau:

$$(y + \sqrt{zx})(z + \sqrt{xy}) \geq (x + \sqrt{yz})^2 \Leftrightarrow yz + z\sqrt{zx} + y\sqrt{xy} + x\sqrt{yz} \geq x^2 + 2x\sqrt{yz} + yz$$

$$\Leftrightarrow x(z\sqrt{z} + y\sqrt{y} - \sqrt{xyz} - x\sqrt{x}) \geq 0 \quad (\text{đúng với } x = \min\{x, y, z\})$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \geq 4(x + \sqrt{yz}) \Leftrightarrow x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx} \geq 4(x + \sqrt{yz})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + \sqrt{x}(2\sqrt{y} + 2\sqrt{z} - 3\sqrt{x}) \geq 0 \quad (\text{đúng với } x = \min\{x, y, z\})$$

$$x(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \geq 0$$

$$\text{Nên: } P \leq \frac{32(x + \sqrt{yz})^2}{4(x + \sqrt{yz})^2 + 4} - 4(x + \sqrt{yz}) = \frac{8(x + \sqrt{yz})^2}{(x + \sqrt{yz})^2 + 1} - 4(x + \sqrt{yz})$$

Đặt $x + \sqrt{yz} = t (t \geq 0)$. Ta có:

$$f(t) = \frac{8t^2}{t^2 + 1} - 4t. f'(t) = \frac{16t}{(t^2 + 1)^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 - t^2 + 3t - 1) = 0$$

Phương trình có nghiệm $t = 1$ và nghiệm lượng giác a

Với $t \geq 1$ thì $f'(t) \geq 0$. Hàm đồng biến nên ta chỉ xét P trong khoảng $[0; 1]$

Ta tính $f(0), f(1), f(a)$ và có $f(0) = f(1) = 0 > f(a)$

Nên $\text{Max}P = \text{Max}f(t) = f(0) = f(1) = 0$.. dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = 0; y = z = 1 \end{cases}$

Bài 8: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 8(xy^2 + yz^2 + zx^2)$

(Trích đề thi thử trường chuyên Vinh lần 2)

Bài giải

Giả sử y nằm giữa x và z

$$\Rightarrow x(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow x^2y + xyz \geq xy^2 + x^2z \Leftrightarrow x^2y + 2xyz + z^2y \geq xy^2 + x^2z + z^2y + xyz \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$$

$$\Rightarrow P \leq x^3 + y^3 + z^3 + 8y(x+z)^2. \text{ Lại có } x^3 + z^3 \leq (x+z)^3 = (4-y)^3 \quad (\text{do } z \geq 0)$$

$$\Rightarrow P \leq (4-y)^3 + y^3 + 8y(4-y)^2 = f(y) \leq f(1) = 100$$

$$\Rightarrow P_{\max} = 100 \text{ tại } (x, y, z) = (3, 1, 0)$$

Bài 9: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 - 4x^2 - 5y^2 + 1 = 0$

Tìm GTNN, GTLN của $P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

Bài giải

$$\text{Từ điều kiện } \Rightarrow y^2 - 3x^2y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq 1$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 - 3x^2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } \frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2y^2}{3} = (x^2 + y^2 + 1)^2 - \frac{13}{3}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}$$

$$\text{Với } y^2 > 2 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 1)^2 - \frac{13}{3}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow P > \frac{4}{3} \quad (\text{Vô lí với } P_{\min} = 1)$$

$$\Rightarrow y^2 \leq 2 \Rightarrow P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} \leq \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2y^2 - 4}{y^2 + 1} \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

Bài 10: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm GTLN của biểu thức: $P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - xz + x^2)$

Bài giải

Giả sử $3 \geq x \geq y \geq z \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(z-x) \leq 0 \\ z(z-y) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - zx + x^2 \leq x^2 \\ z^2 - zy + y^2 \leq y^2 \end{cases} \Rightarrow P \leq x^2 y^2 (x^2 - xy + y^2) = x^2 y^2 (x+y)^2 - 3x^3 y^3 \leq 9x^2 y^2 - 3x^3 y^3$$

Xét hàm số $f(t) = 9t^2 - 3t^3$ với $t \in \left[0; \frac{9}{4}\right] \Rightarrow f(t)_{\max} = f(2) = 12$

Vậy $P_{\max} = 12$ tại $(x; y; z) = (2; 1; 0)$

Bài 11 : Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2 y^2 - 4x^2 - 5y^2 + 1 = 0$

Tìm GTNN, GTLN của $P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

Bài giải

Từ điều kiện $\Rightarrow y^2 - 3x^2 y^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq 1$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 - 3x^2 y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } \frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2 y^2}{3} = (x^2 + y^2 + 1)^2 - \frac{13}{3}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}$$

$$\text{Với } y^2 > 2 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2 \Rightarrow (x^2 + y^2 + 1)^2 - \frac{13}{3}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow P > \frac{4}{3} \text{ (Vô lí với } P_{\min} = 1)$$

$$\Rightarrow y^2 \leq 2 \Rightarrow P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2y^2 - x^2 - 4 - 9x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} \leq \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2y^2 - 4}{y^2 + 1} \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

Bài 12 : Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm GTLN của biểu thức : $P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - xz + x^2)$

Bài giải

Giả sử $3 \geq x \geq y \geq z \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(z-x) \leq 0 \\ z(z-y) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - zx + x^2 \leq x^2 \\ z^2 - zy + y^2 \leq y^2 \end{cases} \Rightarrow P \leq x^2 y^2 (x^2 - xy + y^2) = x^2 y^2 (x+y)^2 - 3x^3 y^3 \leq 9x^2 y^2 - 3x^3 y^3$$

Xét hàm số $f(t) = 9t^2 - 3t^3$ với $t \in \left[0; \frac{9}{4}\right] \Rightarrow f(t)_{\max} = f(2) = 12$

Vậy $P_{\max} = 12$ tại $(x; y; z) = (2; 1; 0)$

Câu 13: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xy + yz + zx) + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$

$$P \geq 3 \frac{(xy + yz + zx)^2}{3} + 3(xy + yz + zx) + 2\sqrt{1 - 2(xy + yz + zx)}$$

$$\Rightarrow P \geq (xy + yz + zx)^2 + 3(xy + yz + zx) + 2\sqrt{1 - 2(xy + yz + zx)}$$

Đặt $t = xy + yz + zx (t \geq 0)$. Do $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

$$\text{Nên } 1 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3t \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t} \Rightarrow f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1 - 2t}} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow f(t)_{\min} = 2 \rightarrow P_{\min} = 2 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

Câu 14: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $4(x^3 + 8y^6) = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x + 2y^2 + 2)^3}{5(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 3}$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức phụ $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ ta được

$$x^3 + 8y^6 \geq 2xy^2(x + 2y^2) \Rightarrow (x^3 + 8y^6) \geq (x + 2y^2)^3 \Leftrightarrow 1 \geq (x + 2y^2)^3 \Leftrightarrow 1 \geq x + 2y^2$$

$$\text{Do đó: } (x + 2y^2 + 2)^3 \leq (1 + 2)^3 = 27 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 5(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 3 \geq \frac{5}{2}(x + y)^2 - 5(x + y) + 3 = \frac{5}{2}[(x + y)^2 - 2(x + y) + 1] + \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \rightarrow P \leq \frac{27}{\frac{1}{2}} = 54 \quad \text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x = 2y^2 \\ x + y = 1 \\ 4(x^3 + 8y^6) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy Max } P = 54 \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}$$

Bài 15: Cho các số không âm a, b, c và $b > 0$; $\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b + 2c} = 4\sqrt{b}$. tìm $\max P = \frac{a\sqrt{b}}{b + c} + \frac{c}{a\sqrt{b} + 2b}$

Lời giải

Đặt $y = \frac{c}{b}$; $x = \frac{a}{\sqrt{b}}$ ta có $GT \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + \sqrt{1+2y} = 4$ và cần tìm $\max P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+2}$

chú ý $4 = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{1+2y} \geq \sqrt{x^2+1} + 1 \rightarrow x \leq 2\sqrt{2}$ và tương tự $y \leq 4$ lúc này ta có

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+2} - 2\sqrt{2} = \frac{x-2\sqrt{2}}{y+1} - \frac{y(4\sqrt{2}-y-1+2\sqrt{2}x)}{(x+2)(y+1)} \leq 0 \Leftrightarrow P \leq 2\sqrt{2}.$$

$\max P = 2\sqrt{2}$ khi $(x, y) = (2\sqrt{2}; 0)$

Bài 16: Cho các số không âm x, y, z sao cho $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 6$ tìm $\max$ của

$$P = \frac{(x+y+z)^2}{6+z} - \frac{(xy+yz+zx)^2}{24}.$$

Bài giải

Giải: ta có $6 = (x+y)^2 + 2z(x+y+z) + x^2 + y^2 \geq \frac{3(x+y)^2}{2} + 2z(x+y) + \frac{2z^2}{3} = \frac{(3x+3y+2z)^2}{6}$

$\Rightarrow 3x+3y+2z \leq 6 \Leftrightarrow 3(x+y+z) \leq z+6$ từ đó suy ra

$$P \leq \frac{(x+y+z)}{3} - \frac{(xy+yz+zx)^2}{24} \leq \frac{(x+y+z)^2}{12} + \frac{1}{3} - \frac{(xy+yz+zx)^2}{24} = \frac{15}{24} - \frac{(xy+yz+zx-1)^2}{24} \leq \frac{15}{24} \max P = 15/24$$

khi $(x, y, z) = (1, 1, 0)$

Bài 17: Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a+b+c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)$$

Bài giải

Không mất tính tổng giả sử $a \geq b \geq c$. thế thì :

$$a^2 + ac + c^2 \leq a^2 + ac + \frac{c(a+c)}{2} = (a+c) \left(a + \frac{c}{2} \right) \text{ và } b^2 + bc + c^2 \leq b^2 + bc + \frac{c(b+c)}{2} = (b+c) \left(b + \frac{c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \prod_{a,b,c} (a^2 + ab + b^2) \leq (a+c)(b+c)(a^2 + ab + b^2) \left(a + \frac{c}{2} \right) \left(b + \frac{c}{2} \right) \leq (a+c)(b+c)(a^2 + ab + b^2)$$

Lưu ý $3(a+c)(b+c) + (a^2 + ab + b^2) = \frac{3(a+b+c)^2}{2} + \frac{3c^2 - (a-b)^2}{2}$ ta có:

$$4.3(a+c)(b+c).(a^2 + ab + b^2) = \left[3(a+c)(b+c) + (a^2 + ab + b^2) \right]^2 - \left[3c(a+b) + 3c^2 - (a-b)^2 \right]^2$$

$$= \left[6 + \frac{3c^2 - (a-b)^2}{2} \right]^2 - \left[3c^2 - (a-b)^2 + 3c(a+b) \right]^2$$

$$= 36 + 6(1-c)^2 (3c^2 - (a-b)^2) - 9c^2(a+b)^2 - \frac{3[3c^2 - (a-b)^2]^2}{4}$$

$$\leq 36 + 18c^2(1-c)^2 - 9c^2(2-c)^2 = 36 - 9c^2(2-c^2) \leq 36. \text{ từ đó } P \leq 3 \text{ dấu } = \text{ khi } (a, b, c) = (1, 1, 0) \text{ và hoán vị}$$

Bài 18: Cho các số $x, y, z \in [0; 2]$ không đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của :

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy + yz + zx) + \frac{96}{3\sqrt{x^3 + y^3 + 2z}}$$

Bài giải

Chú ý $3\sqrt{x^3+y^3}+2z \leq 3(x+y)+2z \leq 3(x+y+z)$ từ đây ta có

$$P \geq (x+y+z)^2 + 4(xy+yz+zx) + \frac{32}{x+y+z}$$

Nếu $x+y+z \leq 2$ để có $P \geq (x+y+z)^2 + \frac{32}{x+y+z} \geq 20$

Nếu $x+y+z \geq 2$ từ $xyz+(2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \Rightarrow xy+yz+zx \geq 2(x+y+z)-4$ từ đó :

$$P \geq (x+y+z)^2 + 8(x+y+z) + \frac{32}{x+y+z} - 16 \geq 4 + 32 - 16 = 20 \text{ min} P = 20 \text{ chẳng hạn } x=2; y=z=0$$

Bài 19: cho các số thực không âm $x, y, z \in [0, 2]$ và $x+y+z=3$ tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{x^2+y^2+2} + \frac{1}{y^2+z^2+2} + \frac{1}{z^2+x^2+2} + \sqrt{xy+yz+zx}$$

Bài giải

Không mất tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$ suy ra $2 \geq x \geq 1$ và $y+z \geq 1 \rightarrow xy > 0$ ta có

$$\frac{1}{x^2+y^2+2} \geq \frac{1}{x^2+(y+z)^2+2}; \frac{1}{y^2+z^2+2} \geq \frac{1}{(y+z)^2+2} \text{ mặt khác}$$

$$\sqrt{xy+yz+zx} - \sqrt{x(y+z)} = \frac{yz}{\sqrt{xy+yz+zx} + \sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{z^2}{2\sqrt{3}} \geq \frac{z^2}{(x^2+2)(x^2+z^2+2)} \text{ nên:}$$

$$\sqrt{xy+yz+zx} + \frac{1}{x^2+z^2+2} \geq \sqrt{x(y+z)} + \frac{1}{x^2+z^2+2} + \frac{z^2}{(x^2+2)(x^2+z^2+2)} = \sqrt{x(y+z)} + \frac{1}{x^2+2}$$

thay $y+z=3-x$ và kết hợp các đánh giá trên ta quy về

$$P \geq f(x) = \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2x^2-6x+11} + \frac{1}{x^2-6x+11} + \sqrt{x(3-x)} \text{ với } x \in [1; 2] \text{ chú ý rằng}$$

$$\frac{1}{2x^2-6x+11} = \frac{1}{2(x-1)(x-2)+7} \geq \frac{1}{7} \text{ mặt khác ta cũng có đánh giá}$$

$$\left(\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{x^2-6x+11} - \frac{1}{3}\right) = \frac{(x-1)(2-x)(x^2-3x-2)}{2(x^2+2)(x^2-6x+11)} \geq \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{9} \geq \frac{(x-1)(x-2)}{3}$$

$$\sqrt{x(3-x)} - \sqrt{2} = \frac{(x-1)(2-x)}{\sqrt{x(3-x)} + \sqrt{2}} \geq \frac{(x-1)(2-x)}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{(x-1)(2-x)}{3} \text{ từ đây ta có}$$

$$P \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{(x-1)(x-2)}{3} + \sqrt{2} + \frac{(x-1)(2-x)}{3} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \text{ dấu } = \text{ khi } (x, y, z) = (2, 1, 0) \text{ và hoán vị}$$

Bài 20 : Cho các số thực $a \geq c \geq b > 0$ thỏa mãn $a+c=2b+1$ tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \sqrt{\frac{a^2b}{(a+b+1)^2 + 4(2ab-ac)}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) + \sqrt{c-b+4}$$

(Trích đề thầy Đình Công Diêu)

Bài giải

Thay $a+c-2b=1$ ta có các đánh giá:

$$(a+b+1)^2 + 4(2ab-ac) = (2a+c-b)^2 + 4(2ab-ac) = (b-c)^2 + 4a(a+b) \geq 4a(a+b)$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{a(a^2-b^2)}{(a+b+1)^2 + 4(2ab-ac)}} + \sqrt{\frac{4a+5c-9b}{a+c-2b}} \leq \sqrt{\frac{a(a^2-b^2)}{4a(a+b)}} + \sqrt{\frac{4a+5c-9b}{a+c-2b}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a-b}{a+c-2b}} + \sqrt{5 - \frac{a-b}{a+c-2b}} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{a-b}{a+c-2b} + 5 - \frac{a-b}{a+c-2b}\right)} = \frac{5}{2} \text{ (Cauchy-schwarz)} \end{aligned}$$

Vậy $\max P = \frac{5}{2}$ khi $(a, b, c) = (2, 1, 1)$

Bài 21: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 2]$ và $0 < x+y+z \leq 4$ tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{12(x+y) - 4xyz}{(3-x)(3-y)} + \frac{72}{x^4 + 2y^3 + 4z^2 + 8}$$

Bài giải

$$\frac{72}{x^4 + 2y^3 + 4z^2 + 8} \geq \frac{72}{2(x^3 + y^3) + 24} = 3 - \frac{3(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3 + 12}$$

Ngoài ra $\frac{12(x+y) - 4xyz}{(3-x)(3-y)} \geq \frac{12(x+y) - 2(x+y)^2}{3(3-x)} \geq \frac{4(x+y)}{3(3-x)}$. từ đó suy ra:

$$P \geq 3 - \frac{3(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3 + 12} + \frac{4(x+y)}{3(3-x)} = G. \text{ trong } G \text{ thì } x \text{ và } y \text{ đối xứng ta giả sử } x \geq y \text{ thì}$$

$$P \geq 3 - \frac{3x^2(x+y)}{12} + \frac{4(x+y)}{3(3-x)}$$

$$x^2(3-x) = 4 - (x-2)^2(x+1) \leq 4 \Rightarrow 3 - \frac{3x^2(x+y)}{12} + \frac{4(x+y)}{3(3-x)} \geq 3 + \frac{4(x+y)}{3(3-x)} - \frac{x+y}{3-x} \geq 3$$

$$\rightarrow P \geq 3. \min = 3. \text{ khi } (x, y, z) = (0, 0, 2)$$

Bài 22: Cho các số không âm x, y, z và $xy + yz + zx > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - zx + x^2} \leq x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}$$

Bài giải

Không mất tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$ thì: $\sqrt{y^2 - z(y-z)} + \sqrt{x^2 - z(x-z)} \leq x + y$

Mà dễ thấy: $\sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \frac{x+y}{2}$ và $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx} \geq \frac{x+y-2z}{2}$

$$\text{Từ đó: } \sqrt{x^2 - xy + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx} = \frac{z(x+y-z)}{\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}}$$

$$\leq \frac{z(x+y-z)}{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y-2z}{2}} = z \text{ từ đó ta có ĐPCM dấu } = \text{ khi } x = y = z \text{ hoặc 1 trong 3 biến bằng 0}$$

Bài 23: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = \sqrt{(a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-7)^2} + 2\sqrt{(a+3)^2 + (b-6)^2 + (c+5)^2}$$

Bài giải

$$\text{Có } 14 = (a-1)^2 + 1 + (b-2)^2 + (c-3)^2 + 4 \geq 2|a-1| + (b-2)^2 + 4|c-3| \geq (b-2)^2 + 2(1-a) + 4(3-c)$$

$$\Rightarrow 8(a-1) + 16(c-3) \geq 4(b-2)^2 - 56$$

$$\text{Mặt khác ta có } \sqrt{(a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-7)^2} + \sqrt{(a+3)^2 + (b-6)^2 + (c+5)^2}$$

$$\geq \sqrt{(3-a+a+3)^2 + 4(b-6)^2 + (7-c+c+5)^2} = \sqrt{4(b-6)^2 + 180}$$

$$\text{Và } \sqrt{(a+3)^2 + (b-6)^2 + (c+5)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 8(a-1) + 16 + (b-6)^2 + (c-3)^2 + 16(c-3) + 64}$$

$$\geq \sqrt{(b-6)^2 + 9 - (b-2)^2 + 4(b-2)^2 + 80 - 56} = \sqrt{4b^2 - 24b + 81}$$

$$\Rightarrow P \geq \sqrt{4(b-6)^2 + 180} + \sqrt{4b^2 - 24b + 81}$$

$$\text{Xét hàm số } f(b) = \sqrt{4(b-6)^2 + 180} + \sqrt{4b^2 - 24b + 81} \Rightarrow f(b) \geq f(4) = 21$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 21 \Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 4; 1)$$

Bài 24 : Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq 1 \leq c$ và $2b^2 + c^2 + a^2 + 4(2a+b+c) = 18$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = a^2c + c^2b + b^2a - \frac{13}{2a - 5b + 6(\sqrt{b} + \sqrt[3]{4bc})}$$

Bài giải

$$\text{Ta có } a^2c + c^2b + b^2a - b(a+c)^2 = a(b-c)(b-a) - abc \leq 0 \rightarrow a^2c + c^2b + b^2a \leq b(a+c)^2$$

$$\text{Mặt khác } b(a+c)^2 \leq \frac{4(a+b+c)^3}{27} \text{ (am-gm) cũng theo BĐT am-gm:}$$

$$2a - 5b + 6\sqrt{b} + 6\sqrt[3]{4bc} \leq 2a - 5b + 3(b+1) + 2(2+2b+c) = 2(a+b+c) + 7 \text{ từ giả thiết ta có :}$$

$$24 = a^2 + 2(b^2+1) + (c^2+4) + 4(2a+b+c) \geq 4b + 4c + 4(2a+b+c) \rightarrow a+b+c \leq 3 \text{ ta có}$$

$$P \leq \frac{4(a+b+c)^3}{27} - \frac{13}{2(a+b+c)+7} \leq \frac{4 \cdot 27}{27} - \frac{13}{2 \cdot 3 + 7} = 3. \text{ Vậy Max } P=3 \text{ khi } (a, b, c) = (0, 1, 2)$$

Bài 25: Cho các số thực $\begin{cases} x \in [0; 1]; y, z \in (0; 1] \\ x = \min(x, y, z) \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+z+3xz}{y^2} + \frac{x+y+3xy}{\sqrt{x^2+z}\sqrt{xz+z^2}} + \sqrt{\frac{2x+4y}{x+y+z}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2x+2y^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2y+x^2z+2z^2y}} \right)$$

Bài giải

Hình thức công kênh nhưng bài này xử lý khá nhàn: chú ý là:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2x+2y^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2y+x^2z+2z^2y}} \geq \frac{4}{\sqrt{2(x^3+y^2x+2y^3+2x^2y+x^2z+2z^2y)}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2(x+2y)(x^2+y^2+z^2)+xz(x-z)}} \geq \frac{4}{\sqrt{2(x+2y)(x^2+y^2+z^2)}} \geq \frac{4}{\sqrt{2(x+2y)(x+y+z)}}$$

Mặt khác $x^2 + z\sqrt{xz+z^2} \leq (x+z)^2 \Leftrightarrow z(2x+z) \geq z\sqrt{xz+z^2} \Leftrightarrow 3xz \geq 0$: đúng nên

$$P \geq \frac{x+z+3xz}{y^2} + \frac{x+y+3xy}{z+x} + \frac{4}{x+y+z} \geq \frac{x+z}{1} + \frac{xy+yz}{z+x} + \frac{4}{x+y+z} = \frac{(x+y-z)^2}{4} + 4 \geq 4$$

Min P=4 khi $x=0$ và $y=z=1$

Bài 26: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x + 4^y + 4^z + \ln(x^4 + y^4 + z^4) - \frac{3}{4}(x+y+z)^4$.

Bài giải

Chứng minh bất đẳng thức phụ sau $4^t \leq 3t+1, \forall t \in [0;1]$. Xét hàm số $f(t) = 4^t - 3t - 1, \forall t \in [0;1]$.

Ta có: $f'(t) = 4^t \ln 4 - 3, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_4\left(\frac{3}{\ln 4}\right) \in (0;1)$.

Ta có: $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \leq 1$

Suy ra: $x, y, z \in [0;1]$. Dấu “=” xảy ra khi $(x;y;z) = (1;0;0)$ hoặc các hoán vị.

Và $2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Do $4^t \leq 3t+1, \forall t \in [0;1] \Rightarrow 4^x + 4^y + 4^z \leq 3(x+y+z) + 3$

Mặt khác: $x^4 + y^4 + z^4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \ln(x^4 + y^4 + z^4) \leq \ln(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$

Từ đó ta có: $P \leq 3(x+y+z) + 3 - \frac{3}{4}(x+y+z)^4 \leq \frac{21}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi $(x;y;z) = (1;0;0)$ hoặc các hoán vị.

Vậy $\text{Max} P = \frac{21}{4}$.

Bài 27: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $0 < x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 9$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4 - \frac{(x+y+z)^6}{5(x^2 + y^2 + z^2)}$

Bài giải

Cách 1

$$+) \frac{(x+y+z)^6}{5(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^3}{5(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz)} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^2}{5}$$

$$+) x^4 + y^4 + z^4 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^2$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{4(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz)^2}{5} \leq \frac{4.81}{5} = \frac{324}{5}$$

Vậy $P_{\max} = \frac{324}{5}$ tại $(x;y;z) = (3;0;0)$ và các hoán vị.

Cách 2

Ta có : $x^2 \leq 9 - (y^2 + z^2 + xy + yz + xz) \leq 9 \Rightarrow x \in [0;3]$

Tương tự $\Rightarrow y, z \in [0;3]$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x(x^3 - 27) \leq 0 \\ y(y^3 - 27) \leq 0 \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \leq 27(x + y + z) \\ z(z^3 - 27) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Và } \begin{cases} x(x - 3) \leq 0 \\ y(y - 3) \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3(x + y + z) \\ z(z - 3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } P \leq 27(x + y + z) - \frac{(x + y + z)^6}{15(x + y + z)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 27t - \frac{t^5}{15} \text{ với } t = x + y + z, 0 < t \leq 9 \Rightarrow f(t)_{\max} = f(3) = \frac{324}{5}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{324}{5} \text{ tại } (x; y; z) = (3; 0; 0) \text{ và các hoán vị.}$$

Bài 28: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} + \frac{5}{2}(x+1)(y+1)(z+1)$$

Bài giải

Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Đặt $x + \frac{z}{2} = u > 0; y + \frac{z}{2} = v > 0$. Khi đó ta có

$$x^2 + z^2 \leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 = u^2; y^2 + z^2 \leq \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = v^2; x^2 + y^2 \leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = u^2 + v^2$$

$$\text{Chú ý rằng với hai số thực dương } u, v \text{ ta luôn có } \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq \frac{4}{u+v} \text{ và } \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \geq \frac{8}{(u+v)^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và áp dụng (2) ta được } \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \geq \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{u^2}$$

$$= \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \geq \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{1}{2uv} + \frac{6}{(u+v)^2}$$

$$\geq \frac{4}{(u+v)^2} + \frac{6}{(u+v)^2} = \frac{10}{(u+v)^2} = \frac{10}{(x+y+z)^2} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác ta có } (x+1)(y+1)(z+1) = xyz + (xy + yz + zx) + (x + y + z) + 1 = xyz + x + y + z + 2 \geq x + y + z + 2$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } P \geq \frac{10}{(x+y+z)^2} + \frac{5}{2}(x+y+z) + 5 \quad (5)$$

Đặt $x+y+z=t>0$. Xét hàm số $f(t)=\frac{10}{t^2}+\frac{5}{2}t, t>0$

Ta có $f'(t)=-\frac{20}{t^3}+\frac{5}{2}, t>0$

Suy ra $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$; $f'(t)>0 \Leftrightarrow t>2$; $f'(t)<0 \Leftrightarrow 0<t<2$. Suy ra $f(t)\geq f(2)=\frac{15}{2}$ với mọi $t>0$ (6)

Từ (5) và (6) ta được $P\geq \frac{25}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1, z=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{2}$

Bài 29: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x^3 + y^3 + z^3$

Bài giải

Với hai số không âm a, b ta có $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 2+a+b+2\sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow \sqrt{1+a+b+ab} \geq \sqrt{1+a+b}$, luôn đúng

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Áp dụng (1) ta có $5 = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq 1 + \sqrt{2+x^2+2y} + \sqrt{1+2z}$

Suy ra $x^2+2y+2z \leq 8$, hay $y+z \leq 4 - \frac{x^2}{2}$. Suy ra $P \leq 2x^3 + (y+z)^3 \leq 2x^3 + \left(4 - \frac{x^2}{2}\right)^3, 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 + \left(4 - \frac{x^2}{2}\right)^3, 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 3x\left(4 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x(x-2)\left[x(12-x^2) + 2(16-x^2)\right]. \begin{cases} f'(x)=0 \\ x \in (0; 2\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Ta có $f(0)=64; f(2)=24; f(2\sqrt{2})=32\sqrt{2}$. Suy ra $f(x) \leq 64, \forall x \in [0; 2\sqrt{2}]$.

Suy ra $P \leq 64$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=0, z=4$ hoặc $x=z=0, y=4$.

Vậy $\max P = 64$ khi $x=y=0, z=4$ hoặc $x=z=0, y=4$

Bài 20: Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0; a+1>0; b+1>0; 2c+1>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{2c+1}$

Bài giải

Ta có $P = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{2c+1} = 1 - \frac{1}{1+a} + 1 - \frac{1}{1+b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4c+2} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{4c+2}\right)$

$\Rightarrow P \leq \frac{5}{2} - \left(\frac{4}{a+b+2} + \frac{1}{4c+2}\right) = \frac{5}{2} - \left(\frac{4}{2-c} + \frac{1}{4c+2}\right)$

Xét hàm số $f(c) = \frac{4}{2-c} + \frac{1}{4c+2}$ với $-\frac{1}{2} < c < 2$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{4}{(2-c)^2} - \frac{4}{(4c+2)^2} = \frac{4(15c^2 + 20c)}{(c-2)^2(4c+2)^2}; f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow f(c) \geq f(0) = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0, xảy ra khi $a = b = c = 0$

§8: BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THỂ

Bài 1: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} + \frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} + \frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$$

Bài giải

Ta có $x + y + z = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 - z$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} = \frac{1-z}{\sqrt{xy+1-x-y}} = \frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}; \frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{yz+1-y-z}} = \frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}$$

$$\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}} = \frac{1-y}{\sqrt{zx+1-x-z}} = \frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} + \frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}} + \frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-z)}} \geq 3$$

Vậy $\min P = 3$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 2: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x > y; (x+z)(y+z) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức
$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{4}{(x+z)^2} + \frac{4}{(y+z)^2}$$

Bài giải

$$a = x + z \Rightarrow y + z = \frac{1}{a}; x > y \Rightarrow x + z > y + z \Rightarrow a > \frac{1}{a} \Rightarrow a > 1 \Rightarrow x - y = x + z - (y + z) = \frac{a^2 - 1}{a}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} + \frac{4}{a^2} + 4a^2 = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} + 3a^2 + \frac{4}{a^2} + a^2 \geq \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} + 3a^2 + 4$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + 3t + 4 (t = a^2) \Rightarrow f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3} + 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow \min P = f(2) = 12$$

Bài 3: Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}.$$

Bài giải

Vì $a + b + c = 3$ ta có $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$

Vì theo BĐT Cô-Si: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c$

Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$

Suy ra $P \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} + \frac{ab+ca}{2(b+c)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$,

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Bài 4 : Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x > y$ và $xy + (x+y)z + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}$.

Bài giải

Đặt $x + z = a$, từ giả thuyết bài toán ta có $(x+z)(y+z) = 1$, hay $y+z = \frac{1}{a}$.

Do $x > y$ nên $x+z > y+z$, suy ra $a > 1$.

Ta có $x - y = x + z - (y + z) = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a}$.

Khi đó $P = \frac{a^2}{4(a^2-1)^2} + \frac{1}{a^2} + a^2 = \frac{a^2}{4(a^2-1)^2} + \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \right) \geq \frac{a^2}{2(a^2-1)^2} + \frac{3a^2}{4} + 1$ (1)

Đặt $a^2 = t > 1$, xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4(t-1)^2} + \frac{3t}{4} + 1$ với $t > 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{-t-1}{4(t-1)^3} + \frac{3}{4}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2-3t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Dựa vào BBT ta có $f(t) \geq 3$ với mọi $t > 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x+z = \sqrt{2}, y+z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3

Bài 5 : Cho ba số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$S = \sqrt{\frac{ab}{ab+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}}$$

Bài giải

Ta có $\sqrt{\frac{ab}{ab+2c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}} = \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{a+c} = \frac{b}{b+c}$

Tương tự ta cũng có $\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} \right), \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} \right)$

Cộng các vế ta được $S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} \right) = \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Vậy $S_{\max} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

Bài 6: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+z}{x+2y+1} - \frac{z}{y+1} - \frac{4x^2}{(x+y)^2}$$

Bài giải

Ta sẽ chứng minh $\frac{x+z}{x+2y+1} \leq \frac{x}{x+y}$ Thật vậy

$$\Leftrightarrow xz + yz \leq x + xy \Leftrightarrow 2x + 2xy - 2xz - 2yz \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-z)^2 \geq 0$$

Tương tự ta chứng minh được $\frac{z}{y+1} \leq \frac{x}{x+y} \Rightarrow P \leq \frac{2x}{x+y} - 4\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$

§9: BẤT ĐẲNG THỨC MINCOPXKY

Bài 1 : Cho ba số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn: $xyz = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\log_3^2 x + 1} + \sqrt{\log_3^2 y + 1} + \sqrt{\log_3^2 z + 1}$$

Bài giải

Trong mp(Oxy), gọi $\vec{a} = (\log_3 x; 1), \vec{b} = (\log_3 y; 1), \vec{c} = (\log_3 z; 1)$ và $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{n} = (1; 3)$

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \Rightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} + \sqrt{\log_3^2 y + 1} + \sqrt{\log_3^2 z + 1} \geq \sqrt{1^2 + 3^2}$

$\Rightarrow P \geq \sqrt{10}$, dấu = xảy ra khi ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng hướng và kết hợp điều kiện đề bài ta được $x = y = z = \sqrt[3]{3}$

Vậy $\min P = \sqrt{10}$ khi $x = y = z = \sqrt[3]{3}$

Bài 2 : Cho các số thực x, y, z thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{y^2 + z^2 - 2z + 1} + \sqrt{z^2 + x^2 - 2x + 1}$$

Bài giải

Ta có $P = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-z)^2} + \sqrt{z^2 + (1-x)^2}$

Vì $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ nên $P \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+1-y| + |y+1-z| + |z+1-x|)$

và $|a| + |b| + |c| \geq |a+b+c|$ nên $P \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|x+1-y + y+1-z + z+1-x| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$. Vậy $\min P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Bài 3 : Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + |y - 2|$$

Bài giải

Xét các điểm $M(x-1; -y), N(x+1; y)$

Ta có $OM + ON \geq MN \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2} = 2\sqrt{1+y^2}$

Do đó $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| \leq P$

Với $y \leq 2 \Rightarrow f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + (2-y) \Rightarrow f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1$

Khi đó $f(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4y^2 = y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Với $y \geq 2 \Rightarrow f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| \geq 2\sqrt{1+y^2} \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$

Vậy $P \geq 2 + \sqrt{3}$ với mọi x, y . Khi $x = 0$ và $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ thì $P = 2 + \sqrt{3}$

Do đó P nhỏ nhất bằng $2 + \sqrt{3}$, khi $x = 0$ và $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 4: Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{2y^2 + 3xy + 4x^2} - 3(x+y)^2 \leq 0$
 Tìm GTNN của $P: 2(x^3 + y^3) + 2(x^2 + y^2) - xy + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$

Bài giải

Ta có: $\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{2y^2 + 3xy + 4x^2}$
 $= \sqrt{\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{8}}y\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}\left(y + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{8}}x\right)^2} \geq 3|x+y| \geq 3(x+y)$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y \geq 0$. Đặt $x + y = t$ ta có $\begin{cases} t^2 - t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \geq 1 \end{cases} (*)$

Ta có $P = 2t^3 + 2t^2 - xy(6t+5) + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}$

$P \geq 2t^3 + 2t^2 - \frac{t^2}{4}(6t+5) + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow 4P \geq 2t^3 + 2t^2 + 4\sqrt{x^2+1} + 4\sqrt{y^2+1} = f(t)$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 2t^2 + 4\sqrt{x^2+1} + 4\sqrt{y^2+1}$ trên $(*)$, $f'(t) = 6t^2 + 6t + \frac{4t}{\sqrt{t^2+4}} \geq 0$

Với mọi t thỏa mãn $(*)$. Suy ra $f(t) \geq \{f(0); f(1)\} = f(0) = 8$

Bài 5: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{8x^2 + 4xz + 5z^2} = 4x + y + 2z$ và $x \in [0; 5]$. Tìm GTNN-GTLN: $P = \sqrt{2z+21-xy} - \sqrt{x+z+10-xy}$

Bài giải

Ta có $\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{8x^2 + 4xz + 5z^2} = 4x + y + 2z = \sqrt{(2x+y)^2 + (x-y)^2} + \sqrt{(2x+2z)^2 + (2x-z)^2}$
 $\Rightarrow 4x + y + 2z \geq |2x+y| + |2x+2z| \geq 4x + y + 2z$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x = y \\ 2x = z \\ 2x + y \geq 0 \\ 2x + 2z \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P = \sqrt{4x+21-x^2} + \sqrt{3x+10-x^2}$ với $x \in [0; 5]$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x+21-x^2} + \sqrt{3x+10-x^2}$ với $x \in [0; 5]$ Ta tìm được max-min

Bài 6: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x+y)\sqrt{1+\frac{2}{x^2y^2}} + \sqrt{z^2+\frac{2}{z^2}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}.$$

Bài giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \sqrt{(x+y)^2 + \frac{2(x+y)^2}{x^2y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{2}{z^2}} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} \\ &= \sqrt{(x+y)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{y}\right)^2} + \sqrt{z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{z}\right)^2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Xét các vec tơ } \vec{u} = \left(x+y; \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{y}\right), \vec{v} = \left(z; \frac{\sqrt{2}}{z}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$, ta có

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x+y)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{y}\right)^2} + \sqrt{z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{z}\right)^2} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{y} + \frac{\sqrt{2}}{z}\right)^2} = \sqrt{(x+y+z)^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{18 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \sqrt{18 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{2xy+z^2}} \geq \sqrt{18 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2} + \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}.$$

$$\text{Đặt } t = x+y+z, 0 < t \leq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = 3. \text{ Khi đó } P \geq \sqrt{18 + \frac{81}{t^2}} + \sqrt{\frac{t}{3}}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \sqrt{18 + \frac{81}{t^2}} + \sqrt{\frac{t}{3}} \text{ với } 0 < t \leq 3. \text{ Ta có } f'(t) = \frac{\sqrt{2t^2+9t^3}-54\sqrt{3}}{2\sqrt{3}t^2\sqrt{2t^2+9}}; f'(t) < 0, \text{ với mọi}$$

$$0 < t \leq 3. \text{ Suy ra } f(t) \geq f(3) = 1+3\sqrt{3}.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $1+3\sqrt{3}$, đạt khi $x = y = z = 1$.

§10: BẤT ĐẲNG THỨC CÓ GIẢ THIẾT ĐỒNG BẬC

Bài 1 : Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $3(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + 19yz + xz)$. Tìm GTNN của

$$P = 17\left(\frac{y^3}{x^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2}\right) + \frac{9}{(x + y + z)^2} - \frac{x}{4(y^2 + z^2)}$$

Bài giải

Ta có $3(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + 19yz + xz) \Leftrightarrow 2(xy + 16yz + xz) = 3x^2 + 3(y - z)^2 \geq 3x^2$

$$\Rightarrow 3x^2 \leq 2x(y + z) + 32yz \leq 2x(y + z) + 8(y + z)^2 \Rightarrow x \leq 2(y + z)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{(x + y + z)^2} - \frac{x}{4(y^2 + z^2)} \geq \frac{1}{(y + z)^2} - \frac{1}{y + z}$$

$$17\left(\frac{y^3}{x^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2}\right) \geq 17\left(\frac{y^4}{y(x^2 + z^2)} + \frac{z^4}{z(x^2 + y^2)}\right) \geq 17\left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2(y + z) + yz(y + z)}\right) \geq 17\left(\frac{\frac{(y + z)^4}{4}}{4(y + z)^3 + \frac{(y + z)^3}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow 17\left(\frac{y^3}{x^2 + z^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2}\right) \geq y + z \Rightarrow P \geq y + z + \frac{1}{(y + z)^2} - \frac{1}{y + z}$$

$$= \frac{y + z}{2} + \frac{y + z}{2} + \frac{1}{2(y + z)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y + z} - 1\right)^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{3 - 1}{2} = 1$$

Bài 2 : Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$

Bài giải

Đặt $a = x, b = 2y, c = 3z$ (a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a^3 + b^3 + c^3)$

$$P = 5[a^2 + (b + c)^2 - 2bc] - 6[a^3 + (b + c)^3 - 3bc(b + c)] = 2(4 - 9a)bc - 8a^2 + 8a - 1$$

Đặt $0 < t = bc \leq \frac{(b + c)^2}{4} = \frac{(1 - a)^2}{4}$. Xét $P(t) = 2(4 - 9a)t - 8a^2 + 8a - 1$

$$+) a = \frac{4}{9} \Rightarrow P(t) = \frac{79}{81} \quad (1)$$

$+) a \neq \frac{4}{9}$. $P(t)$ là hàm số bậc nhất đối với t .

$$\text{Ta có } P(0) = 1 - 2(2a - 1)^2 \leq 1; \quad P\left(\frac{(1 - a)^2}{4}\right) = 1 - \frac{a(3a - 1)^2}{2} \leq 1 \quad (2)$$

Trên $(0, \frac{(1-a)^2}{4}]$. Hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến.

Từ (1) và (2), suy ra GTLN của $P(t)$ trên $(0, \frac{(1-a)^2}{4}]$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Suy ra GTLN của $P(t)$ là 1 khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Suy ra GTLN của P là 1 khi $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{6}; z = \frac{1}{9}$

Bài 3: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $5(4x^2 + y^2 + z^2) = 18(xy + yz + zx)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{2}{(2x + y + z)^3}$.

Bài giải

Ta có $5(4x^2 + y^2 + z^2) = 18(xy + yz + zx)$

$$\Leftrightarrow 5(2x + y + z)^2 = 18(xy + yz + zx) + 10(2xy + yz + 2zx)$$

$$\Leftrightarrow 5(2x + y + z)^2 = 38x(y + z) + 28yz \leq 38x(y + z) + 7(y + z)^2$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{2x}{y+z} + 1\right)^2 \leq \frac{38x}{y+z} + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq y + z \quad (\text{Do } y + z > 0).$$

Mặt khác ta có $(y + z)^2 \leq 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(y + z)^2$

$$\text{Đặt } t = y + z > 0. \text{ Khi đó } P \leq \frac{y+z}{\frac{1}{2}(y+z)^2} - \frac{2}{(2(y+z)+y+z)^3} = \frac{2}{y+z} - \frac{2}{27(y+z)^3} = \frac{2}{t} - \frac{2}{27t^3}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{2}{27t^3}$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = \frac{-2}{t^2} + \frac{2}{9t^4}$.

Với $t > 0$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$		0	-
$f(t)$		4	0

Ta có $x = \frac{1}{3}, y = z = \frac{1}{6}$ thỏa mãn điều kiện bài toán và khi đó $P = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 4.

Bài 4: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x+y+z)} - (y^2 + z^2)$.

Bài giải

$$\text{Ta có } 5x^2 + \frac{5}{2}(y+z)^2 \leq 5x^2 + 5(y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx) \leq 6x(y+z) + 6 \cdot \frac{1}{4}(y+z)^2$$

$$\text{Do đó } 5x^2 - 6x(y+z) + (y+z)^2 \leq 0, \text{ hay } \frac{y+z}{5} \leq x \leq y+z$$

$$\text{Suy ra } x + y + z \leq 2(y+z)$$

$$\text{Khi đó } P \leq \sqrt{2(x+y+z)} - \frac{1}{2}(y+z)^2 \leq \sqrt{4(y+z)} - \frac{1}{2}(y+z)^2 = 2\sqrt{y+z} - \frac{1}{2}(y+z)^2$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y+z} = t, \text{ khi đó } t \geq 0 \text{ và } P \leq 2t - \frac{t^4}{2} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4 \text{ với } t \geq 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2 - 2t^3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } f(t) \leq f(1) = \frac{3}{2} \text{ với mọi } t \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } P \leq \frac{3}{2}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x = y+z \\ y = z \\ y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ là } \frac{3}{2}, \text{ đạt được khi } x=1, y=z=\frac{1}{2}$$

Bài 5: Cho $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của } P = 8xyz - \frac{3x^3}{y^2 + z^2}$$

Bài giải

Cách 1

$$8(x^2 + y^2 + z^2) = 8xy + 8xz + 80yz \leq x^2 + 16y^2 + x^2 + 16z^2 + 40y^2 + 40z^2 \Rightarrow x^2 \leq 8y^2 + 8z^2$$

$$12yz = x^2 + (y+z)^2 - x(y+z)$$

$$12yz = \frac{1}{4}x^2 - x(y+z) + (y+z)^2 + \frac{3}{4}x^2 = \left(\frac{x}{2} - y - z\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow x^2 \leq 16yz$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3}{2} - 24x = f(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$M \text{ in } f(x) = f(4) = -64$$

$$\text{Khi } x = 4, y = z = 1$$

Cách 2

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + 10yz \Rightarrow (y+z)^2 + x^2 = xy + xz + 16yz$$

$$= x(y+z) + 16yz \leq x(y+z) + 3(y+z)^2 \Rightarrow x^2 - x(y+z) - 2(y+z)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} \in [-1, 2], x, y, z > 0$$

$$\Rightarrow x \leq 2(y+z) \leq 2\sqrt{2(y^2+z^2)} \Rightarrow x^2 \leq 8(y^2+z^2) \Rightarrow y^2+z^2 \geq \frac{x^2}{8}$$

$$12yz = x^2 - x(y+z) + (y+z)^2 \Rightarrow x^2 \leq 16yz$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^3}{2} - 24x = f(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$M \text{ in } f(x) = f(4) = -64$$

§10: BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC

Bài 1: Cho $ab + bc = 2c^2, a \leq 2c$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$

Bài giải

$$P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c} - 1} + \frac{1}{1 - \frac{a}{c}}. \text{ Đặt } \begin{cases} \frac{a}{c} = x \\ \frac{b}{c} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-1} + \frac{1}{1-y} \\ xy + y = 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$xy + y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2-y}{y} \Rightarrow P = \frac{3y^2 + 8y - 4}{2y^2 + 2y - 4} \\ \frac{2}{y} = x + 1 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow y \geq \frac{4}{3} \quad (1) \end{cases}$$

$$\frac{3y^2 + 8y - 4}{2y^2 + 2y - 4} - \frac{27}{5} = \frac{-(3y-4)(13y+22)}{5(y-1)(2y+4)} \leq 0 \Rightarrow P_{\max} = \frac{27}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = c \\ 3b = 4c \end{cases}$$

Bài 2: Cho các số dương x, y, z thỏa mỗi $a > y$ và $(x+z)(x+y) = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{4}{(x+z)^2} + \frac{4}{(y+z)^2}$$

Bài giải

Đặt $x+z = a$. Từ giả thiết ta có $(x+z)(y+z) = 1$ suy ra $y+z = \frac{1}{a}$

Do $x > y \Rightarrow x+z > y+z \Rightarrow a > 1$

Ta có $x-y = x+z - (y+z) = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a}$

$$P = \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + \frac{4}{a^2} + 4a^2 = \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + 3a^2 + a^2 + \frac{4}{a^2}$$

Khi đó $P \geq \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + 3a^2 + 4$

Đặt $t = a^2 > 1$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + 3t + 4$ với $t > 1$

Ta có $f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3} + 3 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2-3t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Từ bảng biến thiên có $f(t) \geq 12, \forall t > 1$. Từ (1) và (2) $P \geq 12$. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+z=\sqrt{2} \\ y+z=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ . Chẳng hạn khi } \begin{cases} x=1; z=\sqrt{2}-1 \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1=1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bài 3: Cho các số thực x, y dương thỏa mãn $x - y + 1 \leq 0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{x+3y^2}{\sqrt{x^2+y^4}} - \frac{2x+y^2}{5x+5y^2}$

Bài giải

$$\text{Ta có } x \leq y-1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y^2} \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y^2} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{4} \quad (0.25đ)$$

$$\text{Ta có: } T = \frac{\frac{x}{y^2} + 3}{\sqrt{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2 + 1}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot \frac{x}{y^2} + 1}{\frac{x}{y^2} + 1} \Rightarrow T = f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2t+1}{t+1} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{4}$$

$$f'(t) = \frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\text{Nhận xét: } 0 < t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1-3t \geq \frac{1}{4}; \sqrt{(t^2+1)^3} \leq \sqrt{\left(\frac{17}{16}\right)^3} = \frac{17}{16} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}} \Rightarrow \frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} \geq \frac{4}{17 \cdot \sqrt{\frac{17}{16}}}$$

$$\text{Và } -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} > -\frac{1}{5}. \text{ Do đó } f'(t) > \frac{4}{17 \cdot \sqrt{\frac{17}{16}}} - \frac{1}{5} > 0$$

$$\text{Từ đó } f(t) \text{ đồng biến } \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{\sqrt{17}} - \frac{6}{25}$$

$$\text{Đáp số: } \max_{t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]} T = \frac{13}{\sqrt{17}} - \frac{6}{25} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x=1; y=2$$

Bài 4 : Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn:

$$(a+b+c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2). \text{ Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: } P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Bài giải

$$\text{Giả sử } x \neq 0 \text{ đặt } x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}. \text{ Từ giả thiết ta có } (x+y+1)^2 = 2(x^2+y^2+1) \quad (0.25đ)$$

$\Rightarrow 4xy = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1$. Đặt $u = x+y$; $v = xy$ thì $4v = u^2 - 2u + 1 \leq u^2$

$$\Leftrightarrow u \geq \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 1}{(x+y+1)(xy+x+y)} = \frac{u^3 + 6u^2 - 3u + 4}{(u+1)^3} = 1 + 3 \frac{(u-1)^2}{(u+1)^3} \quad (0.25đ)$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{(u-1)^2}{(u+1)^3}$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ (0.25đ)

Trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ta tìm được $\min f(u) = f(1) = 0$ và $\max f(u) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(5) = \frac{2}{27}$

Vậy $\min P = 1$ chẳng hạn khi $a = 0, b = c \neq 0$, $\max P = \frac{11}{9}$ chẳng hạn khi

Bài 5 : Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x^4 + y^4 + z^4) \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} \right)$$

Bài giải

$$\text{Ta có : } P \geq (2x^2y^2 + z^4) \left(\frac{2}{x^2y^2} + \frac{1}{z^4} \right) = 5 + 2 \left(\frac{x^2y^2}{z^4} + \frac{z^4}{256x^2y^2} \right) + \frac{255z^4}{128x^2y^2}$$

$$\geq 5 + 4 \sqrt{\frac{1}{256}} + \frac{4.255z^4}{128(x^2 + y^2)^2} \geq 5 + \frac{1}{4} + \frac{4.255.4}{128} = \frac{297}{8}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{297}{8} \Leftrightarrow x = y = \frac{z}{2}$$

Bài 6 : Cho các số thực dương a, b, c . Tìm GTNN của $P = \frac{12a^3 + 9b^3 + 6c^3 - 9b^2c}{4(a+b+c)^3}$

Bài giải

$$\text{Ta có } 3b^3 + 3b^3 + 3c^3 \geq 9b^2c \Rightarrow 12a^3 + 9b^3 + 6c^3 - 9b^2c \geq 12a^3 + 3b^3 + 3c^3$$

Ta sẽ chứng minh $25(12a^3 + 3b^3 + 3c^3) \geq 12(a+b+c)^3$. Thật vậy, BĐT tương đương :

$$9[(2a)^3 + b^3 - 2ab(2a+b)] + 9[(2a)^3 + c^3 - 2ac(2a+c)]$$

$$+ 3(8a^3 + b^3 + b^3 - 6ab^2) + 3(8a^3 + c^3 + c^3 - 6ac^2) + 36[b^3 + c^3 - bc(b+c)] + 12[8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc] \geq 0$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{12}{25.4} = \frac{3}{25}. \text{ Vậy } P_{\min} = \frac{3}{25} \Leftrightarrow b = c = 2a$$

Bài 7 : Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 9$. Tìm GTNN của

$$P = \sum \frac{\sqrt{(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)}}{\sqrt[6]{a^4b^4c}}$$

Bài giải

Ta có : $\sum \sqrt[6]{a^4b^4c} \leq \sum \sqrt[6]{abc \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \left(\frac{a^4+b^4}{2}\right)}$

$$\Rightarrow P \geq \sum \frac{\sqrt{(a^4+b^4)(a^2+b^2)}}{\sqrt[6]{abc(a^4+b^4)(a^2+b^2)}} = \sqrt[6]{\frac{4(a^4+b^4)^2(a^2+b^2)^2}{abc}}$$

Lại có : $\sum (a^4+b^4)^2(a^2+b^2)^2 \geq \sum \left(\frac{(a+b)^4}{8}\right)^2 \frac{(a+b)^4}{4} = \sum \frac{(a+b)^{12}}{256}$

$$\Rightarrow P \geq \sum \frac{(a+b)^2}{2\sqrt[6]{abc}} \geq \sum \frac{(a+b)^2}{2\sqrt[6]{27}} \geq \frac{(2(a+b+c))^2}{6\sqrt[6]{27}} = \frac{54}{\sqrt{3}}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{54}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a=b=c=3$

Bài 8 : Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{abc(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2})}{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$$

Bài giải

Với các số thực a, b, c dương, ta luôn có bất đúng:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a-b+c)^2 \Rightarrow a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \quad (1)$$

Do (1) nên:

$$T = \frac{abc(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2})}{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)} \leq \frac{abc(1+\sqrt{3})\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)} = \frac{abc(1+\sqrt{3})}{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (2)$$

Mặt khác theo bất Cauchy:

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad (3) \text{ và } \sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{abc} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) được: $\frac{1}{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}abc} \quad (5)$

Do (5) nên (2) suy ra $T \leq \frac{abc(1+\sqrt{3})}{3\sqrt{3}abc} = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c$. vậy $T_{\max} = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$ đạt được khi $a=b=c$

Bài 9 : Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 7(x+2y) - 4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}$$

Bài giải

Vì x, y là các số thực dương nên

$$P = (x+y) \left(\frac{7(x+2y) - 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2}}{x+y} \right) = (x+y) \left(7 + \frac{7y - 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2}}{x+y} \right) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, t > 0 \text{ khi đó } \frac{7y - 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2}}{x+y} = \frac{7 - 4\sqrt{t^2 + 2t + 8}}{t+1} \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{7 - 4\sqrt{t^2 + 2t + 8}}{t+1} \text{ với } t > 0$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-7\sqrt{t^2 + 2t + 8} + 28}{(t+1)^2 \sqrt{t^2 + 2t + 8}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 2t + 8} = 4 \Leftrightarrow t = 2$$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \leq -3$ với mọi $t > 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $P \leq (x+y)(7-3) \leq 8$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y=2 \\ t=\frac{x}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ là } 8, \text{ đạt khi } x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}$$

Bài 10: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $xy+1 \leq y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} + \frac{2y-x}{6(x+y)}$$

Bài giải

$$\text{Do } x > 0, y > 0, xy \leq y-1 \text{ nên } 0 < \frac{x}{y} \leq \frac{y-1}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{4}. \text{ Khi đó } P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6t+6} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2(t+1)}$$

$$\text{Ta có: } P'(t) = \frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

$$\text{Vì } 0 < t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t^2 - t + 3 = t(t-1) + 3 < 3; 7-3t > 6; t+1 > 1, \text{ do đó}$$

$$\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} > \frac{7-3t}{6\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{2(t+1)^2} > -\frac{1}{2} \Rightarrow P'(t) > \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{Vậy } P(t) \text{ đồng biến trên } \left(0; \frac{1}{4} \right], \text{ suy ra } P(t) \leq P\left(\frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$$

$$\text{Khi } x = \frac{1}{2}; y = 2 \text{ thì ta có } P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30} \Rightarrow \text{Max} P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = 2$$

Bài 11: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{4a}{b}\left(1+\frac{2c}{b}\right)+\frac{b}{a}\left(1+\frac{c}{a}\right)=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{bc}{a(b+2c)} + \frac{2ca}{b(c+a)} + \frac{2ab}{c(2a+b)}$.

Bài giải

Đặt $x = \frac{2}{a}, y = \frac{4}{b}, z = \frac{1}{c}$ ($x, y, z > 0$).

Điều kiện đã cho trở thành: $\frac{x^3+y^3}{xyz} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 6$ (*)

Ta có: $x^3+y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$ và $(x+y)^2 \geq 4xy$

Do đó: $\frac{x^3+y^3}{xyz} \geq \frac{(x+y)^3}{4xyz} \geq \frac{4xy(x+y)}{4xyz} = \frac{x+y}{z}$

Mặt khác $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $6 = \frac{x^3+y^3}{xyz} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{x+y}{z} + 4 \Rightarrow 0 < \frac{x+y}{z} \leq 2$.

Ta có: $P = \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{2z+x} + \frac{4z}{x+y} = \frac{x^2}{xy+2zx} + \frac{y^2}{2yz+xy} + \frac{4z}{x+y}$
 $\geq \frac{(x+y)^2}{2xy+2z(x+y)} + \frac{4z}{x+y} \geq \frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2} + 2z(x+y)} + \frac{4z}{x+y} = \frac{2(x+y)}{x+y+4z} + \frac{4z}{x+y}$

Suy ra: $P \geq \frac{2\frac{x+y}{z}}{\frac{x+y}{z} + 4} + \frac{4}{\frac{x+y}{z}}$.

Đặt $t = \frac{x+y}{z}$, $0 < t \leq 2$. Ta có $P \geq \frac{2t}{t+4} + \frac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+4} + \frac{4}{t}$ ($0 < t \leq 2$).

$f'(t) = \frac{4(t^2-8t-16)}{t^2(t+4)^2} < 0, \forall t \in (0; 2] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0; 2]$.

Suy ra: $P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{8}{3}$.

$P = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{x+y}{z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow 2a = b = 4c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8}{3}$, khi $2a = b = 4c$.

Bài 12: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Bài giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = a + b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + 5y - 3z \\ b = x - 2y + z \\ c = -y + z \end{cases}$$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{-x+2y}{x} + \frac{4x-8y+4z}{y} - \frac{-8y+8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} \right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} \right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17;$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = (1 + \sqrt{2})a, c = (4 + 3\sqrt{2})a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$.

§11: PHƯƠNG PHÁP CỖ ĐỊNH BIẾN SỐ

Bài 1 : Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Bài giải

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0, 2x + 8y + 21z \leq 12xyz$ và $S = x + 2y + 3z$.

$$2x + 8y + 21z \leq 12xyz \Rightarrow z(12xy - 21) \geq 2x + 8y \Rightarrow \begin{cases} z \geq \frac{2x + 8y}{12xy - 21} \\ 12xy - 21 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \geq \frac{2x + 8y}{12xy - 21} \\ x > \frac{7}{4y} \end{cases}$$

Ta có: $S \geq x + 2y + \frac{2x + 8y}{4xy - 7}$.

Xét hàm số $f(x) = x + 2y + \frac{2x + 8y}{4xy - 7}$ trên $\left(\frac{7}{4y}; +\infty\right)$

$$f'(x) = 1 - \frac{14 + 32y^2}{(4xy - 7)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y} \in \left(\frac{7}{4y}; +\infty\right)$$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$S \geq f(x) \geq f\left(\frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y}\right) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y}$$

Xét hàm số $g(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y}$ trên $(0; +\infty)$

$$g'(y) = \frac{(8y^2 - 9)\sqrt{32y^2 + 14} - 28}{4y^2\sqrt{32y^2 + 14}} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4} \in (0; +\infty)$$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $z = g(y)$ ta có: $S \geq g(y) \geq g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$

Vậy $\min S = \frac{15}{2}$ khi $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$.

Bài 2 : Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2(x + y) + 7z = xyz$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2x + y + 2z$

Bài giải

Ta có: $2(x + y) = z(xy - 7)$. Do x, y, z là các số dương nên $xy - 7 > 0$.

Khi đó, từ giả thiết ta được $z = \frac{2(x+y)}{xy-7}$ (0.25đ)

Suy ra: $S = f(x; y) = 2x + y + \frac{4(x+y)}{xy-7}$ với điều kiện $x > 0, y > 0, xy > 7$ (*)

Với mỗi x cố định, xét đạo hàm của hàm số $f(x; y)$ theo ẩn y ta được:

$$f'(x; y) = 1 + \frac{4(xy-7) - 4x(x+y)}{(xy-7)^2} = 1 - \frac{18+4x^2}{(xy-7)^2}$$

$$f'_y(x; y) = 0 \Leftrightarrow x^2 y^2 - 14xy + 21 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{7}{x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}$$

$$\text{Suy ra : } f(x; y_0) = 2x + \frac{11}{x} + 4\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \quad (0.25\text{đ})$$

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = 2x + \frac{11}{x} + 4\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \text{ với } x > 0 \text{ với } g'(x) = 2 - \frac{11}{x^2} - \frac{28}{x^3 \sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Khi đó } g(x) \geq g(3) \Leftrightarrow g(x) \geq 15 \quad (0.25\text{đ})$$

$$\text{Với điều kiện (*), ta có } S \geq f(x; y_0) = g(x) \geq 15 \quad (0.25\text{đ})$$

$$\text{Vậy } \min S = 15 \text{ khi } x = 3, y = 5, z = 2$$

Bài 3: Cho $x, y, z \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

$$\text{Tìm GTNN } P = \frac{x^2 + yz}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9}$$

Bài giải

$$\text{Đặt } P = f(yz) \Rightarrow f'(yz) = \frac{x+1}{(x^2 + yz + x + 1)^2} - \frac{1}{9} > 0 \Rightarrow P \leq f\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right) = f\left(\frac{2 - x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{x^2 + \frac{2 - x^2}{2}}{x^2 + \frac{2 - x^2}{2} + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + \frac{2 - x^2}{2}}{9}$$

$$\text{Đặt } g(y + z) = \frac{y + z}{x + y + z + 1} \Rightarrow g'(y + z) = \frac{x+1}{(x + y + z + 1)^2} > 0 \Rightarrow g(y + z) \leq g\left(\frac{y^2 + z^2}{2} + 1\right) = g\left(\frac{2 - x^2}{2} + 1\right)$$

$$\text{Tóm lại: } P \leq \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{4 - x^2}{2x + 6 - x^2} - \frac{4 - x^2}{18} = Q$$

$$\text{Xét hiệu: } Q - \frac{17}{18} = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{4 - x^2}{2x + 6 - x^2} - \frac{4 - x^2}{18} - \frac{17}{18} = \frac{-x(x^5 + 9x^3 - 20x^2 + 30x + 204)}{18(x^2 + 2x + 4)(2x + 6 - x^2)} \leq 0 \text{ với mọi}$$

$$x \in [0; \sqrt{2}] \text{ nên } P \leq Q \leq \frac{17}{18}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{17}{18} \text{ khi } x = 0; y = z = 1$$

Bài 4: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $(3a + 2b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right) = 30$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{b + 2c - 7\sqrt{72a^2 + c^2}}{a}$$

Bài giải

Đặt $b = xa, c = ya \Rightarrow x, y > 0$. Giả thiết bài toán trở thành $(3 + 2x + y)\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right) = 30$

$$\Leftrightarrow 20 = 2x + \frac{6}{x} + y + \frac{9}{y} + \frac{6x}{y} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2} + \frac{3x}{2y} + \left(\frac{6}{x} + \frac{3}{2}x\right) + \left(y + \frac{9}{y}\right) + \left(\frac{9x}{2y} + \frac{2y}{x}\right)$$

$$\geq \frac{x}{2} + \frac{3x}{2y} + 6 + 6 + 6 \Rightarrow x + \frac{3x}{y} \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4y}{y+3}$$

$$\text{Ta có } P = x + 2y - 7\sqrt{72 + y^2} \leq \frac{4y}{y+3} + 2y - 7\sqrt{72 + y^2} = f(y)$$

Xét hàm số $f(y)$ với $y > 0$, ta có:

$$f'(y) = \frac{12}{(y+3)^2} + 2 - \frac{7y}{\sqrt{72+y^2}} \text{ và } f''(y) = -\frac{24}{(y+3)^3} - \frac{504}{\sqrt{(72+y^2)^3}} < 0, \forall y > 0$$

Suy ra $f'(y)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f'(3) = 0 \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 3$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(y) \leq f(3) = -55$ hay $P \leq -55$

Đẳng thức xảy ra khi $y = 3, x = 2 \Leftrightarrow b = 2a, c = 3a$. Vậy $\max P = -55$

§12: BẤT ĐẲNG THỨC CÓ HIỆU A-B

Bài 1: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Chứng minh rằng:
 $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$

Bài giải

Ta có: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \leq 4(*)$

Đặt vế trái của (*) là 0

Nếu $ab+bc+ca < 0$ thì $P \leq 0$ suy ra BĐT đã được chứng minh (0.25đ)

Nếu $ab+bc+ca \geq 0$, đặt $ab+bc+ca = x \geq 0$ (0.25đ)

$$(a-b)(b-c) \leq \left(\frac{a-b+c-a}{2} \right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{(a-c)^3}{4} \quad (1) \quad (0.25đ)$$

$$\text{Ta có } 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$$

$$\geq 2(a-c)^2 + [(a-b) + (b-c)]^2 = 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2$$

$$\text{Suy ra } 4(5-x) \geq 3(a-c)^2, \text{ từ đây ta có } x \leq 5 \text{ và } a-c \leq \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)} \quad (2) \quad (0.25đ)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } P \leq \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{\left[\frac{4}{3}(5-x) \right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3} \quad (3)$$

Theo caai a ta có $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3} \leq 6\sqrt{3}$ với x thuộc đoạn $[0;5]$

$$\text{Nên suy ra } P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow P \leq 4$$

Bài 2: Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt và thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=1$ và $ab+bc+ca > 0$. Tìm GTNN của biểu thức $P = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{(a-b)^2} + \frac{2}{(b-c)^2} + \frac{1}{|c-a|}} \right) + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

Bài giải

$$\text{BĐT: } \frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \quad \forall x, y; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\forall x, y > 0). \text{ Dấu "}" xảy ra khi } x=y$$

$$P \geq \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\text{Giả sử } a > b > c : P \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$$

$$\text{Ta có: } (1-b)(1+3b) = \frac{1}{3}(3-3b)(1+3b) \leq \frac{4}{3} \Rightarrow P \geq 10\sqrt{6}$$

Bài 3: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Chứng minh rằng:
 $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$

Bài giải

Ta có $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4 (*)$.

Đặt vế trái của (*) là P

Nếu $ab+bc+ca < 0$ thì $P \leq 0$ suy ra BĐT đã được chứng minh

Nếu $ab+bc+ca \geq 0$, đặt $ab+bc+ca = x \geq 0$

$$(a-b)(b-c) \leq \left(\frac{a-b+b-c}{2} \right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \frac{(a-c)^3}{4} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) &= 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 \\ &\geq 2(a-c)^2 + [(a-b) + (b-c)]^2 = 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 4(5-x) \geq 3(a-c)^2, \text{ từ đây ta có } x \leq 5 \text{ và } a-c \leq \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } P \leq \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{\left[\frac{4}{3}(5-x) \right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \sqrt{(5-x)^3} \quad (3)$$

Theo câu a ta có: $f(x) = \sqrt{(5-x)^3} \leq 6\sqrt{3}$ với $x \in [0; 5]$.

Nên suy ra $P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow P \leq 4$. Vậy (*) được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2; b = 1; c = 0$

§13: PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA VÀ VECTO

Bài 1: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2).$$

Bài giải

Từ giả thiết suy ra $0 < xy, yz, zx < 4$

Đặt $\sqrt{zy} = 2 \cos A, \sqrt{xz} = 2 \cos B, \sqrt{xy} = 2 \cos C$, trong đó A, B, C là các góc nhọn.

Từ giả thiết suy ra

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \Leftrightarrow (\cos C + \cos(A-B))(\cos C + \cos(A+B)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C + \cos(A+B) = 0$$

Suy ra A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác. Ta có

$$z = \frac{2 \cos A \cos B}{\cos C}; y = \frac{2 \cos A \cos C}{\cos B}; x = \frac{2 \cos C \cos B}{\cos A}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2 \cos A \cos B \cos C} \geq \frac{8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \geq 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{1}{\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3} + \frac{1}{2 \left(\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{3}\right)^3} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + 4}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2}$

Bài giải

$$y = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + 4}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2} \text{ Tập xác định của hàm số là } D = [0; 1]. \text{ Đặt } \begin{cases} \sqrt{x} = \cos t \\ \sqrt{1-x} = \sin t \end{cases} \left(t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right)$$

$$\text{Khi đó } y = \frac{2 \cos t - \sin t + 4}{\cos t + \sin t + 2} = f(t) \text{ với } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

xét hàm số $f(t) = \frac{2\cos t - \sin t + 4}{\cos t + \sin t + 2}$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(t) = \frac{-3 - 6\cos t}{(\sin t + \cos t + 2)^2} < 0 \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vậy hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Do đó $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(t) \leq f(0) \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 1 \leq f(t) \leq 2 \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Giá trị lớn nhất của $y = \max f(t) = f(0) = 2 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Giá trị nhỏ nhất của $y = \min f(t) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Bài 3 : Cho các số thực x, y, z thuộc khoảng $(1; 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(y+z-x)^2}{yz} + \frac{\sqrt{3}(z+x-y)^2}{zx} - \frac{2\sqrt{3}(x+y-z)^2}{xy}$$

Bài giải

Đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$, khi đó $a, b, c \in (1; 2)$

→ Tồn tại $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là a, b, c

$$\text{Khi đó: } P = \frac{2(b^2 + c^2 - a^2)^2}{b^2 c^2} + \frac{\sqrt{3}(c^2 + a^2 - b^2)^2}{c^2 a^2} - \frac{2\sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)^2}{a^2 b^2}$$

$$= 2(2\cos A)^2 + \sqrt{3}(2\cos B)^2 - 2\sqrt{3}(2\cos C)^2 = 8\cos^2 A + 4\sqrt{3}\cos^2 B - 8\sqrt{3}\cos^2 C$$

$$= 8 \cdot \frac{1 + \cos 2A}{2} + 4\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2B}{2} - 8\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2C}{2}$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} + 4\cos 2A + 2\sqrt{3}\cos 2B - 4\sqrt{3}\cos 2C \quad (1)$$

Giả sử $\triangle ABC$ có tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp là O và R

$$\text{Khi đó: } \left(\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB} - \vec{OC}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3OA^2 + 4OB^2 + OC^2 + 4\sqrt{3}\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 4\vec{OB} \cdot \vec{OC} - 2\sqrt{3}\vec{OC} \cdot \vec{OA} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 + R^2 \left[4\sqrt{3}\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) - 4\cos(\vec{OB}, \vec{OC}) - 2\sqrt{3}\cos(\vec{OC}, \vec{OA}) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2A + 2\sqrt{3}\cos 2B - 4\sqrt{3}\cos 2C \leq 8 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \rightarrow P \leq 4 - 2\sqrt{3} + 8 = 12 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } A = 30^\circ, B = 45^\circ, C = 105^\circ \text{ hay } b = a\sqrt{2}, c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}a \Leftrightarrow$$

$$y = 2x, z = (2 + \sqrt{3})x \text{ với } x \in (1; 4(2 - \sqrt{3}))$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $12 - 2\sqrt{3}$

Bài 4 : Xét số thực x . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2 + 2x + 1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}}$$

Bài giải

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét các điểm $A(x; x+1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Khi đó ta có $P = \frac{OA}{a} + \frac{OB}{b} + \frac{OC}{c}$, trong đó $a = BC, b = CA, c = AB$

Gọi G là trọng tâm ΔABC , ta có: $P = \frac{OA.GA}{a.GA} + \frac{OB.GB}{b.GB} + \frac{OC.GC}{c.GC} = \frac{3}{2} \left(\frac{OA.GA}{a.m_a} + \frac{OB.GB}{b.m_b} + \frac{OC.GC}{c.m_c} \right)$

Trong đó m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C của ΔABC . Theo bất đẳng thức Cô si cho hai số thực không âm, ta có

$$a.m_a = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

Bằng cách tương tự, ta cũng có: $b.m_b \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$ và $c.m_c \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} (OA.GA + OB.GB + OC.GC) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } OA.GA + OB.GB + OC.GC \geq \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC} &= (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}).\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}).\overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}).\overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{OG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $P \geq \sqrt{3}$

Hơn nữa, bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy $P = \sqrt{3}$ khi $x = 0$.

Vậy $\min P = \sqrt{3}$

§13: PHƯƠNG PHÁP ÉP BIẾN

Bài mẫu: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$$

(Trích đề thi thử lần 11 thầy Quang Baby)

Bài giải

$$\text{Ta có } (1-a)(2-b) \geq 0 \Leftrightarrow 2-2a-b+ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a+b \leq ab+2 \Rightarrow \frac{1}{b+2a} \geq \frac{1}{ab+2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{b+2a} \geq \frac{c(a+b)}{ab+2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{a(b+c)}{b+2c} \geq \frac{a(b+c)}{bc+2}$$

$$\text{Lại có } 3(a+c)^2 + 2b^2 + 8 = 2[(a+c)^2 + b^2] + (a+c)^2 + 8 \geq 4(a+c)b + 4ac + 8 = 4(ab+ac+bc+2)$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{c(a+b)}{ab+2} + \frac{a(b+c)}{bc+2} + \frac{4(ab+bc+ca+2)}{4(ac+3)} = \left(\frac{ac+bc}{ab+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+ac}{bc+2} + 1\right) + \frac{ab+bc+ca+2}{ac+3} - 2$$

$$= (ab+bc+ca+2) \left(\frac{1}{ab+2} + \frac{1}{bc+2} + \frac{1}{ac+3} \right) - 2 \geq \frac{9(ab+bc+ca+2)}{ab+bc+ca+7} - 2$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9(t+2)}{t+7} - 2 = 7 - \frac{45}{t+7}$$

$$\text{Mà } t = ab+bc+ca \geq 5 \Rightarrow P \geq 7 - \frac{45}{5+7} = \frac{13}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{13}{4}$, dấu "=" xảy ra khi $a=1, b=2, c=1$

Bài 1: Cho 3 số thực a, b, c thay đổi thuộc đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $a+b+c \leq 4$. Chứng minh đẳng

$$\text{thức: } \frac{a^2}{bc+2} + \frac{b^2}{ac+2} + \frac{c^2}{ab+2} > \frac{2}{3}$$

(Trích đề thi thử trường chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} (b-1)(c-2) \leq 0 \\ (b-2)(c-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc+2 \leq 2b+c \\ bc+2 \leq b+2c \end{cases} \Rightarrow 2(bc+2) \leq 3(b+c) \leq 3(4-a)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^2}{bc+2} \geq \frac{2}{3} \frac{a^2}{4-a}; \text{ đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=0; b=c=2.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{ac+2} \geq \frac{2}{3} \frac{b^2}{4-b} \text{ và } \frac{c^2}{ab+2} \geq \frac{2}{3} \frac{c^2}{4-c}$$

Suy ra: $\frac{a^2}{bc+2} + \frac{b^2}{ac+2} + \frac{c^2}{ab+2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{a^2}{4-a} + \frac{b^2}{4-b} + \frac{c^2}{4-c} \right) (*)$ (Không tồn tại a, b, c để đẳng thức xảy ra)

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2}{4-t}; t \in [1; 2]$

Ta có: $f'(t) = \frac{t(8-t)}{(4-t)^2} > 0; \forall t \in [1; 2]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Suy ra $f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \forall t \in [1; 2]$

Thay t bởi a, b, c vào vế trái của $(*)$ ta được:

$$P = \frac{a^2}{bc+2} + \frac{b^2}{ac+2} + \frac{c^2}{ab+2} > \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Vậy $P > \frac{2}{3}$

Bài 2: Với các số thực: $0 \leq a, b, c \leq 2$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c}$$

(Trích đề thi thử trường THPT chuyên Bắc Ninh)

Bài giải

Ta chứng minh: $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b} (*)$. Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow 1+a+1+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1+1+a+b+2\sqrt{1+a+b}$$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b) \geq 1+a+b \Leftrightarrow ab \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

Suy ra: $1 \leq c \leq 2$. Theo $(*)$ ta có: $P \geq 1 + \sqrt{1+a+b} + \sqrt{1+c} = 1 + \sqrt{4-c} + \sqrt{1+c}$

Xét hàm: $f(c) = 1 + \sqrt{4-c} + \sqrt{1+c}; 1 \leq c \leq 2$

$$\text{Ta có } f'(c) = -\frac{1}{2\sqrt{4-c}} + \frac{1}{2\sqrt{1+c}}; f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có: } f(1) = f(2) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}; f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \sqrt{10}. \text{ Vậy: } P \geq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Vậy GTNN của P là: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Bài 3: Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $a \in [0; 1], b \in [0; 2], c \in [0; 3]$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của } P = \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2+8}}$$

Bài giải

Ta có $a \in [0; 1], b \in [0; 2], c \in [0; 3]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-a)(b+c) \geq 0 \\ (2-b)(a+c) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c \geq ab+ac \\ 2a+2c \geq ab+bc \end{cases} \Rightarrow 2a+b+3c \geq 2ab+bc+ac$$

$$\Rightarrow \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} \leq \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2ab+ac+bc}$$

Mặt khác $b+c \geq a(b+c)$ (vì $a \in [0;1]$)

$$\Rightarrow \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} \leq \frac{8-b}{a(b+c)+b(a+c)+8} = \frac{8-b}{2ab+bc+ac+8}$$

Với mọi số thực x, y, z , ta có:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (y-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} = \sqrt{3[(2a)^2 + b^2 + (3c)^2]} \geq \sqrt{(2a+b+3c)^2} = 2a+b+3c \geq 2ab+bc+ac$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} + 8} \leq \frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

Suy ra

$$P \leq \frac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac} + \frac{8-b}{2ab+bc+ac+8} + \frac{b}{2ab+bc+ac+8}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(2ab+bc+ac)}{1+2ab+bc+ac} + \frac{8}{2ab+bc+ac+8}$$

Đặt $t = 2ab+bc+ac \Rightarrow t \in [0;13]$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{8}{t+8}, t \in [0;3]$$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$f(0) = 1; f(6) = \frac{16}{7}; f(13) = \frac{47}{21} \Rightarrow f(t) \leq \frac{16}{7} \forall t \in [0;13]$$

Do đó: $P \leq \frac{16}{7}$. Khi $a=1; b=2; c=\frac{2}{3}$ thì $P = \frac{16}{7}$. Vậy GTLN của P là $\frac{16}{7}$

Bài 4: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x, y, z \geq -1$ và $x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy+1)} + \frac{y^2 - 1}{z^2 - 4z + 5}$

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $(x+1)(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -(x+y)-1$ và $x+y=3-z$

$$\text{Do đó } x^2 + y^2 + 4(xy+1) = (x+y)^2 + 2xy + 4 \geq (x+y)^2 - 2(x+y) + 2 = (x+y-1)^2 + 1 = z^2 - 4z + 5$$

$$\text{Khi đó, suy ra } P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy+1)} + \frac{y^2 - 1}{z^2 - 4z + 5} \leq \frac{x^2}{z^2 - 4z + 5} + \frac{y^2 - 1}{z^2 - 4z + 5} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{z^2 - 4z + 5}$$

$$\text{Mặt khác: } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \leq (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 = (x+y+1)^2 + 1 = z^2 - 8z + 17$$

$$\text{Vì vậy } P \leq \frac{z^2 - 8z + 17}{z^2 - 4z + 5}. \text{ Đặt } t = \frac{z^2 - 8z + 17}{z^2 - 4z + 5} (*). \text{ Khi đó } (*) \Leftrightarrow (t-1)z^2 + (8-4t)z + 5t - 16 = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm khi } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (4-2t)^2 - (t-1)(5t-16) \geq 0 \Leftrightarrow 5t - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 5$$

Suy ra $P \leq 5$. Dấu xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = \left(-1; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $(x; y; z) = \left(\frac{5}{2}; -1; \frac{3}{2}\right)$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 5.

Bài 5: Cho $a \in [1; 2]$. Chứng minh rằng $(2^a + 3^a + 4^a)(6^a + 8^a + 12^a) < 24^{a+1}$

Bài giải

Bất đẳng thức tương đương $\Leftrightarrow (2^a + 3^a + 4^a) \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} \right) < 24$

Do $a \in [1; 2] \Rightarrow 2 \leq 2^a \leq 4; 3 \leq 3^a \leq 9; 4 \leq 4^a \leq 16$

$\Rightarrow 2 \leq 2^a < 16; 2 < 3^a < 16; 4 < 4^a \leq 16$ (0.25đ)

Với $x \in [2; 16]$ ta có:

$$(x-2)(x-16) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 32 \leq 0 \Leftrightarrow x - 18 + \frac{32}{x} \leq 18 - x$$

Từ đó suy ra: $32 \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} \right) < 54 - (2^a + 3^a + 4^a)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} \right) < \frac{54 - (2^a + 3^a + 4^a)}{32}$$

$$\text{Khi đó: } \Leftrightarrow (2^a + 3^a + 4^a) \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} \right) < \frac{(2^a + 3^a + 4^a)[54 - (2^a + 3^a + 4^a)]}{32}$$

Bài 6: Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn: $0 < (2a, b) \leq 1 \leq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P = \frac{2a(b+c)+bc+ab}{72} - \frac{4a(b+c)}{2(a+b+2c)+1} - \frac{4b(a+c)}{28a^2+7b^2+2c^2+2}$$

(Trích đề thầy Mẫn Ngọc Quang)

Bài giải

Ta có: $2(2a+b-c)^2 + 5(2a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 28a^2 + 7b^2 + 2c^2 \geq 12ab + 8ac + 4bc$

$2a(b+c) + b(a+c) \leq a+b+2c$ do $0 < (2a, b) \leq 1 \leq c$

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{3ab+2ac+bc}{72} - \frac{4a(b+c)}{3ab+2ac+bc+1} - \frac{4b(a+c)}{12ab+8ac+2bc+2} \\ &= \frac{3ab+2ac+bc}{72} - \frac{4(ab+ac)}{2 \left[3ab+2ac+bc + \frac{1}{2} \right]} - \frac{4b(a+c)}{4 \left[3ab+2ac+bc + \frac{1}{2} \right]} \\ &= \frac{3t}{72} - \frac{t}{t + \frac{1}{2}}, t = 3ab+2ac+bc > 0 \end{aligned}$$

Xét hàm số ta có được kết quả dấu bằng xảy ra khi: $t = 11/2$, $a = 1/2$, $b = 1$, $c = 2$

Câu 7: Cho các số thực x, y, z thuộc $[0; 1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{\sqrt{y^2 + 14yz + z^2}}{(y+z)^3} + \frac{8(x+1)(y+1)(z+1)}{x+y+z+2}$$

Bài giải

Do $z = \min\{x, y, z\}$ nên ta có $x^2 + z^2 \leq \left(x + \frac{z}{2}\right)^2$

Ta lại có $z \leq y \Rightarrow (y+z)^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 \leq y^4 + 14yz \cdot y^2 + y^2z^2 = y^2(y^2 + 14yz + z^2)$

$$\Rightarrow y^2 + 14yz + z^2 \geq \frac{(y+z)^4}{y^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y^2 + 14yz + z^2}}{(y+z)^3} \geq \frac{1}{y(y+z)} \geq \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2}$$

Do đó ta có $P \geq \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{8(x+1)(y+1)(z+1)}{x+y+z+2}$

Ta có $\frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2} \geq \frac{2}{\left(x + \frac{z}{2}\right)\left(y + \frac{z}{2}\right)} \geq \frac{8}{(x+y+z)^2}$

Và $(x+1)(y+1)(z+1) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz \geq 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx)$

Lại có $(1-x)(1-y)(1-z) = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz \geq 0$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq x + y + z - 1 + xyz \geq x + y + z - 1 \Rightarrow P \geq \frac{8}{(x+y+z)^2} + \frac{16(x+y+z)}{x+y+z+2}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{8}{t^2} + \frac{16t}{t+2}$ với $t = a+b+c$ và $t \in [0; 3]$

Ta có $f'(t) = -\frac{16}{t^3} + \frac{32}{(t+2)^2}$; $f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow f(t) \geq f(2) = 10$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 10, dấu "=" xảy ra khi $x = y = 1, z = 0$

Câu 8: Cho các số thực $x, y, z \geq 1$ thỏa mãn $2xyz + 1 \geq x + y + z$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2y^2 - 2y + 1} + \sqrt{2z^2 - 2z + 1}}{(x+y+z)^2} + \frac{2}{2xyz+1}$$

(Trích đề thi thử lần 9 thầy Quang Baby)

Bài giải

Ta có: $2x(x-1) \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 2x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2x - 1$

Tương tự ta có: $\sqrt{2y^2 - 2y + 1} \leq 2y - 1$; $\sqrt{2z^2 - 2z + 1} \leq 2z - 1$

Do đó: $P \leq \frac{2x-1+2y-1+2z-1}{(x+y+z)^2} + \frac{2}{2xyz+1} \leq \frac{2(x+y+z)-3}{(x+y+z)^2} + \frac{2}{x+y+z} = \frac{4}{x+y+z} - \frac{3}{(x+y+z)^2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{3}{t^2}$ với $t = x + y + z \geq 3$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến nên $P = f(t) \leq f(3) = 1$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 1, dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Câu 9: Cho $0 < a, b, c \leq 1$, $a(4 - a - b) = c(a + b)$ Tìm GTNN :

$$P = (1 + a + b)(1 + b + c)(1 + c + a) + 16a^2 + 16bc - 64a$$

(Trích đề thi thử lần 16 thầy Quang Baby)

Bài giải

$$0 < a, b, c \leq 1$$

$$a(4 - a - b) = c(a + b) \Rightarrow 4a = a^2 + ac + bc + ab = (a + b)(a + c)$$

$$16a^2 + 16bc - 64a = -16(ab + ac)$$

$$(1 + a + b)(1 + c + a)(1 + b + c) = (1 + 6a + b + c)(1 + b + c) = 1 + 6a + 2b + 2c + 6a(b + c) + (b + c)^2$$

$$\Rightarrow P = 1 + 6a + 2b + 2c + 6a(b + c) + (b + c)^2 - 16(ab + ac)$$

$$\geq 1 + (2a + 4a^2) + (b + c)^2 + 2b + 2c - 10a(b + c) = 1 + [2a] + [4a^2 + (b + c)^2] + [2b + 2c] - 10a(b + c)$$

$$\text{Vi: } 0 < a, b, c \leq 1 \Rightarrow [2a] \geq a(b + c), [4a^2 + (b + c)^2] \geq 4a(b + c), [2b + 2c] \geq 2a(b + c)$$

$$\Rightarrow P \geq 1 + a(b + c) + 4a(b + c) + 2a(b + c) - 10a(b + c) = 1 - 6 = -5$$

Câu 10: Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc \leq \frac{5}{2}$

(Trích đề thi thử trường THPT Đào Duy Từ năm 2012)

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử: $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$

$$\text{Ta có: } A = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc \leq \frac{1}{1+bc} + \frac{b}{1+bc} + \frac{c}{1+bc} + bc \leq bc + \frac{1}{1+bc} + \frac{b+c}{1+bc}$$

$$\text{Ta có: } (1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1-bc \geq b+c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{1+bc} \leq 1 \text{ Vậy nên: } A \leq bc + 1 + \frac{1}{1+bc}$$

$$\text{Đặt } t = 1 + ab \text{ (} 1 \leq t \leq 2 \text{) khi đó: } f(t) = t + \frac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0 (\forall: 1 \leq t \leq 2) \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } [1; 2]$$

$$\Rightarrow f(t)_{\max} \leq f(2) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Câu 11: Cho $x, y, z \in [0; 2]$; $xy + yz + zx > 0$. Tìm min $P = x^2 + y^2 + z^2 + 10(xy + yz + zx) + \frac{96}{2\sqrt[3]{x^3 + y^3 + z}}$

(Trích đề thi thử trường THPT Đô Lương 1)

Bài giải

$$\text{Ta có: } P = 5(x + y + z)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{96}{2\sqrt[3]{x^3 + y^3 + z}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = [x(x-2) + y(y-2) + z(z-2)] + 2(x+y+z) \leq 2(x+y+z); x^3 + y^3 \leq (x+y)^3, z \leq 2z.$$

$$\text{Khi đó: } P \geq 5(x+y+z)^2 - 8(x+y+z) + \frac{96}{2(x+y+z)}$$

$$\text{Đặt } t = x+y+z (t \geq 0) \Rightarrow P \geq 5t^2 - 8t + \frac{48}{t} \Rightarrow P_{\min} = 28 \Leftrightarrow x=2, y=z=0.$$

Câu 12: Cho $a, b, c \in [1, 3], a+b+c=6$. Tìm Max $P = \frac{a^4 + b^4 + 5c^2 + 6abc + 1}{ab + bc + ca} - abc$

(Trích đề thi thử trường THPT Đặng Thúc Hứa)

Bài giải

$$\text{Ta đánh giá: } (a-1)(a-2)(a+1)(a+2) + (b-2)(b-1)(b+2)(b+1) \leq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 \leq 5a^2 + 5b^2 - 8$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{5(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc - 7}{ab + bc + ca} - abc$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \\ (2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow abc + 8 \leq 2(ab + bc + ca) \leq 2(abc + 3)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(6abc + 73)}{abc + 8} - abc - 10 \leq 5 \Rightarrow P_{\max} = 5 \Leftrightarrow a=b=1, c=2$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 5 \Leftrightarrow a=b=1, c=2$$

Câu 13: Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn: $a \in [0, 1], b \in [0, 2], c \in [0, 3]$

$$\text{Tìm Max } P = \frac{2(2ab + bc + ac)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2 + 8}}$$

(Trích đề thi thử trường THPT Anh Sơn 2)

Bài giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (1-a)(b+c) \geq 0 \\ (2-b)(a+c) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2a+b+3c \geq 2ab+ca+bc$$

$$\text{PTa có: } \begin{cases} b+c \geq a(b+c) \\ \sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} \geq \sqrt{(2a+b+3c)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(2ab + bc + ca)}{1 + 2ab + bc + ca} + \frac{8-b}{2ab + bc + ca + 8} + \frac{b}{2ab + bc + ca + 8}$$

$$\text{Đặt } t = 2ab + bc + ca (t \geq 0)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2t}{1+t} + \frac{8}{t+8} \leq \frac{16}{7} \Rightarrow P_{\max} = \frac{16}{7} \Leftrightarrow a=1, b=2, c=\frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{16}{7} \Leftrightarrow a=1, b=2, c=\frac{2}{3}$$

Câu 14: Cho $x, y, z \in (0, 1]$. Chứng minh rằng $P = (1 + \frac{1}{xyz})(x + y + z) \geq 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

(Trích đề thi thử trường THPT Ngô Sĩ Liên)

Bài giải

$$\text{Ta có: } (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy + 1 \geq x + y \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

$$\text{Ta có: } P = \left(\frac{1}{xyz} + 1\right)(x + y + z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + x + y + z \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + x + y + z - 3$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z - 3 \geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z)} + x + y + z - 3 \Rightarrow P \geq x + y + z + 3 \text{ (dpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 15: Cho $x, y, z \in [1, 4], x + y + z = 6$. Tìm min : $P = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{xyz}$

Bài giải

$$P = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{xyz} = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2}{xyz} - \frac{1}{xyz} \geq \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{2}{z} - \frac{1}{xyz}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x + y - 1 = 5 - z \\ (x^2 + y^2) = z^2 - 10z + 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{z}{8(z^2 - 10z + 26)} + \frac{2}{z} - \frac{1}{z(5-z)} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta chứng minh: } P \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(z-4)^2(4z^2 - 45z + 117)}{8z(5-z)(z^2 - 10z + 26)} \geq 0$$

$$\text{Max} P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 1, z = 4$$

Câu 16: Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} + 2(1-a)(1-b)(1-c)$

(Trích đề thi thử lần 6 thầy Đặng Thành Nam)

Bài giải

Giả sử $c \geq b \geq a$. Ta có: $(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+1} \Leftrightarrow 2bc+1 \geq a+b; \frac{b}{ca+1} \leq \frac{2b}{a+b+1} \Leftrightarrow 2ca+1 \geq a+b; \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+1} \Leftrightarrow 2ab+1 \geq a+b$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2(a+b+c)}{a+b+1} + \frac{2(1-a)(1-b)(1-c)(1+a+b)}{1+a+b} \leq \frac{2(a+b+c)}{a+b+1} + \frac{2(1-c)}{1+a+b} = 2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=0$ hoặc $a=b=1, c=0$ (hoán vị)

Câu 17: Cho $a, b, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ Tìm min $P = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$

(Trích đề thi thử lần 11 thầy Đặng Thành Nam)

Bài giải

Áp dụng AM - GM ta có:
$$\begin{cases} (1+a+b)\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right) \leq \frac{(1+a+b-a-b+5)^3}{27} = 8 \\ (1+c+a)\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right) \leq 8 \end{cases}$$

Ta có $P \leq \frac{a}{b+c+1} + \frac{c\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right)}{8} + \frac{b\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-c\right)}{8} + (1-a)(1-b)(1-c)$

Đặt: $f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{c\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-b\right)}{8} + \frac{b\left(\frac{5}{2}-a\right)\left(\frac{5}{2}-c\right)}{8} + (1-a)(1-b)(1-c)$

Ta có: $f(a)_{\min} \geq \left\{ f(0), f\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$

Ta có +) $f(0) = 1 + \frac{3}{8}bc - \frac{7}{32}(b+c) = 1 + b\left(\frac{3}{8}c - \frac{7}{32}\right) - \frac{7}{32}c = g(b)$

Do $\left(\frac{3}{8}c - \frac{7}{32}\right) \leq 0, \forall c \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(0) \geq g(b) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{7}{8}$

+) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2+2(b+c)} + \frac{b+c}{8} + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{8}$

Vậy $P_{\min} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Câu 18: Cho $a, b, c \in [1, 3], a+b+c=6$. Tìm max $P = abc(a^3+b^3+c^3)^2$

Bài giải

Ta có: $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) = 216 - 18(ab+bc+ca) + 3abc$

Ta có: $(a-3)(b-3)(c-3) \leq 0 \Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \geq 9(a+b+c) - 27 + abc = 27 + abc$

$P \leq [3(ab+bc+ca) - 27] \left\{ 216 - 18(ab+bc+ca) + 3[3(ab+bc+ca) - 27] \right\}^2$

$\Rightarrow P \leq 3(ab+bc+ca-9)[135-9(ab+bc+ca)]^2$

$\Rightarrow P \leq 7776$

Vậy $P_{\max} = 7776 \Leftrightarrow a=1, b=2, c=3$ và các hoán vị

Câu 19: Cho $a, b, c \in [1, 2], a + b + c = \frac{9}{2}$. Tìm GTLN của: $P = a^6 + c^6 + 21b^2 + \frac{14}{\sqrt{12(a^3 + b^3) + 28b^2 + 25}}$

Bài giải

Ta có:
$$\begin{cases} a^6 \leq 21a^2 - 20 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(a^2 - 4)(a^2 + 5) \leq 0 \\ c^6 \leq 21c^2 - 20 \\ 3a^3 \leq 7a^2 - 4 \\ 3c^3 \leq 7c^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow P \leq 21(a^2 + b^2 + c^2) - 40 - \frac{14}{\sqrt{28(a^2 + b^2 + c^2) - 7}}$$

Đặt: $t = a^2 + b^2 + c^2$. Với $\begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \\ (a-2)(b-2)(c-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq \frac{13}{2} \Rightarrow t \leq \frac{29}{4}$

Câu 20: Cho $\begin{cases} c \geq b \geq a > 0 \\ a^2 + b^2 + 2c^2 = ab + bc + ca + 5 \\ a + 2b + 4c > 9 \end{cases}$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{b^2 + ab + bc + 3ac}{2}} + \sqrt{2a + 4b + 8c - 18} - \frac{(ab + bc + ca)\sqrt{2}}{4}$$

Bài giải

Từ giả thiết ta sẽ có: $(b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 + ca \leq b(a+c)$

$$\Rightarrow b^2 + ab + bc + 3ac \leq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow \sqrt{\frac{b^2 + ab + bc + 3ac}{2}} \leq \sqrt{ab + bc + ca}$$

Mặt khác ta lại có: $(a-1)^2 + (b-2)^2 + 2(c-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a + 4b + 8c - 18 \leq a^2 + b^2 + 2c^2 - 5 = ab + bc + ca$

Suy ra: $\sqrt{2a + 4b + 8c - 18} \leq \sqrt{ab + bc + ca}$

Từ đây ta sẽ có: $P \leq 2\sqrt{ab + bc + ca} - \frac{\sqrt{2}(ab + bc + ca)}{4} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{ab + bc + ca} - 2\sqrt{2})^2 \leq 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a = 1 \\ b = c = 2 \end{cases}$

Câu 21: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{(yz+1)}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$

(Trích đề thi thử lần 6 thầy Quang Baby)

Lời giải

Với những bài toán có điều kiện biên $x, y, z \in [0; 1]$ chúng ta sẽ tìm cách khai thác nó, dự đoán điểm rơi sẽ là: $x = y = 1, z = 0$.

Hơn nữa với $\frac{2}{xy+xz-yz}$ có chứa $xy+xz-yz$ ở mẫu, đây là hạng tử có thể gợi ý cho chúng ta dồn biến về $xy+xz-yz$.

Ta có: $x, y, z \in [0;1]$. Suy ra $\sqrt{x} \geq x^2$, $\frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} = \frac{\sqrt{x}(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}} \geq \frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}}$

Áp dụng BĐT phụ Cô-Si ngược ta có: $\frac{1}{\sqrt{AB}} \geq \frac{2}{A+B}$. Dấu bằng khi $A = B > 0$. Do dự đoán điểm rơi

$x = y = 1, z = 0$ nên khả năng $x = x+z$ và $y = y+z$ là hoàn toàn có thể xảy ra.

Ta có: $\frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}} \geq x^2(y+z)^2 \cdot \frac{2}{2x+z}$ $\frac{(yz+1)^2}{\sqrt{y(y+z)}} \geq (yz+1)^2 \cdot \frac{2}{2y+z}$

Do đó $P \geq \frac{2x^2(y+z)^2}{2x+z} + \frac{2(yz+1)^2}{2y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq \frac{(xy+yz+xz+1)^2}{x+y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz}$

$$\frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y} \geq \frac{(A+B)^2}{x+y},$$

Với điều kiện: $x, y, z \in [0;1]$, ta luôn có: $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 0$

$$\Leftrightarrow xy + yz + xz + 1 \geq xyz + x + y + z \geq x + y + z$$

Suy ra $P \geq x + y + z + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$

Mà $x, y, z \in [0;1]$, $\Rightarrow x + y + z \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$

Suy ra $P \geq 2(xy+xz-yz) + \frac{2}{xy+xz-yz} \stackrel{AM-GM}{\geq} 4$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\min P = 4$ đạt được khi $(x; y; z) = (1; 1; 0)$

Câu 22: Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$

(Trích đề thi đại học khối D năm 2014)

Bài giải

Do $1 \leq x \leq 2$ nên $(x-1)(x-2) \leq 0$, nghĩa là $x^2 + 2 \leq 3x$. Tương tự $y^2 + 2 \leq 3y$.

Suy ra $P \geq \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3x+3y+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}$.

Đặt $t = x+y$, suy ra $2 \leq t \leq 4$. Xét $f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$, với $2 \leq t \leq 4$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Mà $f(2) = \frac{11}{12}$; $f(3) = \frac{7}{8}$; $f(4) = \frac{53}{60}$ nên $f(t) \geq f(3) = \frac{7}{8}$. Do đó $P \geq \frac{7}{8}$.

Khi $x=1, y=2$ thì $P = \frac{7}{8}$. Vậy $P_{\min} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Câu 23: Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab+bc+ca} - \frac{1}{2}abc$.

(Trích đề thi THPT quốc gia năm 2015)

Bài giải

Đặt $t = ab+bc+ca$. Ta có: $36 = (a+b+c)^2 = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3t \geq 3t$. Suy ra $t \leq 12$.

Mặt khác $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0$ nên $abc \geq ab+bc+ca-5 = t-5$;

và $(3-a)(3-b)(3-c) \geq 0$ nên $3t = 3(ab+bc+ca) \geq abc+27 \geq t+22$. Suy ra $t \geq 11$.

Khi đó $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab+bc+ca} - \frac{1}{2}abc$
 $= \frac{(ab+bc+ca)^2 + 72}{ab+bc+ca} - \frac{abc}{2} \leq \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{t-5}{2} = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}$ với $t \in [11; 12]$. Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 144}{2t^2}$.

Do đó $f'(t) \leq 0, \forall t \in [11; 12]$, nên $f'(t)$ nghịch biến trên $[11; 12]$.

Suy ra $f(t) \leq f(11) = \frac{160}{11}$. Do đó $P \leq \frac{160}{11} \Rightarrow P_{\max} = \frac{160}{11} \Leftrightarrow a=1, b=2, c=3$ và các hoán vị của chúng.

Câu 24: Cho $x, y, z \in [1; 3]$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\sqrt{\frac{10}{3}(x^2 + 2y^2 + 3z^2)} - y + z \right)^2 + \frac{4608}{x^2 + y^2 + xy + 9z}$$

Bài giải

Câu 25: Cho $\begin{cases} a, b, c \in [1; 2] \\ a+b+c \geq 5 \end{cases}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3(c+1)}{2abc + 10c + 3(a+b+c^2+1)} + \sqrt{(a+b+1)^2 + \frac{13}{4}} + \frac{\sqrt{4c^2+13}}{2}$$

(Trích đề thi thử lần 19 thầy Quang Baby)

Bài giải

Câu 26: Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $a + b + 2c = 8$.

Tìm GTLN của $P = a^3 + b^3 + 5c^3$

Bài giải

Ta có : $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq (a+b) - 1 = 7 - 2c$

Khi đó : $P = a^3 + b^3 + 5c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 5c^3 \leq (8-2c)^3 - 3(7-2c)(8-2c) + 5c^3$

Lại có : $a + b + 2c = 8 \Rightarrow 2c = 8 - (a + b) \leq 8 - (1 + 1) = 6 \Rightarrow c \leq 3$

Xét : $f(c) = (8-2c)^3 - 3(7-2c)(8-2c) + 5c^3$ với $c \in [1; 3]$

$\Rightarrow f'(c) = -9c^2 + 168c - 294$

BBT $\Rightarrow f(c)_{\max} = \max\{f(1); f(3)\} = f(3) = 137 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

Câu 27: cho các số không âm a, b, c sao cho $a, c \in [0; 1]$ và $ab + bc + ca \geq 5$ tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(ac+3)}$$

(Trích đề thầy Mẫn Ngọc Quang)

Bài giải

Lưu ý là : $\frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} = a + c - \frac{2ac(a+b+c)}{(b+2a)(b+2c)}$ mặt khác:

$$(b+2a)(b+2c) = b^2 + 2b(a+c) + 4ac = (b-2)^2 + 4b - 4 + 2(ab+bc+ca) + 2ac \geq 4b + 6 + 2ac$$

Và $a + b + c = b + ac + 1 - (a-1)(c-1) \leq ac + b + 1$ do đó $\frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} \geq a + c - \frac{ac(b+ac+1)}{2b+ac+3}$

$$\text{Mà: } a + c - \frac{ac(b+ac+1)}{2b+ac+3} = \frac{ac+2}{2} - (a-1)(c-1) + \frac{ac(1-ac)}{2(2b+ac+3)}$$

$$= \frac{ac+2}{2} - (a-1)(c-1) - \frac{ac(1-ac)(2b-ac-3)}{4(2b+ac+3)(ac+3)} + \frac{ac(1-ac)}{4(ac+3)}$$
 tiếp theo ta có đánh giá:

$$b - a - c \geq \frac{5-ac}{a+c} - a - c \geq \frac{4}{a+c} - a - c = 2(2-a-c) + \frac{(a+c-2)^2}{a+c} \geq 2(2-b-c) \text{ do đó}$$

$$(1-a)(1-c) \leq \frac{(2-a-c)^2}{4} \leq \frac{(b-a-c)^2}{16} \leq \frac{(b-a-c)^2}{4(ac+3)}$$
 mặt khác dễ thấy $ac \geq a+c-1$ nên:

$$(1-ac)(2b-ac-3) \leq 2(2-a-c)(b-a-c) \leq (b-a-c)^2 \Rightarrow \frac{ac(1-ac)(2b-ac-3)}{4(2b+ac+3)(ac+3)} \leq \frac{(b-a-c)^2}{4(ac+3)}$$

$$\text{Lại có: } 3(a+c)^2 + 2b^2 + 8 = 4(ab+bc+ca+2) + (b-a-c)^2 + (a-c)^2 \geq 28 + 2(b-a-c)^2$$

Từ những đánh giá trên ta có :

$$P \geq \frac{(ac+2)}{2} + \frac{ac(1-ac)}{4(ac+3)} - \frac{(b-a-c)^2}{2(ac+3)} + \frac{14+(b-a-c)^2}{2(ac+3)} = \frac{(ac+2)}{2} + \frac{ac(1-ac)}{4(ac+3)} + \frac{7}{ac+3}$$

$$= \frac{(ac-1)^2}{4(ac+3)} + \frac{13}{4} \geq \frac{13}{4} \cdot \min P = \frac{13}{4} \text{ khi } a=c=1 \text{ và } b=2$$

Câu 28: Cho các số thực $x, y, z \in [1, 3]$ tìm $\max P = \frac{x}{x^2 + y^2 + 18z} + \frac{y}{(x+y)(3z+3)} - \frac{1}{9z}$

Bài giải

$$x^2 + y^2 + 18z - 3(x+y)(z+1) = (3z-x)(3-x) + (3z-y)(3-y) \geq 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 18z \geq 3(x+y)(z+1)$$

$$P \leq \frac{x}{3(x+y)(z+1)} + \frac{y}{3(x+y)(z+1)} - \frac{1}{9z} = \frac{1}{3(z+1)} - \frac{1}{9z} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \right)^2$$

$$\max P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \right)^2 \text{ khi : } x = y = 3; z = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Câu 29: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{6xyz(x-y+3)}{6+xy^2+2x} - \frac{x^3+6}{7(x^2+xz)} + x^2 + z^2$$

Bài giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } (x-1)(x-2)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 + 6 \leq 7x \quad (1)$$

$$\text{Từ giả thiết ta lại có: } (y-1)(y-2)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow 6 + xy^2 + 2x \leq 3x(x-y+3) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } P \geq \frac{-1}{x+z} + 2xz + x^2 + z^2 = (x+z)^2 - \frac{1}{x+z}$$

$$2 \leq x+z \leq 4 \Rightarrow \min P = \frac{7}{2}. \quad "=" \Leftrightarrow (x; y; z) = (1; 1; 1); (1; 2; 1)$$

Câu 30: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy \geq 1 \\ 4z^2(x+y-1) - x^2 - y^2 + 2 \geq 4xy \end{cases}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{z}}{1+z\sqrt{xyz}} + z(xy+2) + \frac{z\sqrt{z}}{z+xy\sqrt{xy}} - z^2$$

Bài giải

Từ giả thiết ta sẽ có:

$$4z^2(x+y-1) - x^2 - y^2 \geq 2xy + 2(xy-1) \geq 2xy \Rightarrow 4z^2(x+y) \geq (x+y)^2 + 4z^2 \geq 4z(x+y) \Rightarrow z \geq 1$$

$$\text{Từ đây ta suy ra: } (xy-1)(z-1) \geq 0 \Leftrightarrow xyz+1 \geq xy+z$$

$$\text{Từ đây ta sẽ có: } z(xy+2) - z^2 \geq xyz+1 \geq xy+z \geq xy+1 \quad (*)$$

$$xy \geq 1 \Rightarrow z\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{\frac{(xy)^3}{z^2}} \geq (xy)^2 \cdot \sqrt{z} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+z\sqrt{xyz}} + \frac{z}{z+xy\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{z}$$

$$\text{Áp dụng (*) ta sẽ có } P \geq \frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{xyz}} + \frac{z\sqrt{z}}{z+xy\sqrt{xy}} + xy \geq \frac{2\sqrt{z}}{1+xy\sqrt{z}} + xy+1 \geq \frac{2}{1+xy} + xy+1$$

Xét hàm trên $xy \geq 1$ là $\Rightarrow \text{Min} P = 3$, dấu bằng khi $x=y=z=1$

Câu 31: Cho $\begin{cases} x, y, z \in [0;1] \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \ln \left[\frac{(x+y+z)^3}{2} + \frac{2-3(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2+y^2+z^2+2}{4-xyz}$$

Bài giải

Từ giả thiết ta sẽ có:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0 \Leftrightarrow xyz + x + y + z \leq 2 - xyz \leq 2 - \frac{xyz}{2} \Rightarrow 4 - xyz \geq 2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2+y^2+z^2+2}{4-xyz} = -\frac{(x+y+z)^2}{4-xyz} \geq \frac{-(x+y+z)}{2}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(x+y+z)^3}{2} + \frac{2-3(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} &= \frac{(x+y+z)^3}{2} + \frac{8-3(x+y+z)^2}{x+y+z} \\ &= \frac{(x+y+z)^3}{2} + \frac{8}{x+y+z} - 3(x+y+z) \geq 4(x+y+z) - 3(x+y+z) = x+y+z \end{aligned}$$

Từ đây ta sẽ có: $P \geq \frac{1}{2} \ln(x+y+z) - \frac{x+y+z}{2}$

Xét hàm trên $\sqrt{3(xy+yz+zx)} \leq x+y+z \leq 2-xyz \Rightarrow \sqrt{3} \leq x+y+z \leq 2$

Suy ra min $P = \frac{1}{2} \ln 2 - 1$ dấu bằng khi $\begin{cases} x=y=1 \\ z=0 \end{cases}$ (và các hoán vị)

Câu 32: Cho các số thực $a, b, c \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \frac{9(ab)^{\frac{2}{3}}}{a^2+3b^2+c^2+1} + \frac{16b\sqrt{c}}{2a^2+4b^2+c^2+1} - \frac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4}$$

Bài giải

Áp dụng Bất am_gm và cauchy_schwarz ta có $16b\sqrt{c} \leq (2b+c+1)^2$ và $9(ab)^{\frac{2}{3}} \leq (a+b+1)^2$

Do đó $P \leq \frac{(a+b+1)^2}{a^2+3b^2+c^2+1} + \frac{(2b+c+1)^2}{2a^2+4b^2+c^2+1} - \frac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4}$

Mặt khác ta có $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{(a+b+1)^2}{a^2+3b^2+c^2+1}$

$$\text{Và } \frac{(2b+c+1)^2}{2a^2+4b^2+c^2+1} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{2b^2} + \frac{1}{a^2+1}$$

Do đó $P \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} - \frac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4}$ mặt khác với mọi a,b dương và $ab \leq 1$ ta có:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{ab+1} \Leftrightarrow \frac{(ab-1)(a-b)^2}{(ab+1)(a^2+1)(b^2+1)} \leq 0 \text{ đúng. ngoài ra lưu ý rằng:}$$

$18ab-9a-9b+4 = 2(3a-2)(3b-2) + (3a-2) + (3b-2)$ do đó:

$$\frac{6a+6b-8}{18ab-9a-9b+4} = \frac{\frac{2}{3a-2} + \frac{2}{3b-2}}{\frac{1}{3a-2} + \frac{1}{3b-2} + 2} \geq \frac{\frac{4}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)}}}{\frac{2}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)}} + 2} = \frac{2}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)} + 1} \text{ từ các đánh giá trên}$$

suy ra $P \leq \frac{5}{2} + \frac{2}{ab+1} - \frac{2}{\sqrt{(3a-2)(3b-2)} + 1}$ tiếp theo từ $(a-1)(a-2) \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 3a-2$ tương tự $b^2 \geq 3b-2$

nhân vế vế suy ra $ab \geq \sqrt{(3a-2)(3b-2)}$ từ đây kết luận $P \leq \frac{5}{2}$ dấu= khi a=b=c=1

Câu 33: Cho $x, y, z \in [0; 2]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{1}{y^2 + z^2 + 2} + \frac{1}{z^2 + x^2 + 2} + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Bài giải

Ta có $x^2 + y^2 + 2 = (x^2 + 1) + (y^2 + 1) \geq 2(x + y), \dots; \sqrt{xy} \leq \frac{xy + 1}{2}, \dots$

$$\text{Nên } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + xy + yz + zx + 3 \right].$$

Ta có $(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9xyz$

$$\Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} &= \frac{(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)} = \frac{27}{8(xy+yz+zx)} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{27}{8(xy+yz+zx)} + xy + yz + zx + \frac{27}{8} \right]$$

Đặt $t = xy + yz + zx$. Do $x, y, z \in [0; 2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \frac{4+xyz}{2} \geq 2 \Rightarrow t \geq 2$

Mặt khác: $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3 \Rightarrow t \leq 3$. Vậy $t \in [2; 3]$

Ta có $P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{27}{8t} + t + \frac{27}{8} \right] = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t \in [0; 2]$ ta có $f'(t) = \frac{1}{2} \left[t - \frac{27}{8t^2} \right] = \frac{8t^3 - 27}{16t^2} > 0 \forall t \in [2; 3]$ nên hàm số $f(t)$ đồng

biến trên $[2; 3] \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{15}{4}$.

Do $P \leq f(t) \Rightarrow P \leq \frac{15}{4}$. Có $P = \frac{15}{4}$ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Câu 34: Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Bài giải

Do vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó:

$$\text{Đặt } S = a + b + c + 1 \Rightarrow b + c + 1 = S - a \geq S - c; a + c + 1 \geq S - b; a + b + 1 \geq S - c$$

$$\text{Ta có } (1-a)(1-b)(1-a-b) \leq 1 \Leftrightarrow (1-a-b+ab)(1-a-b) \leq 1 \Leftrightarrow b(a+b)(a-1) - a^2 \leq 0 \text{ (đúng)}$$

$$\text{Mà } (1-a)(1-b)(S-c) \leq 1 \Rightarrow (1-a)(1-b) \leq \frac{1}{S-c} \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-c}{S-c}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{a}{S-c} + \frac{b}{S-c} + \frac{c}{S-c} + \frac{1-c}{S-c} \leq \frac{S-c}{S-c} = 1$$

Câu 35: Cho các số thực a, b, c thuộc $[4; 6]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 15$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 30abc + 180}{ab + bc + ca} - \frac{1}{20}abc$$

Bài giải

$$\text{Ta có } (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 30abc$$

$$\text{Do đó } P = \frac{(ab + bc + ca)^2 + 180}{ab + bc + ca} - \frac{1}{20}abc. \text{ Đặt } t = ab + bc + ca$$

$$\text{Ta có } (a-4)(b-4)(c-4) \geq 0 \Leftrightarrow abc + 16(a + b + c) - 4(ab + bc + ca) - 64 \geq 0 \Leftrightarrow abc \geq 4t - 176$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{t^2 + 180}{t} - \frac{1}{4}t + \frac{44}{5} = \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5}$$

$$\text{Ta có } (a-6)(b-6)(c-6) \leq 0 \Leftrightarrow abc + 36(a + b + c) - 6(ab + bc + ca) - 216 \leq 0 \Leftrightarrow abc \leq 6t - 324$$

$$\text{Kết hợp } \begin{cases} abc \geq 4t - 176 \\ abc \leq 6t - 324 \end{cases} \Rightarrow 4t - 176 \leq 6t - 324 \Leftrightarrow t \geq 74$$

$$\text{Ta có } 15^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 15^2 \geq 3t \Leftrightarrow t \leq 75 \Rightarrow t \in [74; 75]$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{5}t + \frac{180}{t} + \frac{44}{5} \text{ với } t \in [74; 75] \Rightarrow f'(t) = \frac{4}{5} - \frac{180}{t^2} = \frac{4t^2 - 900}{5t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 15$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(15) = 35 \text{ khi } a = 4, b = 5, c = 6$$

Câu 36: Cho $x, y, z \in [0; 2]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{1}{y^2 + z^2 + 2} + \frac{1}{z^2 + x^2 + 2} + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Bài giải

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + 2 = (x^2 + 1) + (y^2 + 1) \geq 2(x + y), \dots; \sqrt{xy} \leq \frac{xy + 1}{2}, \dots$$

$$\text{Nên } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + xy + yz + zx + 3 \right]$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 9xyz$$

$$\Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \geq \frac{8}{9}(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} &= \frac{(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy + yz + zx)} = \frac{27}{8(xy + yz + zx)} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{27}{8(xy + yz + zx)} + xy + yz + zx + \frac{27}{8} \right]$$

$$\text{Đặt } t = xy + yz + zx$$

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \frac{4 + xyz}{2} \geq 2 \Rightarrow t \geq 2$$

$$\text{Mặt khác: } xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x + y + z)^3 = 3 \Rightarrow t \leq 3. \text{ Vậy } t \in [2; 3]$$

$$\text{Ta có } P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{27}{8t} + t + \frac{27}{8} \right] = f(t)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) \text{ với } t \in [2; 3] \text{ ta có } f'(t) = \frac{1}{2} \left[t - \frac{27}{8t^2} \right] = \frac{8t^3 - 27}{16t^2} > 0 \forall t \in [2; 3] \text{ nên hàm số } f(t) \text{ đồng biến}$$

$$\text{trên } [2; 3]. \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{15}{4}$$

$$\text{Do } P \leq f(t) \Rightarrow P \leq \frac{15}{4}. \text{ Có } P = \frac{15}{4} \text{ khi } x = y = z = 1$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{15}{4} \text{ đạt được khi } x = y = z = 1$$

Câu 36: Cho 3 số thực x, y, z thuộc đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $T = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{xyz}$

Bài giải

Ta có $T = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{xyz} = \frac{z}{8(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 + y^2}{xyz} - \frac{1}{xyz}$

Với x, y, z thuộc đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $x + y + z = 6$ ta có $\frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$

$$(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq x + y - 1 = 5 - z \Rightarrow \frac{-1}{xyz} \geq \frac{-1}{(5-z)z}$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (6-z)^2 - 2xy \leq (6-z)^2 - 2(5-z) = z^2 - 10z + 36$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{z}{8(z^2 - 10z + 36)} + \frac{2}{z} - \frac{1}{z(5-z)}$$

$$\text{Xét hiệu } \left[\frac{z}{8(z^2 - 10z + 36)} + \frac{2}{z} - \frac{1}{z(5-z)} \right] - \frac{1}{2} = \frac{(z-4)^2(4z^2 - 45z + 117)}{8z(5-z)(z^2 - 10z + 36)} \geq 0 \forall z \in [1;4]$$

Do đó $T \geq \frac{1}{2}$. Với $x = y = 1, z = 4 \Rightarrow T = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\text{Min} T = \frac{1}{2}$